Introduction à l'algorithmique : Complexité

Serge Haddad

LSV, ENS Paris-Saclay & CNRS & Inria

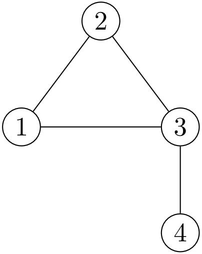
L3

Problèmes et instances

Problèmes

- Connexité d'un graphe
- Tri d'un tableau

Instances



$\longrightarrow$ **true**

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Taille d'une instance

Choix d'une représentation.

Un graphe de n sommets et m arcs peut être représenté par :

- un tableau de n listes d'indices de sommets : $\Theta(n + m\log(n))$;
- une matrice $n \times n$ de booléens : $\Theta(n^2)$.

$f \in O(g)$ ssi $\exists n_0, C > 0\ \forall n \geq n_0\ f(n) \leq Cg(n)$,

$f \in \Omega(g)$ ssi $g \in O(f)$, $f \in \Theta(g)$ ssi $f \in O(g) \cap \Omega(g)$.

Selon la nature des problèmes, les entiers sont considérés :

- de taille constante (borne connue *a priori*)
- de taille variable,
  1. généralement en représentation binaire d'où $\sim \log(n)$ bits pour n ;
  2. en représentation unaire d'où $\sim n$ bits pour n lorsqu'on désire mesurer l'impact des entiers sur la complexité des problèmes.

Abstraction de la taille des instances.

- la « taille » du graphe est $m + n$;
- si analyse multi-paramètres, la « taille » du graphe est (n, m).

Mesures de complexité

Deux mesures usuelles :

- le temps d'exécution ;
- la mémoire occupée.

Quel cas considérer pour une taille d'instance fixée ?

- le pire cas d'exécution ;
- le cas moyen qui suppose une distribution sur les instances de même taille ;
- le meilleur cas (rarement étudié).

Comment s'abstraire de l'évolution des machines ?

- temps d'exécution symbolique : $X \leftarrow E$, $\;$ **if** c **then** ... en 1 unité de temps ;
- opérations significatives : nombre de comparaisons pour un tri.

Complexité asymptotique

On s'intéresse à l'évolution de la complexité en fonction de la taille n :

- $t_{max}(n) = \max(t(I) \mid I \text{ instance de taille } n)$;
- $t_{moy}(n) = \mathbf{E}(t(I))$ où I est une instance de taille n aléatoirement choisie selon la distribution spécifiée.

Illustration : Tri par insertion.

For i **from** 2 **to** n **do**
  $x \leftarrow T[i]$; $j \leftarrow i-1$
  While $j > 0$ **and** $T[j] > x$ **do** $T[j+1] \leftarrow T[j]$; $j \leftarrow j-1$
  $T[j+1] \leftarrow x$

- $T = (n, n-1, \ldots, 1) \Rightarrow t_{max}(n) = \Theta(n^2)$
- Supposons que le contenu de $T[i]$ est choisi dans $\{i, i+1, \ldots\}$ avec $\mathbf{Pr}(T[i] = j) = 2^{-(j-i+1)}$.

$$t_{moy}(n) = \Theta(n)$$

Plan

1. Equations de récurrence

Complexité amortie

Complexité en moyenne

Bornes inférieures de complexité

Intérêt des équations de récurrence (1)

Calcul récursif du maximum d'un tableau ($n = 2^k$).

```
Max(T, n)
If n = 1 then  return(T[1]) ;
For i from  1 to  n/2  do
  If T[2 * i − 1] < T[2 * i] then
    Tbis[i] ← T[2 * i] ;
  Else
    Tbis[i] ← T[2 * i − 1] ;
return(Max(Tbis, n/2)) ;
```

$$t(n) = t(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$$

Intérêt des équations de récurrence (2)

Recherche dichotomique dans un tableau trié ($n = 2^k - 1$).

