TD6 22 octobre 2015

Calculabilité

David Baelde

Exercice 1
Dire si les problèmes suivants sont indécidables :

1. **Donnée :** une machine de Turing M qui s'arrête sur toute entrée.
   Question : M calcule en temps polynomial.
2. **Donnée :** deux machines M, M' qui calculent en temps polynomial.
   Question : $L(M) \cap L(M') = \emptyset$.

Exercice 2
Montrer que l'addition, la multiplication et la division par deux sont récursives primitives.

Exercice 3 (Schéma de minimisation bornée)
Étant données ψ et ξ récursives primitives, on définit

$$\phi(\vec{n}) = \min_{m \leq \psi(\vec{n})} (\xi(\vec{n}, m) = 0)$$

Montrer que ϕ est récursive primitive – on pourra renvoyer une valeur quelconque quand le minimum n'est pas atteint.

Exercice 4 (Codage des paires)
Montrer qu'il existe $J : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, et $K, L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

1. J, K et L sont récursives primitives,
2. J est une bijection et
3. on a $K(J(x, y)) = x$ et $L(J(x, y)) = y$ pour tous x, y.

Exercice 5 (Itération)
Soit g, h des fonctions primitives récursives, montrer que la fonction $It(g, h)$ définie comme $It(g, h)(n, x) =$

```
r = g(x)
for i = 0 to n do
  r = h(r,i);
done
return r
```

est primitive récursive.

Exercice 6
Montrer que la classe des fonctions primitives récursive est la plus petite classe contenant les fonctions de base et close par composition et itération.

Exercice 7 (Fibonacci)
Montrer que la fonction définie comme suit est récursive primitive :

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 1 \\ f(1) & = & 1 \\ f(n+2) & = & f(n+1) + f(n) \end{array}$$

Exercice 8
Soit f une fonction récursive à un argument. Montrer que le graphe de f est primitif récursif ssi f peut s'écire sous la forme

$$f(x) = \mu_z\{g(x, z) = 0\}$$

avec g primitive récursive.

Exercice 9
Montrer que le problème suivant est indécidable :
Donnée: f une fonction primitive récursive;
Question: f est elle identiquement nulle ?