

Algorithmique avancée : Programmation linéaire

Serge Haddad

LSV, ENS Paris-Saclay & CNRS & Inria

L3

- 1 Spécification du problème
- 2 L'algorithme du simplexe
- 3 La dualité
- 4 Un algorithme en temps polynomial

Plan

1 Spécification du problème

L'algorithme du simplexe

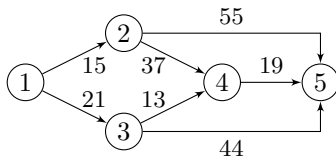
La dualité

Un algorithme en temps polynomial

Un exemple introductif

Le problème du flot maximal. Soit un graphe orienté $G = (V, E)$ avec $s, d \in V$ et doté d'une capacité $\kappa : E \rightarrow \mathbb{N}$ tel que :

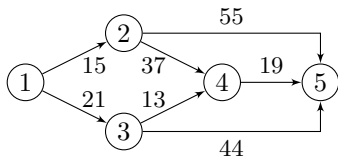
- ▶ s n'ait pas d'arc entrant et tout sommet soit accessible depuis s ;
- ▶ d n'ait pas d'arc sortant et tout sommet soit co-accessible depuis d .



Un exemple introductif

Le problème du flot maximal. Soit un graphe orienté $G = (V, E)$ avec $s, d \in V$ et doté d'une capacité $\kappa : E \rightarrow \mathbb{N}$ tel que :

- ▶ s n'ait pas d'arc entrant et tout sommet soit accessible depuis s ;
- ▶ d n'ait pas d'arc sortant et tout sommet soit co-accessible depuis d .



Le problème du flot maximal consiste à attribuer un débit à chaque arc

- ▶ qui n'excède pas la capacité ;
- ▶ qui vérifie les lois de Kirchhoff ;
- ▶ qui maximise le débit sortant de s .

Spécification formelle

Soit l'ensemble de variables $\{x_{u,v}\}_{(u,v) \in E}$ dans \mathbb{R}_+ .

Maximiser $\sum_{(s,v) \in E} x_{s,v}$ tel que :

$$\forall v \in V \setminus \{s, d\} \quad \sum_{(u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{(v,w) \in E} x_{v,w} = 0$$

$$\forall (u,v) \in E \quad x_{u,v} \leq \kappa(u,v)$$

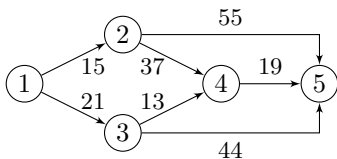
Spécification formelle

Soit l'ensemble de variables $\{x_{u,v}\}_{(u,v) \in E}$ dans \mathbb{R}_+ .

Maximiser $\sum_{(s,v) \in E} x_{s,v}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall v \in V \setminus \{s, d\} \quad & \sum_{(u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{(v,w) \in E} x_{v,w} = 0 \\ \forall (u,v) \in E \quad & x_{u,v} \leq \kappa(u,v) \end{aligned}$$

Illustration.



Maximiser $x_{1,2} + x_{1,3}$ tel que :

- ▶ $x_{1,2} = x_{2,4} + x_{2,5}$, $x_{1,3} = x_{3,4} + x_{3,5}$, $x_{2,4} + x_{3,4} = x_{4,5}$;
- ▶ $x_{1,2} \leq 15$, $x_{1,3} \leq 21$, $x_{2,4} \leq 37$, $x_{2,5} \leq 55$, $x_{3,4} \leq 13$, $x_{3,5} \leq 44$, $x_{4,5} \leq 19$.

Différentes formulations

Formulation générale.

- ▶ $A = (a_{i,j})$ une matrice entière indicée par $I \uplus I' \times J \uplus J'$
- ▶ $b = (b_i)$ un vecteur colonne entier indicé par $I \uplus I'$
- ▶ $c = (c_j)$ un vecteur ligne entier indicé par $J \uplus J'$

Interprétation.

Un ensemble $\{x_j\}_{j \in J}$ de variables dans \mathbb{R}_+ et $\{x_j\}_{j \in J'}$ de variables dans \mathbb{R}

Un ensemble I d'égalités : $\forall i \in I \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j = b_i$

Un ensemble I' d'inégalités : $\forall i \in I' \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j \geq b_i$

Une fonction de coût à minimiser : $\sum_{j \in J \uplus J'} c_j x_j$

Différentes formulations

Formulation générale.

- ▶ $A = (a_{i,j})$ une matrice entière indicée par $I \uplus I' \times J \uplus J'$
- ▶ $b = (b_i)$ un vecteur colonne entier indicé par $I \uplus I'$
- ▶ $c = (c_j)$ un vecteur ligne entier indicé par $J \uplus J'$

Interprétation.

Un ensemble $\{x_j\}_{j \in J}$ de variables dans \mathbb{R}_+ et $\{x_j\}_{j \in J'}$ de variables dans \mathbb{R}

Un ensemble I d'égalités : $\forall i \in I \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j = b_i$

Un ensemble I' d'inégalités : $\forall i \in I' \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j \geq b_i$

Une fonction de coût à minimiser : $\sum_{j \in J \uplus J'} c_j x_j$

Formulation standard.

Uniquement des variables positives ($I' = \emptyset$) et des égalités ($J' = \emptyset$).

Différentes formulations

Formulation générale.

- ▶ $A = (a_{i,j})$ une matrice entière indicée par $I \uplus I' \times J \uplus J'$
- ▶ $b = (b_i)$ un vecteur colonne entier indicé par $I \uplus I'$
- ▶ $c = (c_j)$ un vecteur ligne entier indicé par $J \uplus J'$

Interprétation.

Un ensemble $\{x_j\}_{j \in J}$ de variables dans \mathbb{R}_+ et $\{x_j\}_{j \in J'}$ de variables dans \mathbb{R}

Un ensemble I d'égalités : $\forall i \in I \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j = b_i$

Un ensemble I' d'inégalités : $\forall i \in I' \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j \geq b_i$

Une fonction de coût à minimiser : $\sum_{j \in J \uplus J'} c_j x_j$

Formulation standard.

Uniquement des variables positives ($I' = \emptyset$) et des égalités ($J' = \emptyset$).

Formulations canoniques.

Uniquement des variables positives ($I' = \emptyset$) et des inégalités ($J = \emptyset$).

Uniquement des variables réelles ($I = \emptyset$) et des inégalités ($J = \emptyset$).

Intérêt des formulations restreintes

Formulation standard.

- Se prête à l'algorithme du simplexe.

Intérêt des formulations restreintes

Formulation standard.

- Se prête à l'algorithme du simplexe.

Formulation canonique.

- Se prête à un algorithme en temps polynomial.
- Donne lieu à une interprétation géométrique.

Intérêt des formulations restreintes

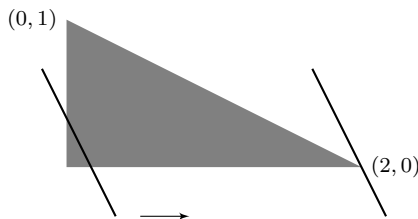
Formulation standard.

- Se prête à l'algorithme du simplexe.

Formulation canonique.

- Se prête à un algorithme en temps polynomial.
- Donne lieu à une interprétation géométrique.

Maximiser $2x_1 + x_2$ tel que $0 \leq x_1 \wedge 0 \leq x_2 \wedge x_1 + 2x_2 \leq 2$



Transformer la formulation générale

De la formulation générale à la formulation canonique.

- ▶ Remplacer $\sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j = b_i$ par :

$$\sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j \geq b_i \wedge - \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j \geq -b_i$$

- ▶ Pour tout $j \in J'$, ajouter deux variables positives x_j^+, x_j^-
- ▶ Substituer dans les équations x_j par $x_j^+ - x_j^-$

Transformer la formulation générale

De la formulation générale à la formulation canonique.

- ▶ Remplacer $\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j = b_i$ par :
$$\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j \geq b_i \wedge - \sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j \geq -b_i$$
- ▶ Pour tout $j \in J'$, ajouter deux variables positives x_j^+, x_j^-
- ▶ Substituer dans les équations x_j par $x_j^+ - x_j^-$

De la formulation générale à la formulation standard.

- ▶ Pour tout $i \in I'$, ajouter une variable positive x_i^s
- ▶ Remplacer $\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j \geq b_i$ par $\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j - x_i^s = b_i$
- ▶ Pour tout $j \in J'$, ajouter deux variables positives x_j^+, x_j^-
- ▶ Substituer dans les équations x_j par $x_j^+ - x_j^-$

Transformer la formulation générale

De la formulation générale à la formulation canonique.

- ▶ Remplacer $\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j = b_i$ par :
$$\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j \geq b_i \wedge -\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j \geq -b_i$$
- ▶ Pour tout $j \in J'$, ajouter deux variables positives x_j^+, x_j^-
- ▶ Substituer dans les équations x_j par $x_j^+ - x_j^-$

De la formulation générale à la formulation standard.

- ▶ Pour tout $i \in I'$, ajouter une variable positive x_i^s
- ▶ Remplacer $\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j \geq b_i$ par $\sum_{j \in J \cup J'} a_{i,j} x_j - x_i^s = b_i$
- ▶ Pour tout $j \in J'$, ajouter deux variables positives x_j^+, x_j^-
- ▶ Substituer dans les équations x_j par $x_j^+ - x_j^-$

Observation. Les transformations s'effectuent en temps linéaire.

Plan

Spécification du problème

② L'algorithme du simplexe

La dualité

Un algorithme en temps polynomial

Un pré-calcul

Rappel de la spécification.

$A = (a_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$, $b = (b_i)_{i \leq m}$ et $c = (c_j)_{j \leq n}$.

$x = (x_i)_{i \leq n}$ est un vecteur de variables.

Minimiser $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} c \cdot x$ tel que $Ax = b \wedge x \geq 0$

Un pré-calcul

Rappel de la spécification.

$A = (a_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$, $b = (b_i)_{i \leq m}$ et $c = (c_j)_{j \leq n}$.

$x = (x_i)_{i \leq n}$ est un vecteur de variables.

Minimiser $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} c \cdot x$ tel que $Ax = b \wedge x \geq 0$

Élimination des équations redondantes (Gauss).

For i from 1 to m **do**

If $\exists a_{i,k} \neq 0$ **then**

For i' from $i + 1$ to m **do**

For j from 1 to n **do** $a_{i',j} \leftarrow a_{i',j} - a_{i,j} \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$

$b_{i'} \leftarrow b_{i'} - b_i \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$

Else if $b_i \neq 0$ **then return** pas de solutions

Else supprimer la ligne i

Un pré-calcul

Rappel de la spécification.

$A = (a_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$, $b = (b_i)_{i \leq m}$ et $c = (c_j)_{j \leq n}$.

$x = (x_i)_{i \leq n}$ est un vecteur de variables.

Minimiser $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} c \cdot x$ tel que $Ax = b \wedge x \geq 0$

Élimination des équations redondantes (Gauss).

