Introduction à l'algorithmique : Paradigmes

Serge Haddad

LMF, ENS Paris-Saclay & CNRS & Inria

L3

Plan

Diviser pour régner

Diviser pour régner est une stratégie de résolution de problèmes qui consiste à :

- Diviser le problème en sous-problèmes
- Résoudre les sous-problèmes
- Combiner les réponses aux sous-problèmes pour fournir la réponse finale

Le partitionnement doit viser à :

- résoudre le moins de sous-problèmes possibles
- équilibrer la taille des sous-problèmes
- s'assurer de l'indépendance des sous-problèmes

La combinaison ne doit pas entraîner un surcoût rédhibitoire.

Tri fusion

- Diviser le tableau en deux parties approximativement égales.
- Trier les sous-tableaux.
- Fusionner les sous-tableaux triés.

Tri(T, n)
If $n = 1$ **then return** ;
$mid \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
For i **from** 1 **to** mid **do** $T_1[i] \leftarrow T[i]$;
For i **from** $mid + 1$ **to** n **do** $T_2[i - mid] \leftarrow T[i]$;
Tri(T_1, mid) ;
Tri$(T_2, n - mid)$;
Fusion$(T_1, mid, T_2, n - mid, T)$;

Fusion

- Maintenir un indice par tableau
- Recopier la plus petite valeur et incrémenter l'indice correspondant
- Recopier la partie du dernier tableau restant

Fusion(T_1, n_1, T_2, n_2, T)

$i \leftarrow 1$; $i_1 \leftarrow 1$; $i_2 \leftarrow 1$;

While $i_1 \leq n_1$ **and** $i_2 \leq n_2$ **do**

  If $T_1[i_1] < T_2[i_2]$ **then** $T[i] \leftarrow T_1[i_1]$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;

  Else $T[i] \leftarrow T_2[i_2]$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;

  $i \leftarrow i + 1$;

For j **from** i_1 **to** n_1 **do** $T[i] \leftarrow T_1[j]$; $i \leftarrow i + 1$;

For j **from** i_2 **to** n_2 **do** $T[i] \leftarrow T_2[j]$; $i \leftarrow i + 1$;

$t_{\text{Fusion}}(n_1, n_2) = \Theta(n_1 + n_2)$ $\qquad$ $t_{\text{Tri}}(n) = t_{\text{Tri}}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + t_{\text{Tri}}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \Theta(n)$

D'où :

$$\boxed{t_{\text{Tri}}(n) = \Theta(n \log(n))}$$

Complexité mémoire du tri fusion

Le tri fusion n'est pas un tri *en place*.

Les tableaux auxiliaires occupent n cellules.

En cumulant la place occupée par les appels récursifs, on obtient :

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots \sim 2n$$

On peut se limiter à un unique tableau auxiliaire
en alternant les copies d'un tableau à l'autre.

Tri fusion partiel

Toutes les modifications du tableau se font par échange.

Swap(i, j) $temp \leftarrow T[i]$; $T[i] \leftarrow T[j]$; $T[j] \leftarrow temp$

Le tri fusion partiel ordonne un *bloc* du tableau
en utilisant un bloc disjoint de même taille comme zone de travail

TriP(a, b, m) $\{[a, a+m[\cap[b, b+m[= \emptyset\}$
If $m = 1$ **then return** ;
$mid \leftarrow \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$;
For i **from** 0 **to** $m-1$ **do** Swap$(a+i, b+i)$;
TriP(b, a, mid) ;
TriP$(b+mid, a+mid, m-mid)$;
FusionP$(b, mid, b+mid, m-mid, a)$;

Fusion partielle

Identique à la fusion mais procède par échange.

$\{[a, a+n_1[\cap[b, b+n_2[= [a, a+n_1[\cap[c, c+n_1+n_2[= [c, c+n_1+n_2[\cap[b, b+n_2[= \emptyset\}$

FusionP(a, n_1, b, n_2, c)

$i \leftarrow c$; $i_1 \leftarrow a$; $i_2 \leftarrow b$;

While $i_1 < a + n_1$ **and** $i_2 < b + n_2$ **do**

  If $T[i_1] < T[i_2]$ **then** Swap(i, i_1) ; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;

  Else Swap(i, i_2) ; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;

  $i \leftarrow i + 1$;

For j **from** i_1 **to** $a + n_1 - 1$ **do** Swap(i, j) ; $i \leftarrow i + 1$;

For j **from** i_2 **to** $b + n_2 - 1$ **do** Swap(i, j) ; $i \leftarrow i + 1$;

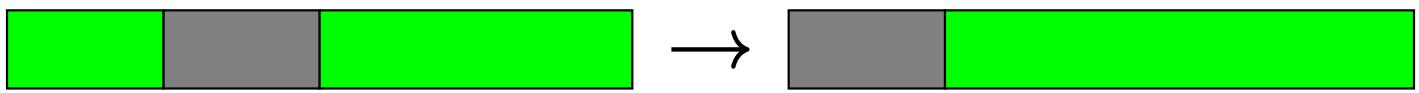
Comme précédemment :

$$t_{\mathsf{TriP}}(m) = \Theta(m \log(m))$$

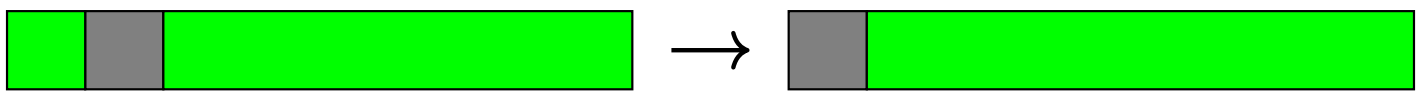
Tri fusion sur place (1)

• Le tri fusion sur place trie la moitié droite du tableau
où la zone de travail est la moitié gauche.

• Puis il trie le quart gauche du tableau et le fusionne avec la moitié droite
où la zone de travail est le deuxième quart.



• Puis il trie le huitième gauche du tableau et le fusionne avec les trois quarts droits
où la zone de travail est le deuxième huitième . . .



• Lorsqu'il ne reste que le premier élément à trier,
il est inséré en bonne position.

Tri fusion sur place (2)

Tri()

$mid \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;

TriP$(n - mid + 1, n - 2 * mid + 1, mid)$;

$m \leftarrow n - mid$;

While $m > 1$ **do**

  $mid \leftarrow \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$;

  TriP$(1, mid, mid)$;

  Fusion$(mid, n - m)$;

  $m \leftarrow m - mid$;

$i \leftarrow 2$;

While $i \leq n$ **and** $T[i] < T[i-1]$ **do** Swap$(i, i-1)$; $i \leftarrow i + 1$;

Fusion (presque) sur place

$\{2 * n_1 + n_2 \leq n\}$

Fusion(n_1, n_2)

$i \leftarrow n - n_1 - n_2 + 1$; $i_1 \leftarrow 1$; $i_2 \leftarrow n - n_2 + 1$;

While $i_1 \leq n_1$ **and** $i_2 \leq n$ **do**

  If $T[i_1] < T[i_2]$ **then** Swap(i, i_1) ; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$;

  Else Swap(i, i_2) ; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;

  $i \leftarrow i + 1$;

For j **from** i_1 **to** n_1 **do** Swap(i, j) ; $i \leftarrow i + 1$;

Invariant de boucle.

