Introduction à l'algorithmique : Ouverture

Serge Haddad

LMF, ENS Paris-Saclay & CNRS & Inria

L3

Tests géométriques

Soient $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ des points non alignés et p un point quelconque.

- p appartient au triangle formé par p_1, p_2 et p_3
  ssi l'unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de :

$$\sum_{i \leq 3} \lambda_i p_i = p \qquad \wedge \qquad \sum_{i \leq 3} \lambda_i = 1$$

  appartient à $(\mathbb{R}^+)^3$.

- p appartient au cone d'origine p_1, et de directions $\overrightarrow{p_1 p_2}$ et $\overrightarrow{p_1 p_3}$
  ssi l'unique solution (λ_2, λ_3) de :

$$\lambda_2 \overrightarrow{p_1 p_2} + \lambda_3 \overrightarrow{p_1 p_3} = \overrightarrow{p_1 p}$$

  appartient à $(\mathbb{R}^+)^2$.

Ces tests s'opèrent en temps constant.

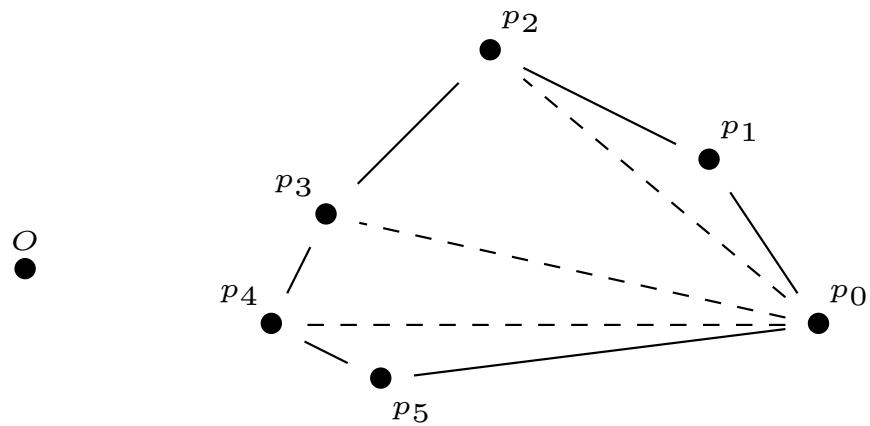
Polygone convexe

Un polygone $\mathcal{P}$ est donné par une liste $p_0, \ldots, p_{n-1}$ de ses sommets tels que la liste $(\overline{p_i p_{i+1\%n}})_{0 \leq i < n}$ soit celle de ses segments parcourue en sens direct.

Il est convexe ssi tous les angles vus de l'intérieur sont saillants.

Test (naïf) d'appartenance en $O(n)$

$$O \in \mathcal{P} \text{ ssi } \exists 0 < i < n-1 \; O \in Triangle(p_0, p_i, p_{i+1\%n})$$



Ajout d'un sommet

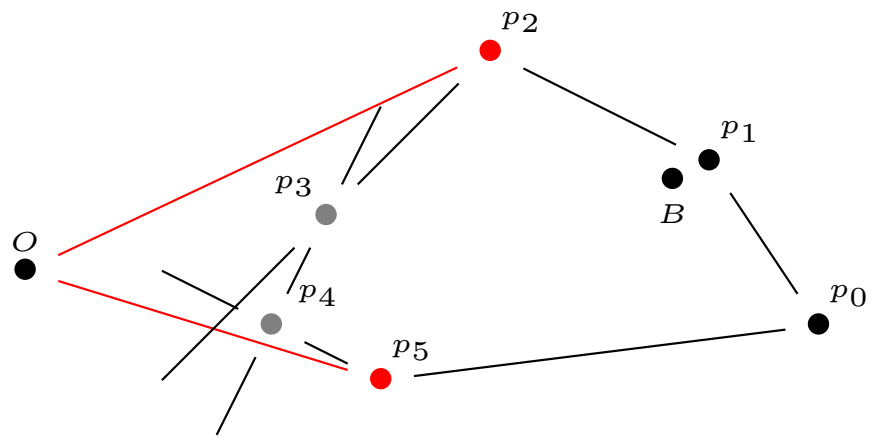
Soit $O \notin \mathcal{P}$, polygone convexe.