For i **from** 1 **to** m **do**

If $\exists a_{i,k} \neq 0$ **then**

For i' **from** $i + 1$ **to** m **do**

For j **from** 1 **to** n **do** $a_{i',j} \leftarrow a_{i',j} - a_{i,j} \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$

$b_{i'} \leftarrow b_{i'} - b_i \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$

Else if $b_i \neq 0$ **then return** pas de solutions

Else supprimer la ligne i

Résultat. Le problème est inchangé

mais le rang de A est égal à son nombre de lignes (toujours noté m), d'où $n \geq m$.

Illustration

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	1	1	0	5	1	3
	1	1	1	4	4	6
c	1	1	1	1	1	0

Illustration

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	1	1	0	5	1	3
	1	1	1	4	4	6

c	1	1	1	1	1	0
-----	---	---	---	---	---	---

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	1	1	1	2	5

c	1	1	1	1	1	0
-----	---	---	---	---	---	---

Illustration

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	1	1	0	5	1	3
	1	1	1	4	4	6

c	1	1	1	1	1	0
-----	---	---	---	---	---	---

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	1	1	1	2	5

c	1	1	1	1	1	0
-----	---	---	---	---	---	---

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3

c	1	1	1	1	1	0
-----	---	---	---	---	---	---

Base d'un programme linéaire

Soit $B \subseteq J$ avec $\bar{B} = J \setminus B$.

On note A_B la sous-matrice de A réduite aux colonnes de B .

B est une *base* si $|B| = m$, A_B est inversible et $A_B^{-1}b \geq 0$.

Base d'un programme linéaire

Soit $B \subseteq J$ avec $\bar{B} = J \setminus B$.

On note A_B la sous-matrice de A réduite aux colonnes de B .

B est une *base* si $|B| = m$, A_B est inversible et $A_B^{-1}b \geq 0$.

Soit le vecteur $x^{(B)} \geq 0$ défini par :

- ▶ pour tout $j \in B$, $x_j^{(B)} = (A_B^{-1}b)_j$;
- ▶ pour tout $j \in \bar{B}$, $x_j^{(B)} = 0$.

Alors $Ax^{(B)} = b$.

Base d'un programme linéaire

Soit $B \subseteq J$ avec $\bar{B} = J \setminus B$.

On note A_B la sous-matrice de A réduite aux colonnes de B .

B est une *base* si $|B| = m$, A_B est inversible et $A_B^{-1}b \geq 0$.

Soit le vecteur $x^{(B)} \geq 0$ défini par :

- ▶ pour tout $j \in B$, $x_j^{(B)} = (A_B^{-1}b)_j$;
- ▶ pour tout $j \in \bar{B}$, $x_j^{(B)} = 0$.

Alors $Ax^{(B)} = b$.

Illustration $B = \{1, 2, 3\}$ et $x^{(B)} = (1, 2, 3, 0, 0)$.

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3
c	1	1	1	1	1	0

Fonction de coût et base

Observation.

On peut supposer que le domaine de $f(x) = c \cdot x$ est $\{x \mid Ax = b\}$.

On note x_B la restriction de x à B et $x_{\bar{B}}$ la restriction de x à \bar{B} .

Fonction de coût et base

Observation.

On peut supposer que le domaine de $f(x) = c \cdot x$ est $\{x \mid Ax = b\}$.

On note x_B la restriction de x à B et $x_{\bar{B}}$ la restriction de x à \bar{B} .

Soit x tel que $Ax = b$. Puisque $A_B x_B + A_{\bar{B}} x_{\bar{B}} = b$, $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_{\bar{B}} x_{\bar{B}}$.

Par conséquent la fonction de coût peut se réécrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B \cdot x_B + c_{\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}} \\ &= c_B A_B^{-1} b + (c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}) x_{\bar{B}} \\ &= c \cdot x^{(B)} + (c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}) x_{\bar{B}} \end{aligned}$$

Fonction de coût et base

Observation.

On peut supposer que le domaine de $f(x) = c \cdot x$ est $\{x \mid Ax = b\}$.

On note x_B la restriction de x à B et $x_{\bar{B}}$ la restriction de x à \bar{B} .

Soit x tel que $Ax = b$. Puisque $A_B x_B + A_{\bar{B}} x_{\bar{B}} = b$, $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_{\bar{B}} x_{\bar{B}}$.

Par conséquent la fonction de coût peut se réécrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B \cdot x_B + c_{\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}} \\ &= c_B A_B^{-1} b + (c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}) x_{\bar{B}} \\ &= c \cdot x^{(B)} + (c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}) x_{\bar{B}} \end{aligned}$$

Notations. $A_{B\bar{B}} \stackrel{\text{def}}{=} A_B^{-1} A_{\bar{B}}$, $b_{B\bar{B}} \stackrel{\text{def}}{=} A_B^{-1} b$ et $c_{B\bar{B}} \stackrel{\text{def}}{=} c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}$.

Illustration

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3

c	1	1	1	1	1	0
-----	---	---	---	---	---	---

$$x_1 = 1 - 3x_4 - 2x_5, \quad x_2 = 2 - 2x_4 + x_5 \quad \text{et} \quad x_3 = 3 + x_4 - 3x_5$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 - 3x_4 - 2x_5 + 2 - 2x_4 + x_5 + x_3 + 3 + x_4 - 3x_5 + x_4 + x_5 \\
 &= 6 - 3x_4 - 3x_5
 \end{aligned}$$

$(Id, A_{B\bar{B}})$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$b_{B\bar{B}}$
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3

$c_{B\bar{B}}$	-3	-3	6
			$c \cdot x^{(B)}$

Une itération du simplexe (1)

L'algorithme maintient :

- ▶ la base courante B et sa solution $x^{(B)}$;
- ▶ la correspondance entre les indices de B et de I ;
(dans l'exemple, $i_1^B = 1$, $i_2^B = 2$ et $i_3^B = 3$)
- ▶ l'équation $x_B + A_{B\bar{B}}x_{\bar{B}} = b_{B\bar{B}}$;
- ▶ l'écriture courante de la fonction de coût $f(x) = c \cdot x^{(B)} + c_{B\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}}$.

Une itération du simplexe (1)

L'algorithme maintient :

- ▶ la base courante B et sa solution $x^{(B)}$;
- ▶ la correspondance entre les indices de B et de I ;
(dans l'exemple, $i_1^B = 1$, $i_2^B = 2$ et $i_3^B = 3$)
- ▶ l'équation $x_B + A_{B\bar{B}}x_{\bar{B}} = b_{B\bar{B}}$;
- ▶ l'écriture courante de la fonction de coût $f(x) = c \cdot x^{(B)} + c_{B\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}}$.

A l'issue d'une itération, il y a trois possibilités :

- ▶ $x^{(B)}$ est une solution optimale ;
- ▶ le problème n'est pas minoré : $\min(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0) = -\infty$;
- ▶ la nouvelle base $B' = B \cup \{e\} \setminus \{s\}$ vérifie $f(x^{(B')}) \leq f(x^{(B)})$
et $f(x^{(B')}) < f(x^{(B)})$ si $x^{(B')} \neq x^{(B)}$.

Une itération du simplexe (2)

- Si $c_{B\bar{B}} \geq 0$ alors $x^{(B)}$ est une solution optimale.

Une itération du simplexe (2)

- Si $c_{B\bar{B}} \geq 0$ alors $x^{(B)}$ est une solution optimale.
- Sinon l'algorithme choisit un indice entrant e tel que $c_{B\bar{B}}[e] < 0$.

On augmente $x^{(B)}[e] = 0$ autant que possible en modifiant pour chaque $j \in B$, $x^{(B)}[j]$ de manière à satisfaire l'équation i_j^B :

$$(i_j^B) \quad x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

Une itération du simplexe (2)

- Si $c_{B\bar{B}} \geq 0$ alors $x^{(B)}$ est une solution optimale.
- Sinon l'algorithme choisit un indice entrant e tel que $c_{B\bar{B}}[e] < 0$.

On augmente $x^{(B)}[e] = 0$ autant que possible en modifiant pour chaque $j \in B$, $x^{(B)}[j]$ de manière à satisfaire l'équation i_j^B :

$$(i_j^B) \quad x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

- Si $\{j \mid A_{B\bar{B}}[i_j, e] > 0\} = \emptyset$, $x^{(B)}[e]$ peut croître indéfiniment et le problème n'est pas minoré.

Une itération du simplexe (2)

- Si $c_{B\bar{B}} \geq 0$ alors $x^{(B)}$ est une solution optimale.
- Sinon l'algorithme choisit un indice entrant e tel que $c_{B\bar{B}}[e] < 0$.

On augmente $x^{(B)}[e] = 0$ autant que possible en modifiant pour chaque $j \in B$, $x^{(B)}[j]$ de manière à satisfaire l'équation i_j^B :

$$(i_j^B) \quad x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

- Si $\{j \mid A_{B\bar{B}}[i_j, e] > 0\} = \emptyset$, $x^{(B)}[e]$ peut croître indéfiniment et le problème n'est pas minoré.

- Sinon

$$x^{(B')}[e] = \min\left(\frac{b_{B\bar{B}}[i_j^B]}{A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]} \mid A_{B\bar{B}}[i_j^B, e] > 0\right).$$

$$s \in \{j \mid A_{B\bar{B}}[i_j^B, e] > 0 \wedge A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x^{(B')}[e] = b_{B\bar{B}}[i_j^B]\}.$$

$$i_e^{B'} = i_s^B \text{ et pour tout } j \in B \setminus \{e\}, i_j^{B'} = i_j^B.$$

Illustration

$(Id, A_{B\bar{B}})$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	3	2
0	1	0	2	-1
0	0	1	-1	3

$b_{B\bar{B}}$

1
2
3

$c_{B\bar{B}}$

-3	-3
----	----

6

$c \cdot x^{(B)}$

Illustration

$(Id, A_{B\bar{B}})$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$b_{B\bar{B}}$
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3
$c_{B\bar{B}}$				-3	-3	6
						$c \cdot x^{(B)}$

Soit $e = 5$.

- ▶ Pour satisfaire l'équation (1) avec $x_1 \geq 0$, x_5 peut croître jusqu'à $\frac{1}{2}$ car $x_1 + 2x_5$ doit rester constant ;
- ▶ Pour satisfaire l'équation (2) avec $x_2 \geq 0$, x_5 peut croître indéfiniment car $x_2 - x_5$ doit rester constant ;
- ▶ Pour satisfaire l'équation (3) avec $x_3 \geq 0$, x_5 peut croître jusqu'à $\frac{3}{3}$ car $x_3 + 3x_5$ doit rester constant.

D'où $s = 1$ et $x^{(B')}[e] = \frac{1}{2}$.

Une itération du simplexe (3)

Mise à jour des coefficients des équations.

- L'équation i_s^B

$$x_s + A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

devient l'équation $i_e^{B'}$

$$A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}x_s + x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

Une itération du simplexe (3)

Mise à jour des coefficients des équations.

- L'équation i_s^B

$$x_s + A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

devient l'équation $i_e^{B'}$

$$A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}x_s + x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

- Soit $E \stackrel{\text{def}}{=} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}(b_{B\bar{B}}[i_s^B] - x_j - \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'})$. Alors $x_e = E$.