- Les blocs bleus, verts et jaunes sont triés.
- Les items « jaunes » sont plus petits que les « bleus » et les « verts ».
- Les tailles des blocs bleus et marrons sont égales.

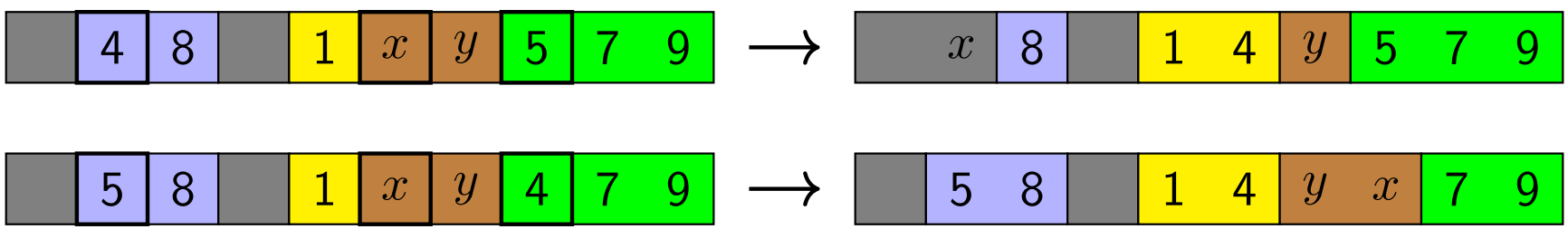
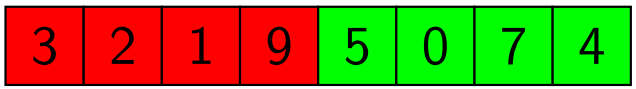
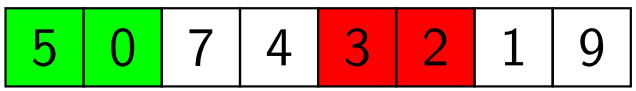


Illustration (1)

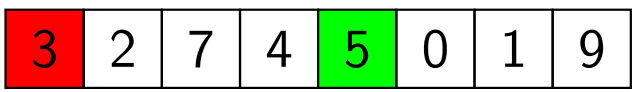
TriP$(5, 1, 4)$



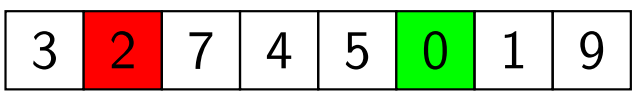
TriP$(1, 5, 2)$



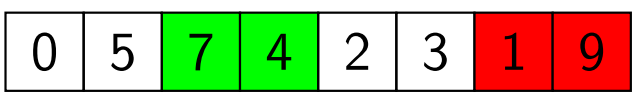
TriP$(5, 1, 1)$



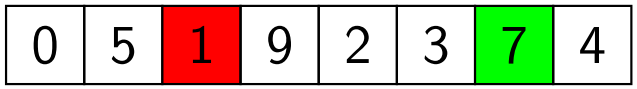
TriP$(6, 2, 1)$



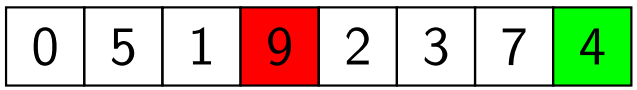
TriP$(3, 7, 2)$



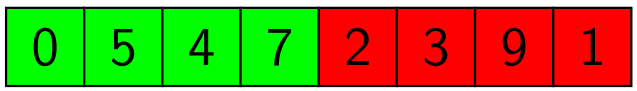
TriP$(7, 3, 1)$



TriP$(8, 4, 1)$



FusionP$(1, 2, 3, 2, 5)$



Après TriP$(5, 1, 4)$

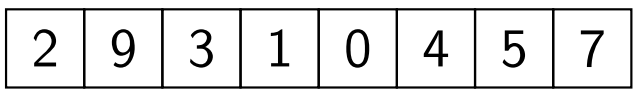
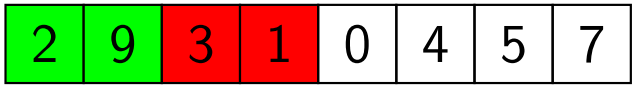
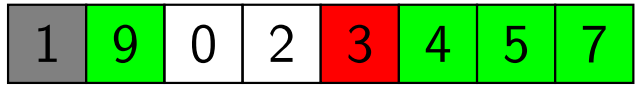


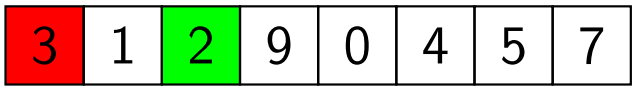
Illustration (2)

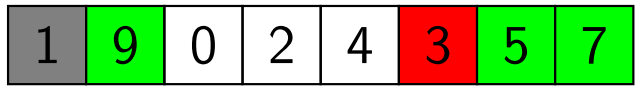
TriP$(1, 3, 2)$



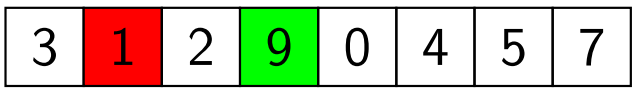


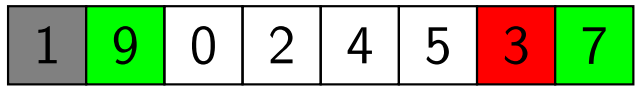
TriP$(3, 1, 1)$



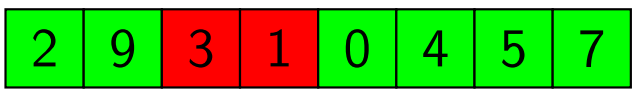


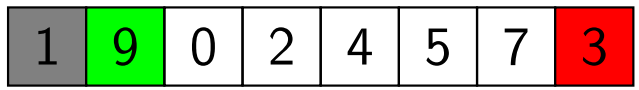
TriP$(4, 2, 1)$

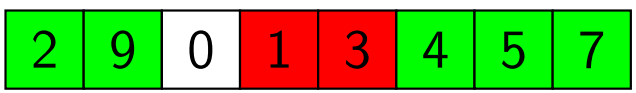




Fusion$(2, 4)$







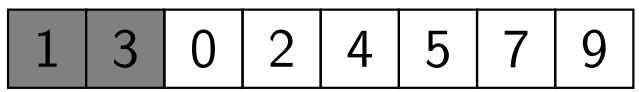
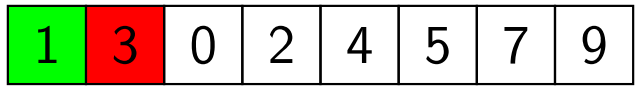
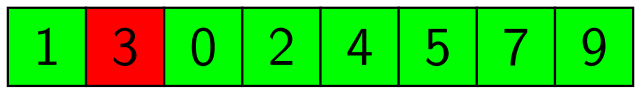


