Algorithmique avancée : Polynômes et séries

Serge Haddad

LSV, ENS Paris-Saclay & CNRS & INRIA

L3

Plan

Un premier algorithme

Hypothèses. Soit $\mathbb{A}$ un anneau. On suppose que :

- $\mathbb{A}$ est *commutatif*, i.e. $\forall x, y \in \mathbb{A}\ xy = yx$
- $2 = 1 + 1$ est *inversible*, i.e. $\exists 2^{-1}\ 2^{-1}2 = 1$

On dit que a est un *diviseur de 0*, noté $a \mid 0$ s'il existe $b \neq 0$ tel que $ab = 0$.
On ne suppose pas que $\mathbb{A}$ est *intègre* : il peut exister $a \neq 0$ diviseur de 0.

Soit P, Q, deux polynômes de degré $< n$.

For i **from** 0 **do** $2n-2$ **do** $R[i] \leftarrow 0$
For i **from** 0 **do** $n-1$ **do**
  For j **from** 0 **do** $n-1$ **do**
    $R[i+j] \leftarrow R[i+j] + P[i]Q[j]$
Return(R)

Complexité en $\Theta(n^2)$

L'algorithme de Karatsuba (1)

Supposons $n = 2^k$.

$P = P^{(0)} + P^{(1)} X^{\frac{n}{2}}$ et $Q = Q^{(0)} + Q^{(1)} X^{\frac{n}{2}}$
avec $P^{(0)}, P^{(1)}, Q^{(0)}, Q^{(1)}$ des polynômes de degré $< \frac{n}{2}$.

R s'exprime alors comme suit :

$$R = P^{(0)}Q^{(0)} + (P^{(1)}Q^{(0)} + P^{(0)}Q^{(1)})X^{\frac{n}{2}} + P^{(1)}Q^{(1)}X^n$$

ou encore :

$$R = P^{(0)}Q^{(0)} + ((P^{(0)} + P^{(1)})(Q^{(0)} + Q^{(1)}) - P^{(0)}Q^{(0)} - P^{(1)}Q^{(1)})X^{\frac{n}{2}} + P^{(1)}Q^{(1)}X^n$$

qui a l'avantage de nécessiter uniquement trois multiplications de matrices.

L'algorithme de Karatsuba (2)

ProduitRec(P, Q, n)

If $n = 1$ **then** $R[0] \leftarrow P[0]Q[0]$; **Return**(R)

For i **from** 0 **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**

$P^{(0)}[i] \leftarrow P[i]$; $P^{(1)}[i] \leftarrow P[i + \frac{n}{2}]$; $Q^{(0)}[i] \leftarrow Q[i]$; $Q^{(1)}[i] \leftarrow Q[i + \frac{n}{2}]$

$SP[i] \leftarrow P[i] + P[i + \frac{n}{2}]$; $SQ[i] \leftarrow Q[i] + Q[i + \frac{n}{2}]$

$R^{(0)} \leftarrow$ **ProduitRec**$(P^{(0)}, Q^{(0)}, \frac{n}{2})$; $R^{(1)} \leftarrow$ **ProduitRec**$(P^{(1)}, Q^{(1)}, \frac{n}{2})$

$SR \leftarrow$ **ProduitRec**$(SP, SQ, \frac{n}{2})$

For i **from** 0 **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**

$R[i] \leftarrow R^{(0)}[i]$

$R[i + \frac{n}{2}] \leftarrow R^{(0)}[i + \frac{n}{2}] + SR[i] - R^{(0)}[i] - R^{(1)}[i]$

$R[i + n] \leftarrow R^{(1)}[i] + SR[i + \frac{n}{2}] - R^{(0)}[i + \frac{n}{2}] - R^{(1)}[i + \frac{n}{2}]$

$R[i + \frac{3n}{2}] \leftarrow R^{(1)}[i + \frac{n}{2}]$

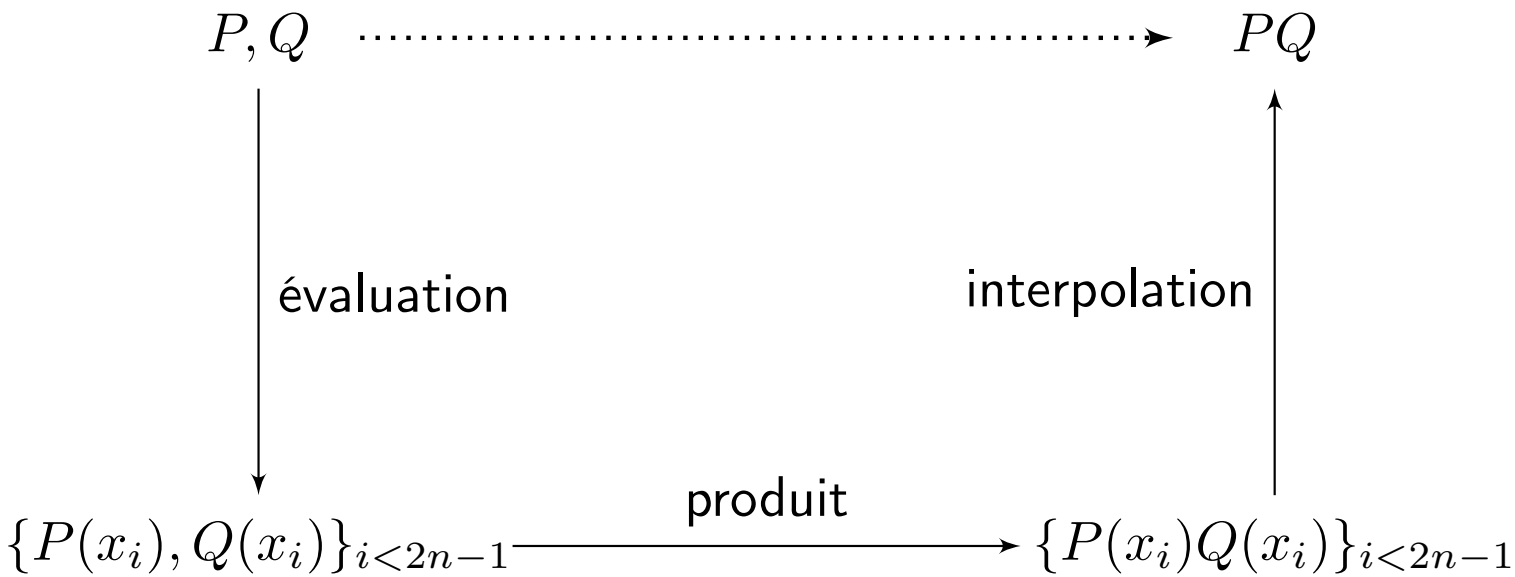
Return(R)

D'après les équations de récurrence, complexité en $\Theta(n^{\log_2(3)})$.