Une itération du simplexe (3)

Mise à jour des coefficients des équations.

- L'équation i_s^B

$$x_s + A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

devient l'équation $i_e^{B'}$

$$A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}x_s + x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

- Soit $E \stackrel{\text{def}}{=} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}(b_{B\bar{B}}[i_s^B] - x_j - \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'})$. Alors $x_e = E$.

- Une équation $i_j^B \neq i_s^B$

$$x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

devient l'équation $i_j^{B'}$

$$x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]E + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

Une itération du simplexe (3)

Mise à jour des coefficients des équations.

- L'équation i_s^B

$$x_s + A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

devient l'équation $i_e^{B'}$

$$A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}x_s + x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

- Soit $E \stackrel{\text{def}}{=} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}(b_{B\bar{B}}[i_s^B] - x_j - \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'})$. Alors $x_e = E$.

- Une équation $i_j^B \neq i_s^B$

$$x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

devient l'équation $i_j^{B'}$

$$x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]E + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

Calcul de f .

$$f(x) = c \cdot x^{(B)} + c_{B\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}} \text{ devient } c \cdot x^{(B)} + \sum_{j \in \bar{B} \setminus \{e\}} c_{B\bar{B}}[j]x_j + c_{B\bar{B}}[e]E.$$

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.
- $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$.

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.
- $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$.
- L'équation $x_2 + 2x_4 - x_5 = 2$ devient $x_2 + 2x_4 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 2$
soit $x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{2}$.

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.
- $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$.
- L'équation $x_2 + 2x_4 - x_5 = 2$ devient $x_2 + 2x_4 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 2$
soit $x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{2}$.
- L'équation $x_3 - x_4 + 3x_5 = 3$ devient $x_3 - x_4 + 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 3$
soit $x_3 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1 = \frac{3}{2}$

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.
- $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$.
- L'équation $x_2 + 2x_4 - x_5 = 2$ devient $x_2 + 2x_4 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 2$
soit $x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{2}$.
- L'équation $x_3 - x_4 + 3x_5 = 3$ devient $x_3 - x_4 + 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 3$
soit $x_3 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1 = \frac{3}{2}$
- $f(x) = 6 - 3x_4 - 3x_5$ devient $6 - 3x_4 - 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4)$ soit $\frac{9}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_1$.

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.
- $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$.
- L'équation $x_2 + 2x_4 - x_5 = 2$ devient $x_2 + 2x_4 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 2$
soit $x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{2}$.
- L'équation $x_3 - x_4 + 3x_5 = 3$ devient $x_3 - x_4 + 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 3$
soit $x_3 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1 = \frac{3}{2}$
- $f(x) = 6 - 3x_4 - 3x_5$ devient $6 - 3x_4 - 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4)$ soit $\frac{9}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_1$.

$A_{B'\bar{B}'}$	x_5	x_2	x_3	x_4	x_1
	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	1	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$b_{B'\bar{B}'}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$
$\frac{3}{2}$

$c_{B'\bar{B}'}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
------------------	---------------	---------------

$$c \cdot x^{(B')}$$

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.
- $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$.
- L'équation $x_2 + 2x_4 - x_5 = 2$ devient $x_2 + 2x_4 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 2$
soit $x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{2}$.
- L'équation $x_3 - x_4 + 3x_5 = 3$ devient $x_3 - x_4 + 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 3$
soit $x_3 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1 = \frac{3}{2}$
- $f(x) = 6 - 3x_4 - 3x_5$ devient $6 - 3x_4 - 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4)$ soit $\frac{9}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_1$.

$A_{B'\bar{B}'}$	x_5	x_2	x_3	x_4	x_1
	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	1	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$b_{B'\bar{B}'}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$
$\frac{3}{2}$

$c_{B'\bar{B}'}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
------------------	---------------	---------------

$c \cdot x^{(B')}$	$\frac{9}{2}$
--------------------	---------------

Cette solution est optimale.

Terminaison

Observations.

- Il y a un nombre fini de bases inférieur ou égal à $\binom{n}{m}$ (donc exponentiel).
- La terminaison est garantie si on ne rencontre pas deux fois la même base.
- f décroît ou est inchangé à chaque itération.

Terminaison

Observations.

- Il y a un nombre fini de bases inférieur ou égal à $\binom{n}{m}$ (donc exponentiel).
- La terminaison est garantie si on ne rencontre pas deux fois la même base.
- f décroît ou est inchangé à chaque itération.

Si l'algorithme ne termine pas alors il existe $B_1, B_2, \dots, B_K = B_1$ une suite de bases rencontrées par l'algorithme avec $f(x^{(B_1)}) = \dots = f(x^{(B_K)})$

ce qui implique que :

- ▶ $x^{(B_1)} = \dots = x^{(B_K)}$
- ▶ les variables correspondant aux indices entrants et sortants des B_i sont nulles.

Terminaison

Observations.

- Il y a un nombre fini de bases inférieur ou égal à $\binom{n}{m}$ (donc exponentiel).
- La terminaison est garantie si on ne rencontre pas deux fois la même base.
- f décroît ou est inchangé à chaque itération.

Si l'algorithme ne termine pas alors il existe $B_1, B_2, \dots, B_K = B_1$ une suite de bases rencontrées par l'algorithme avec $f(x^{(B_1)}) = \dots = f(x^{(B_K)})$

ce qui implique que :

- ▶ $x^{(B_1)} = \dots = x^{(B_K)}$
- ▶ les variables correspondant aux indices entrants et sortants des B_i sont nulles.

La règle de Bland. Choisir le plus petit indice entrant et sortant possible.

Si la règle de Bland est appliquée alors l'algorithme termine.

(preuve par l'absurde)

Correction de la règle de Bland (1)

- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1 \leq k < K} B_k$ ainsi que les équations $i_j^{B_k}$ alors l'algorithme ne termine pas non plus.
- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1 \leq k < K} \bar{B}_k$ et les occurrences de x_j dans les équations et dans f alors l'algorithme ne termine pas non plus.

Correction de la règle de Bland (1)

- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1 \leq k < K} B_k$ ainsi que les équations $i_j^{B_k}$ alors l'algorithme ne termine pas non plus.
- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1 \leq k < K} \bar{B}_k$ et les occurrences de x_j dans les équations et dans f alors l'algorithme ne termine pas non plus.

Nous pouvons donc supposer que :

- ▶ tout indice entre et sort de la base au moins une fois durant la suite d'itérations ;
- ▶ pour tout k , $x^{(B_k)} = 0$ et donc $f(x^{(B_k)}) = 0$.

Correction de la règle de Bland (1)

- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1 \leq k < K} B_k$ ainsi que les équations $i_j^{B_k}$ alors l'algorithme ne termine pas non plus.
- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1 \leq k < K} \bar{B}_k$ et les occurrences de x_j dans les équations et dans f alors l'algorithme ne termine pas non plus.

Nous pouvons donc supposer que :

- ▶ tout indice entre et sort de la base au moins une fois durant la suite d'itérations ;
- ▶ pour tout k , $x^{(B_k)} = 0$ et donc $f(x^{(B_k)}) = 0$.

Soit jm l'indice maximum et :

- ▶ B_k telle que $jm \in \bar{B}_k \cap B_{k+1}$ (jm entre dans la base B_{k+1})
- ▶ $B_{k'}$ telle que $jm \in B_{k'} \cap \bar{B}_{k'+1}$ (jm sort de la base $B_{k'}$)
- ▶ jn tel que $jn \in \bar{B}_{k'} \cap B_{k'+1}$ (jn entre dans la base $B_{k'+1}$)

Correction de la règle de Bland (2)

Définissons le vecteur y par :

- ▶ $y[jn] = 1$;
- ▶ Pour tout $j \in B_{k'}$, $y[j] = -A_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn]$;
- ▶ Pour tout $j \in \bar{B}_{k'} \setminus \{in\}$, $y[j] = 0$.

Correction de la règle de Bland (2)

Définissons le vecteur y par :

- ▶ $y[jn] = 1$;
- ▶ Pour tout $j \in B_{k'}$, $y[j] = -A_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn]$;
- ▶ Pour tout $j \in \bar{B}_{k'} \setminus \{jn\}$, $y[j] = 0$.

Par construction, $Ay = b$.

$f(y) = f(\mathbf{0}) + c_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[jn] = c_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[jn] < 0$ puisque jn entre dans $B_{k'+1}$.

Puisque jm sort de $B_{k'}$, $A_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[i_{jm}^{B_{k'}}, jn] > 0$.

Pour tout $j \in B_{k'} \setminus \{jm\}$, $A_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn] \leq 0$ d'après la règle de Bland.

D'où $y[j] < 0 \Leftrightarrow j = jm$.

Correction de la règle de Bland (2)

Définissons le vecteur y par :

- ▶ $y[jn] = 1$;
- ▶ Pour tout $j \in B_{k'}$, $y[j] = -A_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn]$;
- ▶ Pour tout $j \in \bar{B}_{k'} \setminus \{jn\}$, $y[j] = 0$.

Par construction, $Ay = b$.

$f(y) = f(\mathbf{0}) + c_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[jn] = c_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[jn] < 0$ puisque jn entre dans $B_{k'+1}$.

Puisque jm sort de $B_{k'}$, $A_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn] > 0$.

Pour tout $j \in B_{k'} \setminus \{jm\}$, $A_{B_{k'} \bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn] \leq 0$ d'après la règle de Bland.

D'où $y[j] < 0 \Leftrightarrow j = jm$.

Puisque jm entre dans B_{k+1} , $c_{B_k N_k}[jm] < 0$.

D'après la règle de Bland, pour tout $j \in \bar{B}_k \setminus \{jm\}$, $c_{B_k \bar{B}_k}[j] \geq 0$.

$f(y) = \sum_{j \in \bar{B}_k \setminus \{jm\}} c_{B_k \bar{B}_k}[j]y[j] + c_{B_k \bar{B}_k}[jm]y[jm] \geq c_{B_k \bar{B}_k}[jm]y[jm] > 0$.

D'où une contradiction.

Initialisation : un programme auxiliaire

L'algorithme présenté plus haut nécessite une base initiale.

Pour en trouver une (s'il en existe) on introduit un programme linéaire auxiliaire.

Sans perte de généralité $b \geq 0$.

Initialisation : un programme auxiliaire

L'algorithme présenté plus haut nécessite une base initiale.

Pour en trouver une (s'il en existe) on introduit un programme linéaire auxiliaire.

Sans perte de généralité $b \geq 0$.

Le programme linéaire est « étendu » avec m variables $y = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$.

La matrice A est étendue par :

$$\forall 1 \leq i \leq m, A[i, n+i] = 1 \wedge \forall n+1 \leq j \neq n+i \leq n+m, A[i, j] = 0$$

Autrement dit $Ax + y = b$.

La nouvelle fonction de coût est : $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n < i \leq n+m} x_i$.

Initialisation : un programme auxiliaire

L'algorithme présenté plus haut nécessite une base initiale.

Pour en trouver une (s'il en existe) on introduit un programme linéaire auxiliaire.