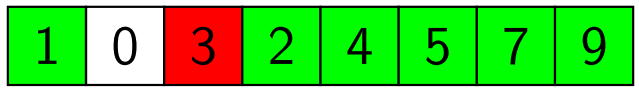
Illustration (3)

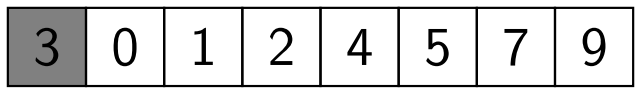
TriP$(1, 2, 1)$



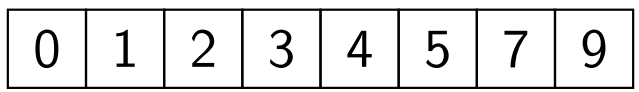
Fusion$(1, 6)$







Insertion du premier élément



Complexité du tri fusion sur place

Soit $t_{\mathsf{TriP}}(m) \leq cm\log(m)$.

Supposons sans perte de généralité $n = 2^k$.

$$
\begin{aligned}
t_{\mathsf{Tri}}(n) \leq & \sum_{i=1}^{k} t_{\mathsf{TriP}}(\frac{n}{2^i}) + \sum_{i=1}^{k-1} dn + en \\
\leq & \sum_{i=1}^{k} c\frac{n}{2^i}\log(n) + d(k-1)n + en \\
\leq & (c+d+e)kn \\
= & (c+d+e)n\log(n)
\end{aligned}
$$

d, constante de Fusion

e, constante de l'insertion du dernier élément

Tri partiel par dénombrement

Σ est un alphabet ordonné. Σ^k est ordonné lexicographiquement.

T est un tableau de clés appartenant à Σ^k.

On veut trier partiellement T selon la valeur de la position $m \leq k$

TriP(T, m)

For $a \in \Sigma$ **do** $nb[a] \leftarrow 0$;

For i **from** 1 **to** n **do** $nb[T[i][m]] \leftarrow nb[T[i][m]] + 1$; $T'[T[i][m]][nb[T[i][m]] \leftarrow T[i]$;

$i \leftarrow 1$;

For $a \in \Sigma$ **do**

  For j **from** 1 **to** $nb[a]$ **do** $T[i] \leftarrow T'[a][j]$; $i \leftarrow i + 1$;

Observations.

La complexité est $\Theta(n + |\Sigma|)$.

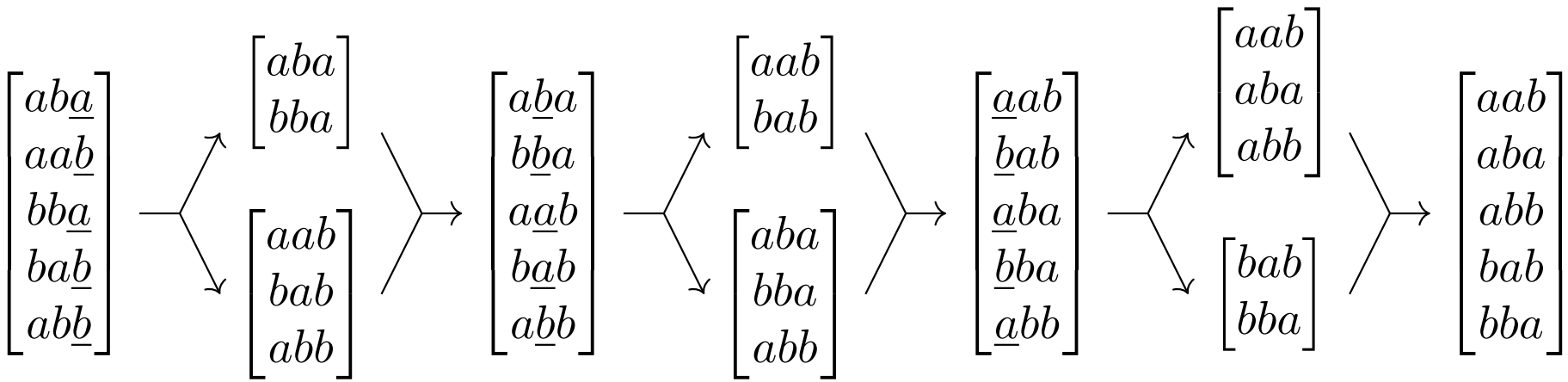
Ce n'est pas un tri sur place.

C'est un tri stable.

Tri par base

On itère le tri par dénombrement de la dernière à la première position :

For m **from** k **downto** 1 **do** TriP(T, m)



Observations.

$$t(n) = \Theta(k(n + |\Sigma|))$$

Si $|\Sigma| = \Theta(n)$ et $k = \Theta(1)$,

on a un algorithme en $\Theta(n)$ pour un espace de clés en $n^{\Theta(1)}$.

Tri des NNI

Le numéro d'identification national est constitué de 13 chiffres.

Il y a approximativement 2^{26} français.

Tri par comparaison

$$n \log(n) \approx 26\ 2^{26}$$

Tri par base

$$k(n + |\Sigma|) \approx 13\ 2^{26}$$

Pas de différence significative.

Plus proche paire de points

Problème. Déterminer une paire de points du plan la plus proche parmi un ensemble de n points.

Observation. L'algorithme naïf a une complexité $\Theta(n^2)$.

Etape préliminaire. (en $\Theta(n\log(n))$)
Créer le tableau X d'indices de T trié selon le couple (abcisse,ordonnée).
Créer le tableau Y d'indices de T trié selon les ordonnées.

Illustration.

$$T = \begin{bmatrix}(3.5, 0.7)\\(2.5, 0.1)\\(2.5, 0.9)\\(4, 0.2)\\(2, 1.5)\end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix}5\\2\\3\\1\\4\end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix}2\\4\\1\\3\\5\end{bmatrix}$$

Diviser pour régner (1)

Partitionner selon les coordonnées les points en deux sous-ensembles de tailles approximativement égales.