- Calcul de $B = \frac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$;
- Pour tout $i < n$, extraction de p_i ssi :

$$O \in Cone(p_i, \overrightarrow{p_{i-1\%n}p_i}, \overrightarrow{p_{i+1\%n}p_i})$$

- Parmi les n' points restants, insertion de O entre $p_{\alpha(i)}$ et $p_{\alpha(i+1\%n')}$ tels que :

$$O \in Cone(B, \overrightarrow{Bp_{\alpha(i)}}, \overrightarrow{Bp_{\alpha(i+1\%n')}})$$



Enveloppe convexe

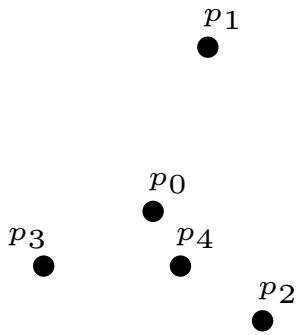
Soit S un ensemble de $n \geq 3$ points $p_0, \ldots, p_{n-1}$ dans le plan.

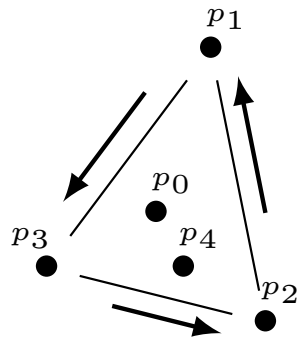
$EC(S)$, l'enveloppe convexe de S, est définie par :

$$EC(S) = \{p \mid \exists \{\lambda_i\}_{i<n} \in (\mathbb{R}^+)^n \wedge \sum_{i<n} \lambda_i = 1 \wedge p = \sum_{i<n} \lambda_i p_i\}$$

$EC(S)$ est un polygone (convexe)

dont l'ensemble des sommets S' est un sous-ensemble de S.





Objectif. Construire une représentation de $EC(S)$.

- Algorithme de Graham
- Algorithme dichotomique
- Algorithme de Jarvis
- Algorithme de Chan

Intérieur de l'enveloppe convexe

$\overset{\circ}{EC}(S)$, l'intérieur de $EC(S)$, est défini par :

$$\overset{\circ}{EC}(S) = \{p \mid \exists r > 0 \; Disc(p, r) \subseteq EC(S)\}$$

$\overset{\circ}{EC}(S)$ est non vide si et seulement si il existe p_i, p_j, p_k non alignés.

Comment trouver un point de $\overset{\circ}{EC}(S)$?

$i \leftarrow 2$;
While $i < n$ **and** $p_1 = p_i$ **do** $i \leftarrow i + 1$;
If $i \geq n$ **then return**$(\mathbf{false})$;
$j \leftarrow i + 1$;
While $j \leq n$ **and** $p_j \in d(p_1, p_i)$ **do** $j \leftarrow j + 1$;
If $j > n$ **then return**$(\mathbf{false})$;
return$(\frac{1}{3}(p_1 + p_i + p_j))$;

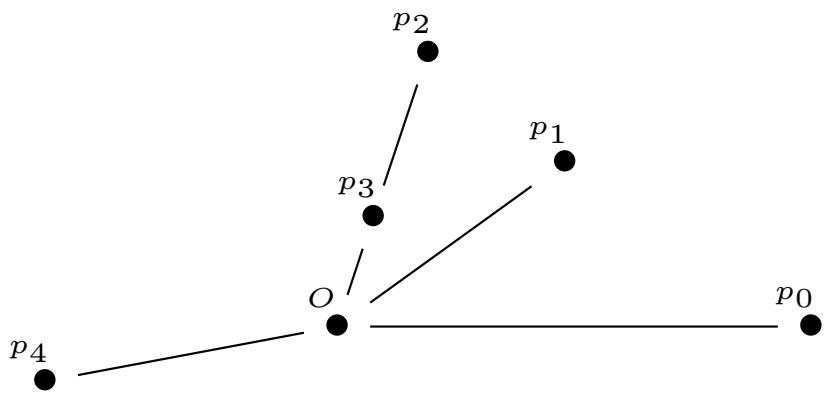
Circuit polaire

Soit deux vecteurs non nuls en coordonnées polaire $\mathbf{v} = (\rho, \theta)$ et $\mathbf{v}' = (\rho', \theta')$.

$$\mathbf{v} \prec \mathbf{v}' \text{ ssi } \theta < \theta' \text{ ou } (\theta = \theta' \text{ et } \rho > \rho')$$

Soit O une *origine* et $S = \{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ un ensemble de points différents de O.

Soit α une permutation. $(p_{\alpha(0)}, \ldots, p_{\alpha(n-1)})$ est un circuit polaire relatif à O si pour tout $i < n$, $\overrightarrow{Op_{\alpha(i)}} \prec \overrightarrow{Op_{\alpha(i+1)}}$ avec $\overrightarrow{Op_{\alpha(0)}}$ comme axe $\overrightarrow{Ox}$.



Le circuit polaire s'obtient par un tri en $O(n \log(n))$.

Eviter les coordonnées polaires

Soit O le point origine et $\overrightarrow{Op_0}$ l'orientation de l'axe des abcisses.