Sans perte de généralité $b \geq 0$.

Le programme linéaire est « étendu » avec m variables $y = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$.

La matrice A est étendue par :

$$\forall 1 \leq i \leq m, A[i, n+i] = 1 \wedge \forall n+1 \leq j \neq n+i \leq n+m, A[i, j] = 0$$

Autrement dit $Ax + y = b$.

La nouvelle fonction de coût est : $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n < i \leq n+m} x_i$.

$B_0 = \{n+1, \dots, n+m\}$ est une base : $A_{B_0} = Id$ et $A_{B_0}^{-1}b = b \geq 0$.

Initialisation : construction d'une base

Puisque $g \geq 0$ l'algorithme renvoie $x^{(B)}$ une solution optimale.

Initialisation : construction d'une base

Puisque $g \geq 0$ l'algorithme renvoie $x^{(B)}$ une solution optimale.

Cas n°1 : $g(x^{(B)}) > 0$. Alors le problème initial n'admet pas de solution.

Initialisation : construction d'une base

Puisque $g \geq 0$ l'algorithme renvoie $x^{(B)}$ une solution optimale.

Cas n°1 : $g(x^{(B)}) > 0$. Alors le problème initial n'admet pas de solution.

Cas n°2 : $g(x^{(B)}) = 0$. $(Id \mid A_{B\bar{B}})_{\{1, \dots, n\}} = A_B^{-1} A_{\{1, \dots, n\}}$ et $\text{rang}(A_{\{1, \dots, n\}}) = m$.

Soit $j \in B \cap \{n+1, \dots, n+m\}$. Il existe $j' \in \{1, \dots, n\}$ tel que $A_{BN}[i_j^B, j'] \neq 0$.

Sinon le vecteur ligne d'indice i_j^B de $A_{\{1, \dots, n\}}$ serait nul et $\text{rang}(A_{\{1, \dots, n\}}) < m$.

$B' = B \setminus \{j\} \cup \{j'\}$ est aussi optimale puisque $x_j = x_{j'} = 0$.

Initialisation : construction d'une base

Puisque $g \geq 0$ l'algorithme renvoie $x^{(B)}$ une solution optimale.

Cas n°1 : $g(x^{(B)}) > 0$. Alors le problème initial n'admet pas de solution.

Cas n°2 : $g(x^{(B)}) = 0$. $(Id \mid A_{B\bar{B}})_{\{1,\dots,n\}} = A_B^{-1} A_{\{1,\dots,n\}}$ et $\text{rang}(A_{\{1,\dots,n\}}) = m$.

Soit $j \in B \cap \{n+1, \dots, n+m\}$. Il existe $j' \in \{1, \dots, n\}$ tel que $A_{BN}[i_j^B, j'] \neq 0$.

Sinon le vecteur ligne d'indice i_j^B de $A_{\{1,\dots,n\}}$ serait nul et $\text{rang}(A_{\{1,\dots,n\}}) < m$.

$B' = B \setminus \{j\} \cup \{j'\}$ est aussi optimale puisque $x_j = x_{j'} = 0$.

En itérant, on obtient $B^* \subseteq \{1, \dots, n\}$ une base du programme linéaire initial.

Plan

Spécification du problème

L'algorithme du simplexe

3 La dualité

Un algorithme en temps polynomial

Recherche d'un minorant

Soit un programme linéaire standard (A, b, c) .

Soit $y \in \mathbb{R}^I$ telle que $d \stackrel{\text{def}}{=} yA$ vérifie $d \leq c$.

Alors pour tout $x \geq 0$ tel que $Ax = b$, $y \cdot b = yAx = d \cdot x \leq c \cdot x$

Autrement dit, $y \cdot b \leq \min(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$.

Pour rechercher le « meilleur » y , on définit le problème *dual* suivant :

Maximiser $y \cdot b$ tel que $y \in \mathbb{R}^I \wedge yA \leq c$

Recherche d'un minorant

Soit un programme linéaire standard (A, b, c) .

Soit $y \in \mathbb{R}^I$ telle que $d \stackrel{\text{def}}{=} yA$ vérifie $d \leq c$.

Alors pour tout $x \geq 0$ tel que $Ax = b$, $y \cdot b = yAx = d \cdot x \leq c \cdot x$

Autrement dit, $y \cdot b \leq \min(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$.

Pour rechercher le « meilleur » y , on définit le problème *dual* suivant :

$$\text{Maximiser } y \cdot b \text{ tel que } y \in \mathbb{R}^I \wedge yA \leq c$$

Cas général. Soit **P** le problème *primal* :

Minimiser $c \cdot x$ tel que :

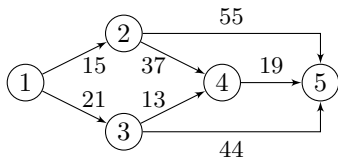
$$\forall i \in I, A[i, -] \cdot x = b_i \wedge \forall i \in I', A[i, -] \cdot x \geq b_i \wedge \forall j \in J, x_j \geq 0$$

Alors **D** le problème *dual* de **P** où $y \in \mathbb{R}^{I \cup I'}$ est défini par :

Maximiser $y \cdot b$ tel que :

$$\forall j \in J, y \cdot A[-, j] \leq c_j \wedge \forall j \in J', y \cdot A[-, j] = c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

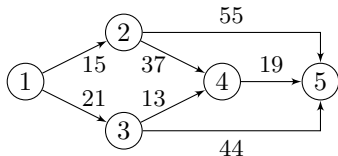
Illustration



Soit **P**. Maximiser $x_{1,2} + x_{1,3}$ tel que

- ▶ $x_{1,2} = x_{2,4} + x_{2,5}$, $x_{1,3} = x_{3,4} + x_{3,5}$, $x_{2,4} + x_{3,4} = x_{4,5}$;
- ▶ $x_{1,2} \leq 15$, $x_{1,3} \leq 21$, $x_{2,4} \leq 37$, $x_{2,5} \leq 55$, $x_{3,4} \leq 13$, $x_{3,5} \leq 44$, $x_{4,5} \leq 19$.

Illustration



Soit **P**. Maximiser $x_{1,2} + x_{1,3}$ tel que

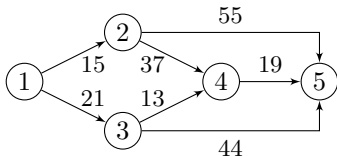
- ▶ $x_{1,2} = x_{2,4} + x_{2,5}$, $x_{1,3} = x_{3,4} + x_{3,5}$, $x_{2,4} + x_{3,4} = x_{4,5}$;
- ▶ $x_{1,2} \leq 15$, $x_{1,3} \leq 21$, $x_{2,4} \leq 37$, $x_{2,5} \leq 55$, $x_{3,4} \leq 13$, $x_{3,5} \leq 44$, $x_{4,5} \leq 19$.

Alors **D** est défini (après réécriture) par :

Minimiser $15y_{1,2} + 21y_{1,3} + 37y_{2,4} + 55y_{2,5} + 13y_{3,4} + 44y_{3,5} + 19y_{4,5}$ tel que

- ▶ $y_{1,2}, y_{1,3}, y_{2,4}, y_{2,5}, y_{3,4}, y_{3,5}, y_{4,5} \geq 0$;
- ▶ $1 \leq y_{1,2} + y_2$, $1 \leq y_{1,3} + y_3$;
- ▶ $y_2 \leq y_{2,4} + y_4$, $y_3 \leq y_{3,4} + y_4$;
- ▶ $y_2 \leq y_{2,5}$, $y_3 \leq y_{3,5}$ et $y_4 \leq y_{4,5}$.

Illustration



Soit **P**. Maximiser $x_{1,2} + x_{1,3}$ tel que

- ▶ $x_{1,2} = x_{2,4} + x_{2,5}$, $x_{1,3} = x_{3,4} + x_{3,5}$, $x_{2,4} + x_{3,4} = x_{4,5}$;
- ▶ $x_{1,2} \leq 15$, $x_{1,3} \leq 21$, $x_{2,4} \leq 37$, $x_{2,5} \leq 55$, $x_{3,4} \leq 13$, $x_{3,5} \leq 44$, $x_{4,5} \leq 19$.

Alors **D** est défini (après réécriture) par :

Minimiser $15y_{1,2} + 21y_{1,3} + 37y_{2,4} + 55y_{2,5} + 13y_{3,4} + 44y_{3,5} + 19y_{4,5}$ tel que

- ▶ $y_{1,2}, y_{1,3}, y_{2,4}, y_{2,5}, y_{3,4}, y_{3,5}, y_{4,5} \geq 0$;
- ▶ $1 \leq y_{1,2} + y_2$, $1 \leq y_{1,3} + y_3$;
- ▶ $y_2 \leq y_{2,4} + y_4$, $y_3 \leq y_{3,4} + y_4$;
- ▶ $y_2 \leq y_{2,5}$, $y_3 \leq y_{3,5}$ et $y_4 \leq y_{4,5}$.

Une solution : $y_2 = y_{2,4} = y_{2,5} = y_{1,3} = 1$ et $y_3 = y_4 = y_{1,2} = y_{3,4} = y_{3,5} = y_{4,5} = 0$.

Le dual du dual est le primal

Maximiser $y \cdot b$ tel que :

$$\forall j \in J, y \cdot A[-, j] \leq c_j \wedge \forall j \in J', y \cdot A[-, j] = c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

se réécrit :

Minimiser $-b \cdot y$ tel que :

$$\forall j \in J, -A^t[j, -] \cdot y \geq -c_j \wedge \forall j \in J', -A^t[j, -] \cdot y = -c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

Le dual du dual est le primal

Maximiser $y \cdot b$ tel que :

$$\forall j \in J, y \cdot A[-, j] \leq c_j \wedge \forall j \in J', y \cdot A[-, j] = c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

se réécrit :

Minimiser $-b \cdot y$ tel que :

$$\forall j \in J, -A^t[j, -] \cdot y \geq -c_j \wedge \forall j \in J', -A^t[j, -] \cdot y = -c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

Autrement dit, $\mathbf{D} = (I_{\mathbf{D}}, I'_{\mathbf{D}}, J_{\mathbf{D}}, J'_{\mathbf{D}}, A_{\mathbf{D}}, b_{\mathbf{D}}, c_{\mathbf{D}})$ est défini par :

- ▶ $I_{\mathbf{D}} = J', I'_{\mathbf{D}} = J, J_{\mathbf{D}} = I'$ et $J'_{\mathbf{D}} = I$;
- ▶ Pour tout $i, j, A_{\mathbf{D}}[i, j] = -A[j, i]$;
- ▶ $b_{\mathbf{D}} = -c$ et $c_{\mathbf{D}} = -b$.