Part(X, Y, n)

Partionnement de X trivial

$mid \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $xmid \leftarrow T[X[mid]].x$; $ymid \leftarrow T[X[mid]].y$;

For i **from** 1 **to** mid **do** $X_g[i] \leftarrow X[i]$;

For i **from** $mid + 1$ **to** n **do** $X_d[i - mid] \leftarrow X[i]$;

Partionnement de Y à l'aide des coordonnées

$i_g \leftarrow 1$; $i_d \leftarrow 1$

For i **from** 1 **to** n **do**

  If $T[Y[i]].x < xmid$ **or** $(T[Y[i]].x = xmid$ **and** $T[Y[i]].y \leq ymid)$ **then**

    $Y_g[i_g] \leftarrow Y[i]$; $i_g \leftarrow i_g + 1$;

  Else

    $Y_d[i_d] \leftarrow Y[i]$; $i_d \leftarrow i_d + 1$;

return(X_g, Y_g, X_d, Y_d)

Diviser pour régner (2)

Résoudre les sous-problèmes.

Short(X, Y, n)

Cas de base $n \leq 2$

If $n = 1$ **then return** ∞

If $n = 2$ **then return**$(\sqrt{(T[X[2]].x - T[X[1]].x)^2 + (T[X[2]].y - T[X[1]].y)^2})$;

d minimum des deux plus courtes distances

$(X_g, Y_g, X_d, Y_d) \leftarrow$ Part(X, Y, n) ;

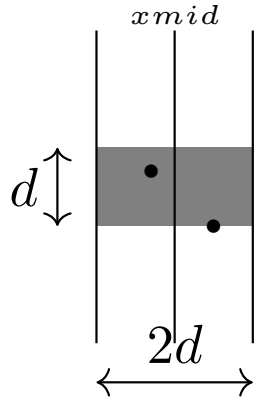
$d \leftarrow$ Short$(X_d, Y_d, \lceil \frac{n}{2} \rceil)$;

If $n \geq 4$ **then** $d \leftarrow \min(d,$ Short$(X_g, Y_g, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$;

Prendre en compte les distances entre points gauches et droits.

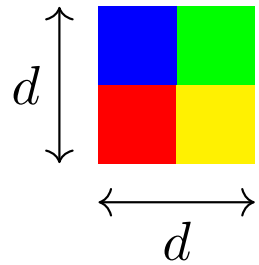
...

Si la distance entre un point *gauche* et un point *droit* est inférieure à d, alors :



Diviser pour régner (3)

Observation. Soit un ensemble de points de distance minimale d,
il y a au plus 4 points dans un carré $d \times d$.
Preuve. Au plus un point par carré de couleur.



Pour diminuer la distance minimale :

- Sélectionner dans Y les points dans la bande $xmid - d \leq x \leq xmid + d$.
- Parcourir les points de la sélection Y' (selon les ordonnées).
- Calculer la distance d'un point à ses 7 successeurs.

Diviser pour régner (4)

Implémentation.

$xmid \leftarrow T[X[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]].x$;

Sélection

$i' \leftarrow 0$;

For i **from** 1 **to** n **do**

  If $T[Y[i]].x \geq xmid - d$ **and** $T[Y[i]].x \leq xmid + d$ **then**

$i' \leftarrow i' + 1$; $\quad Y'[i'] \leftarrow Y[i]$;

Calcul des distances

For i **from** 1 **to** $i' - 1$ **do**

  For j **from** $i + 1$ **to** $\min(i + 7, i')$ **do**

    $d' \leftarrow \sqrt{(T[Y'[j]].x - T[Y'[i]].x)^2 + (T[Y'[j]].y - T[Y'[i]].y)^2}$;

    If $d' < d$ **then** $d \leftarrow d'$;

return(d) ;

$$t(n) = 2t(\frac{n}{2}) + \Theta(n) \Rightarrow t(n) = \Theta(n \log(n))$$

Plan

Limites du diviser pour régner

Observations. Dans l'approche « diviser pour régner »,

- si les sous-problèmes ne sont pas indépendants
- alors cela induit des calculs redondants.

Illustration. Suite de Fibonacci : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ avec $u_1 = u_2 = 1$.

```
Fib(n)
If n ≤ 2 then return(1) ;
return(Fib(n−1)+Fib(n−2)) ;
```

Le temps de calcul est proportionnel à la valeur retournée : un temps exponentiel !

Comment y remédier ?

Mémoïsation

Eviter les appels inutiles par mémorisation des valeurs retournées.

Fibrec(k)

$Ready[k] \leftarrow$ **true** ;

If not $Ready[k-1]$ **then** Fibrec($k-1$) ; *(ici le test renvoie toujours* **true***)*

$Fibval[k] \leftarrow Fibval[k-1] + Fibval[k-2]$;

return ;

Fib(n)

For i **from** 1 **to** 2 **do** $Ready[i] \leftarrow$ **true** ; $Fibval[i] \leftarrow 1$;

For i **from** 3 **to** n **do** $Ready[i] \leftarrow$ **false** ;

If $n > 2$ **then** Fibrec(n) ;

return $Fibval[n]$;

Pourquoi pas une approche « bottom up » ?

Programmation Dynamique

Le programmation dynamique consiste à :

- résoudre les sous-problèmes dans un ordre approprié
- de telle sorte que les sous-problèmes nécessaires
  à la résolution d'un sous-problème soient déjà résolus.

Fib(n)

$Fibval[1] \leftarrow 1$; $Fibval[2] \leftarrow 1$;

For i **from** 3 **to** n **do** $Fibval[i] \leftarrow Fibval[i-1] + Fibval[i-2]$;

return $Fibval[n]$;

Une contrainte : le graphe des dépendances doit être acyclique.

Gestion de la mémoire

L'ordre choisi vise à minimiser les sous-problèmes nécessaires dans le futur et donc la mémoire.

Fib(n)

$new \leftarrow 1$; $old \leftarrow 1$;

For i **from** 3 **to** n **do**

  $temp \leftarrow new + old$;

  $old \leftarrow new$; $new \leftarrow temp$;

return new ;

Fib(n)

$new \leftarrow 1$; $old \leftarrow 1$;

For i **from** 3 **to** n **do**

  $new \leftarrow new + old$;