Cherche(x, T, deb, fin)
$i \leftarrow \lfloor \frac{deb+fin}{2} \rfloor$;
If $x = T[i]$ **then** **return**(i) ;
If $x > T[i]$ **then**
  If $i = fin$ **then** **return**$(\mathbf{false})$;
  return(Cherche$(x, T, i+1, fin)$) ;
Else
  If $i = deb$ **then** **return**$(\mathbf{false})$;
  return(Cherche$(x, T, deb, i-1)$) ;

$$t(n) = t(\frac{n-1}{2}) + \Theta(1)$$

Intérêt des équations de récurrence (3)

Produit de matrices par bloc ($n = 2^k$).

Prod(A, B, n)

If $n = 1$ **then** **return**$(A[1,1] * B[1,1])$;

$$C[1,\tfrac{n}{2}][1,\tfrac{n}{2}] \leftarrow \text{Prod}(A[1,\tfrac{n}{2}][1,\tfrac{n}{2}], B[1,\tfrac{n}{2}][1,\tfrac{n}{2}], \tfrac{n}{2}) + \text{Prod}(A[1,\tfrac{n}{2}][\tfrac{n}{2}+1,n], B[\tfrac{n}{2}+1,n][1,\tfrac{n}{2}], \tfrac{n}{2});$$

$$C[1,\tfrac{n}{2}][\tfrac{n}{2}+1,n] \leftarrow \text{Prod}(A[1,\tfrac{n}{2}][1,\tfrac{n}{2}], B[1,\tfrac{n}{2}][\tfrac{n}{2}+1,n], \tfrac{n}{2}) + \text{Prod}(A[1,\tfrac{n}{2}][\tfrac{n}{2}+1,n], B[\tfrac{n}{2}+1,n][\tfrac{n}{2}+1,n], \tfrac{n}{2});$$

$$C[\tfrac{n}{2}+1,n][1,\tfrac{n}{2}] \leftarrow \text{Prod}(A[\tfrac{n}{2}+1,n][1,\tfrac{n}{2}], B[1,\tfrac{n}{2}][1,\tfrac{n}{2}], \tfrac{n}{2}) + \text{Prod}(A[\tfrac{n}{2}+1,n][\tfrac{n}{2}+1,n], B[\tfrac{n}{2}+1,n][1,\tfrac{n}{2}], \tfrac{n}{2});$$

$$C[\tfrac{n}{2}+1,n][\tfrac{n}{2}+1,n] \leftarrow \text{Prod}(A[\tfrac{n}{2}+1,n][1,\tfrac{n}{2}], B[1,\tfrac{n}{2}][\tfrac{n}{2}+1,n], \tfrac{n}{2}) + \text{Prod}(A[\tfrac{n}{2}+1,n][\tfrac{n}{2}+1,n], B[\tfrac{n}{2}+1,n][\tfrac{n}{2}+1,n], \tfrac{n}{2});$$

return(C) ;

$$t(n) = 8t(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$$

Une équation générique

Soit $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$, une fonction croissante à partir d'un certain rang telle qu'il existe des entiers $n_0 \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$, $a > 0$, $c > 0$ et $d > 0$ pour lesquels :

$$t(n_0) = d$$

$$t(n) = at(n/b) + cn^k \text{ pour } n = n_0 b^p \text{ avec } p \geq 1$$

Alors :

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \Leftrightarrow \log_b(a) < k \\ \Theta(n^k \log_b(n)) & \text{si } a = b^k \Leftrightarrow \log_b(a) = k \\ \Theta(n^{\log_b(a)}) & \text{si } a > b^k \Leftrightarrow \log_b(a) > k \end{cases}$$

Interprétation.

t, le (pire) temps d'exécution d'une fonction récursive croît avec la taille.

a, nombre de sous-problèmes à résoudre

b, facteur de réduction de la taille

n^k, ordre de grandeur du temps d'un appel sans les appels récursifs

Preuve de l'équation

Posons $n = n_0 b^p$. Alors par récurrence, on obtient :

$$t(n) = da^p + \sum_{i=0}^{p-1} ca^i (n/b^i)^k = da^p + cn^k \sum_{i=0}^{p-1} (a/b^k)^i$$

Or $da^p = d(b^{\log_b(a)})^p = d(b^p)^{\log_b(a)} = \frac{d}{n_0^{\log_b(a)}} n^{\log_b(a)} = \Theta(n^{\log_b(a)})$.