Prec(p, p')

(vecteurs de même direction)

If $\exists\lambda\ \overrightarrow{Op} = \lambda\overrightarrow{Op'} \wedge \lambda > 1$ **then return true**

If $\exists\lambda\ \overrightarrow{Op} = \lambda\overrightarrow{Op'} \wedge 0 < \lambda \leq 1$ **then return false**

(un vecteur de direction $\overrightarrow{Op_0}$)

If $\exists\lambda\ \overrightarrow{Op} = \lambda\overrightarrow{Op_0} \wedge \lambda > 0$ **then return true**

If $\exists\lambda\ \overrightarrow{Op'} = \lambda\overrightarrow{Op_0} \wedge \lambda > 0$ **then return false**

($\overrightarrow{Op}$ appartient au demi-plan supérieur)

If $det(\overrightarrow{Op_0}, \overrightarrow{Op}) > 0$ **then return** $p' \notin Cone(\overrightarrow{Op_0}, \overrightarrow{Op})$

($\overrightarrow{Op}$ de direction opposée à $\overrightarrow{Op_0}$)

If $det(\overrightarrow{Op_0}, \overrightarrow{Op}) = 0$ **then return** $det(\overrightarrow{Op_0}, \overrightarrow{Op'}) < 0$

($\overrightarrow{Op}$ appartient au demi-plan inférieur)

If $det(\overrightarrow{Op_0}, \overrightarrow{Op}) < 0$ **then return** $p' \in Cone(\overrightarrow{Op_0}, \overrightarrow{Op})$

Du circuit polaire à l'enveloppe convexe

Soit $\mathcal{C}$ un circuit polaire de n points (liste circulaire) avec $O \in \overset{\circ}{EC}(\mathcal{C})$.

Choisir $p_0 \in \mathcal{C}$ extrémal pour un ordre lexicographique des coordonnées.

$p \leftarrow p_0$;

While $succ(\mathcal{C}, p) \neq p_0$ **do**

  If $succ(\mathcal{C}, p) \in Triangle(O, p, succ(\mathcal{C}, succ(\mathcal{C}, p))$ **then**

    $Extraire(\mathcal{C}, succ(p))$; **If** $p \neq p_0$ **then** $p \leftarrow pred(\mathcal{C}, p)$;

  Else

    $p \leftarrow succ(\mathcal{C}, p)$;

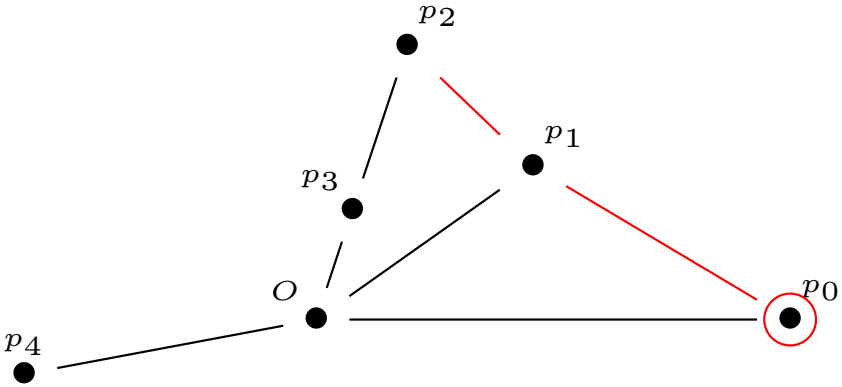
Complexité.

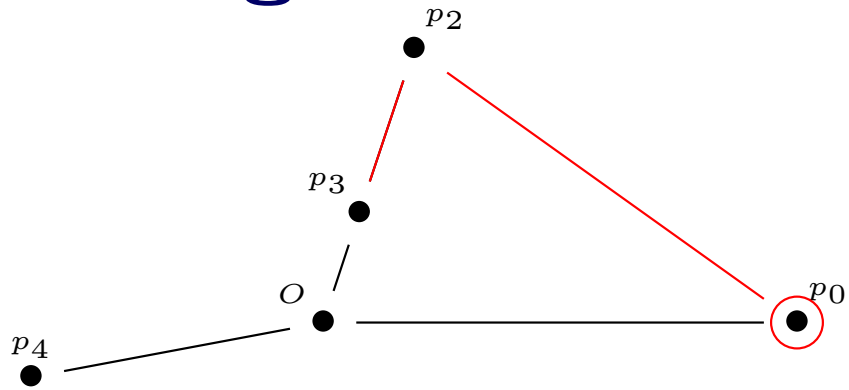
Soit $\ell = |\mathcal{C}| + \min(i > 0 \mid succ^{(i)}(p) = p_0)$.

