Licence 3 – Logique et Complexité

Calcul Propositionnel (1)

Exercice 1 [1]

1. Vérifier que la définition d'ensemble des formules du calcul propositionnel, donnée en cours a bien un sens, c'est à dire qu'il existe bien un (et un seul) plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) qui satisfait les conditions de la définition.
2. Soit $R \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. Montrer que si $\bot \in R, \top \in R, \mathcal{P} \subseteq R$ et que $\forall \phi, \psi \in R$, $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \to \psi \in R$, alors $R = \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$.

Exercice 2 [1] Donner l'ensemble de tous les modèles de la formule
$\phi \stackrel{def}{=} ((P \to Q) \vee (\neg P \to \neg Q)) \wedge (Q \wedge R \to \neg P)$ lorsque $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$.

Exercice 3 [1] Montrer que :

1. ϕ est insatisfaisable si et seulement si $\neg\phi$ est valide
2. $\phi \models \psi$ si et seulement si $\phi \to \psi$ est valide.

Exercice 4 [5]

1. Montrer que, lorsque $\mathcal{P}$ est fini, pour tout ensemble d'interprétations S, il existe un ensemble de formules E tel que S est exactement l'ensemble des modèles de E.
2. Montrer que ce résultat est faux lorsque $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 5 [4] Montrer que, si $\mathcal{P}$ est fini, alors dans tout ensemble de formules fini de cardinal assez grand (on précisera cette borne), il existe deux formules logiquement équivalentes (i.e. qui ont même ensemble de modèles).

Exercice 6 [6] Donner un exemple d'un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini et dénombrable.

Exercice 7 [2] Montrer que $\vee, \wedge, \neg$ sont définissables à l'aide du seul connecteur $\to$ et de la constante $\bot$. On dit alors que l'ensemble $\{\to, \bot\}$ est *fonctionnellement complet*.

Exercice 8 [4] Donner un connecteur logique binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

Exercice 9 [5] Montrer que $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet.

Exercice 10 [5] **Théorème d'interpolation**
Soient ϕ, ψ telles que $\phi \models \psi$. Montrer que il existe une formule θ telle que $\phi \models \theta$, $\theta \models \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ, apparaissent aussi dans ϕ et dans ψ.

Exercice 11 [6] **Théorème de compacité**
$\{0, 1\}$ est muni de la topologie pour laquelle tout sous-ensemble est un ouvert. $\{0, 1\}$ muni de cette topologie est ainsi un compact. L'ensemble $\{0, 1\}^A$ des interprétations des formules propositionnelles construites sur A est alors muni de la topologie produit : les ouverts sont les unions de produits des ouverts de $\{0, 1\}$. Tout produit de compacts étant compact (ce qui est admis), l'espace $\mathcal{I}$ de toutes les interprétations est ainsi un compact.

1. Montrer que, pour toute formule ϕ, l'ensemble des interprétations qui satisfont ϕ est un fermé de $\mathcal{I}$.

2. En déduire que tout ensemble de formules insatisfaisable contient un sous-ensemble fini insatisfaisable.

Exercice 12 [3] Plus généralement, les connecteurs logiques peuvent être vus comme des fonctions Booléennes. Si F est un ensemble de fonctions Booléennes, on note $A(F)$ l'ensemble de toutes les fonctions Booléennes obtenues à l'aide des fonctions de F et de la composition et des projections (fonctions $\pi_n^i(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{def}{=} x_i$).
Pour tout entier $n \geq 1$ on note d_n (resp. c_n) la fonction Booléenne à n arguments qui renvoie 0 (resp. 1) si et seulement si tous ses arguments valent 0 (resp. 1).

1. Montrer que, pour tous $n, m, k \geq 2$, $A(c_n, f_\neg) = A(d_m, f_\neg)$ contient toutes les fonctions Booléennes à k arguments.
2. Montrer que $f_\neg$ n'est pas dans $A(f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow)$