Le dual du dual est le primal

Maximiser $y \cdot b$ tel que :

$$\forall j \in J, y \cdot A[-, j] \leq c_j \wedge \forall j \in J', y \cdot A[-, j] = c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

se réécrit :

Minimiser $-b \cdot y$ tel que :

$$\forall j \in J, -A^t[j, -] \cdot y \geq -c_j \wedge \forall j \in J', -A^t[j, -] \cdot y = -c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

Autrement dit, $\mathbf{D} = (I_{\mathbf{D}}, I'_{\mathbf{D}}, J_{\mathbf{D}}, J'_{\mathbf{D}}, A_{\mathbf{D}}, b_{\mathbf{D}}, c_{\mathbf{D}})$ est défini par :

- ▶ $I_{\mathbf{D}} = J', I'_{\mathbf{D}} = J, J_{\mathbf{D}} = I'$ et $J'_{\mathbf{D}} = I$;
- ▶ Pour tout $i, j, A_{\mathbf{D}}[i, j] = -A[j, i]$;
- ▶ $b_{\mathbf{D}} = -c$ et $c_{\mathbf{D}} = -b$.

En appliquant une nouvelle fois cette transformation, on obtient \mathbf{P} .

Dualité faible

Soit x une solution (non nécessairement optimale) de **P** et y une solution (non nécessairement optimale) de **D**. Alors :

$$y \cdot b \leq yAx \leq c \cdot x$$

Dualité faible

Soit x une solution (non nécessairement optimale) de \mathbf{P} et y une solution (non nécessairement optimale) de \mathbf{D} . Alors :

$$y \cdot b \leq yAx \leq c \cdot x$$

Preuve.

$\forall j \in J, (y \cdot A[-, j])x_j \leq c_j x_j$ puisque $x_j \geq 0$.

$\forall j \in J', (y \cdot A[-, j])x_j = c_j x_j$.

D'où : $\sum_{j \in J \cup J'} (y \cdot A[-, j])x_j \leq \sum_{j \in J \cup J'} c_j x_j$.

Autrement dit : $yAx \leq c \cdot x$.

Dualité faible

Soit x une solution (non nécessairement optimale) de \mathbf{P} et y une solution (non nécessairement optimale) de \mathbf{D} . Alors :

$$y \cdot b \leq yAx \leq c \cdot x$$

Preuve.

$\forall j \in J, (y \cdot A[-, j])x_j \leq c_j x_j$ puisque $x_j \geq 0$.

$\forall j \in J', (y \cdot A[-, j])x_j = c_j x_j$.

D'où : $\sum_{j \in J \cup J'} (y \cdot A[-, j])x_j \leq \sum_{j \in J \cup J'} c_j x_j$.

Autrement dit : $yAx \leq c \cdot x$.

$\forall i \in I', y_i(A[i, -] \cdot x) \geq y_i b_i$ puisque $y_i \geq 0$.

$\forall i \in I, y_i(A[i, -] \cdot x) = y_i b_i$.

D'où : $\sum_{i \in I \cup I'} y_i(A[i, -] \cdot x) \geq \sum_{i \in I \cup I'} y_i b_i$.

Autrement dit : $yAx \geq y \cdot b$.

Dualité forte

- ▶ Si \mathbf{P} n'est pas minoré alors \mathbf{D} n'admet pas de solution.
- ▶ Si \mathbf{D} n'est pas majoré alors \mathbf{P} n'admet pas de solution.
- ▶ \mathbf{P} admet une solution optimale si et seulement si \mathbf{D} admet une solution optimale. Dans ce cas, les valeurs optimales coïncident.

Dualité forte

- ▶ Si \mathbf{P} n'est pas minoré alors \mathbf{D} n'admet pas de solution.
- ▶ Si \mathbf{D} n'est pas majoré alors \mathbf{P} n'admet pas de solution.
- ▶ \mathbf{P} admet une solution optimale si et seulement si \mathbf{D} admet une solution optimale. Dans ce cas, les valeurs optimales coïncident.

Preuve. (*cas d'une formulation standard*)

Les deux premières affirmations découlent de la dualité faible.

Supposons que \mathbf{P} ait une solution optimale et soit B une base optimale. B vérifie :

$$f(B) = c_B A_B^{-1} b \wedge c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}} \geq 0$$

Posons $y = c_B A_B^{-1}$. Alors :

$$c_B = y A_B \wedge c_{\bar{B}} \geq y A_{\bar{B}}$$

D'où $c \geq y A$ ce qui établit que y est une solution de \mathbf{D} .

D'autre part, $f(x^{(B)}) = y \cdot b$, donc les valeurs optimales de \mathbf{P} et \mathbf{D} coïncident.

Pour établir la réciproque, il suffit d'observer que \mathbf{P} est le dual de \mathbf{D} .

Plan

Spécification du problème

L'algorithme du simplexe

La dualité

4 Un algorithme en temps polynomial

Considérations de taille

Bornes supérieures de représentation polynomiale.

Soit $\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid A \cdot x = b \wedge x \geq 0)$ et $C_{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i,j} (|A[i,j]|, |b[i]|, |c[i]|)$.

Si \mathbf{P} a une solution optimale, alors il a une solution optimale \tilde{x} d'une base.

Tous les coefficients de \tilde{x} sont des fractions dont

les numérateurs et le dénominateur commun sont des déterminants de taille m .

Ainsi les coefficients de \tilde{x} sont bornés par $B_{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{=} m!C^m$ et $|c \cdot \tilde{x}| \leq mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}$.

Considérations de taille

Bornes supérieures de représentation polynomiale.

Soit $\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid A \cdot x = b \wedge x \geq 0)$ et $C_{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i,j} (|A[i,j]|, |b[i]|, |c[i]|)$.

Si \mathbf{P} a une solution optimale, alors il a une solution optimale \tilde{x} d'une base.

Tous les coefficients de \tilde{x} sont des fractions dont

les numérateurs et le dénominateur commun sont des déterminants de taille m .

Ainsi les coefficients de \tilde{x} sont bornés par $B_{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{=} m!C_{\mathbf{P}}^m$ et $|c \cdot \tilde{x}| \leq mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}$.

Borne inférieure de représentation polynomiale.

Soient deux solutions \tilde{x} et \tilde{y} associées à des bases telles que $c \cdot \tilde{x} \neq c \cdot \tilde{y}$.

Tous les coefficients de \tilde{x} et \tilde{y} sont des fractions dont

leurs dénominateurs communs $B_{\tilde{x}}$ et $B_{\tilde{y}}$ vérifient $\max(B_{\tilde{x}}, B_{\tilde{y}}) \leq B_{\mathbf{P}}$.

Par conséquent,

$$|c \cdot \tilde{x} - c \cdot \tilde{y}| \geq \frac{1}{\text{ppcm}(B_{\tilde{x}}, B_{\tilde{y}})} > \frac{1}{B_{\mathbf{P}}^2}$$

De l'optimisation à l'existence (1)

On suppose qu'on peut résoudre le problème de l'existence en temps polynomial.

On démontre alors qu'on peut résoudre

$\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$ en temps polynomial.

De l'optimisation à l'existence (1)

On suppose qu'on peut résoudre le problème de l'existence en temps polynomial.

On démontre alors qu'on peut résoudre

$\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$ en temps polynomial.

- On décide si \mathbf{P} admet une solution en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0\}$.

De l'optimisation à l'existence (1)

On suppose qu'on peut résoudre le problème de l'existence en temps polynomial.

On démontre alors qu'on peut résoudre

$\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$ en temps polynomial.

- On décide si \mathbf{P} admet une solution en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0\}$.
- Dans l'affirmative on décide si \mathbf{P} est non majoré en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}} + 1\}$.

De l'optimisation à l'existence (1)

On suppose qu'on peut résoudre le problème de l'existence en temps polynomial.

On démontre alors qu'on peut résoudre

$\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$ en temps polynomial.

- On décide si \mathbf{P} admet une solution en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0\}$.
- Dans l'affirmative on décide si \mathbf{P} est non majoré en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}} + 1\}$.
- On calcule l'unique p entre $-mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ et $mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ tel que $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{x} < \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$ par une recherche dichotomique en résolvant successivement un nombre polynomial de problèmes $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$.

De l'optimisation à l'existence (1)

On suppose qu'on peut résoudre le problème de l'existence en temps polynomial.

On démontre alors qu'on peut résoudre

$\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$ en temps polynomial.

- On décide si \mathbf{P} admet une solution en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0\}$.
- Dans l'affirmative on décide si \mathbf{P} est non majoré en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}} + 1\}$.
- On calcule l'unique p entre $-mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ et $mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ tel que $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{x} < \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$ par une recherche dichotomique en résolvant successivement un nombre polynomial de problèmes $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$.
- On détermine une base d'une solution optimale en résolvant successivement les problèmes $\mathbf{P}_j = \{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge x_j = 0 \wedge \bigwedge_{k \in S(j)} x_k = 0 \wedge \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot x \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$ où $S(j)$ est l'ensemble des $k < j$ pour lesquels il existe une solution à \mathbf{P}_k .

De l'optimisation à l'existence (1)

On suppose qu'on peut résoudre le problème de l'existence en temps polynomial.

On démontre alors qu'on peut résoudre

$\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$ en temps polynomial.

- On décide si \mathbf{P} admet une solution en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0\}$.
- Dans l'affirmative on décide si \mathbf{P} est non majoré en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}} + 1\}$.
- On calcule l'unique p entre $-mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ et $mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ tel que $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{x} < \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$ par une recherche dichotomique en résolvant successivement un nombre polynomial de problèmes $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$.
- On détermine une base d'une solution optimale en résolvant successivement les problèmes $\mathbf{P}_j = \{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge x_j = 0 \wedge_{k \in S(j)} x_k = 0 \wedge \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot x \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$ où $S(j)$ est l'ensemble des $k < j$ pour lesquels il existe une solution à \mathbf{P}_k .
- Soit \tilde{y} une solution arbitraire de $\mathbf{P}_S = \{Ax = b \wedge_{k \in S} x_k = 0 \wedge \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot x \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$ où S est l'ensemble des k pour lesquels il existe une solution à \mathbf{P}_k .

De l'optimisation à l'existence (2)

Par construction, il existe une solution positive \tilde{x} de \mathbf{P}_S . Supposons que $\tilde{y} \neq \tilde{x}$.

- Soit $c \cdot \tilde{x} - c \cdot \tilde{y} = K > 0$. Soit $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{x} - \tilde{y})$ pour $\lambda > 0$.

$$A \cdot \tilde{z} = b \text{ et } c \cdot \tilde{z} = c \cdot \tilde{x} + \lambda K.$$

Puisque la valeur optimale est majorée par $\frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$, il existe λ tel que :

- ▶ $\tilde{z} \geq 0$;
- ▶ le support de \tilde{z} soit *strictement* inclus dans $J \setminus S$;
- ▶ $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{z} \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$.

ce qui contredit la construction de S .

De l'optimisation à l'existence (2)

Par construction, il existe une solution positive \tilde{x} de \mathbf{P}_S . Supposons que $\tilde{y} \neq \tilde{x}$.