Multiplication par évaluation-interpolation

Soit $\mathbb{A}$ un corps.

Le produit PQ de degré inférieur à $2n-1$ peut se calculer à l'aide de $2n-1$ valeurs distinctes $\{x_i\}_{0\leq i<2n-1}$.



Le produit des évaluations s'effectue en $\Theta(n)$.

Quid de l'évaluation et de l'interpolation ?

L'algorithme de Horner

Soit P un polynôme de degré inférieur à n et v une valeur.

$s \leftarrow P[n-1]$

For i **from** $n-2$ **downto** 0 **do**

$(s = \sum_{k=i+1}^{n-1} P[k]v^{k-i-1})$

$s \leftarrow s \times v + P[i]$

$(s = \sum_{k=i}^{n-1} P[k]v^{k-i})$

Return(s)

- $n-1$ multiplications et additions.
- L'étape d'évaluation s'effectue en $\Theta(n^2)$.

L'interpolation de Lagrange

Soit $\{x_i, y_i\}_{i<n}$ ($\{X[i], Y[i]\}_{i<n}$) les n points. Alors $P = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\prod_{j\neq i} X - x_j}{\prod_{j\neq i} x_i - x_j}$ est l'unique polynôme de degré inférieur à n qui les rencontre.

$Q[0] \leftarrow -X[1]$; $Q[1] \leftarrow 1$;
For i **from** 2 **to** n **do** $(Q = \prod_{j<i} X - x_j)$
  $Q[i] \leftarrow 1$
  For j **from** $i-1$ **downto** 1 **do** $Q[j] \leftarrow -X[i]Q[j] + Q[j-1]$
  $Q[0] \leftarrow -X[i]Q[0]$
For i **from** 0 **to** $n-1$ **do** $P[i] \leftarrow 0$
For i **from** 1 **to** n **do** $(P = \sum_{j<i} y_i \frac{\prod_{j=1}^{n} X - x_j}{(\prod_{j\neq i} x_i - x_j)(X - x_i)})$
  $c \leftarrow Y[i]$; **For** j **from** 1 **to** n **do if** $j \neq i$ **then** $c \leftarrow \frac{c}{X[i]-X[j]}$
  $R[n-1] \leftarrow Q[n]$; **For** j **from** $n-1$ **downto** 1 **do** $R[j-1] \leftarrow Q[j] + X[i]R[j]$
  For j **from** 0 **to** $n-1$ **do** $P[j] \leftarrow P[j] + cR[j]$

L'étape d'interpolation s'effectue en $\Theta(n^2)$.

Racine primitive de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\omega \in \mathbb{A}$ est *une racine $n$ième de l'unité* si $\omega^n = 1$.

ω est *primitive* si $\forall\ 1 \leq i < n, \neg\ \omega^i - 1 \mid 0$.

1. $\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}$ sont des racines $n$ièmes de l'unité toutes distinctes.
2. Si n est pair alors ω^2 est une racine $\frac{n}{2}$ième primitive de l'unité et $\omega^{\frac{n}{2}} = -1$.
3. Pour tout $1 \leq i < n$, on a $\sum_{j=0}^{n-1} (\omega^i)^j = 0$.

Preuve.

1. $(\omega^i)^n = (\omega^n)^i = 1$. S'il existe $0 \leq i < j < n$ tels que $\omega^j = \omega^i$ alors $(\omega^{j-i} - 1)\omega^i = 0$. Donc $\omega^{j-i} - 1 \mid 0$, une contradiction.

2. $(\omega^2)^{\frac{n}{2}} = \omega^n = 1$ et pour tout $0 \leq i < \frac{n}{2}$ $(\omega^2)^i = \omega^{2i}$, d'où $\neg\omega^{2i} - 1 \mid 0$. $(\omega^{\frac{n}{2}} - 1)(\omega^{\frac{n}{2}} + 1) = \omega^n - 1 = 0$. Puisque $\neg\omega^{\frac{n}{2}} - 1 \mid 0$, $\omega^{\frac{n}{2}} + 1 = 0$.

3. $(\sum_{j=0}^{n-1} (\omega^i)^j)(\omega^i - 1) = (\omega^i)^n - 1 = 0$. Puisque $\neg\omega^i - 1 \mid 0$, $\sum_{j=0}^{n-1} (\omega^i)^j = 0$.

Polynôme et racine primitive

Soit $P = \sum_{i<n} p_i X^i$ et ω une racine $n$ième primitive avec $n = 2^k$.

