Types intersection et modèles de filtres

Correction.

Documents autorisés (en particulier le poly).

I. Types intersection.

On considère la discipline de typage suivante. Soient A, B, C, $\ldots$, des variables de types. Les types F, G, H, $\ldots$, sont définis inductivement par:

- les variables de types sont des types;
- la constante spéciale Ω est un type;
- $F \to G$ est un type pour tous types F, G;
- $F \cap G$ est un type pour tous types F, G.

("Inductivement" signifie qu'il n'existe aucune autre façon de fabriquer un type.)

Les règles de typage sont données par le système suivant, appelé $\mathcal{D}\Omega$:

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\ (Ax) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t : \Omega}\ (\Omega)$$

$$\frac{\Gamma, x : F \vdash t : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot t : F \to G}\ (\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash s : F \to G \quad \Gamma \vdash t : F}{\Gamma \vdash st : G}\ (\to E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : F \quad \Gamma \vdash t : G}{\Gamma \vdash t : F \cap G}\ (\cap I) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : F \cap G}{\Gamma \vdash t : F}\ (\cap E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash t : F \cap G}{\Gamma \vdash t : G}\ (\cap E_2)$$

Comparé au système des types simples, les règles supplémentaires sont: (Ω), qui énonce que l'on peut typer n'importe quel terme de type Ω; et les règles $(\cap I)$, $(\cap E_1)$, $(\cap E_2)$, qui expriment que les termes de type $F \cap G$ sont ceux qui ont exactement les deux types F et G.

Le système $\mathcal{D}$ est défini comme le système $\mathcal{D}\Omega$, à ceci près que Ω n'est plus dans l'algèbre des types, et que donc la règle (Ω) en est aussi retirée.

1. Montrer que $\delta = \lambda x \cdot xx$ est typable en système $\mathcal{D}$ mais pas dans le système des types simples.

Le terme δ est clairement de type $F \cap (F \to F) \to F$ pour tout type F en système $\mathcal{D}$. Dans le système des types simples, $\Gamma \vdash \lambda x \cdot xx : F \to G$ nécessite de pouvoir dériver $\Gamma, x : F \vdash xx : G$. Donc on doit avoir $\Gamma, x : F \vdash x : F' \to G$ et $\Gamma \vdash x : F'$ pour un certain type F', ce qui implique $F = F' = F' \to G$, ce qui est impossible.

2. On admettra la propriété d'auto-réduction pour la β-réduction pour les systèmes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}\Omega$.

   En adaptant la preuve de normalisation forte du système des types simples du cours, montrer que tout terme typable dans le système $\mathcal{D}$ est fortement normalisant pour la β-réduction. (On ignorera la règle η.) On pourra se contenter d'énumérer les cas qui changent par rapport à la démonstration du cours, et de se concentrer dessus.

   On définit comme dans le cours $RED_A = SN$ pour les types de base A, $RED_{F\to G} = \{u | \forall v \in RED_F \cdot uv \in RED_G\}$. À ces définitions on ajoute $RED_{F\cap G} = RED_F \cap RED_G$.

   En première étape, nous devons d'abord démontrer (CR1), (CR2) et (CR3), par récurrence sur les types. Le seul nouveau cas est celui des types intersection:

   (CR1) *Si $u \in RED_{F\cap G}$ alors $u \in SN$. Clairement si $u \in RED_{F\cap G}$, alors $u \in RED_F$, donc par hypothèse de récurrence (CR1), $u \in SN$.*

   (CR2) *Si $u \in RED_{F\cap G}$ et $u \to v$ alors $v \in RED_{F\cap G}$. Si $u \in RED_{F\cap G}$, par définition $u \in RED_F$ et $u \in RED_G$, donc en utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence (CR2), $v \in RED_F$ et $v \in RED_G$. Par définition, $v \in RED_{F\cap G}$.*

   (CR3) *Si u est neutre, et tous ses réduits en une étape sont dans $RED_{F\cap G}$, alors u est dans $RED_{F\cap G}$. Comme u est neutre et tous ses réduits en une étape sont dans RED_F, par hypothèse de récurrence (CR3) u est dans RED_F. De même, u est dans RED_G. Donc u est dans $RED_{F\cap G}$.*

   Ensuite, on doit démontrer que: $(*)$ si $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash t : H$ est dérivable, alors pour toute substitution σ des variables x_i par des termes $v_i \in RED_{F_i}$, $1 \leq i \leq n$, $t\sigma$ est dans RED_H. C'est, comme d'habitude, par récurrence structurelle sur la dérivation de typage donnée.

   Les nouveaux cas à traiter sont les trois nouvelles règles $(\cap I)$, $(\cap E_1)$, $(\cap E_2)$.