- Soit $c \cdot \tilde{x} - c \cdot \tilde{y} = K > 0$. Soit $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{x} - \tilde{y})$ pour $\lambda > 0$.

$$A \cdot \tilde{z} = b \text{ et } c \cdot \tilde{z} = c \cdot \tilde{x} + \lambda K.$$

Puisque la valeur optimale est majorée par $\frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$, il existe λ tel que :

- ▶ $\tilde{z} \geq 0$;
- ▶ le support de \tilde{z} soit *strictement* inclus dans $J \setminus S$;
- ▶ $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{z} \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$.

ce qui contredit la construction de S .

- Soit $c \cdot \tilde{y} - c \cdot \tilde{x} = K < 0$. Soit $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{y} - \tilde{x})$ pour $\lambda > 0$.

Par un raisonnement identique, on obtient aussi une contradiction.

De l'optimisation à l'existence (3)

- Soit $c \cdot \tilde{y} = c \cdot \tilde{x}$ et il existe i tel que $\tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0$.

Considérons $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{y} - \tilde{x})$ avec $\lambda = \min(\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{x}_i - \tilde{y}_i} \mid \tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0)$.

Alors $\tilde{z} \geq 0$ est une solution de support strictement inclus dans $J \setminus S$ vérifiant $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{z} \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$.

ce qui contredit la construction de S .

De l'optimisation à l'existence (3)

- Soit $c \cdot \tilde{y} = c \cdot \tilde{x}$ et il existe i tel que $\tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0$.

Considérons $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{y} - \tilde{x})$ avec $\lambda = \min(\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{x}_i - \tilde{y}_i} \mid \tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0)$.

Alors $\tilde{z} \geq 0$ est une solution de support strictement inclus dans $J \setminus S$ vérifiant $\frac{p}{B_{\mathbb{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{z} \leq \frac{p+1}{B_{\mathbb{P}}^2}$.

ce qui contredit la construction de S .

- Soit $c \cdot \tilde{y} = c \cdot \tilde{x}$ et il existe i tel que $\tilde{x}_i - \tilde{y}_i < 0$.

Par un raisonnement identique, on obtient aussi une contradiction.

De l'optimisation à l'existence (3)

- Soit $c \cdot \tilde{y} = c \cdot \tilde{x}$ et il existe i tel que $\tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0$.

Considérons $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{y} - \tilde{x})$ avec $\lambda = \min(\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{x}_i - \tilde{y}_i} \mid \tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0)$.

Alors $\tilde{z} \geq 0$ est une solution de support strictement inclus dans $J \setminus S$ vérifiant $\frac{p}{B_{\mathbb{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{z} \leq \frac{p+1}{B_{\mathbb{P}}^2}$.

ce qui contredit la construction de S .

- Soit $c \cdot \tilde{y} = c \cdot \tilde{x}$ et il existe i tel que $\tilde{x}_i - \tilde{y}_i < 0$.

Par un raisonnement identique, on obtient aussi une contradiction.

$A_{J \setminus S}$ a donc un noyau nul et \tilde{x} est la solution d'une base \tilde{B} telle que $J \setminus S \subseteq \tilde{B}$.

Soit x^* une solution optimale associée à une base, $c \cdot x^* - c \cdot \tilde{x} \leq \frac{1}{B_{\mathbb{P}}^2}$.

Donc $c \cdot x^* = c \cdot \tilde{x}$.

La dualité revisitée

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de dimension n .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n \ Ax \leq b$
2. $\nexists y \in \mathbb{R}^m \ y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1$

La dualité revisitée

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de dimension n .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n \ Ax \leq b$
2. $\nexists y \in \mathbb{R}^m \ y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1$

Preuve.

Soit $\mathbf{P} = \max\{u \mid Ax - ub \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^n \wedge u \in \mathbb{R}\}$.

\mathbf{P} admet une solution $((x, u) = (\mathbf{0}, 0))$.

\mathbf{P} admet (x, u) avec $u > 0$ ssi \mathbf{P} admet $(u^{-1}x, 1)$ ssi \mathbf{P} est non majoré.

Son dual est $\mathbf{D} = \min\{0 \mid y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1\}$.

La dualité revisitée

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de dimension n .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n \ Ax \leq b$
2. $\nexists y \in \mathbb{R}^m \ y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1$

Preuve.

Soit $\mathbf{P} = \max\{u \mid Ax - ub \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^n \wedge u \in \mathbb{R}\}$.

\mathbf{P} admet une solution $((x, u) = (\mathbf{0}, 0))$.

\mathbf{P} admet (x, u) avec $u > 0$ ssi \mathbf{P} admet $(u^{-1}x, 1)$ ssi \mathbf{P} est non majoré.

Son dual est $\mathbf{D} = \min\{0 \mid y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1\}$.

Si 1. est satisfaite alors \mathbf{P} n'est pas majoré et \mathbf{D} n'admet pas de solution.

Par conséquent 2. est satisfaite.

La dualité revisitée

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de dimension n .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n \ Ax \leq b$
2. $\nexists y \in \mathbb{R}^m \ y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1$

Preuve.

Soit $\mathbf{P} = \max\{u \mid Ax - ub \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^n \wedge u \in \mathbb{R}\}$.

\mathbf{P} admet une solution $((x, u) = (\mathbf{0}, 0))$.

\mathbf{P} admet (x, u) avec $u > 0$ ssi \mathbf{P} admet $(u^{-1}x, 1)$ ssi \mathbf{P} est non majoré.

Son dual est $\mathbf{D} = \min\{0 \mid y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1\}$.

Si 1. est satisfaite alors \mathbf{P} n'est pas majoré et \mathbf{D} n'admet pas de solution.

Par conséquent 2. est satisfaite.

Si 1. n'est pas satisfaite alors \mathbf{P} admet une solution optimale

et \mathbf{D} admet une solution optimale.

Par conséquent 2. n'est pas satisfaite.

De l'existence au volume non nul

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}\}$. Alors :

- ▶ \mathbf{P} admet une solution ssi \mathbf{P}' admet une solution ;
- ▶ Si \mathbf{P}' admet une solution alors le volume de l'espace des solutions est borné inférieurement par $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}})^n$.

De l'existence au volume non nul

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}\}$. Alors :

- ▶ \mathbf{P} admet une solution ssi \mathbf{P}' admet une solution ;
- ▶ Si \mathbf{P}' admet une solution alors le volume de l'espace des solutions est borné inférieurement par $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}})^n$.

Preuve. Une solution de \mathbf{P} est une solution de \mathbf{P}' .

- Supposons que \mathbf{P} n'admette pas de solution. Alors d'après la dualité, $\{y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1\}$ admet une solution et donc une solution bornée par $B_{\mathbf{P}}$.

Soit \tilde{y} cette solution, elle vérifie : $\tilde{y} \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}) \leq -1 + \frac{1}{2} < 0$.

$\tilde{y}' = \frac{1}{|\tilde{y} \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1})|} \tilde{y}$ est une solution de $\{y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}) = -1\}$

ce qui implique par dualité que \mathbf{P}' n'admet pas de solution.

De l'existence au volume non nul

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}\}$. Alors :

- ▶ \mathbf{P} admet une solution ssi \mathbf{P}' admet une solution ;
- ▶ Si \mathbf{P}' admet une solution alors le volume de l'espace des solutions est borné inférieurement par $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}})^n$.

Preuve. Une solution de \mathbf{P} est une solution de \mathbf{P}' .

- Supposons que \mathbf{P} n'admette pas de solution. Alors d'après la dualité, $\{y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1\}$ admet une solution et donc une solution bornée par $B_{\mathbf{P}}$.

Soit \tilde{y} cette solution, elle vérifie : $\tilde{y} \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}) \leq -1 + \frac{1}{2} < 0$.

$\tilde{y}' = \frac{1}{|\tilde{y} \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1})|} \tilde{y}$ est une solution de $\{y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}) = -1\}$

ce qui implique par dualité que \mathbf{P}' n'admet pas de solution.

- Supposons que \mathbf{P}' (et donc \mathbf{P}) admette une solution et soit \tilde{x} une solution de \mathbf{P} . Alors l'hypercube $\{x' \mid \|x' - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \frac{1}{2n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}}\}$ de volume $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}})^n$ est contenu dans l'espace des solutions de \mathbf{P}' .

Simplexe

Un *simplexe* de dimension n est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points de \mathbb{R}^n de volume non nul. Le *centre* du simplexe est l'isobarycentre des points.

Les simplexes de dimension 2 sont les triangles.

Simplexe

Un *simplexe* de dimension n est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points de \mathbb{R}^n de volume non nul. Le *centre* du simplexe est l'isobarycentre des points.

Les simplexes de dimension 2 sont les triangles.

Soit B un réel positif et soit \mathcal{S}_n^B le simplexe de dimension $n \geq 1$ défini par :

- ▶ $v_n^0 = (-2^{n-1}B, \dots, -2B, -B)$ et $v_n^1 = (2^{n-1}B, \dots, -2B, -B)$;
- ▶ pour tout $i \geq 2$,
 1. pour tout $j < i$, $v_n^i[j] = 0$;
 2. $v_n^i[i] = 3 \cdot 2^{n-i} B$;
 3. pour tout $j > i$, $v_n^i[j] = -2^{n-j} B$.

Simplexe

Un *simplexe* de dimension n est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points de \mathbb{R}^n de volume non nul. Le *centre* du simplexe est l'isobarycentre des points.

Les simplexes de dimension 2 sont les triangles.

Soit B un réel positif et soit \mathcal{S}_n^B le simplexe de dimension $n \geq 1$ défini par :

- ▶ $v_n^0 = (-2^{n-1}B, \dots, -2B, -B)$ et $v_n^1 = (2^{n-1}B, \dots, -2B, -B)$;
- ▶ pour tout $i \geq 2$,
 1. pour tout $j < i$, $v_n^i[j] = 0$;
 2. $v_n^i[i] = 3 \cdot 2^{n-i}B$;
 3. pour tout $j > i$, $v_n^i[j] = -2^{n-j}B$.

Observations. (On identifie \mathbb{R}^{n-1} à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$)

- Pour tout $i \leq n$, $v_n^i = 2v_{n-1}^i + (0, \dots, 0, -B)$ et $v_n^n = (0, \dots, 0, 3B)$.
- D'où \mathcal{S}_n^B est l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}_{n-1}^{2B} + (0, \dots, 0, -B)$ et $(0, \dots, 0, 3B)$.

Simplexe

Un *simplexe* de dimension n est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points de \mathbb{R}^n de volume non nul. Le *centre* du simplexe est l'isobarycentre des points.

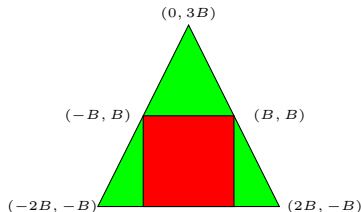
Les simplexes de dimension 2 sont les triangles.

Soit B un réel positif et soit \mathcal{S}_n^B le simplexe de dimension $n \geq 1$ défini par :

- ▶ $v_n^0 = (-2^{n-1}B, \dots, -2B, -B)$ et $v_n^1 = (2^{n-1}B, \dots, -2B, -B)$;
- ▶ pour tout $i \geq 2$,
 1. pour tout $j < i$, $v_n^i[j] = 0$;
 2. $v_n^i[i] = 3 \cdot 2^{n-i}B$;
 3. pour tout $j > i$, $v_n^i[j] = -2^{n-j}B$.