Notons $P^{(0)} = \sum_{i<\frac{n}{2}} p_{2i} X^i$ et $P^{(1)} = \sum_{i<\frac{n}{2}} p_{2i+1} X^i$

$$P(X) = P^{(0)}(X^2) + X P^{(1)}(X^2)$$

D'où, en notant que $\omega^{k+\frac{n}{2}} = \omega^{\frac{n}{2}} \omega^k = -\omega^k$:

- $\forall 0 \leq k < \frac{n}{2}\ P^{(0)}(\omega^{2k}) = P^{(0)}(\omega^{2(\frac{n}{2}+k)}) = \sum_{i<\frac{n}{2}} p_{2i}(\omega^{2k})^i$
- $\forall 0 \leq k < \frac{n}{2}\ P^{(1)}(\omega^{2k}) = P^{(1)}(\omega^{2(\frac{n}{2}+k)}) = \sum_{i<\frac{n}{2}} p_{2i+1}(\omega^{2k})^i$
- $\forall 0 \leq k < \frac{n}{2}\ P(\omega^k) = P^{(0)}(\omega^{2k}) + \omega^k P^{(1)}(\omega^{2k})$
- $\forall 0 \leq k < \frac{n}{2}\ P(\omega^{\frac{n}{2}+k}) = P^{(0)}(\omega^{2k}) - \omega^k P^{(1)}(\omega^{2k})$

Transformée de Fourier rapide

- Evaluation de P sur les n racines $\omega^0, \ldots, \omega^{n-1}$ (stockées dans T).

FFT(P, T, n) :
If $n = 1$ **then** $F[0] \leftarrow P[0]$; **Return**(F)
For i **from** 0 **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**
  $P^{(0)}[i] \leftarrow P[2i]$; $P^{(1)}[i] \leftarrow P[2i+1]$; $T'[i] \leftarrow T[2i]$
$F^{(0)} \leftarrow \mathbf{FFT}(P^{(0)}, T', \frac{n}{2})$; $F^{(1)} \leftarrow \mathbf{FFT}(P^{(1)}, T', \frac{n}{2})$
For i **from** 0 **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**
  $v \leftarrow T[i]F^{(1)}[i]$; $F[i] \leftarrow F^{(0)}[i] + v$; $F[\frac{n}{2} + i] \leftarrow F^{(0)}[i] - v$
Return(F)

- D'après les équations de récurrence, cette étape s'effectue en $\Theta(n \log(n))$.

Anneau de polynômes quotient

Soit $D = \sum_{i \leq n} d_i X^i$ avec d_n inversible.

$\mathbb{A}[X]/D$ est l'ensemble des classes d'équivalence de $A[X]$
par la relation $P \sim Q$ si $P \bmod D = Q \bmod D$.

Le représentant de la classe d'équivalence de P est $P \bmod D$ (de degré $< n$).
$\mathbb{A}[X]/D$ est un anneau et on note $P \cdot_D Q$ le produit dans $\mathbb{A}[X]/D$.

Deux anneaux quotients particuliers.

$$P \cdot_{X^n-1} Q = \sum_{k<n} \left(\sum_{i+j=k} p_i q_j + \sum_{i+j=k+n} p_i q_j \right) X^k$$

$$P \cdot_{X^n+1} Q = \sum_{k<n} \left(\sum_{i+j=k} p_i q_j - \sum_{i+j=k+n} p_i q_j \right) X^k$$

Anneau quotient et racine primitive

- Soit ω une racine $n$ième primitive, $P = \sum_{i<n} p_i X^i$ et $Q = \sum_{i<n} q_i X^i$.

$$PQ = H(X^n - 1) + P \cdot_{X^n-1} Q \text{ pour un certain } H$$

D'où pour tout i, $P(\omega^i)Q(\omega^i) = PQ(\omega^i) = P \cdot_{X^n-1} Q(\omega^i)$.

- Soit θ une racine $2n$ième primitive. Notons $\widehat{P} = \sum_{i<n} \theta^i p_i X^i$.

$$\begin{aligned}
\widehat{P \cdot_{X^n+1} Q} &= \sum_{k<n} \theta^k \Big(\sum_{i+j=k} p_i q_j - \sum_{i+j=k+n} p_i q_j \Big) X^k \\
&= \sum_{k<n} \Big(\sum_{i+j=k} \theta^i p_i \theta^j q_j - \theta^{-n} \sum_{i+j=k+n} \theta^i p_i \theta^j q_j \Big) X^k \\
&= \sum_{k<n} \Big(\sum_{i+j=k} \theta^i p_i \theta^j q_j + \sum_{i+j=k+n} \theta^i p_i \theta^j q_j \Big) X^k = \widehat{P} \cdot_{X^n-1} \widehat{Q}
\end{aligned}$$

Interpolation et racine primitive

Soit $P = \sum_{i<n} p_i X^i$ et l'application $f_{n,\omega}$ qui associe à $(p_0, \ldots, p_n)$,

$$f_{n,\omega}(p_0, \ldots, p_n) = (P(\omega^0), \ldots, P(\omega^{n-1}))$$

C'est une application linéaire.
$\mathbf{M}_{n,\omega}$, sa matrice $\{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$ est définie par : $\mathbf{M}_{n,\omega}[i,j] = \omega^{ij}$.