Posons $\gamma(n) = \sum_{i=0}^{p-1} (a/b^k)^i$. On a :

- si $a/b^k < 1$ alors $\gamma(n) \sim \frac{1}{1-a/b^k} \Rightarrow \gamma(n) = \Theta(1)$
- si $a/b^k = 1$ alors $k = \log_b(a)$ et $\gamma(n) = p = \log_b(n) - \log_b(n_0) \sim \log_b(n)$
- si $a/b^k > 1$ alors $\gamma(n) \sim \alpha \frac{a^p}{b^{kp}}$ avec $\alpha = (a/b^k - 1)^{-1}$
  $\Rightarrow cn^k \gamma(n) \sim \alpha c n_0^k a^p = \Theta(n^{\log_b(a)})$

Soit $n \geq n_0$ et p tel que $n_0 b^p < n \leq n_0 b^{p+1}$.
$t(n_0 b^p) \leq t(n) \leq t(n_0 b^{p+1})$ et $t(n_0 b^p) = \Theta(t(n_0 b^{p+1}))$.

Généralisation de l'équation

Soit $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$, une fonction croissante à partir d'un certain rang telle qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$, des entiers $n_0 \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$, $a > 0$ et $d > 0$ pour lesquels :

$$t(n_0) = d$$

$$t(n) = at(n/b) + f(n) \text{ pour } n = n_0 b^p \text{ avec } p > 1$$

Alors :

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(f(n)) & \text{si } a < b^k \text{ et } f(n) = \Omega(n^k) \\ & \text{et } af(n/b) \leq cf(n) \text{ avec } 0 < c < 1 \\ \\ \Theta(n^{\log_b(a)} \log_b(n)) & \text{si } f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) \\ \\ \Theta(n^{\log_b(a)}) & \text{si } a > b^k \text{ et } f(n) = O(n^k) \end{cases}$$

Interprétation : $f(n)$ « se comporte » comme n^k.

Applications de l'équation

Calcul récursif du maximum d'un tableau $t(n) = t(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$

$a = 1,\ b = 2,\ k = 1 \Rightarrow a < b^k \Rightarrow t(n) = \Theta(n)$

Recherche dichotomique dans un tableau trié $t(n) = t(\frac{n-1}{2}) + \Theta(1)$

$a = 1,\ b = 2,\ k = 0 \Rightarrow a = b^k \Rightarrow t(n) = \Theta(\log(n))$

Produit de matrices par bloc $t(n) = 8t(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$

$a = 8,\ b = 2,\ k = 2 \Rightarrow a > b^k \Rightarrow t(n) = \Theta(n^{\log_2(8)}) = \Theta(n^3)$

On peut réduire le nombre de multiplications à 7. D'où $t(n) = \Theta(n^{\log_2(7)})$.

Sous-problèmes de taille différente

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, des fonctions telles qu'il existe un nombre réel $0 < K < 1$ et n_0 un entier avec :

$$\forall n > n_0 \ \alpha_1(n) + \ldots + \alpha_k(n) \leq Kn$$

Si une fonction $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ vérifie avec $b > 0$ un réel :

$$\forall n \leq n_0 \ t(n) \leq a_0$$

$$\forall n > n_0 \ t(n) \leq t(\alpha_1(n)) + \ldots + t(\alpha_k(n)) + bn$$

Alors : $t(n) = O(n)$

Interprétation.

k appels récursifs

$\alpha_i(n)$, taille du $i$ème sous-problème associé au problème de taille n

K, facteur de réduction de la taille cumulée

n, ordre de grandeur du temps d'un appel sans les appels récursifs

Preuve

Démontrons par récurrence que $t(n) \leq Dn + a_0$ avec :

$$D = \frac{b + (k-1)a_0}{1 - K} \text{ d'où } DK + b = D - (k-1)a_0$$

Cette inégalité est vérifiée pour $n \leq n_0$.

