

TD4

Chargé de TD : Lucca Hirschi

lucca.hirschi@lsv.ens-cachan.fr

<http://www.lsv.ens-cachan.fr/~hirschi>

1 Retour des réductions

Exercice 1

On va continuer en partie l'exercice 6 du TD3 : il faut vous entraîner à faire des réductions (dans le bon sens ☺)!

2 Théorème de Rice

Pour certains problèmes, le théorème de Rice nous permet de prouver l'indécidabilité beaucoup plus facilement qu'une réduction. Alors, entraînons-nous.

Exercice 2

Pour tous les problèmes de l'exercice 6 du TD3 ainsi que ceux listés ci-dessous, prouvez (lorsque c'est possible) l'indécidabilité en invoquant le théorème de Rice.

7. **Donnée** : le code $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing
Question : Est-ce que $\mathcal{L}(M) = \emptyset$?
8. **Donnée** : le code $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing
Question : Est-ce que le complémentaire de $L(M)$ est récursivement énumérable ?
9. **Donnée** : le code $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing
Question : Existe-il deux mots ω_1 et ω_2 de même longueur tel que $\omega_1, \omega_2 \in L(M)$?
10. **Donnée** : le code $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing
Question : Est-ce que $\mathcal{L}(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega| \text{ est pair}\}$?

3 Récursivité

Exercice 3

Soit \mathcal{P} une propriété des langages récursivement énumérables, montrer que \mathcal{P} est elle même récursivement énumérable si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall L \in \mathcal{P}$, pour tout L' récursivement énumérable, si $L \subseteq L'$ alors $L' \in \mathcal{P}$
2. $\forall L \in \mathcal{P}$, il existe $L' \in \mathcal{P}$ fini tel que $L' \subseteq L$
3. L'ensemble des langages finis de \mathcal{P} est récursivement énumérable

4 Souvenirs Souvenirs

Exercice 4 (Fonctions calculables et langages récursifs)

Donner une fonction calculable dont l'image n'est pas récursive.

Exercice 5 (Image de langages récursivement énumérables)

Montrer que, si f est calculable et L est récursivement énumérable, alors $f(L)$ est récursivement énumérable.