$$\boxed{\mathbf{M}_{n,\omega}\mathbf{M}_{n,\omega^{-1}} = n\mathbf{Id}}$$

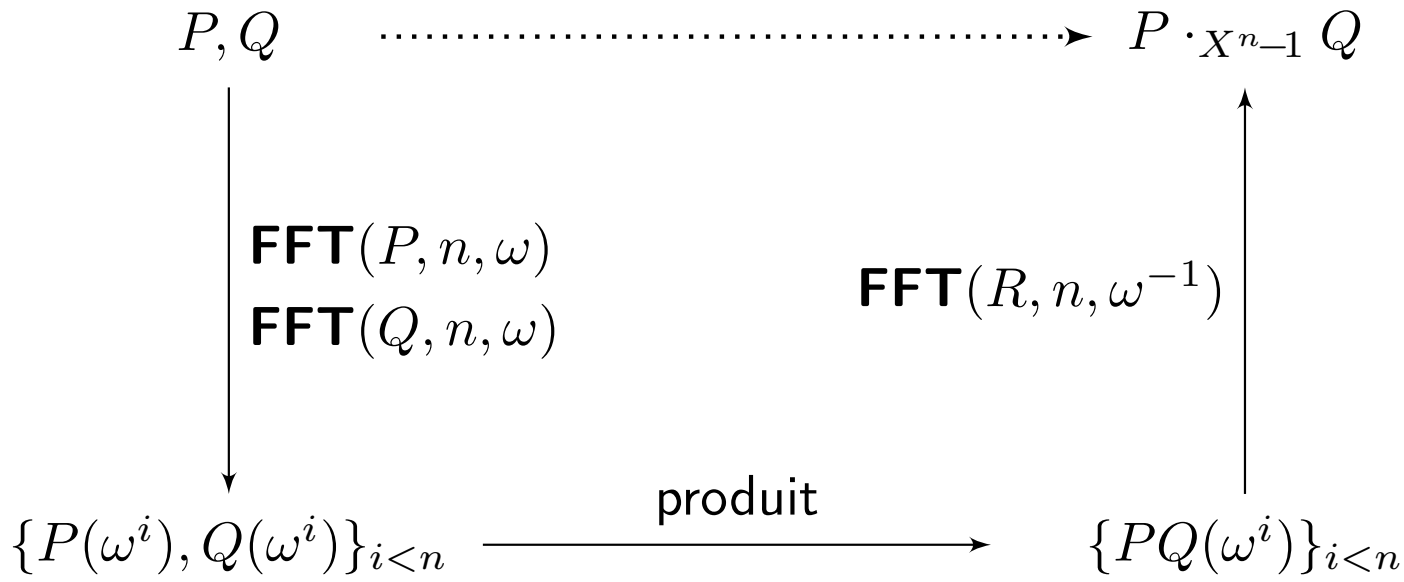
Preuve.

$$\mathbf{M}_{n,\omega}\mathbf{M}_{n,\omega^{-1}}[i,i] = \sum_{k<n} \omega^{ik}\omega^{-ki} = n$$

$$i \neq j \qquad \mathbf{M}_{n,\omega}\mathbf{M}_{n,\omega^{-1}}[i,j] = \sum_{k<n} \omega^{ik}\omega^{-kj} = \sum_{k<n} (\omega^{i-j})^k = 0$$

Multiplication rapide dans $\mathbb{A}[X]/X^n-1$

On note $R = n^{-1} \sum_{i<n} PQ(\omega^i)X^i$.

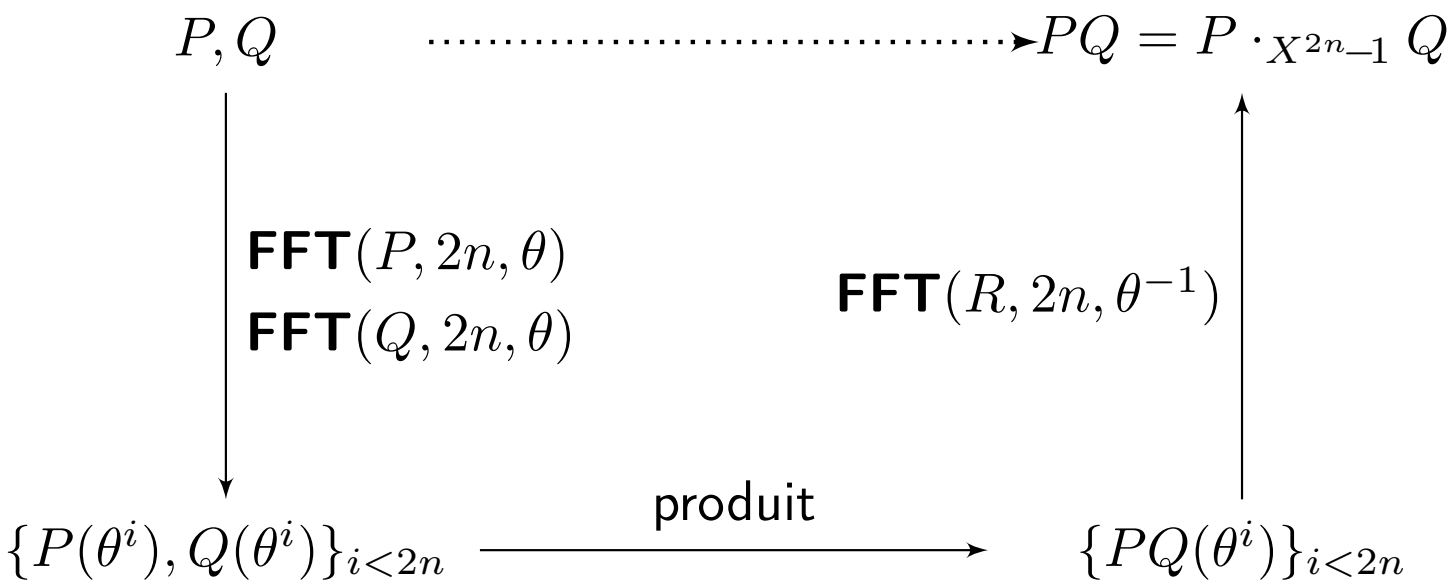


La complexité de cet algorithme est en $\Theta(n \log(n))$.

Multiplication rapide dans $\mathbb{A}[X]$

On se place dans $\mathbb{A}[X]/X^{2n}-1$. Soit θ une racine $2n$ième primitive.

