TD5

Chargé de TD : Lucca Hirschi
lucca.hirschi@lsv.ens-cachan.fr
http://www.lsv.ens-cachan.fr/~hirschi

Exercice 1 (Carreleur)
On se donne un ensemble fini $C = \{W, P, R, G, B, \ldots\}$ de *couleurs*. Un *domino* est un quadruplet de couleurs $(c_L, c_T, c_R, c_B) \in C^4$, que l'on peut représenter graphiquement comme au tableau. Etant donné un ensemble fini D de dominos et un domino distingué $d_0 \in D$, un *pavage* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par D est une application de $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto D$ telle que :
— $p(0,0) = d_0$;
— Si $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $p(i,j) = (c_L^{i,j}, c_T^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j})$, et $p(i,j+1) = (c_L^{i,j+1}, c_T^{i,j+1}, c_R^{i,j+1}, c_B^{i,j+1})$ alors $c_T^{i,j} = c_B^{i,j+1}$;
— Si $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $p(i,j) = (c_L^{i,j}, c_T^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j})$, et $p(i+1,j) = (c_L^{i+1,j}, c_T^{i+1,j}, c_R^{i+1,j}, c_B^{i+1,j})$ alors $c_R^{i,j} = c_L^{i+1,j}$.

On note r la rotation des dominos : $r(c_L, c_T, c_R, c_B) = (c_T, c_R, c_B, c_L)$. Un *pavage sans orientation* de S par D est un pavage de S par $D \cup r(D) \cup r^2(D) \cup r^3(D)$.

Montrer que le problème suivant est indécidable ou montrer qu'il est décidable :

1. **Donnée :** un ensemble fini de couleurs C, un ensemble fini de dominos D sur C et un domino $d_0 \in D$.
   Question : Existe-il un pavage de $\mathbb{N}^2$ par D ?

Exercice 2 (Mindstorms)
Nous appelerons *fonction affine* une application $f_{M,V}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ donnée par une matrice $n \times n$ M à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et un vecteur $V \in \mathbb{Q}^n$.

$$f_{M,V}(X) = MX + V$$

Étant donné un ensemble S d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, une *trajectoire (finie, resp. infinie)* d'un point $A \in \mathbb{R}^n$ sous l'action de S est une suite (finie, resp. infinie) $A_i, i \in I$ (où $I = \{0, ...m\}$, resp. $I = \mathbb{N}$) telle que $A_0 = A$ et, pour tout i, si $i+1 \in I$, il existe $f \in S$ telle que $f(A_i) = A_{i+1}$. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Une trajectoire de A sous l'action de S *passe par* E s'il existe une trajectoire (finie) de $A, A_1 \cdots A_m$, telle que $A_m \in E$.

Cet exercice s'intéresse au problème de savoir si on peut contrôler un système pour atteindre un but donné (par exemple : étant données des actions élémentaires d'un robot, peut-on le programmer de manière à trouver une trajectoire allant d'un point à un autre).

Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : Un ensemble fini S de fonctions affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et deux vecteurs $A, B \in \mathbb{Q}^2$

Question : Existe-t-il une trajectoire de A qui passe par B ?

Exercice 3 (A court de PCP)

Montrer que PCP reste indécidable si on se restreint à des mot de longueur au plus 2. Qu'en est-il si on se retreint à des mots de longueur exactement 2 ?

Exercice 4 (Systèmes de réécriture)

Un système de réécriture de mots sur l'alphabet Σ est donné par un ensemble fini de paires $(u, u') \in \Sigma^* \times \Sigma^*$. La relation de réécriture associée est $\to_R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ définie par

$$\omega \to_R w' \text{ ssi } \exists (u, u') \in R.\ \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*.\ w = w_1 u w_2 \wedge v = w_1 u' w_2$$

La relation de réduction $\to_R^*$ est la clôture réflexive transitive de la relation de réécriture. Par exemple, avec

$$R = \{(c, abaca), (c, bcbabab), (aca, d), (bcb, d), (ada, d), (bdb, d)\}$$

on a $c \to_R^* d$:

$$\begin{aligned} c &\to_R abaca \to_R ababcbababa \to_R abababacabababa \to_R abababdbababa \\ &\to_R ababadababa \to_R ababdbaba \to_R abadaba \to_R abdba \to_R ada \to_R d \end{aligned}$$

Montrer que le problème d'*accessibilité* est indécidable :

Donnée: un système de réécriture R et deux mots $u, v \in \Sigma^*$;

Question: est-ce que $u \to_R^* v$?