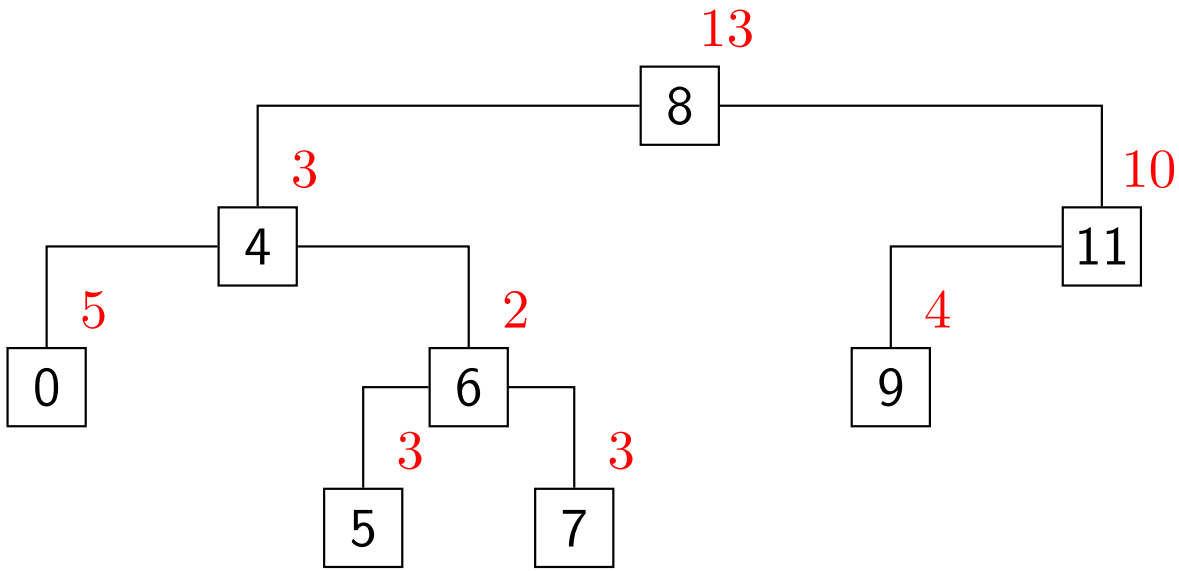
  $old \leftarrow new - old$;

return new ;

Arbre de recherche optimal

On associe à chaque clé i une fréquence d'accès f_i.

On cherche un arbre binaire de recherche $\mathcal{A}$ qui minimise $F_{\mathcal{A}} = \sum_i f_i \cdot h_{\mathcal{A}}(i)$ où $h_{\mathcal{A}}(i)$ est la hauteur de i dans $\mathcal{A}$.



$$F_{\mathcal{A}} = 0 \cdot 13 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 6 = 53$$

Sous-problèmes

Supposons les clés données par T, un tableau ordonné de n clés.

Une approche consiste à :

- déterminer la clé r qui sera la racine ;
- une fois connue le coût d'un arbre optimal pour $T[1, r-1]$;
- et le coût d'un arbre optimal pour $T[r+1, n]$.

Les sous-problèmes sont donc les $\frac{n(n+1)}{2}$ segments $[i, j]$ de clés contiguës.

Un ordre partiel approprié se fonde sur la longueur du segment.

Observation.

Le coût d'un arbre optimal pour $T[i, j]$ doit être augmenté de $\sum_{k=i}^{j} f_k$ lorsqu'il est inséré en sous-arbre.

Calcul de l'arbre optimal : les variables

L'instance du problème ($1 \leq i \leq n$)

- $F[i]$, la fréquence d'accès à la clé i (f_i)

Les variables associées au sous-problème des clés de i à j ($1 \leq i \leq j \leq n$)

- $W[i, j]$, la somme des fréquences des clés de i à j ($\sum_{k=i}^{j} f_k$)
  Par convention, $W[i, i-1] = 0$.

- $opt[i, j]$, le coût d'un arbre optimal pour le sous-ensemble des clés de i à j
  Par convention, $opt[i, i-1] = 0$.

- $root[i, j]$, la racine d'un arbre optimal pour le sous-ensemble des clés de i à j

Calcul de l'arbre optimal

For i **from** 1 **to** $n+1$ **do** Arbre optimal à 0 ou 1 sommet
$opt[i,i] \leftarrow 0$; $root[i,i] \leftarrow i$; $opt[i,i-1] \leftarrow 0$; $W[i,i-1] \leftarrow 0$;
For i **from** 1 **to** n **do** Calcul fréquences cumulées
For j **from** i **to** n **do**
$W[i,j] \leftarrow W[i,j-1] + F[j]$;
For ℓ **from** 2 **to** n **do** Par longueur croissante
For i **from** 1 **to** $n-\ell+1$ **do** Par début croissant
$j \leftarrow i+\ell-1$; $opt[i,j] \leftarrow \infty$;
For k **from** i **to** j **do** Résolution pour $[i,j]$
$o \leftarrow W[i,k-1] + W[k+1,j] + opt[i,k-1] + opt[k+1,j]$;
If $o < opt[i,j]$ **then** $opt[i,j] \leftarrow o$; $root[i,j] \leftarrow k$;

Observation.

Cet algorithme peut être étendu pour prendre en compte les fréquences des recherches infructueuses entre $T[i]$ et $T[i+1]$, avant $T[1]$ et après $T[n]$.

Plus longue sous-séquence commune

Soit u un mot de longueur m et v un mot de longueur n.

w un mot de longueur p est une sous-séquence commune de u et v si :

- Il existe α une fonction strictement croissante de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$ telle que pour tout i, $w[i] = u[\alpha(i)]$;
- Il existe β une fonction strictement croissante de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que pour tout i, $w[i] = v[\beta(i)]$

Illustration.

$u =$ COMPUTER, $v =$ ORDINATEUR, $w =$ OTER

- $\alpha = \langle 2, 6, 7, 8 \rangle$;
- $\beta = \langle 1, 7, 8, 10 \rangle$.

Objectif. Calcul d'une plus longue sous-séquence commune (PLSC).

Sous-problèmes

En raisonnant sur la dernière lettre appariée, une plus longue sous-séquence commune de u et v est :

- soit une plus longue sous-séquence commune de $u[1, m-1]$ et v ;
- soit une plus longue sous-séquence commune de u et $v[1, n-1]$;
- soit une plus longue sous-séquence commune de $u[1, m-1]$ et $v[1, n-1]$ étendue par $u[m] = v[n]$.

Les sous-problèmes sont donc les $(m+1)(n+1)$ sous-mots $u[1, i]$ et $v[1, j]$.

Un ordre partiel approprié peut être défini par $(i, j) < (i', j')$ si :

- $i < i'$ et $j \leq j'$;
- ou $i \leq i'$ et $j < j'$.

Relation entre sous-problèmes

Soit le sous-problème défini par $u[1,i]$ et $v[1,j]$.
Si $u[i] = v[j]$ alors il existe une PLSC qui apparie $u[i]$ et $v[j]$.

Preuve.

Soit w une PLSC.

- Si w n'apparie ni $u[i]$ ni $v[j]$ alors on peut l'etendre par $u[i] = v[j]$ d'où une contradiction.
- Supposons que w apparie $u[i]$ et $v[k]$ pour $k < j$
  alors w est aussi obtenue en appariant $u[i]$ et $v[j]$.

D'où en notant $\ell[i,j]$ la longueur de la PSLC de $u[1,i]$ et $v[1,j]$:

- Si $u[i] = v[j]$ alors $\ell[i,j] = \ell[i-1,j-1] + 1$;
- Sinon $\ell[i,j] = \max(\ell[i-1,j], \ell[i,j-1])$.