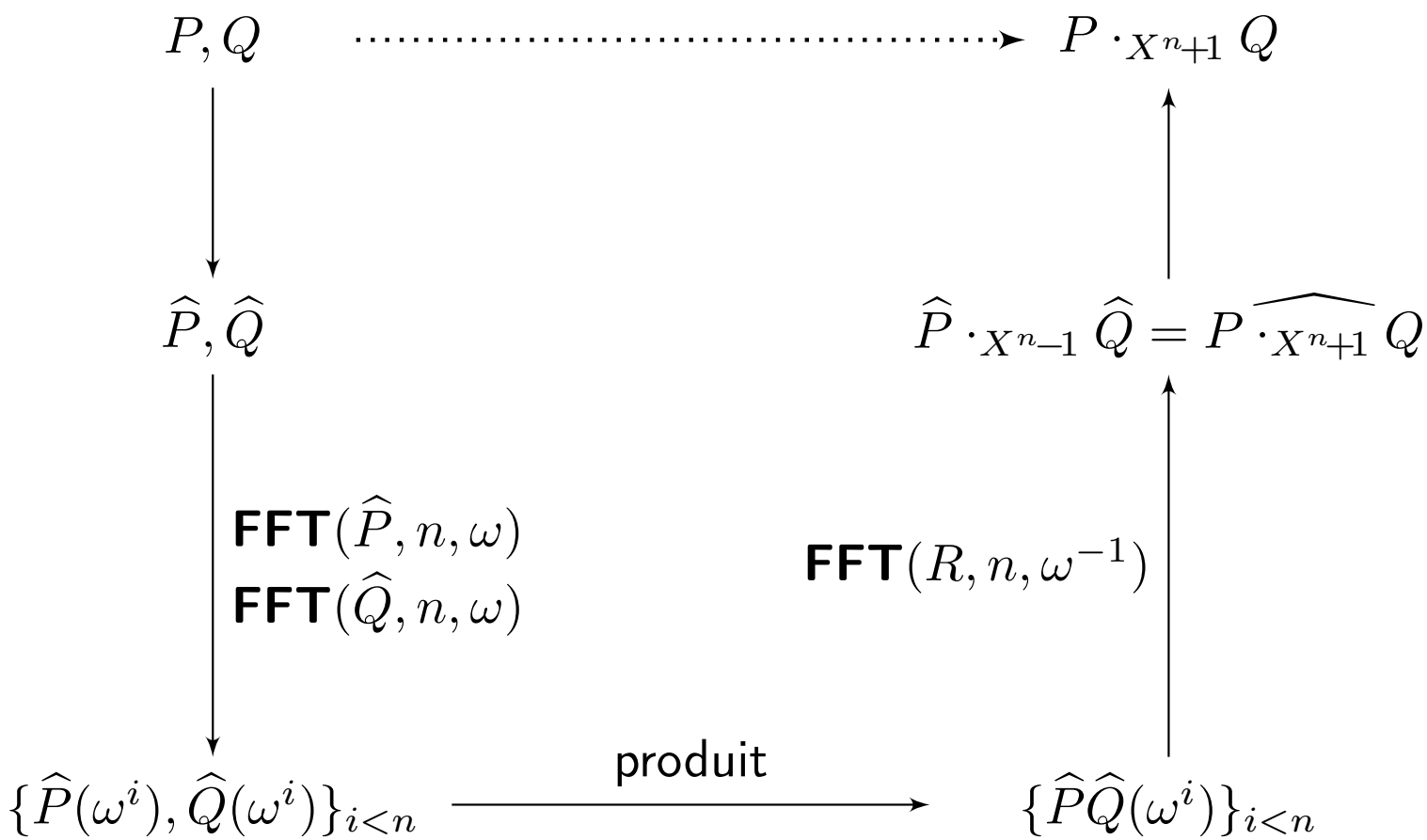
$R = (2n)^{-1} \sum_{i<2n} PQ(\theta^i) X^i$.



Application à $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ en plongeant $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Multiplication rapide dans $\mathbb{A}[X]/X^n+1$

On note $R = n^{-1} \sum_{i<n} \widehat{P}\widehat{Q}(\omega^i) X^i$.



Les opérations supplémentaires s'effectuent en $\Theta(n)$.

Plan

Une racine primitive dans $\mathbb{A}[X]/X^n+1$

Soit $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :
$\theta = X$ est une racine $2n$-ième primitive de l'unité dans $\mathbb{A}[X]/X^n + 1$.

Preuve. $\theta^n = -1$. Donc θ est une racine $2n$-ième de l'unité.

Montrons que que pour tout $1 \leq t < 2n$, $\neg\theta^t - 1 \mid 0$.

Observation. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 0$,
$\theta^{pq} - 1 = (\theta^p - 1)(1 + \theta^p + \theta^{2p} + \ldots + \theta^{(q-1)p})$.

Donc, si $\neg\theta^{pq} - 1 \mid 0$ alors $\neg\theta^p - 1 \mid 0$.

- Soit $q < 0$, $\theta^{pq} - 1 = \theta^{pq}(1 - \theta^{-pq})$, $\theta^{pq} - 1 \mid 0$ si et seulement si $\theta^{-pq} - 1 \mid 0$.

D'où pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, si $\neg\theta^{pq} - 1 \mid 0$ alors $\neg\theta^p - 1 \mid 0$.

- $\theta^n - 1 = -2$ inversible donc $\neg\theta^n - 1 \mid 0$.

Posons $g = pgcd(t, 2n)$, g s'écrit $2^{k'}$ avec $k' \leq k$, donc g divise n.

D'après l'observation, $\neg\theta^g - 1 \mid 0$.

- D'après le théorème de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $tu + 2nv = g$.

$$\theta^{tu} - 1 = \theta^{tu}\theta^{2nv} - 1 = \theta^g - 1$$

Puisque t divise tu, $\neg\theta^t - 1 \mid 0$.

FFT dans $(\mathbb{A}[X]/X^n+1)[Y]$

Soit un polynôme $P \in (\mathbb{A}[X]/X^n+1)[Y]$ de degré inférieur à $m \leq n$

à évaluer sur $\omega^0, \ldots, \omega^{m-1}$ avec $\omega = X^{\frac{2n}{m}}$. $(T[i] = \omega^i)$

FFT(P, T, m, n) :

If $m = 1$ **then** $F[0] \leftarrow P[0]$; **Return**(F)

For i **from** 0 **to** $\frac{m}{2} - 1$ **do**

$P^{(0)}[i] \leftarrow P[2i]$; $P^{(1)}[i] \leftarrow P[2i+1]$; $T'[i] \leftarrow T[2i]$

$F^{(0)} \leftarrow \mathbf{FFT}(P^{(0)}, T', \frac{m}{2})$; $F^{(1)} \leftarrow \mathbf{FFT}(P^{(1)}, T', \frac{m}{2})$

For i **from** 0 **to** $\frac{m}{2} - 1$ **do**

$v \leftarrow T[i] \cdot F^{(1)}[i]$; $F[i] \leftarrow F^{(0)}[i] + v$; $F[\frac{n}{2} + i] \leftarrow F^{(0)}[i] - v$

Return(F)

Complexité. Les opérations (en rouge) sont des copies, additions et multiplications de polynômes de degré inférieur à n.

