Licence 3 – Logique et Complexité Le 10 Octobre 2011

Calcul Propositionnel (4)

Exercice 1 [6] Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles fini. Donner un ensemble de clauses E qui est insatisfaisable et tel qu'il existe une preuve de $\perp$ de taille exponentielle en $|E|$ et ne contenant aucune redondance (i.e. deux noeuds distincts de l'arbre de preuve qui ne sont pas des feuilles sont étiquetés par des formules distinctes).
En fait, on peut généraliser ce résultat (mais il n'est pas demandé de le montrer) : il existe des ensembles de clauses insatisfaisables dont *aucune* preuve de contradiction n'est de taille polynômiale.

Exercice 2 [3] On considère ici un raffinement de la résolution. On définit un ordre sur les littéraux de la manière suivante : $L > L'$ si la variable propositionnelle de L a un indice strictement plus grand que la variable propositionnelle de L'. (autrement dit, on étend l'ordre sur les variables propositionnelles aux littéraux). On restreint alors l'application de la résolution binaire

$$\frac{P \vee C \qquad\qquad \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

au cas où P est un littéral maximal de $P \vee C$ et $\neg P$ est un littéral maximal de $\neg P \vee C'$. De même, la règle de factorisation

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$

est restreinte au cas où L est maximal dans $L \vee C$.
Montrer qu'avec ces restrictions, l'ensemble de règles d'inférence est encore réfutationnellement complet.

Exercice 3 [5] Donner un algorithme polynômial qui permet, étant donné un ensemble fini de clauses de Horn, de dire s'il est satisfaisable ou non.

Exercice 4 [3] On considère le système d'inférence constitué de l'unique règle :

$$\frac{P \vee P \ldots \vee P \vee C \qquad\qquad \neg P \vee \ldots \vee \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

Montrer que cette règle est (à elle seule) réfutationellement complète.

Exercice 5 [3] On dira qu'une clause C *subsume* une clause C' si $C \models C'$.
On considère la stratégie de résolution+factorisation suivante : on n'applique une règle d'inférence que lorsqu'aucune des prémisses n'est subsumée par une clause différente ancêtre dans l'arbre de preuve.
Montrer que cette stratégie est réfutationnellement complète.

Exercice 6 [6] Une clause est *négative* si elle ne contient que des littéraux négatifs. On se propose d'étudier la stratégie suivante de résolution, appelée *stratégie négative* : l'application de la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisse est négative. On notera $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit E un ensemble de clauses tel que toute clause de E contient au moins un littéral positif. Montrer que E est satisfaisable.
2. Soit $E = \{\neg P \vee Q, P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Montrer que $E \vdash_\neg \perp$ (exhiber une preuve).
3. Si I, J sont des interprétations partielles, on note $I >_{lex} J$ lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que
   (a) pour tout $j < k$, P_j est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_j) = J(P_j)$

(b) P_k est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$.

On note aussi $I \leq J$ l'ordre de prolongement des interprétations partielles.

Montrer que $\geq_{lex}$ est un ordre sur les interprétations partielles et que, pour toutes interprétations partielles, $I \leq J$ ou $J \leq I$ ou $I \leq_{lex} J$ ou $J \leq_{lex} I$

4. Soit A l'arbre sémantique d'un ensemble E de clauses. On suppose que A est fini, non vide et que toutes ses feuilles sont des noeuds d'échec. Montrer qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\geq_{lex}$ qui soit un noeud d'échec et ne falsifie aucune clause négative de E.
5. Montrer la complétude réfutationnelle de $\vdash_{\neg}$ par la méthode des arbres sémantiques