Licence 3 – Logique et Complexité Le 24 Octobre 2011

Calcul des Prédicats

Exercice 1 [2] Montrer que le logarithme népérien est un homomorphisme de $\mathcal{F}$-algèbre de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathcal{F} = \{0(0);\ h(1);\ f(2)\}$. On précisera les structures de F-algèbres de $]0,+\infty[$ et de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [4] Soit $\mathcal{F} = \{0(0);\ f(2)\}$. Donner une opération $f_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ telle que l'application qui à tout entier associe son opposé soit un morphisme de $(\mathbb{Z}, 0, *)$ dans $(\mathbb{Z}, 0, f_{\mathbb{Z}})$ (considérés comme $\mathcal{F}$-algèbres).

Exercice 3 [5] On suppose que $\mathcal{F} = \{s(1)\}$

1. Donner un exemple de deux $\mathcal{F}$-algèbres finies ayant même domaine telles qu'il n'existe aucun morphisme de l'une dans l'autre.
2. Donner un exemple de deux $\mathcal{F}$-algèbres finies distinctes, de même domaine et isomorphes.
3. Lorsque D a 1,2,3 éléments, combien y a-t-il de $\mathcal{F}$-algèbres de domaine D, à isomorphisme près ?

Exercice 4 [4] L'algèbre des entiers naturels $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}, \mathcal{P} = \{\geq (2)\}$ satisfait l'expression :

$$\begin{array}{ll} & \forall x. \geq (x, 0) \\ \wedge & \forall x. \geq (x, x) \\ \wedge & \forall x, y. \geq (x, y) \rightarrow \geq (s(x), s(y)) \end{array}$$

Donner une autre interprétation de $\geq$ (mais toujours sur les entiers naturels avec l'interprétation usuelle de s (sucesseur) et 0).
Quels sont tous les modèles de cette formule, si l'on fixe seulement l'algèbre des entiers naturels comme $\mathcal{F}$-algèbre sous-jacente à la structure ?

Exercice 5 [2] Montrer que les formules $\exists x.\forall y.P(x, y)$ et $\forall y.\exists x.P(x, y)$ ne sont pas logiquement équivalentes. L'une d'elles est une conséquence logique de l'autre. Laquelle ?

Exercice 6 [2] Mêmes questions que dans l'exercice précédent, mais avec les formules $\forall x.(P(x) \vee Q(x))$ et $(\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$.

Exercice 7 [7]

1. Donner deux structures élémentairement équivalentes et non isomorphes.
2. Même question, en supposant de plus que $\mathcal{P}$ contient un prédicat interprété comme l'égalité.
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est vide, $\mathcal{P} = \{=\}$, alors deux structures de domaine dénombrable qui sont élémentairement équivalentes et satisfont les axiomes de l'égalité sont isomorphes.
4. On suppose que $\mathcal{F} \subseteq \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} \subseteq \{=\}$. Donner deux structures élémentairement équivalentes, non isomorphes, dénombrables et dans lesquelles $=$ est interprété comme l'égalité.

Exercice 8 [5] Donner un exemple de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ et d' une formule ϕ qui est satisfaisable mais n'a pas de modèle dont le domaine est fini.

Exercice 9 [5] Donner un ensemble de formule satisfaisable qui n'a pas de modèle fini et qui n'a pas de modèle de Herbrand.