L'un des termes de chaque multiplication est $\pm X^k$ pour un certain k.

Cette multiplication correspond à une translation circulaire des coefficients avec changement de signe pour certains coefficients.

Toutes ces opérations s'effectuent en $\Theta(n)$. Donc la FFT opère en $\Theta(nm\log(m))$.

Changement d'anneau

Objectif. Multiplication rapide dans $\mathbb{A}[X]/X^n+1$ où $n = 2^k$.

1. $n = dd'$ avec $d = 2^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ et $d' = 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.
2. On associe à $P = \sum_{i<n} p_i X^i \in \mathbb{A}[X]/X^n+1$
   $P^y \in (\mathbb{A}[X]/X^{2d}+1)[Y]/Y^{d'}+1$ défini par :

$$P^y = \sum_{i<d'} (\sum_{j<d} p_{id+j} X^j) Y^i$$

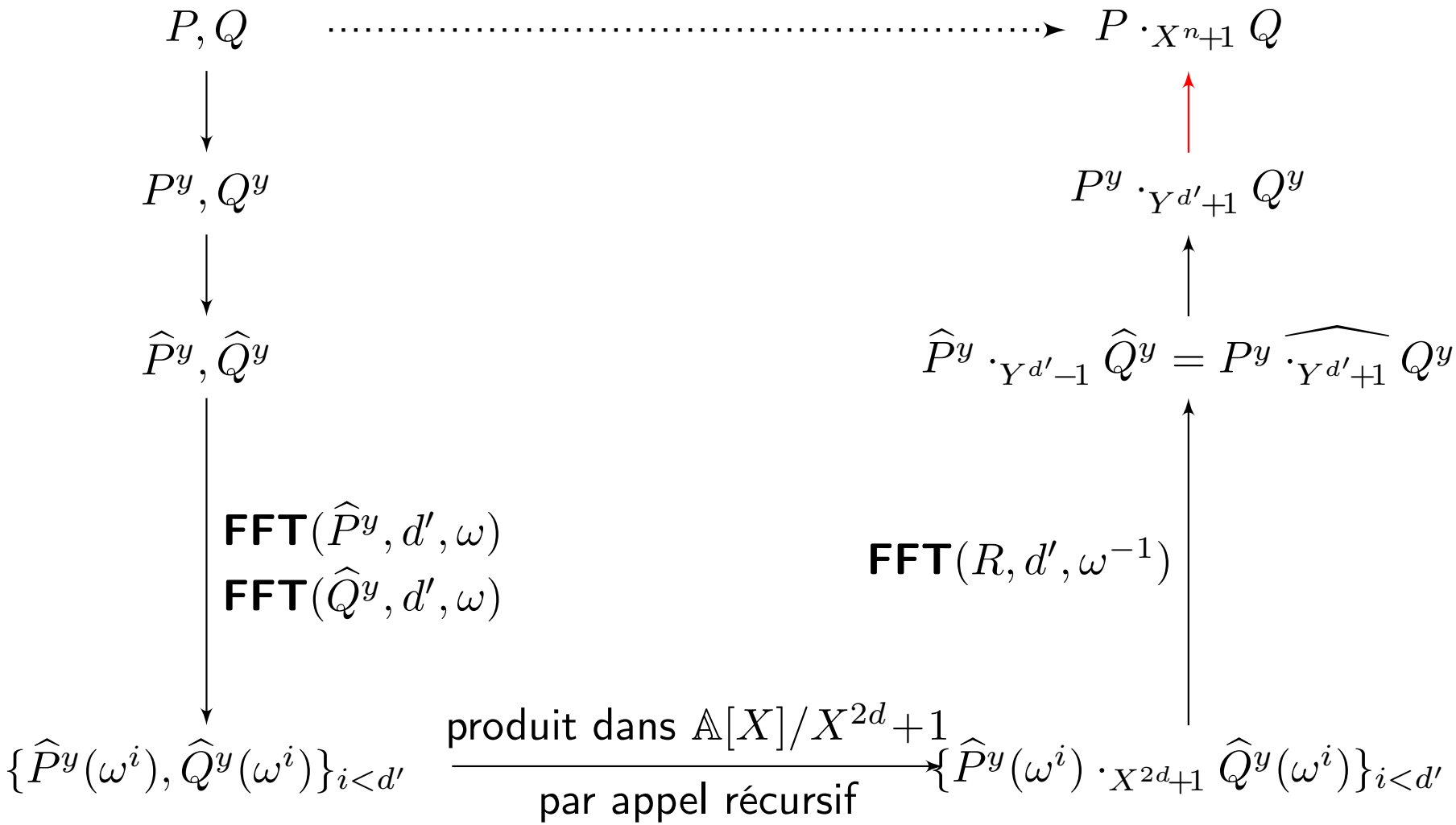
Illustration. $n = 8$. $d = 4$, $d' = 2$

$$P^y = (p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + p_3 X^3) + (p_4 + p_5 X + p_6 X^2 + p_7 X^3) Y$$

3. Pour calculer $P \cdot_{X^n+1} Q$ (à coefficients dans $\mathbb{A}$), on calcule $P^y \cdot_{Y^{d'}+1} Q^y$ (à coefficients dans $\mathbb{A}[X]/X^{2d}+1$).

Observation. Les produits de coefficients de P^y et de Q^y sont identiques dans $\mathbb{A}[X]/X^{2d}+1$ et $\mathbb{A}[X]$ car ces coefficients ont un degré inférieur à d.

