TD 8

Exercice 1. Dessinez les ensembles ordonnés suivants et indiquez lesquels sont des DCPO. Justifiez.

1. $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ avec $x < y$ ssi $x = \perp$ et $y \neq \perp$.
2. $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel (*i.e.* ω pour les intimes).
3. $\mathbb{N}_\perp$ avec $x < y$ ssi $x = \perp$ et $y \in \mathbb{N}$.
4. $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec l'ordre usuel étendu par $n \leq \infty$ pour tout n (*i.e.* $\omega + 1$ pour les intimes).
5. $\{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ ($I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$).
6. $\{[x, y] \mid x, y \in I \cap \mathbb{Q}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$.

Dans les exercices qui suivent, si $(X, \leq)$ est un DCPO, un sous-ensemble $O \subseteq X$ sera dit *ouvert de Scott* (ou simplement *ouvert*) ssi:

- O est *clos vers le haut*, *i.e.* $\uparrow O = O$ où $\uparrow O = \{x \in X \mid \exists y \in O.\ y \leq x\}$.
- O est *inaccessible par le bas*, *i.e.* pour toute partie dirigée D de X, si D a un sup dans O, alors $D \cap O \neq \emptyset$.

Un sous-ensemble $F \subseteq X$ est dit *fermé* si son complémentaire est ouvert. Enfin nous admettrons qu'une fonction $f : X \to Y$ entre deux DCPO est Scott-continue ssi pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X. Tout le vocabulaire présenté ici est emprunté à la topologie, ce qui est justifié par le dernier exercice de cette feuille.

Exercice 2. On considère $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ ordonné comme précédement.

1. Montrez que $\mathbf{Bool}_\perp$ est un DCPO pointé. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbf{Bool}_\perp$? Les fermés?
3. Exhibez toutes les fonctions croissantes de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans $\mathbf{Bool}_\perp$.
4. Soit D un DCPO, et f une fonction croissante de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.
5. Dessinez $\mathbf{Bool}_\perp \times \mathbf{Bool}_\perp$ (ordre produit).
6. Enumérez les fonctions Scott continues f telle que f restreinte à $\{0, 1\}$ définit la fonction booléenne “ou”.
7. En voyant $\perp$ comme “un calcul divergent”, donnez une interprétation calculatoire de chacun des prolongements à $\mathbf{Bool}_\perp$ de la fonction booléenne “ou”.

Exercice 3. Soient X, Y deux DCPO. Montrez que la fonction $App : ([X \to Y] \times X) \to Y$ qui à (f, x) associe $f(x)$ est Scott-continue ($[X \to Y]$ désigne l'ensemble des fonctions continues de X dans Y).

Exercice 4. Soit $I = \mathbb{R}$ et $J = \{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$.

1. Montrez que J est un DCPO. Est-ce un treillis ? Complet ?

2. Donnez une fonction croissante de J dans $\mathbf{Bool}_\perp$ qui n'est pas Scott-continue.
3. Quels sont les éléments maximaux de J ?

   Bonus: Qu'est-ce que la topologie de Scott restreinte à l'ensemble de ces éléments maximaux ?
4. Soit f une fonction continue de J dans $\mathbf{Bool}_\perp$. Montrez que $f^{-1}(\{1\})$ est ouvert.
5. Soit g une fonction continue de J dans $\mathbf{Bool}_\perp$ telle que pour tout $x \in I$, $g(\{x\}) \neq \perp$. Montrez que g est constante sur I.
6. Imaginons un langage de programmation qui implémente l'arithmétique réelle de précision arbitraire en utilisant des intervalles. Comment se compotera la fonction d'égalité de ce langage ?

Exercice 5. Soit $S = \{0,1\}^\infty = \{0,1\}^* \cup \{0,1\}^\omega$, avec l'ordre préfixe.

1. Montrez que S est un DCPO. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les éléments maximaux de S ?
3. Soit f une fonction de S dans $\mathbf{Bool}_\perp$ telle que:

$$\forall s \in \{0,1\}^\omega \begin{cases} f(s) = 1 & \text{si } s \text{ contient la sous-suite } 0 \cdot 1 \\ f(s) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrez que f n'est pas Scott-continue. Intuition ?
4. On considère la fonction $v : S \to J$ définie par:

$$v(b_1 \cdot b_2 \cdots b_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} b_i, \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} b_i + 2^{-n}\right]$$
$$v(b_1 \cdot b_2 \cdots) = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} b_i\right\}$$

   A quoi sert v ? Montrez que v est Scott-continue. Est-elle injective ?
5. Soit g une fonction Scott-continue de S dans $\mathbf{Bool}_\perp$ qui est compatible avec v:

$$\forall x, y \in S, v(x) = v(y) \to g(x) = g(y)$$

   Montrez que si $\forall x \in \{0,1\}^\omega$, $g(x) \neq \perp$, alors g est constante sur 2^ω. Quel espoir pour l'arithmétique de précision arbitraire ?

Exercice 6. On considère maintenant l'ensemble ordonné $\mathbb{N}_\perp$ muni de l'ordre $\perp \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que $\mathbb{N}_\perp$ est un DCPO pointé. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbb{N}_\perp$? Les fermés ?
3. Quelles sont les fonctions Scott-continues de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans $\mathbb{N}_\perp$? De $\mathbb{N}_\perp$ dans $\mathbf{Bool}_\perp$? De $\mathbb{N}_\perp$ dans lui même ?
4. Soit D un DCPO, et f une fonction croissante de $\mathbb{N}_\perp$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.