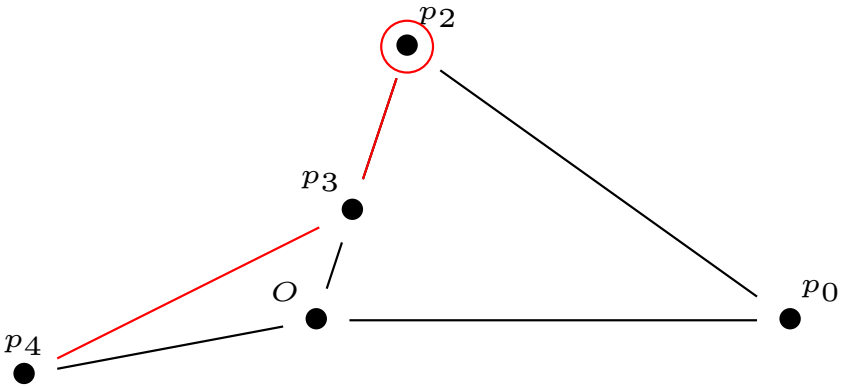
ℓ est initialement égal à $2n$ et décroît à chaque étape.

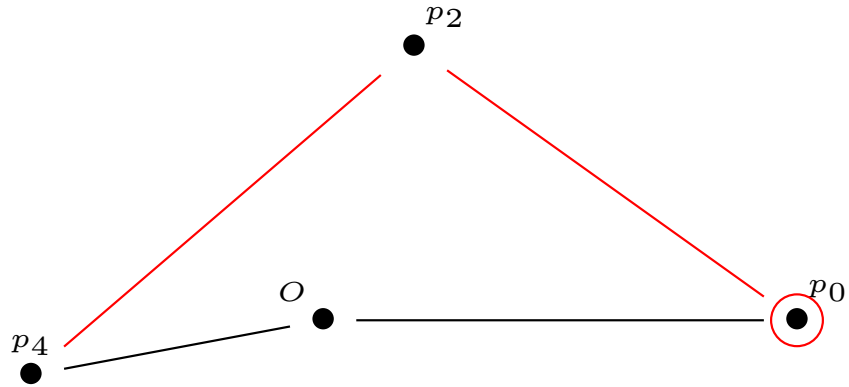
D'où un algorithme en $O(n)$.

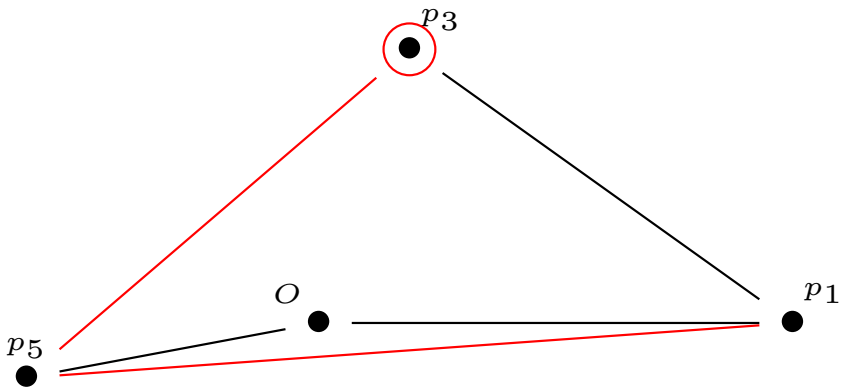
Déroulement de l'algorithme











Correction de l'algorithme

Invariants.

- L'enveloppe convexe de $EC(\mathcal{C})$ reste inchangée.
- Les angles formés par les segments de p_0 à $succ(\mathcal{C}, p)$ sont saillants (vus de O).

Extraction d'un sommet.

- Un sommet retiré appartient à l'intérieur de l'enveloppe convexe ou à l'intérieur d'une arête.
- Puisque p devient $pred(\mathcal{C}, p)$, la deuxième propriété reste vérifiée.

Passage au successeur.

- $\mathcal{C}$ est inchangé.
- La deuxième propriété reste vérifiée par construction.

Observation.

A la fin de l'algorithme l'angle en p_0 est nécessairement saillant (choix de p_0).

Un polygone (simple) dont tous les angles sont saillants est convexe.