Schéma de l'algorithme



avec $R = d'^{-1} \sum_{i<d'} (\widehat{P}^y(\omega^i) \cdot_{X^{2d}+1} \widehat{Q}^y(\omega^i)) Y^i$ et $\omega = X^{\frac{4d}{d'}}$.

De $P^y \cdot_{Y^{d'}+1} Q^y$ à $P \cdot_{X^n+1} Q$

- Soit $P = \sum_{s<n} p_s X^s$, $Q = \sum_{t<n} q_t X^t$ et $P \cdot_{X^n+1} Q = \sum_{u<n} c_u X^u$.

$$c_u = \sum_{s+t=u} p_s q_t - \sum_{s+t=n+u} p_s q_t$$

Posons $s = id + h$, $t = jd + l$, $u = ad + b$, avec $0 \leq i, j, a < d'$ et $0 \leq h, l, b < d$:

$$c_u = \sum_{i+j=a} \sum_{h+l=b} p_{id+h} q_{jd+l} \quad - \sum_{i+j=d'+a} \sum_{h+l=b} p_{id+h} q_{jd+l}$$
$$+ \sum_{i+j=a-1} \sum_{h+l=d+b} p_{id+h} q_{jd+l} - \sum_{i+j=d'+a-1} \sum_{h+l=d+b} p_{id+h} q_{jd+l}$$

- Soit $P^y = \sum_{i<n} p_i^y X^i$, $Q^y = \sum_{j<n} q_j^y X^j$, $P^y \cdot_{Y^{d'}+1} Q^y = \sum_{a<d'} c_a^y Y^a$ avec $c_a^y = \sum_{b<2d} c_{a,b}^y X^b$.

$$c_a^y = \sum_{i+j=a} p_i^y q_j^y - \sum_{i+j=d'+a} p_i^y q_j^y =$$
$$\sum_{i+j=a} (\sum_{h<d} p_{id+h} X^h)(\sum_{l<d} q_{jd+l} X^l) - \sum_{i+j=d'+a} (\sum_{h<d} p_{id+h} X^h)(\sum_{l<d} q_{jd+l} X^l)$$

D'où $c_{a,b}^y = \sum_{i+j=a} \sum_{h+l=b} p_{id+h} q_{jd+l} - \sum_{i+j=d'+a} \sum_{h+l=b} p_{id+h} q_{jd+l}$

- Par examen, on obtient pour $0 \leq a < d'$ et $0 \leq b < d$:

$$\boxed{c_{ad+b} = c_{a,b}^y + c_{a-1\%d',d+b}^y}$$

.

Analyse de complexité

Soit $n = 2^k$ et $T(n)$ le temps d'exécution. On considère ici le logarithme en base 2.

- Si k est pair $T(n) \leq cn\log(n) + \sqrt{n}T(2\sqrt{n})$
- Si k est impair $T(n) \leq cn\log(n) + \sqrt{\frac{n}{2}}T(2\sqrt{2n})$

Il existe n_0 et e tel que pour tout $n \geq n_0$, $T(n) \leq en\log(n)\log(\log(n))$.

Preuve. Démontrons-le par induction. Supposons que k est pair.

$T(n) \leq cn\log(n) + \sqrt{n}T(2\sqrt{n})$

$T(n) \leq cn\log(n) + e\sqrt{n}(2\sqrt{n}\log(2\sqrt{n})\log(\log(2\sqrt{n})))$

$T(n) \leq cn\log(n) + 2en\log(2\sqrt{n})\log(\log(2\sqrt{n}))$

$T(n) \leq cn\log(n) + en(\log(n) + 2)\log(\log(2\sqrt{n}))$

$T(n) \leq cn\log(n) + en(\log(n) + 2)\log(\frac{1}{2}\log(n) + 1)$

$T(n) \leq cn\log(n) + en(\log(n) + 2)(\log(\frac{1}{2}\log(n)) + \frac{1}{2})$ *(avec n_0 suffisamment grand)*

$T(n) \leq cn\log(n) + en(\log(n) + 2)(\log(\log(n)) - \frac{1}{2})$

$T(n) \leq en\log(n)\log(\log(n)) + (c - \frac{e}{2})n\log(n) + 2\log(\log(n))$

$T(n) \leq en\log(n)\log(\log(n))$ *(avec $e > 2c$ et n_0 suffisamment grand)*

Le cas k impair se traite de manière similaire.

Plan

Séries formelles

Une série formelle à coefficients dans $\mathbb{A}$ est de la forme $P = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i X^i$.

Les opérations de $\mathbb{A}[[X]]$, l'anneau des séries formelles sont définies ainsi avec $Q = \sum_{i\in\mathbb{N}} q_i X^i$:

- $P + Q = \sum_{i\in\mathbb{N}} (p_i + q_i) X^i$
- $PQ = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\sum_{i+j=k} p_i q_j) X^k$

P est inversible ssi p_0 est inversible. Son inverse Q est alors définie par :

$$q_0 = p_0^{-1} \text{ et } q_i = -q_0 \sum_{j<i} p_{i-j} q_j$$

Preuve.

Q doit vérifier $p_0 q_0 = 1$ et pour tout $k > 0$, $\sum_{i+j=k} p_i q_j = 0$.

La première équation implique p_0 inversible d'inverse q_0.

Les équations suivantes se résolvent alors inductivement :

$p_0 q_i = -\sum_{j<i} p_{i-j} q_j$ d'où $q_i = -q_0 \sum_{j<i} p_{i-j} q_j$.

Observation. $q_1 = -p_1 q_0^2$

Calcul de l'inverse

Les séries sont définies de manière implicite :

- par une fonction $p(n)$ qui renvoie p_n ;
- par une équation de récurrence comme $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$, etc.

Dans la suite on suppose qu'on peut calculer p_n en $\Theta(1)$,
une fois calculés $p_0, \ldots, p_{n-1}$.

Objectif. Calcul efficace des n premiers coefficients de l'inverse d'une série.