Calcul d'une PLSC

Calcul des longueurs et préparation pour la PLSC

For i **from** 0 **to** m **do** $\ell[i,0] \leftarrow 0$; **For** j **from** 1 **to** n **do** $\ell[0,j] \leftarrow 0$;
For i **from** 1 **to** m **do**
  For j **from** 1 **to** n **do**
    If $u[i] = v[j]$ **then** $\ell[i,j] \leftarrow \ell[i-1,j-1] + 1$;
    Else
      $\ell[i,j] \leftarrow \ell[i-1,j]$;
      If $\ell[i,j] < \ell[i,j-1]$ **then** $\ell[i,j] \leftarrow \ell[i,j-1]$;

Ecriture de la PLSC

$i \leftarrow m$; $j \leftarrow n$; $k \leftarrow \ell[i,j]$;
While $k > 0$ **do**
  If $\ell[i,j] = \ell[i-1,j]$ **then** $i \leftarrow i-1$;
  Else If $\ell[i,j] = \ell[i,j-1]$ **then** $j \leftarrow j-1$;
  Else $w[k] \leftarrow u[i]$; $i \leftarrow i-1$; $j \leftarrow j-1$; $k \leftarrow k-1$;

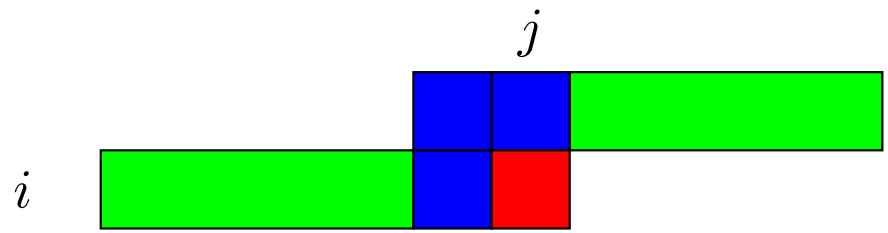
Considérations de mémoire

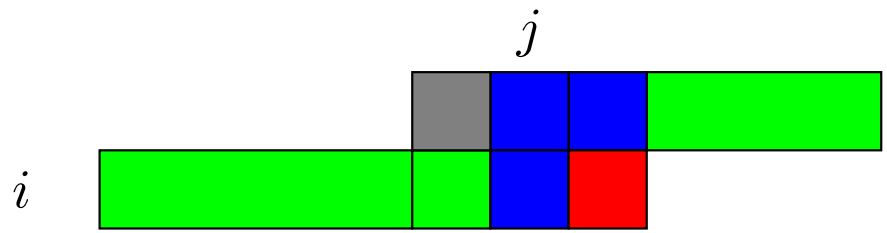
La mémoire utilisée est en $\Theta(mn)$.

Si on cherche uniquement à connaître la longueur, on peut économiser la mémoire.

Le problème (i, j) ne dépend que des problèmes $(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$ et $(i, j-1)$.

Il suffit de conserver $\ell[i, 1], \ldots, \ell[i, j-1], \ell[i-1, j-1], \ell[i-1, j], \ldots, \ell[i-1, n]$ qu'on notera $\ell[1], \ldots, \ell[j-1], old\ell, \ell[j], \ldots, \ell[n]$.





Calcul des longueurs

Length(u, m, v, n, ℓ)

For j **from** 1 **to** n **do** $\ell[j] \leftarrow 0$;

For i **from** 1 **to** m **do**

  $old\ell \leftarrow 0$;

  For j **from** 1 **to** n **do**

    $temp \leftarrow \ell[j]$;

    If $u[i] = v[j]$ **then** $\ell[j] \leftarrow old\ell + 1$;

    Else If $j > 1$ **and** $\ell[j] < \ell[j-1]$ **then** $\ell[j] \leftarrow \ell[j-1]$;

    $old\ell \leftarrow temp$;

Observations

- A la fin de l'algorithme pour tout j, $\ell[j] = |PLSC(u, v[1, j])|$.
- En permutant si nécessaire u et v, la mémoire utilisée est en $\Theta(\min(m, n))$.

Diviser pour régner (encore !)

On note $\tilde{u}$ le mot miroir de u et ε le mot vide.

ℓ et $\tilde{\ell}$ sont des tableaux indicés de 0 à n, initialisés à 0.

PLSC(u, m, v, n)

If $n = 0$ **then return**(ε) ;

If $m = 1$ **then**

  For j **from** 1 **to** n **do** **if** $u[1] = v[j]$ **then return**(u) ;

  return(ε) ;

$mid \leftarrow \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$;

Détermination des longueurs des PLSC pour $(u[1, mid], v)$ et $(\tilde{u}[1, m - mid], \tilde{v})$

Length$(u[1, mid], mid, v, n, \ell)$; Length$(\tilde{u}[1, m - mid], m - mid, \tilde{v}, n, \tilde{\ell})$;

Recherche de la meilleure partition

$max\ell \leftarrow -\infty$;

For j **from** 0 **to** n **do** **if** $\ell[j] + \tilde{\ell}[n-j] > max\ell$ **then** $max\ell \leftarrow \ell[j] + \tilde{\ell}[n-j]$; $k \leftarrow j$;

Appels récursifs et concaténation

$w_1 \leftarrow$ PLSC$(u[1, mid], mid, v[1, k], k)$;

$w_2 \leftarrow$ PLSC$(u[mid + 1, m], m - mid, v[k + 1, n], n - k)$;

return CONCAT(w_1, w_2) ;

Illustration (1)

