Licence 3 – Logique et Complexité Le 14 Novembre 2011

Calcul des prédicats- Résolution et Unification

Exercice 1 [3] Donner un exemple d'une formule qui possède plusieurs modèles de Herbrand minimaux (et qui n'a donc pas de plus de petit modèle de Herbrand).

Exercice 2 [3] Soit $\mathcal{F} = \emptyset, \mathcal{P} = \{P(2)\}$, et S l'ensemble des deux formules

$$\forall x \exists y \ R(x,y)$$
$$\exists x \forall y \ R(x,y) \to \exists z \ \ (R(x,z) \wedge \neg R(z,y))$$

Construire un $\mathcal{F}'$-ensemble et une $\mathcal{F}', \mathcal{P}$-structure de Herbrand qui est un modèle de S.

Exercice 3 [4] Soit μ un mgu d'un problème d'unification P. Montrer que, pour toute substitution σ :

$$\sigma \text{ est un unificateur de } P \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \mu\sigma$$

Exercice 4 Montrer que le mgu est unique à renommage près :
Soient μ et ν deux mgus d'un problème d'unification P. Montrer qu'il y a un *renommage* ρ tel que $\mu = \nu\rho$.

Exercice 5 [3] Soit l'ensemble de clauses suivant :
(1) $\neg P(x) \vee Q(f(x), x)$
(2) $\neg P(x) \vee \neg Q(y, x) \vee R(y)$
(3) $\neg R(y) \vee \neg S(y) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(y, x)$
(4) $\neg S(y) \vee R(y)$
(5) $P(a)$
(6) $\neg R(x) \vee S(x)$
En déduire par résolution $\square$.

Exercice 6 [5] Soit S un ensemble fini de clauses, et qui possède un plus petit modèle de Herbrand $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est récursivement énumérable, c'est-à-dire que $P_{\mathcal{H}}$ est récursivement énumérable pour tous les symboles de prédicat P.

Exercice 7 Montrer, qu'en général la preuve la plus courte par résolution négative est exponentiellement plus longue que la preuve la plus courte par résolution :
Donner une famille $(S_n)_{n\geq 1}$ d'ensembles finis de clauses universelles, telle que toute réfutation de S_n par résolution négative a la longueur $2^n + c_1$ pour une constante c_1, mais qu'il existe une réfutation de S_n par résolution de longueur $n + c_2$ pour une constante c_2.