Si $n > n_0$ alors :

$$\begin{aligned}
t(n) &\leq t(\alpha_1(n)) + \ldots + t(\alpha_k(n)) + bn \\
&\leq ka_0 + D(\alpha_1(n) + \ldots + \alpha_k(n)) + bn \\
&\leq ka_0 + (DK + b)n \\
&= ka_0 + (D - (k-1)a_0)n \\
&= Dn + a_0 + (k-1)a_0(1-n) \\
&\leq Dn + a_0
\end{aligned}$$

Plan

Equations de récurrence

2 Complexité amortie

Complexité en moyenne

Bornes inférieures de complexité

Analyse amortie : illustration

Soit cpt, un compteur de n bits, qu'on peut incrémenter ainsi :

Increment(cpt)
$i \leftarrow 1$; $cpt[i] \leftarrow cpt[i] + 1 \mod 2$;
While $i < n$ **and** $cpt[i] = 0$ **do** $i \leftarrow i + 1$; $cpt[i] \leftarrow cpt[i] + 1 \mod 2$;

Quelle est la complexité de la boucle suivante ?

For i **from** 1 **to** k **do** Increment(cpt) ;

Une analyse superficielle :

- au plus n modifications de bit par incrémentation ;
- d'où une complexité en $O(kn)$.

Une analyse plus approfondie :

- Le $i$ème bit est modifié toutes les 2^{i-1} incrémentations ;
- d'où une complexité en $3\sum_{i=1}^{n}\left\lceil\frac{k}{2^{i-1}}\right\rceil \leq 3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k}{2^{i-1}}+1\right) \leq 6k+3n = \Theta(k+n)$.

Méthode du potentiel

Un *potentiel* pot est une fonction de l'ensemble des états dans $\mathbb{N}$.

Notons $s \xrightarrow{\text{op}} s'$ l'exécution de op depuis l'état s conduisant à l'état s'.
Soit $t(\text{op})$, le temps d'exécution de op.
Alors le *temps d'exécution amorti* (par le potentiel pot) est défini par :

$$a(\text{op}) = t(\text{op}) + \text{pot}(s') - \text{pot}(s)$$

Soit une exécution d'un programme $s_0 \xrightarrow{\text{op}_1} s_1 \cdots \xrightarrow{\text{op}_k} s_k$
Alors $\sum_{i=1}^{k} a(\text{op}_i) = \sum_{i=1}^{k} t(\text{op}_i) + \text{pot}(s_k) - \text{pot}(s_0)$
D'où :

$$\sum_{i=1}^{k} t(\text{op}_i) \leq \sum_{i=1}^{k} a(\text{op}_i) + \text{pot}(s_0)$$

Observations.

- Le potentiel reflète la complexité « cachée dans l'état ».
- Le choix d'un potentiel approprié facilite le calcul de la complexité.

Un potentiel pour le compteur

Increment(cpt)

$i \leftarrow 1$; $cpt[i] \leftarrow cpt[i] + 1 \mod 2$;

While $i < n$ **and** $cpt[i] = 0$ **do** $i \leftarrow i + 1$; $cpt[i] \leftarrow cpt[i] + 1 \mod 2$;

On définit pot comme trois fois le nombre de bits du compteur à 1.

Deux cas d'incrémentation.