Diviser pour régner : le retour

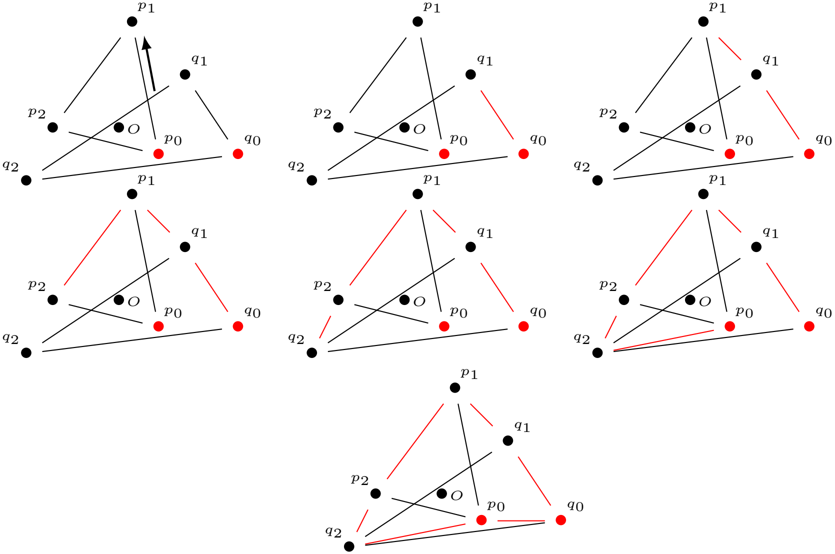
Principe.

- Si $n \leq 3$ alors éliminer les points redondants en $O(1)$.
- Répartir les points en 2 sous-ensembles de tailles approximativement égales.
- Calculer de manière récursive les polygones associés aux sous-ensembles : $\mathcal{P} = (p_0, \ldots, p_{r-1})$ et $\mathcal{Q} = (q_0, \ldots, q_{s-1})$
- Fusionner les polygones en $O(r + s)$.

Fusion.

- Déterminer un point intérieur O à $\mathcal{P}$ en $O(1)$.
- Si $O \notin \mathcal{Q}$ alors ajouter O à $\mathcal{Q}$ en $O(s)$.
- Déterminer le vecteur minimal $\overrightarrow{Oq_i}$ relatif à $\overrightarrow{Op_0}$ en $O(s)$.
- Fabriquer un circuit polaire à partir des listes $p_0, \ldots, p_{r-1}$ et $q_i, \ldots, q_{i-1 \% s}$ (privé des points éliminés lors de l'ajout) en $O(r + s)$.
- Transformer le circuit polaire en polygone par la procédure de Graham.

Des polygones au circuit polaire



Algorithme de Jarvis

Soit $r \in \mathcal{C}$ minimal pour l'ordre lexicographique des coordonnées $(y, -x)$.

Insérer(r) ;

If $r = p_0$ **then** $p \leftarrow p_1$ **else** $p \leftarrow p_0$;

For i **from** 0 **to** $n-1$ **do**

  If $p_i \neq r$ **and** $\overrightarrow{rp_i} \prec \overrightarrow{rp}$ w.r.t. $\overrightarrow{rx}$ **then** $p \leftarrow p_i$;

Insérer(p) ;

$q \leftarrow r$;

Repeat

  If $p = p_0$ **then** $o \leftarrow p_1$ **else** $o \leftarrow p_0$;

  For i **from** 0 **to** $n-1$ **do**

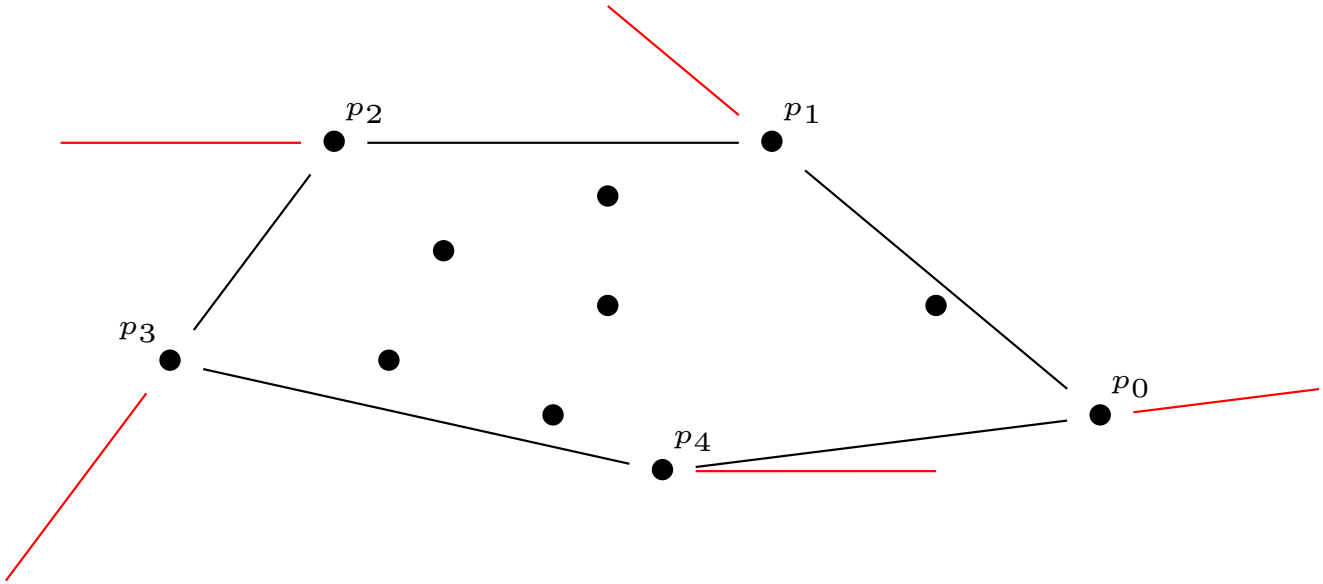
    If $p_i \neq p$ **and** $\overrightarrow{pp_i} \prec \overrightarrow{po}$ w.r.t. $\overrightarrow{qp}$ **then** $o \leftarrow p_i$;

