Licence 3 – Logique et Complexité Le 3 Octobre 2011

Calcul Propositionnel (3)

L'exercice suivant montre que les formes clausales peuvent inévitablement conduire à une croissance exponentielle de la formule.

Exercice 1 [6] Si $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, on note $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale de ϕ.

1. Donner un exemple d'une famille de formules ϕ_n telles que $\lim_{n\to+\infty} |\phi_n| = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau(\phi_n)}{\sqrt{2^{|\phi_n|}}} > 0$.
2. Montrer que, pour toute formule ϕ, $\tau(\phi) < |\phi| \times 2^{\frac{|\phi|+5}{2}}$.

Exercice 2 [6] Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de variables propositionnelles, de cardinal n. On appelle 2-clause toute clause contenant au plus deux littéraux.

1. Montrer que, si E est ensemble de 2-clauses insatisfaisable, toute preuve sans boucle de $\perp$ est de longueur polynômiale en n
2. Montrer par contre que la taille peut être exponentielle : donner un exemple d'ensemble de 2-clauses E tel que E est insatisfaisable et une preuve sans boucle de $\perp$ à partir de E dont la taille est exponentielle en n.
3. Donner un algorithme polynômial en n pour décider de la satisfaisabilité d'un ensemble de 2-clauses.

Exercice 3 [3] Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 4 [6] Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles fini. Donner un ensemble de clauses E qui est insatisfaisable et tel qu'il existe une preuve de $\perp$ de taille exponentielle en $|E|$ et ne contenant aucune redondance (i.e. deux noeuds distincts de l'arbre de preuve qui ne sont pas des feuilles sont étiquetés par des formules distinctes).
En fait, on peut généraliser ce résultat (mais il n'est pas demandé de le montrer) : il existe des ensembles de clauses insatisfaisables dont *aucune* preuve de contradiction n'est de taille polynômiale.

Exercice 5 [3] On considère ici un raffinement de la résolution. On définit un ordre sur les littéraux de la manière suivante : $L > L'$ si la variable propositionnelle de L a un indice strictement plus grand que la variable propositionnelle de L'. (autrement dit, on étend l'ordre sur les variables propositionnelles aux littéraux). On restreint alors l'application de la résolution binaire

$$\frac{P \vee C \qquad\qquad \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

au cas où P est un littéral maximal de $P \vee C$ et $\neg P$ est un littéral maximal de $\neg P \vee C'$. De même, la règle de factorisation

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$

est restreinte au cas où L est maximal dans $L \vee C$.
Montrer qu'avec ces restrictions, l'ensemble de règles d'inférence est encore réfutationnellement complet.

Exercice 6 [7] On rappelle qu'*clause de Horn* est une clause qui contient au plus un littéral positif. On considère ici un autre raffinement de la résolution : la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisse au moins est dans E (l'ensemble de clauses initial). Cette stratégie est dite *input*.

1. Montrer que cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète en général.
2. Montrer qu'elle est réfutationnellement complète lorsque E est un ensemble de clauses de Horn

Exercice 7 [5] Donner un algorithme polynômial qui permet, étant donné un ensemble fini de clauses de Horn, de dire s'il est satisfaisable ou non.