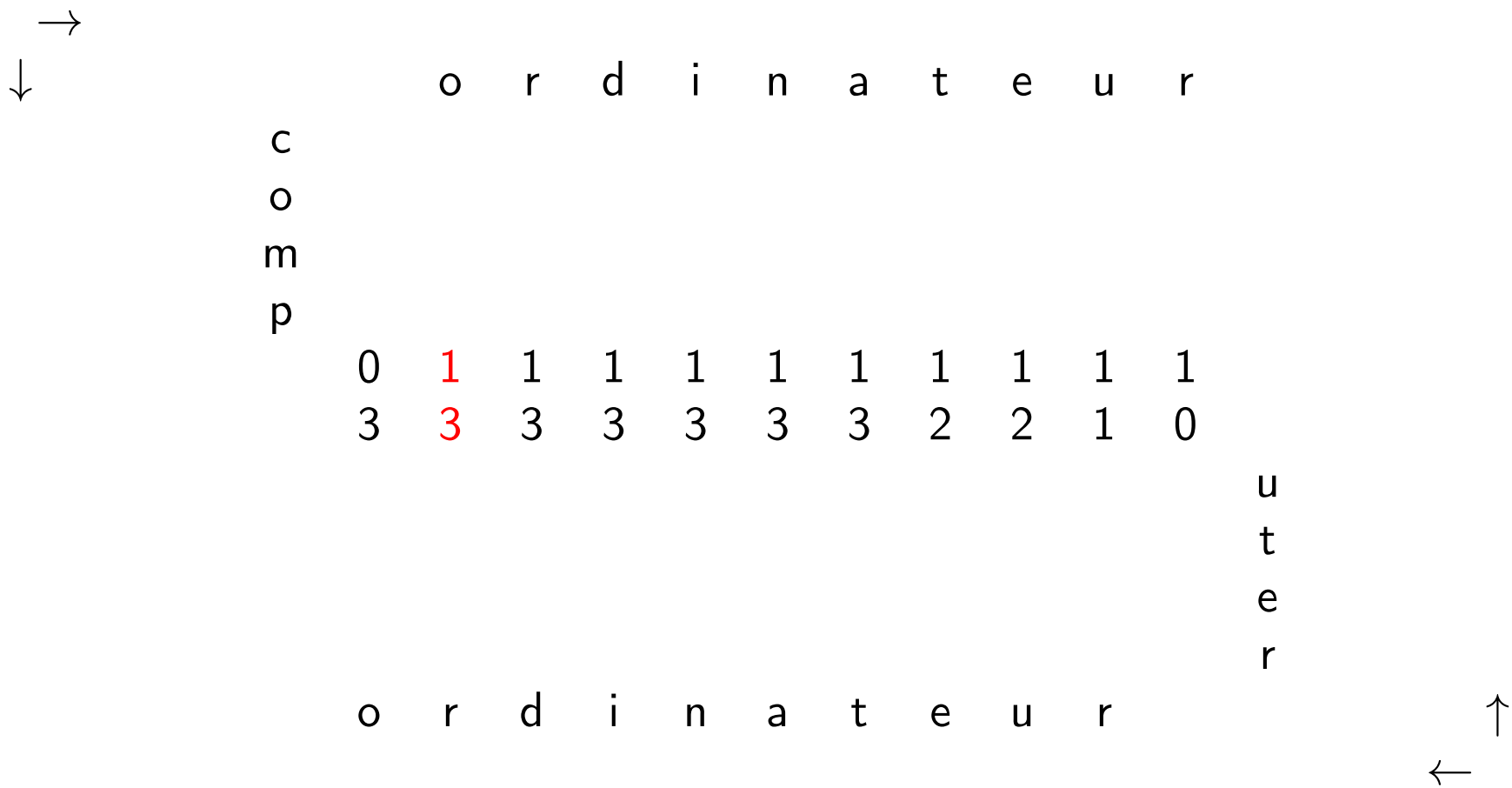
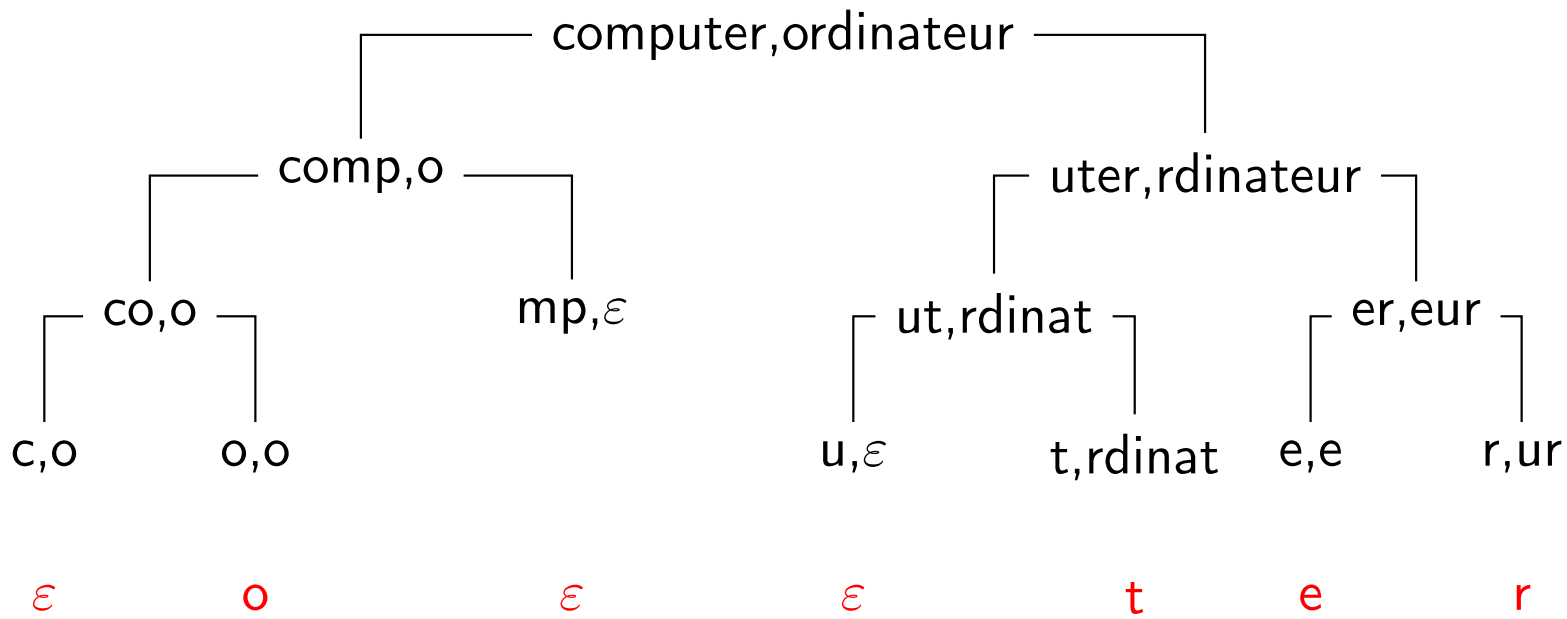


Illustration (2)



Analyse de complexité

Espace

ℓ et $\tilde{\ell}$ peuvent être des variables globales, d'où $\Theta(n)$.

Les variables locales vérifient $|w_1| \leq m$ et $|w_2| \leq m$.

A chaque appel récursif m est divisé par deux, d'où $\Theta(m)$.

En sommant, on obtient $\Theta(m+n)$.

Temps

$$T(m,n) \leq \max_{k \leq n}(T(\frac{m}{2},k) + T(\frac{m}{2},n-k)) + Cmn$$

$$T(i,n) \leq Cn \text{ pour } i \in \{0,1\}$$

$$T(m,i) \leq Cm \text{ pour } i \in \{0,1\}$$

Par induction pour $m \geq 1$ and $n \geq 1$,

$$T(m,n) \leq 2Cmn$$

Plan

Optimisation discrète

Un problème générique.

- Soit E, un ensemble fini ;
- $Adm \subseteq 2^E$, un ensemble de sous-ensembles admissibles tel que le test $E' \in Adm$? se fasse en temps polynomial ;
- r, une fonction « récompense » de E dans $\mathbb{N}$.
- On cherche $E' \in Adm$ tel que $r(E') = \sum_{e \in E'} r(e)$ soit maximale.