  Insérer(o) ;

  $q \leftarrow p$; $p \leftarrow o$;

Until $o = r$;

Illustration et complexité



Complexité.

La complexité de l'algorithme est en $O(nh)$

où h est le nombre de sommets de l'enveloppe convexe.

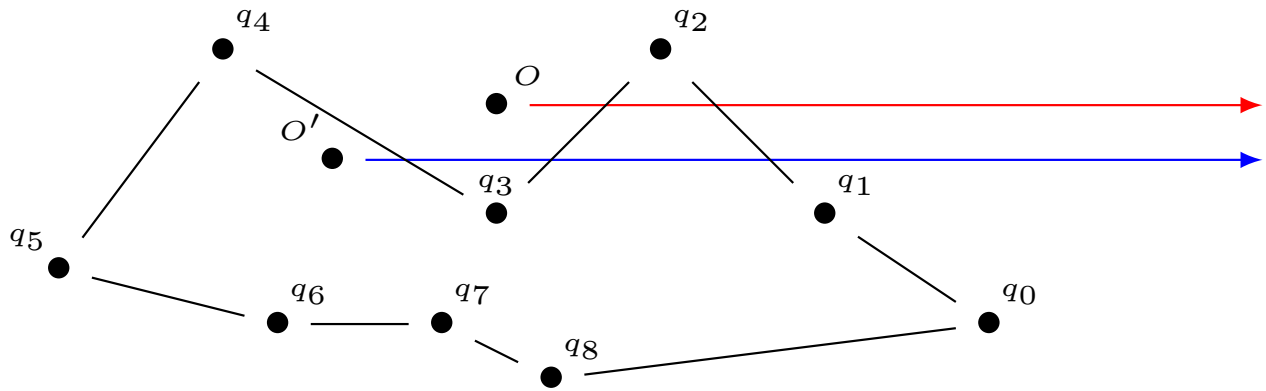
Si $h = o(\log(n))$ alors cet algorithme plus efficace que les précédents.

Appartenance à un polygone simple

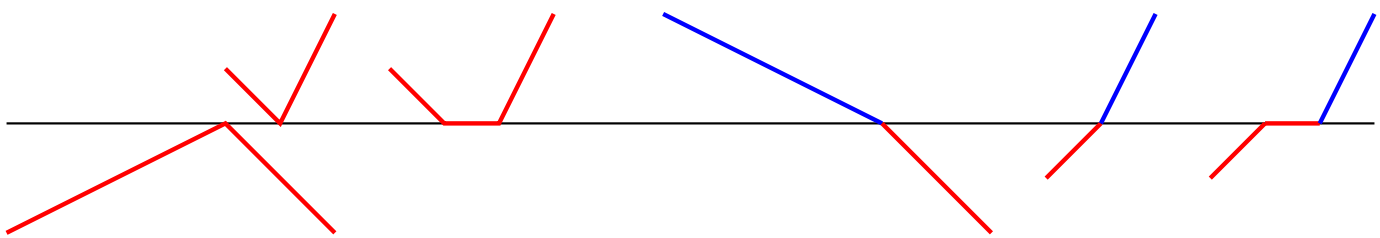
Soit O un point. On considère la demi-droite horizontale $\overrightarrow{Ox}$.

On compte le nombre d'intersections avec les segments du polygone.

O appartient au polygone si ce nombre est impair.



Cas dégénérés.



Appartenance à un polygone convexe

On détermine en $O(1)$ un point intérieur O.

On choisit $\overrightarrow{Op_0}$ pour repérer les coordonnées polaires.