   - $(\cap I)$. *Par hypothèse de récurrence $t\sigma \in RED_F$, et $t\sigma \in RED_G$. Par définition, $t\sigma \in RED_{F\cap G}$.*
   - $(\cap E_1)$. *Par hypothèse de récurrence $t\sigma \in RED_{F\cap G}$, donc $t\sigma \in RED_F$.*
   - $(\cap E_2)$. *Similairement.*

   Par (CR3), toute variable est dans RED_{F_i} pour tout i. Donc on peut prendre $v_i = x_i$ dans $(*)$, ce qui implique que si t est typable de type H, alors $t \in RED_H$. Par (CR1), $t \in SN$.

3. En déduire que, bien que δ soit typable en système $\mathcal{D}$, $\delta\delta$ ne l'est pas.

Si $\delta\delta$ était typable en système $\mathcal{D}$, il serait fortement normalisant. Mais $\delta\delta \to \delta\delta$ ne termine pas.

4. Montrer que $\mathcal{D}\Omega$ n'admet pas la propriété d'auto-réduction pour η.

   Soit le terme $\lambda x \cdot yx$, typé par:

$$\dfrac{\dfrac{}{x : A \vdash yx : \Omega}\,(\Omega)}{\vdash \lambda x \cdot yx : A \to \Omega}$$

   Mais les seuls types F tels que $\vdash y : F$ soit dérivable sont des intersections de Ω, ce qu'on démontre par récurrence structurelle sur une dérivation donnée de $\vdash y : F$. Si la dernière règle appliquée est (Ω), $(\cap I)$, $(\cap E_1)$, $(\cap E_2)$, c'est évident; et il n'y a pas d'autre cas possible. Or $A \to \Omega$ n'est pas une intersection finie de Ω, d'où le résultat.

II. Préordre $\leq$ sur les types.

On définit un préordre $\leq$ sur l'ensemble des types du système $\mathcal{D}\Omega$ par: $F \leq G$ si et seulement si, pour tout terme t et tout contexte Γ tel que $\Gamma \vdash t : F$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors $\Gamma \vdash t : G$ est aussi dérivable. On rappelle qu'un préordre est une relation réflexive et transitive.

1. Montrer que:

   (a) Si $\Gamma \vdash t : F$ est dérivable et $F \leq G$, alors $\Gamma \vdash t : G$ est dérivable.

   (b) $F \leq F \cap F$ pour tout type F.

   (c) $F \cap G \leq F$, $F \cap G \leq G$ pour tous types F, G.

   (d) Si $F \leq F'$ et $G \leq G'$ alors $F \cap G \leq F' \cap G'$.

   (e) $F \leq \Omega$ pour tout type F.

   (a) est par définition. Si t est de type F, alors par $(\cap I)$, t est aussi de type $F \cap F$, d'où (b). L'affirmation (c) vient de $(\cap E_1)$ et $(\cap E_2)$. Pour (d), supposons $\Gamma \vdash t : F \cap G$, donc $\Gamma \vdash t : F$ et $\Gamma \vdash t : G$ par $(\cap E_1)$ et $(\cap E_2)$. Par (a), $\Gamma \vdash t : F'$ et $\Gamma \vdash t : G'$, donc $\Gamma \vdash t : F' \cap G'$ par $(\cap I)$. L'énoncé (e) est évident par (Ω).

2. Soit $\equiv$ la relation d'équivalence induite par le préordre $\leq$, autrement dit $F \equiv F'$ si et seulement si $F \leq F'$ et $F' \leq F$. Montrer que $F \cap \Omega \equiv \Omega \cap F \equiv F$ pour tout type F, que $F \cap G \equiv G \cap F$ et $F \cap (G \cap H) \equiv (F \cap G) \cap H$ pour tous types F, G, H.

   $F \cap \Omega \leq F$ par II.1.c. Pour la réciproque, $F \leq F \cap F$ par II.1.b. Comme $F \leq F$ et $F \leq \Omega$ (par II.1.e), en utilisant II.1.d, $F \cap F \leq F \cap \Omega$, donc $F \leq F \cap \Omega$. Donc $F \equiv F \cap \Omega$. L'autre équivalence $F \equiv \Omega \cap F$ est similaire.

Par II.1.c, $F \cap G \leq F$ et $F \cap G \leq G$, donc $F \cap G \leq (F \cap G) \cap (F \cap G)$ (par II.1.a) $\leq G \cap F$ (par $F \cap G \leq G$, $F \cap G \leq F$ et II.1.d). Par symétrie, $G \cap F \leq F \cap G$, donc $F \cap G \equiv G \cap F$.

De même, par II.1.c, $F \cap (G \cap H)$ est inférieur ou égal à F, G et H, donc à $F \cap G$ et à H, donc à $(F \cap G) \cap H$. L'inégalité réciproque se démontre de la même façon. Donc $F \cap (G \cap H) \equiv (F \cap G) \cap H$.