- $cpt < 2^n - 1$: $t(\text{Increment}) = 3 + 3n'$ avec n' tours de boucle et le potentiel décroît de $3(n' - 1)$ d'où $a(\text{Increment}) = 6$;
- $cpt = 2^n - 1$: $t(\text{Increment}) = 3 + 3(n - 1)$ et le potentiel décroît de $3n$ d'où $a(\text{Increment}) = 0 \leq 6$.

For i **from** 1 to **to** k **do** Increment(cpt) ;

La complexité amortie de la boucle est inférieure ou égale à $6k$.

La complexité de la boucle est inférieure ou égale à $6k + 3n$.

Gestion d'une pile

PT pointeur sur un tableau ; $n = 1$ taille du tableau ; $top = 0$ sommet de pile ;
Empiler(v) ;
$PT2$ pointeur sur un tableau ; i indice ;
$top \leftarrow top + 1$;
If $top > n$ **then**
    $PT2 \leftarrow$ Allouer($f(n)$) ;
    For i **from** 1 **to** n **do** $(*PT2)[i] \leftarrow (*PT)[i]$;
    Liberer($*PT$) ; $PT \leftarrow PT2$; $n \leftarrow f(n)$;
$(*PT)[top] \leftarrow v$;

f doit vérifier $f(n) > n$ ... mais comment choisir $f(n)$?

$f(n) = 2n$ est un bon choix.

Un potentiel pour la pile

Quelle est la complexité de la boucle suivante ?

For i **from** 1 **to** k **do** Empiler(v) ;

Plus top est proche de n, plus grand est le risque de débordement :

$$\texttt{Pot} = 2top - n + 1$$

Analyse amortie.

- Il n'y a pas de débordement. $t(\text{Empiler}(v)) = 3$ et `Pot` croît de 2.
  D'où $a(\text{Empiler}(v)) = 5$.
- Il y a un débordement. $t(\text{Empiler}(v)) = 7 + n$ et `Pot` décroît de $n + 1$ à 3.
  D'où $a(\text{Empiler}(v)) = 9$.

La complexité amortie de la boucle est inférieure ou égale à $9k$.

La complexité de la boucle est inférieure ou égale à $9k$.

Plan

Complexité en moyenne

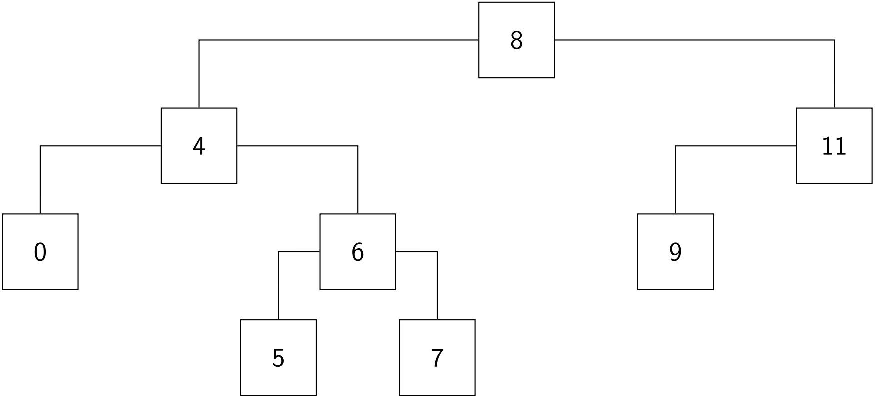
Un arbre binaire de recherche est une structure de données permettant :

- d'insérer des enregistrements ;
- de supprimer des enregistrements ;
- de rechercher des enregistrements par leur clé.

Propriétés.

- Chaque noeud de l'arbre contient un enregistrement ;
- Chaque noeud de l'arbre a (éventuellement) un fils gauche et un fils droit ;
- La clé d'un noeud est supérieure aux clés de son sous-arbre gauche et inférieure aux clés de son sous-arbre droit.