Première étape : recherche du secteur angulaire de P en $O(\log(n))$

If $\overrightarrow{Op_{n-1}} \preceq \overrightarrow{OP}$ **then return** $n-1$;

$i \leftarrow 0$; $j \leftarrow n-1$;

While $j > i+1$ **do**

  $k \leftarrow \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$;

  If $\overrightarrow{OP} \prec \overrightarrow{Op_k}$ **then** $j \leftarrow k$ **else** $i \leftarrow k$;

return i ;

Deuxième étape : test du triangle en $O(1)$

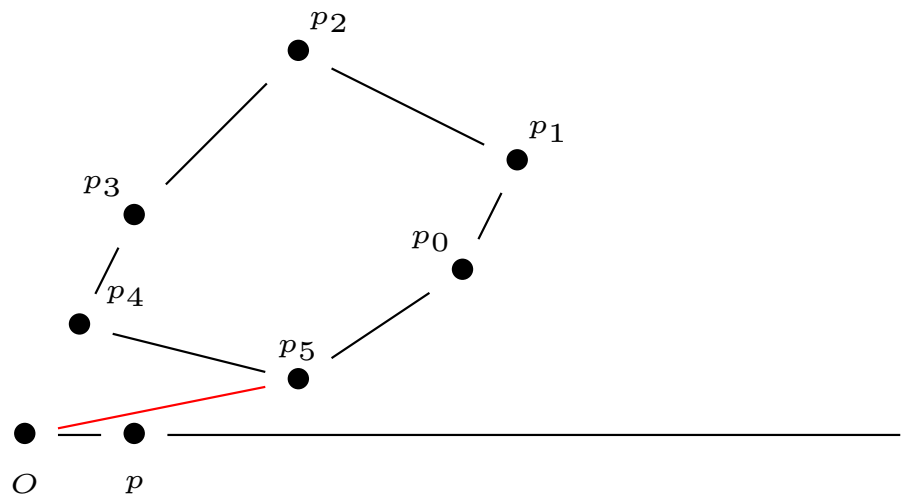
return $P \in Triangle(O, p_i, p_{i+1\%n})$;

Point minimal d'un polygone convexe

Soit un polygone convexe $\mathcal{P} = (p_0, \ldots, p_{n-1})$ contenu dans :

- un demi-plan délimité par la droite portant le segment Op
- privé de la demi-droite $\{p' \mid \exists \lambda \geq 0 \ \overrightarrow{Op'} = \lambda \overrightarrow{Op}\}$.

On considère l'ordre polaire relatif à O et $\overrightarrow{Op}$.

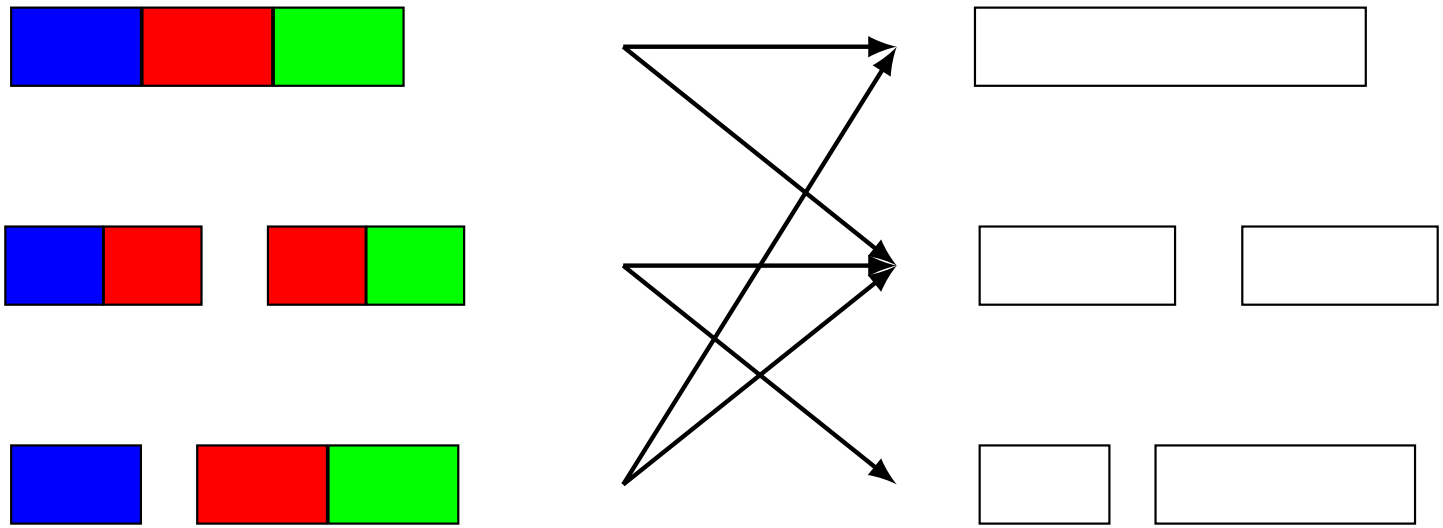


Soit p_i le point minimal et p_j le point maximal. Alors :