Observations. (On identifie \mathbb{R}^{n-1} à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$)

- Pour tout $i \leq n$, $v_n^i = 2v_{n-1}^i + (0, \dots, 0, -B)$ et $v_n^n = (0, \dots, 0, 3B)$.
- D'où \mathcal{S}_n^B est l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}_{n-1}^{2B} + (0, \dots, 0, -B)$ et $(0, \dots, 0, 3B)$.



Simplexe et hypercube

$$\{v \mid \|v\|_\infty \leq B\} \subseteq \mathcal{S}_n^B \text{ et } \text{vol}(\mathcal{S}_n^B) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} B^n.$$

Simplexe et hypercube

$$\{v \mid \|v\|_\infty \leq B\} \subseteq \mathcal{S}_n^B \text{ et } \text{vol}(\mathcal{S}_n^B) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} B^n.$$

Preuve. (par récurrence sur n)

En dimension 1, $\{v \mid \|v\|_\infty \leq B\} = \mathcal{S}_1^B$.

En dimension n , Soit v tel que $\|v\|_\infty \leq B$.

Soit w tel que $w[j] = \frac{4B}{3B-v[n]}v[j]$ pour $j < n$ et $w[n] = -B$.

D'où pour $j < n$, $|w[j]| \leq 2|v[j]|$.

Par récurrence, w appartient à l'enveloppe convexe de v_n^0, \dots, v_n^{n-1} .

D'autre part, $v = \frac{3B-v[n]}{4B}w + \frac{v[n]+B}{4B}v_n^n$. D'où $v \in \mathcal{S}_n$.

Simplexe et hypercube

$$\{v \mid \|v\|_\infty \leq B\} \subseteq \mathcal{S}_n^B \text{ et } \text{vol}(\mathcal{S}_n^B) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} B^n.$$

Preuve. (par récurrence sur n)

En dimension 1, $\{v \mid \|v\|_\infty \leq B\} = \mathcal{S}_1^B$.

En dimension n , Soit v tel que $\|v\|_\infty \leq B$.

Soit w tel que $w[j] = \frac{4B}{3B-v[n]}v[j]$ pour $j < n$ et $w[n] = -B$.

D'où pour $j < n$, $|w[j]| \leq 2|v[j]|$.

Par récurrence, w appartient à l'enveloppe convexe de v_n^0, \dots, v_n^{n-1} .

D'autre part, $v = \frac{3B-v[n]}{4B}w + \frac{v[n]+B}{4B}v_n^n$. D'où $v \in \mathcal{S}_n$.

$$\text{vol}(\mathcal{S}_1) = 2B$$

$$\text{vol}(\mathcal{S}_n) = 2^{n-1} \text{vol}(\mathcal{S}_{n-1}) 4B \int_0^1 t dt = 2^n B \text{vol}(\mathcal{S}_{n-1}) = 2^{n+\frac{n(n-1)}{2}} B^n.$$

Transformation du problème

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge \|x\|_\infty \leq B_{\mathbf{P}}\}$.

\mathbf{P} admet une solution ssi \mathbf{P}_1 admet une solution.

Transformation du problème

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge \|x\|_\infty \leq B_{\mathbf{P}}\}$.

\mathbf{P} admet une solution ssi \mathbf{P}_1 admet une solution.

Soit $\mathbf{P}'_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}\vec{1} \wedge \|x\|_\infty \leq B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}\}$.

\mathbf{P}_1 admet une solution ssi \mathbf{P}'_1 admet une solution.

Transformation du problème

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge \|x\|_\infty \leq B_{\mathbf{P}}\}$.

\mathbf{P} admet une solution ssi \mathbf{P}_1 admet une solution.

Soit $\mathbf{P}'_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}\vec{1} \wedge \|x\|_\infty \leq B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}\}$.

\mathbf{P}_1 admet une solution ssi \mathbf{P}'_1 admet une solution.

De plus :

- ▶ L'ensemble des solutions de \mathbf{P}'_1 est contenu dans $\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}}$;
- ▶ Si l'ensemble des solutions de \mathbf{P}'_1 est non vide alors son volume est supérieur ou égal à $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}_1} B_{\mathbf{P}_1}})^n$.

Schéma de l'algorithme

L'algorithme maintient un simplexe \mathcal{S} contenant l'ensemble des solutions de \mathbf{P}'_1 , initialisé à $\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}}$. Il teste si le centre de \mathcal{S} est une solution de \mathbf{P}'_1 .

Schéma de l'algorithme

L'algorithme maintient un simplexe \mathcal{S} contenant l'ensemble des solutions de \mathbf{P}'_1 , initialisé à $\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}}$. Il teste si le centre de \mathcal{S} est une solution de \mathbf{P}'_1 .

- ▶ Si c'est le cas alors \mathbf{P}'_1 (et donc \mathbf{P}) admet une solution.
- ▶ Sinon il transforme \mathcal{S} en \mathcal{S}' tel que $\frac{\text{vol}(\mathcal{S}')}{\text{vol}(\mathcal{S})} \leq e^{-\frac{1}{3(n+1)^2}}$.

Lorsque (un majorant de) $\text{vol}(\mathcal{S}) < \left(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}_1} B_{\mathbf{P}_1}}\right)^n$

alors l'algorithme s'arrête : \mathbf{P}'_1 (et donc \mathbf{P}) n'admet pas de solution.

Schéma de l'algorithme

L'algorithme maintient un simplexe \mathcal{S} contenant l'ensemble des solutions de \mathbf{P}'_1 , initialisé à $\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}}$. Il teste si le centre de \mathcal{S} est une solution de \mathbf{P}'_1 .

- ▶ Si c'est le cas alors \mathbf{P}'_1 (et donc \mathbf{P}) admet une solution.
- ▶ Sinon il transforme \mathcal{S} en \mathcal{S}' tel que $\frac{\text{vol}(\mathcal{S}')}{\text{vol}(\mathcal{S})} \leq e^{-\frac{1}{3(n+1)^2}}$.

Lorsque (un majorant de) $\text{vol}(\mathcal{S}) < (\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}_1} B_{\mathbf{P}_1}})^n$

alors l'algorithme s'arrête : \mathbf{P}'_1 (et donc \mathbf{P}) n'admet pas de solution.

Complexité. Le nombre d'itérations est polynomial car :

- ▶ $\log(\text{vol}(\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}_1}}}))$ est une quantité polynomiale ;
- ▶ $\log((n^2 C_{\mathbf{P}_1} B_{\mathbf{P}_1})^n)$ est une quantité polynomiale ;
- ▶ $3(n+1)^2$ est un polynôme.

De plus chaque itération garantit que la représentation de \mathcal{S} augmente d'un nombre constant et polynomial de bits (par une troncature nécessaire).

Ce qui conduit à un algorithme en temps polynomial.

Transformation de \mathcal{S} en \mathcal{S}'

Soit \mathcal{S} défini par $\{v_0, \dots, v_n\}$ et v_c son centre.

Supposons que v_c viole une contrainte de $\mathbf{P}'_1 : d \cdot v_c > e$.

Transformation de \mathcal{S} en \mathcal{S}'

Soit \mathcal{S} défini par $\{v_0, \dots, v_n\}$ et v_c son centre.

Supposons que v_c viole une contrainte de \mathbf{P}'_1 : $d \cdot v_c > e$.

- Si $\{i \mid d \cdot v_i \leq e\} = \emptyset$ alors \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.

- Sinon soit $\ell \in \arg \min(d \cdot v_i \mid i \leq n)$.

Si $d \cdot v_\ell = e$ alors les solutions de \mathbf{P}'_1 sont contenues dans $\{d \cdot x = e\}$ de volume nul. Par conséquent, \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.

Transformation de \mathcal{S} en \mathcal{S}'

Soit \mathcal{S} défini par $\{v_0, \dots, v_n\}$ et v_c son centre.

Supposons que v_c viole une contrainte de $\mathbf{P}'_1 : d \cdot v_c > e$.

- Si $\{i \mid d \cdot v_i \leq e\} = \emptyset$ alors \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.

- Sinon soit $\ell \in \arg \min(d \cdot v_i \mid i \leq n)$.

Si $d \cdot v_\ell = e$ alors les solutions de \mathbf{P}'_1 sont contenues dans $\{d \cdot x = e\}$ de volume nul. Par conséquent, \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.

- Sinon soit $\delta_i = \left(1 - \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)}\right)^{-1}$ et $\bar{\delta}_i = \lceil 2^t \delta_i \rceil 2^{-t}$

la « troncature supérieure » de δ_i à t bits après la virgule

avec $t = 4 + \lceil 3 \log_2(n + 1) \rceil$.

Transformation de \mathcal{S} en \mathcal{S}'

Soit \mathcal{S} défini par $\{v_0, \dots, v_n\}$ et v_c son centre.

Supposons que v_c viole une contrainte de $\mathbf{P}'_1 : d \cdot v_c > e$.

- Si $\{i \mid d \cdot v_i \leq e\} = \emptyset$ alors \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.
- Sinon soit $\ell \in \arg \min(d \cdot v_i \mid i \leq n)$.
Si $d \cdot v_\ell = e$ alors les solutions de \mathbf{P}'_1 sont contenues dans $\{d \cdot x = e\}$ de volume nul. Par conséquent, \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.
- Sinon soit $\delta_i = \left(1 - \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)}\right)^{-1}$ et $\bar{\delta}_i = \lceil 2^t \delta_i \rceil 2^{-t}$
la « troncature supérieure » de δ_i à t bits après la virgule
avec $t = 4 + \lceil 3 \log_2(n + 1) \rceil$.

Les points de \mathcal{S}' sont obtenus ainsi :

$$v'_i = (1 - \bar{\delta}_i)v_\ell + \bar{\delta}_i v_i$$

Transformation de \mathcal{S} en \mathcal{S}'

Soit \mathcal{S} défini par $\{v_0, \dots, v_n\}$ et v_c son centre.

Supposons que v_c viole une contrainte de \mathbf{P}'_1 : $d \cdot v_c > e$.

- Si $\{i \mid d \cdot v_i \leq e\} = \emptyset$ alors \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.

- Sinon soit $\ell \in \arg \min(d \cdot v_i \mid i \leq n)$.

Si $d \cdot v_\ell = e$ alors les solutions de \mathbf{P}'_1 sont contenues dans $\{d \cdot x = e\}$ de volume nul. Par conséquent, \mathbf{P}'_1 n'a pas de solution.

- Sinon soit $\delta_i = \left(1 - \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)}\right)^{-1}$ et $\bar{\delta}_i = \lceil 2^t \delta_i \rceil 2^{-t}$

la « troncature supérieure » de δ_i à t bits après la virgule avec $t = 4 + \lceil 3 \log_2(n + 1) \rceil$.

Les points de \mathcal{S}' sont obtenus ainsi :

$$v'_i = (1 - \bar{\delta}_i)v_\ell + \bar{\delta}_i v_i$$

Observations. v'_i se situe sur la demi-droite $\overrightarrow{v_\ell v_i}$

et v'_i est sur le segment ouvert $v_\ell v_i$ ssi $d \cdot v_c < d \cdot v_i$.