Un arbre binaire de recherche

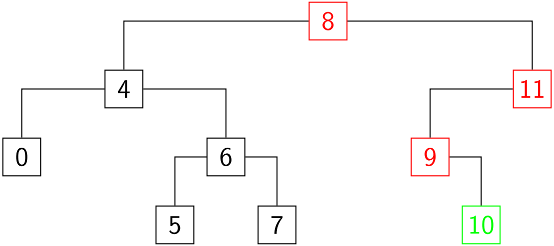


Seules les clés sont présentées.

Recherche et insertion

Recherche par clé. La valeur est comparée à la clé de la racine :

- S'il y a égalité, on renvoie l'enregistrement ;
- Si la valeur est plus petite (resp. grande) et la racine a un fils gauche (resp. droit) on itère le procédé à partir du fils gauche (resp. droit) ;
- Sinon la recherche est infructueuse.



Insertion. On applique la recherche puis on ajoute le fils manquant.

La complexité de ces opérations dépend linéairement de la *hauteur* de l'arbre.

Hypothèse probabiliste

Considérons un arbre binaire obtenu par insertion des clés $\{1, \ldots, n\}$ dans un ordre obtenu par une permutation tirée uniformément.

Quelle est la hauteur moyenne de l'arbre aléatoire ainsi formé ?

Soit h_n la hauteur (aléatoire) de cet arbre.

On introduit :

- $f_n = 2^{h_n}$, la *hauteur exponentielle* de l'arbre.
- $f_{n,i}$, la *hauteur exponentielle* sachant que i est la première clé insérée.

Raisonnement probabiliste

On observe que si i est la première clé insérée,

- les clés $\{1, \ldots, i-1\}$ sont insérées dans le sous-arbre gauche selon une permutation uniforme ;
- les clés $\{i+1, \ldots, n\}$ sont insérées dans le sous-arbre droit selon une permutation uniforme.

D'où :

$$\begin{aligned} f_{n,i} = & \quad 2^{1+\max(h_{i-1}, h_{n-i})} = & 2 \cdot 2^{\max(h_{i-1}, h_{n-i})} \\ \leq & \quad 2(2^{h_{i-1}} + 2^{h_{n-i}}) = & 2(f_{i-1} + f_{n-i}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(f_{n,i}) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2(\mathbf{E}(f_{i-1}) + \mathbf{E}(f_{n-i})) \\ &= \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}(f_i) \end{aligned}$$

Un peu de combinatoire

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\ \mathbf{E}(f_n) \le n^3 + 1}$$

Preuve.

Elle est satisfaite pour $n = 0$ puisque $f_0 = 1$ et pour $n = 1$ puisque $f_1 = 2$.

Soit $n \geq 2$. Supposons-la satisfaite jusqu'à $n - 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(f_n) \le \quad & \frac{4}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{E}(f_i) \le \quad & \frac{4}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i^3+1) \\
= \quad & \frac{4}{n}(\frac{1}{4}n^2(n-1)^2 + n) = \quad & n(n-1)^2 + 4 \le n^3
\end{aligned}$$

□

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\ \mathbf{E}(h_n) \le 3\log_2(n) + 1}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
2^{\mathbf{E}(h_n)} \le \quad & \mathbf{E}(2^{h_n}) \quad & (\textit{par convexité de } 2^x) \\
= \quad & \mathbf{E}(f_n) \le \quad & n^3 + 1
\end{aligned}$$

D'où : $\mathbf{E}(h_n) \le \log_2(n^3+1) = \log_2(n^3(1+\frac{1}{n^3})) = \log_2(n^3) + \log_2(1+\frac{1}{n^3}) \le 3\log_2(n) + 1$

□

Plan

Equations de récurrence

Complexité amortie

Complexité en moyenne

4 Bornes inférieures de complexité

Bornes inférieures de complexité

Soit tp un type de données qui permet uniquement :

- les affectations ;
- les comparaisons.