- $\overrightarrow{Op_i} \prec \overrightarrow{Op_{i+1\%n}} \prec \overrightarrow{Op_{i+2\%n}} \prec \ldots \prec \overrightarrow{Op_j}$
- $\overrightarrow{Op_i} \prec \overrightarrow{Op_{i-1\%n}} \prec \overrightarrow{Op_{i-2\%n}} \prec \ldots \prec \overrightarrow{Op_j}$

Réduction d'intervalles

Découpage d'un ou deux intervalles en trois et élimination d'une partie.



Réduction

- d'au moins d'un facteur $\frac{3}{4}$ à chaque étape ;
- d'au moins d'un facteur $\frac{1}{2}$ pour deux étapes.

Recherche du point minimal

$Int \leftarrow [0, n-1]$;

While $|Int| \geq 3$ **do**

// Int est un intervalle ou l'union de deux intervalles contenant le minimum

$i \leftarrow indfirstpart(Int)$;

$j \leftarrow indsecondpart(Int)$;

$k \leftarrow indthirdpart(Int)$;

$\min \leftarrow \arg\min(\overrightarrow{Op_x} \mid x \in \{i, j, k\})$;

If $\min = i$ **then** $Int \leftarrow Int \setminus secondpart(Int)$;

If $\min = j$ **then** $Int \leftarrow Int \setminus thirdpart(Int)$;

If $\min = k$ **then** $Int \leftarrow Int \setminus firstpart(Int)$;

return $\arg\min(\overrightarrow{Op_x} \mid x \in Int)$;

A chaque itération le cardinal de Int est diminué d'au moins un quart

d'où une complexité en $O(\log(n))$.

Un algorithme incomplet à la Jarvis (1)

Première étape

On choisit un paramètre $m \leq n$ *supposé être*
une borne supérieure du nombre de points de l'enveloppe convexe.

On partitionne $\mathcal{P}$ en $\lceil n/m \rceil$ sous-ensembles d'au plus m points.

On calcule $\{\mathcal{P}_i\}_{i \leq \lceil n/m \rceil}$
les enveloppes convexes de ces sous-ensembles en $O(n \log(m))$.

Deuxième étape

On applique une variante de l'algorithme de Jarvis qui :

- échoue si l'enveloppe convexe contient plus de m points ;
- recherche le nouveau point à insérer
  comme « minimum » des points minimaux des $\mathcal{P}_i$;
- et par conséquent opère en $O(n \log(m))$.

Un algorithme incomplet à la Jarvis (2)

Soit $r \in \mathcal{C}$ minimal pour l'ordre lexicographique des coordonnées $(y, -x)$.

Insérer(r) ;

For i **from** 1 **to** $\lceil n/m \rceil$ **do**

  If $s \leftarrow$ Minpoint$(\mathcal{P}_i, r, \overrightarrow{rx})$;

  If $i = 1$ **or** $\overrightarrow{rs} \prec \overrightarrow{ro}$ w.r.t. $\overrightarrow{rx}$ **then** $p \leftarrow s$;

Insérer(p) ;

$q \leftarrow r$;

For k **from** 1 **to** m **do**

  For i **from** 1 **to** $\lceil n/m \rceil$ **do**

    If $s \leftarrow$ Minpoint$(\mathcal{P}_i, p, \overrightarrow{qp})$;

    If $i = 1$ **or** $\overrightarrow{ps} \prec \overrightarrow{po}$ w.r.t. $\overrightarrow{qp}$ **then** $o \leftarrow s$;

  If $o = r$ **then return** $\top$ **else** Insérer(o) ;

  $q \leftarrow p$; $p \leftarrow o$;

return $\bot$;

Observation. Si l'algorithme ne s'arrêtait pas après m itérations, sa complexité serait en $O(n(\frac{h}{m} + 1)\log(m))$.

L'algorithme de Chan

L'algorithme de Chan essaye des valeurs de m très rapidement croissantes.

For i **from** 1 **to** $\lceil \log(\log(n)) \rceil$ **do**
  $m \leftarrow \min(2^{2^i}, n)$;
  If IncJarvis$(\mathcal{P}, m) = \top$ **then Return** ;

Analyse de complexité

Soit h le nombre de points de l'enveloppe convexe.

L'algorithme s'arrête après $\lceil \log(\log(h)) \rceil$ itérations.

La $i$ème itération s'exécute en $O(n2^i)$.

L'algorithme s'exécute donc en $O(n2^{\lceil \log(\log(h)) \rceil + 1}) = O(n \log(h))$.