\mathcal{S}' contient les solutions de \mathbf{P}'_1

Soit \tilde{x} une solution de \mathbf{P}'_1 . $\tilde{x} = \sum_{i \leq n} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i \leq n} \lambda_i = 1$.

Posons $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i}$ pour $i \neq \ell$ et $\mu_\ell = 1 - \sum_{i \neq \ell} \mu_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n} \mu_i v'_i &= \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i} (\bar{\delta}_i v_i + (1 - \bar{\delta}_i) v_\ell) + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i}) v_\ell \\ &= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + \sum_{i \neq \ell} \left(\frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i} - \lambda_i \right) v_\ell + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i}) v_\ell \\ &= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + (1 - \sum_{i \neq \ell} \lambda_i) v_\ell = \tilde{x} \end{aligned}$$

\mathcal{S}' contient les solutions de \mathbf{P}'_1

Soit \tilde{x} une solution de \mathbf{P}'_1 . $\tilde{x} = \sum_{i \leq n} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i \leq n} \lambda_i = 1$.

Posons $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i}$ pour $i \neq \ell$ et $\mu_\ell = 1 - \sum_{i \neq \ell} \mu_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n} \mu_i v'_i &= \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i} (\bar{\delta}_i v_i + (1 - \bar{\delta}_i) v_\ell) + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i}) v_\ell \\ &= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + \sum_{i \neq \ell} \left(\frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i} - \lambda_i \right) v_\ell + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i}) v_\ell \\ &= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + (1 - \sum_{i \neq \ell} \lambda_i) v_\ell = \tilde{x} \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $\mu_\ell \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mu_\ell &= 1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\bar{\delta}_i} \geq 1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\delta_i} \\ &= 1 - \sum_{i \neq \ell} \lambda_i + \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)} = \lambda_\ell + \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)} \end{aligned}$$

\mathcal{S}' contient les solutions de \mathbf{P}'_1

Soit \tilde{x} une solution de \mathbf{P}'_1 . $\tilde{x} = \sum_{i \leq n} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i \leq n} \lambda_i = 1$.

Posons $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\delta_i}$ pour $i \neq \ell$ et $\mu_\ell = 1 - \sum_{i \neq \ell} \mu_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n} \mu_i v'_i &= \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\delta_i} (\bar{\delta}_i v_i + (1 - \bar{\delta}_i) v_\ell) + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\delta_i}) v_\ell \\ &= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + \sum_{i \neq \ell} \left(\frac{\lambda_i}{\delta_i} - \lambda_i \right) v_\ell + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\delta_i}) v_\ell \\ &= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + (1 - \sum_{i \neq \ell} \lambda_i) v_\ell = \tilde{x} \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $\mu_\ell \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mu_\ell &= 1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\delta_i} \geq 1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\delta_i} \\ &= 1 - \sum_{i \neq \ell} \lambda_i + \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)} = \lambda_\ell + \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)} \end{aligned}$$

Or $d \cdot v_c > e \geq d \cdot \tilde{x} = \sum_i \lambda_i d \cdot v_i$. Et :

$$\sum_i \lambda_i d \cdot (v_c - v_i) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i \neq \ell} \lambda_i d \cdot (v_c - v_i) \geq -d \cdot (v_c - v_\ell) \lambda_\ell \Leftrightarrow \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{d \cdot (v_c - v_\ell)} \geq -\lambda_\ell$$

Par conséquent, $\mu_\ell \geq \lambda_\ell (1 - \frac{1}{n^2}) \geq 0$.

Interlude

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) > e^{\frac{1}{2(n+1)^2}}$$

Interlude

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) > e^{\frac{1}{2(n+1)^2}}$$

Preuve. Pour $0 \leq x < 1$, on a :

- ▶ $\log(1+x) = \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i > x - \frac{x^2}{2}$;
- ▶ et $\log(1-x) = -\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} x^i > -x - \frac{x^2}{2(1-x)}$.

Interlude

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) > e^{\frac{1}{2(n+1)^2}}$$

Preuve. Pour $0 \leq x < 1$, on a :

- ▶ $\log(1+x) = \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i > x - \frac{x^2}{2}$;
- ▶ et $\log(1-x) = -\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} x^i > -x - \frac{x^2}{2(1-x)}$.

D'où :

$$\begin{aligned} (n-1) \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &> -\frac{n-1}{n^2} - \frac{n-1}{2n^2(n^2-1)} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n(n+1)} \\ &> \frac{1}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Réduction du volume (1)

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{S})}{\text{vol}(\mathcal{S}')} \geq e^{\frac{1}{3(n+1)^2}}$$

Réduction du volume (1)

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{S})}{\text{vol}(\mathcal{S}')} \geq e^{\frac{1}{3(n+1)^2}}$$

Preuve. Puisque $d \cdot v_i \geq d \cdot v_\ell$, on a $\delta_i \leq (1 - \frac{1}{n^2})^{-1} = \frac{n^2}{n^2-1}$.

D'autre part, $d \cdot v_i = (n+1)d \cdot v_c - \sum_{j \neq i} d \cdot v_j \leq (n+1)d \cdot v_c - nd \cdot v_\ell$.

D'où $d \cdot v_c - d \cdot v_i \geq -n(d \cdot v_c - d \cdot v_\ell)$ et donc $\delta_i \geq (1 + \frac{1}{n})^{-1}$.

Réduction du volume (1)

$$\frac{\text{vol}(S)}{\text{vol}(S')} \geq e^{\frac{1}{3(n+1)^2}}$$

Preuve. Puisque $d \cdot v_i \geq d \cdot v_\ell$, on a $\delta_i \leq (1 - \frac{1}{n^2})^{-1} = \frac{n^2}{n^2-1}$.

D'autre part, $d \cdot v_i = (n+1)d \cdot v_c - \sum_{j \neq i} d \cdot v_j \leq (n+1)d \cdot v_c - nd \cdot v_\ell$.

D'où $d \cdot v_c - d \cdot v_i \geq -n(d \cdot v_c - d \cdot v_\ell)$ et donc $\delta_i \geq (1 + \frac{1}{n})^{-1}$.

Par ailleurs, $\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i} = n - n^{-2} \frac{\sum_{i \neq \ell} d \cdot v_c - d \cdot v_i}{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell} = n + n^{-2} \frac{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell}{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell} = n + \frac{1}{n^2}$.

D'autre part, $\frac{1}{\delta_i} > \frac{1}{\delta_i + 2^{-t}} \geq \frac{1}{\frac{n^2}{n^2-1} + 2^{-t}} > \frac{n^2-1}{n^2(1+2^{-t})} > \frac{n^2-1}{n^2(1+2^{-t+1})}$

Réduction du volume (1)

$$\frac{\text{vol}(S)}{\text{vol}(S')} \geq e^{\frac{1}{3(n+1)^2}}$$

Preuve. Puisque $d \cdot v_i \geq d \cdot v_\ell$, on a $\delta_i \leq (1 - \frac{1}{n^2})^{-1} = \frac{n^2}{n^2-1}$.

D'autre part, $d \cdot v_i = (n+1)d \cdot v_c - \sum_{j \neq i} d \cdot v_j \leq (n+1)d \cdot v_c - nd \cdot v_\ell$.

D'où $d \cdot v_c - d \cdot v_i \geq -n(d \cdot v_c - d \cdot v_\ell)$ et donc $\delta_i \geq (1 + \frac{1}{n})^{-1}$.

Par ailleurs, $\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i} = n - n^{-2} \frac{\sum_{i \neq \ell} d \cdot v_c - d \cdot v_i}{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell} = n + n^{-2} \frac{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell}{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell} = n + \frac{1}{n^2}$.

D'autre part, $\frac{1}{\delta_i} > \frac{1}{\delta_i + 2^{-t}} \geq \frac{1}{\frac{n^2}{n^2-1} + 2^{-t}} > \frac{n^2-1}{n^2(1+2^{-t})} > \frac{n^2-1}{n^2(1+2^{-t+1})}$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i} &> \sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i(1 + \frac{2^{-t}}{\delta_i})} \\ &\geq (\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i})(1 + (1 + \frac{1}{n})2^{-t})^{-1} \\ &\geq (\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i})(1 + 2^{-t+1})^{-1} \end{aligned}$$

Réduction du volume (2)

Cherchons un minorant du ratio $\frac{\text{vol}(\mathcal{S})}{\text{vol}(\mathcal{S}')} = \prod_{i \neq \ell} \bar{\delta}_i^{-1}$.

Réduction du volume (2)

Cherchons un minorant du ratio $\frac{\text{vol}(\mathcal{S})}{\text{vol}(\mathcal{S}')} = \prod_{i \neq \ell} \bar{\delta}_i^{-1}$.

Ce ratio est minoré par la solution du problème suivant :

$$\min\left(\prod_{i \neq \ell} u_i \mid u_i \geq (1 + 2^{-t+1})^{-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \wedge \sum_{i \neq \ell} u_i \geq (1 + 2^{-t+1})^{-1} \left(n + \frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Ce minimum est atteint lorsque toutes les variables sauf une, atteignent leur valeur minimale. Par conséquent, ce minimum est minoré par :

$$\begin{aligned} & (1 + 2^{-t+1})^{-n} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n-1} \left(n + \frac{1}{n^2} - (n - 1) \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1 + 2^{-t+1})^{-n} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n-1} \frac{n + 1}{n} \end{aligned}$$

Réduction du volume (2)

Cherchons un minorant du ratio $\frac{\text{vol}(\mathcal{S})}{\text{vol}(\mathcal{S}')} = \prod_{i \neq \ell} \bar{\delta}_i^{-1}$.

Ce ratio est minoré par la solution du problème suivant :

$$\min\left(\prod_{i \neq \ell} u_i \mid u_i \geq (1 + 2^{-t+1})^{-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \wedge \sum_{i \neq \ell} u_i \geq (1 + 2^{-t+1})^{-1} \left(n + \frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Ce minimum est atteint lorsque toutes les variables sauf une, atteignent leur valeur minimale. Par conséquent, ce minimum est minoré par :

$$\begin{aligned} & (1 + 2^{-t+1})^{-n} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n-1} \left(n + \frac{1}{n^2} - (n-1) \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1 + 2^{-t+1})^{-n} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n-1} \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$t = 4 + \lceil 3 \log_2(n+1) \rceil \text{ implique } 2^{-t+1} \leq \frac{1}{8(n+1)^3}.$$

$$\text{Par conséquent, } (1 + 2^{-t+1})^{-n} \geq e^{-n \left(\frac{1}{8(n+1)^3}\right)} \geq e^{-\frac{1}{8(n+1)^2}}.$$

$$\text{Par application du résultat de l'interlude } \frac{\text{vol}(\mathcal{S})}{\text{vol}(\mathcal{S}')} \geq e^{\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{8(n+1)^2}} \geq e^{\frac{1}{3(n+1)^2}}.$$