On considère un algorithme $\mathcal{A}$ qui trie un tableau T de n données de type tp.
On suppose que T contient initialement une permutation des données $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ où les v_i sont toutes différentes des constantes de $\mathcal{A}$.

Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ et s un état de $\mathcal{A}$.
L'état $\sigma(s)$ est obtenu en :

- en conservant les mêmes informations de contrôle (appels en cours, prochaines instructions, etc.) ;
- en conservant tout donnée $v \notin \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$;
- en substituant à toute donnée v_i la donnée $v_{\sigma(i)}$.

Evolution des états

Observation critique. Considérons les états s et $\sigma(s)$ et op la prochaine instruction à exécuter.

Supposons que $s \xrightarrow{\text{op}} s'$. Si :

- op n'est pas une comparaison de données de tp
- ou op est une comparaison de données de tp
  et renvoie le même résultat pour s et $\sigma(s)$

Alors $\sigma(s) \xrightarrow{\text{op}} \sigma(s')$.

Dans le cas d'une comparaison sur tp qui ne renvoie pas le même résultat, on parle de comparaison *discriminante*.

Une propriété des arbres binaires

La hauteur moyenne des feuilles d'un arbre binaire comportant n feuilles est supérieure ou égale à $\log_2(n)$.

Preuve par récurrence. *(cas $n = 1$ trivial)*

Soit un arbre binaire $\mathcal{A}$ comportant n feuilles.

Soient $\mathcal{A}_g$ et $\mathcal{A}_d$ ses sous-arbres comportant p et $n - p$ feuilles.

Par induction, la somme des hauteurs des feuilles de $\mathcal{A}_g$ (resp. $\mathcal{A}_d$) est supérieure ou égale à $p \log_2(p)$ (resp. $(n-p)\log_2(n-p)$).

Par conséquent, la somme des hauteurs des feuilles de $\mathcal{A}$ est supérieure ou égale à $n + p\log_2(p) + (n-p)\log_2(n-p)$.

La fonction $x \log_2(x)$ est convexe : $\frac{1}{2}(p\log_2(p) + (n-p)\log_2(n-p)) \geq \frac{n}{2}\log_2(\frac{n}{2})$.

D'où : $n + p\log_2(p) + (n-p)\log_2(n-p) \geq n + n(\log_2(n) - 1) = n\log_2(n)$.

$\square$

Un arbre binaire

On construit itérativement un arbre binaire de la façon suivante :

- La racine r contient les $n!$ états initiaux de $\mathcal{A}$ correspondant aux permutations de $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$.

  Pour toute paire d'états $s_0 \neq s'_0$
  il existe une permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$ telle que $s'_0 = \sigma(s_0)$.

- Etant donné un sommet u de l'arbre contenant un sous-ensemble S d'états identiques à une permutation près, il y a deux possibilités :
  - soit l'exécution à partir de ces états se termine sans rencontrer une comparaison discriminante.

    Alors u est une feuille de l'arbre.
  - soit l'exécution à partir de ces états rencontre une comparaison discriminante. Alors u a deux fils contenant $S_\top$ et $S_\perp$ les états atteints respectivement après un résultat positif ou négatif de la comparaison.

Analyse de l'arbre binaire

$\boxed{\text{Toutes les feuilles de l'arbre contiennent des singletons.}}$

Preuve.

Considérons une feuille de l'arbre.

Supposons que le sous-ensemble d'états associé n'est pas un singleton.

Considérons s et $\sigma(s)$ avec $\sigma \neq \text{id}$, deux états atteints après terminaison de $\mathcal{A}$.

Alors T n'est pas trié dans l'un des deux états.

□

Soit une distribution uniforme sur les permutations de $\{1, \ldots, n\}$.
Alors le nombre moyen de comparaisons discriminantes de $\mathcal{A}$
est supérieur ou égal à $\log_2(n!) = \Theta(n \log(n))$.

Preuve.

Il y a $n!$ feuilles dans cet arbre binaire.

□