Licence 3 – Logique et Complexitè Le 28 Novembre 2011

Calculabilitè - Machine de Turing (2)

Exercice 1 [Castors affairés] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des machines de Turing à ruban bi-infini, sur l'alphabet $\{1, B\}$, à n états (+accept,reject) qui acceptent le mot vide. Si $M \in \mathcal{E}_n$, on note $f(M)$ le nombre de 1 inscrits sur le ruban quand, sur la donnée ϵ, M s'arrête en acceptant. On considère la fonction Score de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\mathsf{Score}(n) = \max\{f(M) \mid M \in \mathcal{E}_n\}$.

1. Calculer $\mathsf{Score}(2)$.
2. Montrer que, pour $n \geq 4$, $\mathsf{Score}(n) > 2n$
3. Montrer que Score n'est pas calculable.
4. Montrer que $\mathsf{Score}(3) \geq 6$. (En fait $= 6$).

Exercice 2 [3] Montrer que la classe des langages récursifs est close par les opérations Booléennes : intersection, union, complémentaire.

Exercice 3 [4] Soit f une fonction calculable. Montrer que l'image de f est un langage récursivement énumérable.

Exercice 4 On considère le modèle de calcul des machines de Turing à ruban bi-infini : la définition est la même que celle donne en cours, excepté qu'il n'y a pas de symbole spécial \$ (et donc pas d'hypothèse sur les règles correspondantes). Une configuration initiale est un triplet (ϵ, q_0, w). Une configuration finale est un triplet (w, q, w') avec $q \in \{\mathsf{accept}, \mathsf{reject}\}$. La relation de transition est le même que celle donnée dans le cours, excepté que, lors d'un mouvement gauche, $w_1 = B$ lorsque $w = c$. La définition de fonction calculable est la même que pour les machines de Turing avec un ruban infini d'un seul côté : on ignore les blancs dans le résultat. Montrer qu'une fonction est calculable dans ce modèle si et seulement si elle est calculable par une machine de Turing.

Exercice 5 [4] Montrer que la classe des langages récursivement énumérables est close par union et intersection. (Mais pas par complémentaire, comme le montre l'exemple du langage universel).

Exercice 6 [5] Montrer que L est un langage récursivement énumérable, si et seulement s'il existe une machine de Turing M à deux rubans et un état q_e de M tels que,

$$(\epsilon, q_0, \$, \$) \vdash_M^* (\epsilon, q_e, \$w', \$w) \text{ si et seulement si } w \in L.$$

Exercice 7 [5] Montrer que, si f est calculable et L est récursivement énumérable, alors $f(L)$ est récursivement énumérable.