Inverse(p, n)
$Q[0] \leftarrow p(0)^{-1}$
For i **from** 1 **to** $n-1$ **do**
  $Q[i] \leftarrow 0$
  For j **from** 1 **to** i **do** $Q[i] \leftarrow Q[i] + Q[i-j]p(j)$;
  $Q[i] \leftarrow -Q[0]Q[i]$

Complexité en $\Theta(n^2)$.

Analyse de l'inverse

Soit $n = 2^k$. Décomposons Q, l'inverse de P de la façon suivante :

- $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2$
- $Q_0 = \sum_{i<\frac{n}{2}} q_i X^i$, $Q_1 = \sum_{\frac{n}{2}\leq i<n} q_i X^i$ et $Q_2 = \sum_{i\geq n} q_i X^i$

$$\boxed{Q_1 = -PQ_0^2 \text{ tronqué aux coefficients d'indice compris entre } \frac{n}{2} \text{ et } n-1}$$

Preuve. $P(Q_0 + Q_1 + Q_2) = 1$

D'où : $1 - PQ_0 = PQ_1 + PQ_2$

En multipliant par Q_0 : $(1 - PQ_0)Q_0 = PQ_0Q_1 + PQ_0Q_2$

puis en utilisant à nouveau $P(Q_0 + Q_1 + Q_2) = 1$:

$(1 - PQ_0)Q_0 = (1 - PQ_1 - PQ_2)Q_1 + PQ_0Q_2$

D'où : $Q_0 - PQ_0^2 = Q_1 - PQ_1^2 - PQ_1Q_2 + PQ_0Q_2$

Puisque Q_1^2 et Q_2 sont des séries dont les coefficients inférieurs à n sont nuls et Q_0 est de degré strictement inférieur à $\frac{n}{2}$, on obtient le résultat.

Calcul efficace de l'inverse

Inverse(P, n)
If $n = 1$ **then** $Q[0] \leftarrow P[0]^{-1}$; **Return**(Q)
$Q_0 \leftarrow$ **Inverse**$(P, \frac{n}{2})$
$Q_a \leftarrow$ **Produit**$(Q_0, Q_0, \frac{n}{2})$
$Q_a \leftarrow$ **Produit**(P, Q_a, n)
For i **from** 0 **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do** $Q[i] \leftarrow Q_0[i]$
For i **from** $\frac{n}{2}$ **to** $n - 1$ **do** $Q[i] \leftarrow -Q_a[i]$
Return(Q)

Analyse de complexité.

$$\text{Pour } n \geq 2 \qquad T(n) \leq cn \log(n) \log(\log(n)) + T(\frac{n}{2})$$

D'où :

$$T(n) \leq d + \sum_{0 \leq i < k} c\frac{n}{2^i} \log(\frac{n}{2^i}) \log(\log(\frac{n}{2^i})) \leq d + 2cn \log(n) \log(\log(n))$$

Plan

Calcul de la division

Soit $P = \sum_{i \leq n} p_i X^i$ et $D = \sum_{i \leq m} d_i X^i$ avec $m \leq n$ et d_m inversible.

La division euclidienne de P par D est définie par la paire (Q, R) telle que :

$$P = QD + R \text{ avec } deg(R) < m$$

Quotient(P, D, n, m)
For i **from** $n - m$ **downto** 0 **do**
  $Q[i] \leftarrow P[i + m]D[m]^{-1}$
  For j **from** $i + m - 1$ **downto** i **do** $P[j] \leftarrow P[j] - D[j - i]Q[i]$
For i **from** 0 **to** $m - 1$ **do** $R[i] \leftarrow P[i]$
Return(Q, R)

Analyse de complexité.

La division s'effectue en $\Theta((n + 1 - m)m)$.

Division via les séries

On introduit une nouvelle variable formelle T telle que $X = \frac{1}{T}$.
L'équation $P = QD + R$ peut se réécrire :

$$T^n P(\frac{1}{T}) = (T^{n-m} Q(\frac{1}{T}))(T^m D(\frac{1}{T})) + T^n R(\frac{1}{T})$$

où $T^n P(\frac{1}{T})$, $T^{n-m} Q(\frac{1}{T})$, $T^m D(\frac{1}{T})$ et $T^n R(\frac{1}{T})$ appartiennent à $\mathbb{A}[T] \subseteq \mathbb{A}[[T]]$.

Le terme constant de $T^m D(\frac{1}{T})$ est d_m. Donc $T^m D(\frac{1}{T})$ est inversible dans $\mathbb{A}[[T]]$:

$$T^n P(\frac{1}{T})(T^m D(\frac{1}{T}))^{-1} = T^{n-m} Q(\frac{1}{T}) + T^n R(\frac{1}{T})(T^m D(\frac{1}{T}))^{-1}$$

Le terme non nul de plus petit degré de $T^n R(\frac{1}{T})$ a un degré $\geq n - m + 1$.
Par conséquent :

$$\boxed{T^{n-m} Q(\tfrac{1}{T}) = T^n P(\tfrac{1}{T})(T^m D(\tfrac{1}{T}))^{-1} \text{ } \textit{tronqué aux } n - m + 1 \textit{ premiers coefficients}}$$

Calcul efficace de la division

For i **from** 0 **to** $n-1$ **do** $P'[i] \leftarrow P[n-i]$
For i **from** 0 **to** $m-1$ **do** $D'[i] \leftarrow D[n-i]$
$D'' \leftarrow \mathbf{Inverse}(D', n-m+1)$
$Q' \leftarrow \mathbf{Produit}(P', D'', n)$
For i **from** 0 **to** $n-m$ **do** $Q[i] \leftarrow Q'[n-i]$
$QD \leftarrow \mathbf{Produit}(Q, D, n)$
For i **from** 0 **to** $m-1$ **do** $R[i] \leftarrow P[i] - QD[i]$
Return(Q, R)

Analyse de complexité.

La division s'effectue en $\Theta(n \log(n) \log(\log(n)))$.