3. Montrer que si $\Gamma \vdash \lambda x \cdot t : F$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors il existe une famille finie de types flèches $G_i \to H_i$, $1 \leq i \leq n$, telle que $\Gamma, x : G_i \vdash t : H_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et telle que $F \equiv \bigcap_{i=1}^{n}(G_i \to H_i)$, où le signe $\bigcap$ dénote une intersection quelconque, le parenthésage étant arbitraire. Par convention, l'intersection vide est Ω.

   On montre par récurrence sur la dérivation de type que F est (exactement, pas équivalente à) une intersection finie de types flèches $G_i \to H_i$ et de types Ω. On peut ensuite éliminer les Ω à équivalence près en utilisant la question précédente.

   Si la dernière règle appliquée est $(\to I)$, alors F est de la forme $G_1 \to H_1$, avec $n = 1$. Si c'est (Ω), alors $F = \Omega$, d'où $n = 0$. Si c'est $(\cap I)$, alors $F = F_1 \cap F_2$ où par hypothèse de récurrence F_1 et F_2 sont équivalentes à des intersections finies de types $G_i \to H_i$ et de Ω, donc F aussi.

   Si c'est $(\cap E_1)$, alors on a une dérivation de $\Gamma \vdash \lambda x \cdot t : F \cap F'$, où par hypothèse de récurrence $F \cap F'$ est une intersection finie de $G_i \to H_i$ et de Ω, donc F aussi. Le cas de $(\cap E_2)$ est similaire.

   Il n'y a pas d'autre cas possible.

4. Montrer que si $\Gamma \vdash st : G$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors il existe une famille finie de dérivations de $\Gamma \vdash s : F_i \to G_i$ et de $\Gamma \vdash t : F_i$, $1 \leq i \leq n$, telles que $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \leq G$. (Lorsque $n = 0$, ceci signifie simplement que $G \equiv \Omega$.)

   Par récurrence sur la dérivation donnée de $\Gamma \vdash st : G$. Si la dernière règle est (Ω), c'est clair: $n = 0$. Si c'est $(\cap E_1)$, on a $\Gamma \vdash st : G \cap G'$, donc il existe une famille comme ci-dessus telle que $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \leq G \cap G'$. Comme $G \cap G' \leq G$ par II.1.c, on conclut. Le cas $(\cap E_2)$ est similaire. Si la dernière règle est $(\cap I)$, alors $G = G' \cap G''$, on trouve par hypothèse de récurrence une famille $\Gamma \vdash s : F_i \to G_i$, $\Gamma \vdash t : F_i$, $1 \leq i \leq n$ avec $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \leq G'$ et une famille $\Gamma \vdash s : F'_i \to G'_i$, $\Gamma \vdash t : F'_i$, $1 \leq i \leq n'$ avec $\bigcap_{i=1}^{n'} G'_i \leq G''$. Donc $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \cap \bigcap_{i=1}^{n'} G'_i \leq G' \cap G''$, et l'on conclut. Le dernier cas est celui où la dernière règle appliquée est $(\to E)$, qui donne $G = G_i \to H_i$, $n = 1$.

5. Montrer que si $\Gamma \vdash x : G$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors soit $G \equiv \Omega$, soit $x : F$ apparaît dans Γ et $F \leq G$.

   Par récurrence structurelle sur la dérivation donnée, on montre d'abord que si x n'apparaît pas dans Γ, alors $G \equiv \Omega$; plus précisément, que G est une intersection de *types Ω. C'est évident si la dernière règle est (Ω), $(\cap I)$, $(\cap E_1)$, ou $(\cap E_2)$. Comme x n'apparaît pas dans Γ, la règle (Ax) est impossible. les autres règles sont clairement impossibles.*

Ensuite, on montre que si x apparaît dans Γ avec le type F, alors $F \leq G$. Si la dernière règle est (Ω), alors $G = \Omega$, donc $F \leq G$ par II.1.e. Si la dernière règle est $(\cap E_1)$, alors on a $\Gamma \vdash x : G \cap G'$ et par hypothèse de récurrence $F \leq G \cap G'$. Par II.1.c, $F \leq G$. Similairement pour $(\cap E_2)$. Si la dernière règle est $(\cap E_2)$, alors $G = G_1 \cap G_2$, et par hypothèse de récurrence $F \leq G_1$ et $F \leq G_2$. Par II.1.b et II.1.d, on en déduit $F \leq G_1 \cap G_2 = G$. Si la dernière règle est (Ax), alors $G = F$. Les autres cas sont impossibles.

6. Montrer que si $\Gamma, x : F \vdash t : G$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, et $F' \leq F$, alors $\Gamma, x : F' \vdash t : G$ est aussi dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$.

