TD1

Chargé de TD : Koutsos Adrien

Exercice 1 (Problème de l'arrêt)

Soit un modèle de calcul (un ensemble de machines $\mathfrak{M}$) ayant les propriétés suivantes :

- Les machines opèrent de l'ensemble d'entrées E vers l'ensemble de sorties S.
- On peut encoder les machines : il existe une application *codage* de l'ensemble des machines $\mathfrak{M}$ vers l'ensemble d'entrées E. ($codage(M)$ sera noté $[M]$.)
- Il existe deux machines, $Vrai$ et $Faux$, qui pour toute entrée retournent 1 et 0 respectivement.
- Il existe une machine $\perp$, qui ne s'arrête sur aucune entrée.
- Pour tous $a, b \in E$, la paire $\langle a, b\rangle \in E$. (On suppose notamment qu'il existe une machine D telle que $D(x) = \langle x, x\rangle$.)
- Pour toute machine $Q \in \mathfrak{M}$ telle que $\forall a \in E, Q(a) \in E$ et pour toute machine $P \in \mathfrak{M}$ la machine $(P \circ Q)$ telle que pour tout $a \in E$:

  $$(P \circ Q)(a) = P(Q(a))$$

  appartient à $\mathfrak{M}$.
- Soient P, Q, R des machines de $\mathfrak{M}$, $b \in S$, alors la machine N telle que pour tout $a \in E$:

  $$N(a) = \begin{cases} Q(a) & \text{si P(a)=b} \\ R(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

  appartient à $\mathfrak{M}$.

Montrer qu'il n'existe pas de machine H, qui, étant donnée une machine X, est telle que :

$$H(\langle [X], a\rangle) = \begin{cases} 0 & \text{si X ne s'arrête pas sur a} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 (Machines de Turing)

1) Construire une machine de Turing reconnaissant le langage des palindromes.
2) Construire une machine de Turing calculant $n+1$, pour n donné en binaire. (bit de poids fort à gauche)
3) Donner explicitement la table d'une machine de Turing qui, étant donné un mot $w \in \{0,1\}^*$, accepte w si w contient au moins autant de 0 que de 1 et rejette sinon. (On prendra soin de démontrer que la machine fait bien ce qu'elle est censée faire).

Exercice 3 (Questions existentielles)

Parmi les trois fonctions suivantes, deux sont calculables, et la problème de la calculabitilé de la dernière fonction est un (célèbre) problème ouvert. Lesquelles ?

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si Dieu existe} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
f_2(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent la sous-séquence } 1^n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
f_3(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent} \\ & \text{une sous-séquence maximale de 1 de longueur } n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 4 (Ruban bi-infini) [1]

On considère le modèle de calcul des machines de Turing à ruban bi-infini. On supprime le symbole spécial \$ et les contraintes associées, de sorte que les machines peuvent lire et écrire aussi loin que nécessaire vers la gauche. Une configuration initiale est un triplet (ε, q_0, w) et une configuration finale

1. Lire cet énoncé, en accepter la conclusion, passer à l'exercice suivant, y revenir une fois le reste de la feuille terminée.

un triplet (w, q, w') avec $q \in \{\mathbf{accept}, \mathbf{reject}\}$. La relation de transition est donnée comme dans le cours, en adaptant pour que la bande soit étendue par du blanc au fur et à mesure qu'on avance vers la gauche. La définition de fonction calculable est aussi adaptée naturellement, en ignorant les blancs terminaux à gauche comme à droite.

Montrer qu'une fonction est calculable dans ce modèle ssi elle est calculable par une machine de Turing.

Exercice 5 (Castors affairés)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des machines de Turing à ruban bi-infini, sur l'alphabet $\{1, B\}$, à n états (sans compter **accept** et **reject**) et qui acceptent le mot vide.

Si $M \in \mathcal{E}_n$, on note $f(M)$ le nombre de 1 inscrits sur le ruban quand, sur la donnée ε, M s'arrête en acceptant. On considère la fonction $\textsc{Score}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\textsc{Score}(n) = \max\{f(M) \mid M \in \mathcal{E}_n\}$.

1. Calculer $\textsc{Score}(2)$.
2. Montrer que $\textsc{Score}$ n'est pas calculable.
3. Montrer que $\textsc{Score}(3) \geq 6$.[2]

Exercice 6 (Deux états)

1. Montrer que toute fonction calculable est calculable par une machine de Turing sur l'alphabet $\{0, 1, B, \$\}$.
2. Montrer que toute fonction calculable est calculable par une machine de Turing à deux états (sans compter **accept** et **reject**).
3. Peut-on réaliser les deux simplifications à la fois ?

2. En fait, on a égalité.