**Licence 3 – Logique et Complexité** Le 17 Octobre 2011

# TD 5 : Calcul des Séquents- Calcul des Prédicats

**Exercice 1** [1] Donner une preuve du tiers exclu $\vdash \phi \vee \neg\phi$.

**Exercice 2 Théorème de la déduction**
Montrer sans utiliser le théorème de complétude du calcul des séquents que $\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi$ est prouvable en $\mathbf{LK}_0^-$ssi $\Gamma \vdash \Delta, \phi \rightarrow \psi$ est prouvable.

**Exercice 3** [3] Donner des règles d'introduction à gauche et à droite de $\leftrightarrow$, dans le style de $\mathbf{LK}_0^-$.

**Exercice 4** [6] Montrer qu'il existe une preuve de taille polynômiale (en $n$)du séquent

$$\vdash \neg A_1 \wedge A_2,\ \neg A_2 \wedge A_3,\ \ldots\ , \neg A_{n-1} \wedge A_n,\ \neg A_n \wedge A_1,\ A_1 \wedge \ldots \wedge A_n,\ \neg A_1 \wedge \ldots \neg A_n$$

**Exercice 5** [5] **Calcul des séquents et déduction naturelle**
Dans cet exercice, on s'interdit d'utiliser les théorèmes de complétude : on veut montrer une méthode effective de traduction d'un système de preuve dans l'autre. Soit $\mathbf{LK}_0$le calcul des séquents avec la règle de coupure.

1. Montrer que, si le jugement $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en $\mathbf{NK}_0$, alors le séquent $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans $\mathbf{LK}_0$.
2. Montrer que $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ (où $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont des formules) est prouvable en $\mathbf{LK}_0$ssi $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash \perp$ est prouvable en $\mathbf{LK}_0$.
3. Montrer que si $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ est prouvable dans $\mathbf{LK}_0$, alors $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash \perp$ est prouvable dans $\mathbf{NK}_0$.
4. Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ est prouvable dans $\mathbf{LK}_0$, alors $\Gamma \vdash \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ est prouvable dans $\mathbf{NK}_0$.

**Exercice 6** [5] On suppose que $\mathcal{F} = \{s(1)\}$.

1. Donner un exemple de deux $\mathcal{F}$-algèbres finies ayant mˆeme domaine telles qu'il n'existe aucun morphisme de l'une dans l'autre.
2. Donner un exemple de deux F-alg‘ebres finies distinctes, de mˆeme domaine et isomorphes.
3. Lorsque $D$ a $1, 2, 3$ éléments, combien y a-t-il de $\mathcal{F}$-algèbres de domaine D, à isomorphisme près ?