Licence 3 – Logique et Complexité Le 26 Septembre 2011

Calcul Propositionnel (2)

Exercice 1 [6] **Théorème de compacité**
$\{0,1\}$ est muni de la topologie pour laquelle tout sous-ensemble est un ouvert. $\{0,1\}$ muni de cette topologie est ainsi un compact. L'ensemble $\{0,1\}^A$ des interprétations des formules propositionnelles construites sur A est alors muni de la topologie produit : les ouverts sont les unions de $\prod_{i\in I}\theta_i$ tel que : (1) θ_i est ouvert et (2) $\left\{i \in I \mid \theta_i \neq \{0,1\}\right\}$ est fini. Tout produit de compacts étant compact (ce qui est admis), l'espace $\mathcal{I}$ de toutes les interprétations est ainsi un compact.

1. Montrer que, pour toute formule ϕ, l'ensemble des interprétations qui satisfont ϕ est un fermé de $\mathcal{I}$.
2. En déduire que tout ensemble de formules insatisfaisable contient un sous-ensemble fini insatisfaisable.

Exercice 2 [5] **Théorème d'interpolation**
Soient ϕ, ψ telles que $\phi \models \psi$. Montrer que il existe une formule θ telle que $\phi \models \theta$, $\theta \models \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ, apparaissent aussi dans ϕ et dans ψ.

Exercice 3 [6] Donner un exemple d'un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini et dénombrable.

Exercice 4 Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 5 [4] Donner un exemple de formule ayant deux formes clausales distinctes.

Exercice 6 [6] Si $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, on note $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale de ϕ. Donner un exemple d'une famille de formules ϕ_n telles que $\lim_{n\to+\infty} |\phi_n| = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau(\phi_n)}{2^{|\phi_n|}} > 0$.

Exercice 7 [2] Construire l'arbre sémantique associé à
$E = \{\neg P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_3\}$ E est-il satisfaisable ? Pourquoi ?

Exercice 8 [2] Montrer comment les règles de résolution et factorisation binaire permettent d'obtenir la clause $\perp$ à partir de l'ensemble de clauses $E = \{P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}$.

Exercice 9 [2] Montrer qu'une même clause peut avoir plusieurs arbres de preuves distincts (à permutation près des fils).

Exercice 10 [6] Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de variables propositionnelles, de cardinal n. On appelle 2-clause toute clause contenant au plus deux littéraux.

1. Montrer que, si E est ensemble de 2-clauses insatisfaisable, toute preuve sans boucle de $\perp$ est de longueur polynômiale en n
2. Montrer par contre que la taille peut être exponentielle : donner un exemple d'ensemble de 2-clauses E tel que E est insatisfaisable et une preuve sans boucle de $\perp$ à partir de E dont la taille est exponentielle en n.
3. Donner un algorithme polynômial en n pour décider de la satisfaisabilité d'un ensemble de 2-clauses.