Quelques exemples.

- Clique maximale dans un graphe ;
- Somme de sous-ensembles d'entiers inférieure à un seuil ;
- Arbre couvrant de poids maximal ;

Certains problèmes sont NP-complets (voir le cours de complexité) et d'autres admettent des algorithmes en temps polynomial.

Famille libre maximale

Soit un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v_i}\}_{i\leq n}$.

On cherche $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ de taille maximale
telle que $\{\mathbf{v_i}\}_{i\in I}$ soit une famille libre.

Un algorithme en temps polynomial.

$I \leftarrow \emptyset$;
For i **from** 1 **to** n **do**
  If $\{\mathbf{v}_j\}_{j\in I} \cup \{\mathbf{v}_i\}$ est une famille libre **then** $I \leftarrow I \cup \{i\}$;
Return(I) ;

Invariant de boucle.

Il existe I^* tel que $\{\mathbf{v}_j\}_{j\in I}$ peut être complétée en une famille libre maximale $\{\mathbf{v}_j\}_{j\in I^*}$ par des vecteurs de $\{\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_n\}$.

- Si i n'est pas ajouté à I alors $i \notin I^*$.
- Si i est ajouté à I alors $\mathbf{v}_i = \sum_{j\in I^*} \alpha_j \mathbf{v}_j$ avec $\alpha_k \neq 0$ pour un $k \in I^* \setminus I$.
- D'ou $\{\mathbf{v}_j\}_{j\in I^*\setminus\{k\}\cup\{i\}}$ est une famille libre maximale.

Matroïde

(E, Adm) **est un matroïde si :**

- Adm est non vide et clos par inclusion :
  $E' \in Adm \wedge E'' \subseteq E' \Rightarrow E'' \in Adm$;
- Si $E', E'' \in Adm$ et $|E'| < |E''|$,
  il existe $e \in E'' \setminus E'$ tel que $E' \uplus \{e\} \in Adm$.

Observation. Les ensembles admissibles maximaux ont la même taille.

Un algorithme générique.

Trier E par récompense décroissante ;
$F \leftarrow E$; $E' \leftarrow \emptyset$;
Repeat
  $e \leftarrow$ Extraire(F) ;
  If $E' \cup \{e\} \in Adm$ **then** $E' \leftarrow E' \cup \{e\}$;
Until $F = \emptyset$;
Return(E') ;

Preuve de l'algorithme

Invariant de boucle.

> Il existe E^* tel que E' peut être complété en un ensemble admissible de récompense maximale E^* par des éléments de F.

Soit le matroïde (F, Adm') défini par $F' \in Adm'$ si $F' \cup E' \in Adm$.

Par hypothèse d'induction,

F^* est un ensemble admissible de récompense maximale de F
ssi $F^* \cup E'$ est admissible de récompense maximale de E.

• $E' \cup \{e\} \notin Adm$. e ne peut appartenir à un ensemble admissible de récompense maximale de F.

• $E' \cup \{e\} \in Adm$. Soit F^*, admissible de récompense maximale de F.

Cas 1 $\{e\} \in F^*$. immédiat.

Cas 2 $\{e\} \notin F^*$. Si $|F^*| > 1$, il existe $f_1 \in F^*$ tel que $\{e, f_1\}$ soit admissible.

En itérant, on obtient $F^+ = \{e, f_1, \ldots, f_k\}$ admissible tel que :

$$F^* = \{f_0, \ldots, f_k\}$$

Puisque $r(e) \geq r(f_0)$, F^+ a une récompense maximale dans F

et donc $E' \cup F^+$ a une récompense maximale dans E.

Arbre couvrant de poids maximal

Soit un graphe connexe $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées.
On cherche un arbre couvrant de poids maximal.

Le matroïde est l'ensemble des arêtes
dont les sous-ensembles admissibles forment des graphes acycliques.

Preuve

Soit E_1, E_2 des ensembles formant des graphes acycliques avec $|E_1| < |E_2|$.
Il existe une décomposition $G_1 = \biguplus_{j \leq m} T_{1,j}$ et $G_2 = \biguplus_{j \leq n} T_{2,j}$
telle que $T_{i,j} = (V_{i,j}, E_{i,j})$ soit un arbre et $E_i = \biguplus E_{i,j}$.

Cas 1 $\exists \{u, v\} \in E_2 \wedge \{u, v\} \cap \biguplus_j V_{1,j} = \emptyset$. Alors $E_1 \cup \{\{u, v\}\}$ convient.

Cas 2 $\exists j \ \exists \{u, v\} \in E_2 \wedge u \in V_{1,j} \wedge v \notin V_{1,j}$. Alors $E_1 \cup \{\{u, v\}\}$ convient.

Cas 3 $\forall \{u, v\} \in E_2 \ \exists j \ \{u, v\} \subseteq V_{1,j}$.
Alors $\forall j' \leq n \ \exists j \leq m \ V_{2,j'} \subseteq V_{1,j}$ ce qui implique $|E_2| \leq |E_1|$. (pourquoi ?)

Observation

L'algorithme de Kruskal est une adaptation à l'arbre couvrant de poids minimal.

Ordonnancement de tâches

Soit un ensemble de tâches I, *de même durée*
avec date d'échéance d_i et pénalité r_i si non respect.
On cherche un ordonnancement qui minimise les pénalités.

Observation

Ceci équivaut à maximiser les pénalités des tâches qui respectent leur échéance.

Le matroïde est l'ensemble des tâches
dont les sous-ensembles admissibles sont ordonnançables sans pénalité.

Preuve

Soit $J = i_1 \dots i_m$ et $J' = j_1 \dots j_n$ des sous-ensembles « ordonnancés »
avec $m < n$. Soit j_k la dernière tâche de J' qui n'appartient pas à J.

On ordonnance $J \cup \{j_k\}$ comme suit :

- On ordonnance d'abord $J \setminus \{j_{k+1}, \dots, j_n\}$ selon l'ordre de J ;
- Puis on place $\{j_k, \dots, j_n\}$.

Toutes les tâches de cet ordonnancement respectent leur échéance. (pourquoi ?)

Comment tester efficacement si un sous-ensemble est ordonnançable ?

Généralisation : algorithmes gloutons

Un problème générique : Un espace de solutions

- structuré par une relation d'extension ;
- contenant une solution minimale ;
- telle que la récompense des solutions soit croissante par extension.

Un algorithme glouton générique.

$sol \leftarrow solmin$;
While Extend$(sol) \neq \emptyset$ **do**
  $rew \leftarrow -\infty$;
  For $sol' \in$ Extend(sol) **do**
    If $r(sol') > rew$ **then** $rew \leftarrow r(sol')$; $sol \leftarrow sol'$;
Return(sol) ;

Selon les problèmes, les algorithmes gloutons fournissent :

- la solution optimale ;
- une solution approchée avec garantie d'approximation.