   Par récurrence sur la dérivation de types. Le seul cas intéressant est le cas de la règle (Ax), précisément lorsque $t = x$, et $G = F$. Or on a $\Gamma, x : F' \vdash x : F'$ par (Ax), et par définition de $\leq$ on en conclut $\Gamma, x : F' \vdash x : F$.

III. Modèle de filtres.

Soit $\mathcal{D}\Omega$ l'ensemble des types $\mathcal{D}\Omega$. Un *filtre* $X \subseteq \mathcal{D}\Omega$ est un ensemble de types tel que:

- $\Omega \in X$;
- si $F \in X$ et $F \leq G$, alors $G \in X$;
- si $F \in X$ et $G \in X$, alors $F \cap G \in X$.

Le filtre $\mathcal{F}(E)$ *engendré* par un ensemble E de types de $\mathcal{D}\Omega$ est le plus petit filtre contenant E. On peut le définir constructivement par

$$\mathcal{F}(E) = \{G \in \mathcal{D}\Omega | \exists n \in \mathbb{N}, F_1, \ldots, F_n \in E \cdot \bigcap_{i=1}^{n} F_i \leq G\}$$

Ce que l'on admettra. Comme cas particulier, $\uparrow F = \mathcal{F}(\{F\}) = \{G \in \mathcal{D}\Omega | F \leq G\}$ est le *filtre principal* engendré par le type F.

Étant donnés deux filtres X et Y, on pose

$$X \cdot Y = \mathcal{F}(\{G \in \mathcal{D}\Omega | \exists F \in Y \cdot F \rightarrow G \in X\})$$

C'est l'*application* du filtre X au filtre Y.

1. On définit la sémantique suivante des λ-termes (non typés), où ρ est une fonction qui à chaque variable associe un filtre:

$$\begin{aligned}
[\![x]\!]\,\rho &= \rho(x) \\
[\![st]\!]\,\rho &= [\![s]\!]\,\rho \cdot [\![t]\!]\,\rho \\
[\![\lambda x \cdot t]\!]\,\rho &= \{G \in \mathcal{D}\Omega | \exists G_1, H_1, \ldots, G_n, H_n \in \mathcal{D}\Omega \text{ tels que} \\
&\qquad \bigcap_{i=1}^{n} (G_i \to H_i) \leq G \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, n\} \cdot H_i \in [\![t]\!]\,(\rho[x :=\uparrow G_i])\}
\end{aligned}$$

Montrer que ceci est bien défini, au sens où $[\![t]\!]\,\rho$ est toujours un filtre, quel que soit le terme t.

La seule chose à montrer est que la clause définissant $[\![\lambda x \cdot t]\!]\,\rho$ définit bien un filtre. Ω est dedans, car Ω est (supérieur ou égal à) l'intersection vide. Si G est dedans et $G \leq G'$, alors G' est dedans, par transitivité de $\leq$. Finalement, si G et G' sont dedans, alors $\bigcap_i (G_i \to H_i) \leq G$ et $\bigcap_j (G'_j \to H'_j) \leq G'$ pour deux familles vérifiant certaines conditions (voir définition), donc $\bigcap_i (G_i \to H_i) \cap \bigcap_j (G'_j \to H'_j) \leq G \cap G'$ par II.1.d. Donc $G \cap G'$ est dedans.
Il y avait en fait plus simple. Il suffisait d'observer que, par définition,

$$[\![\lambda x \cdot t]\!]\,\rho = \mathcal{F}(\{G \to H | H \in [\![t]\!]\,(\rho[x :=\uparrow G])\})$$

qui est un filtre par définition.

2. Soit $\Gamma = x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$ un contexte de typage. On dit que $\Gamma \models \rho$ si et seulement si $F_i \in \rho(x_i)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Montrer que, pour tout λ-terme u,

$$[\![u]\!]\,\rho = \{F \in \mathcal{D}\Omega | \exists \Gamma \cdot \Gamma \models \rho \text{ et } \Gamma \vdash u : F \text{ dérivable dans le système } \mathcal{D}\Omega\}$$

On admettra le lemme d'affaiblissement pour $\mathcal{D}\Omega$.

Par récurrence structurelle sur u. Si u est une variable x, par la question II.5, si $\Gamma \vdash x : F$, alors $F \equiv \Omega$ ou bien on trouve $x : G$ dans Γ et $G \leq F$. Dans ce dernier cas, si $\Gamma \models \rho$, $G \in \rho(x)$, et donc $F \in \rho(x)$. Dans tous les cas, $F \in \rho(x)$, donc

$$\{F \in \mathcal{D}\Omega | \exists \Gamma \cdot \Gamma \models \rho \text{ et } \Gamma \vdash x : F \text{ dérivable dans le système } \mathcal{D}\Omega\} \subseteq \rho(x)$$

Réciproquement, si $F \in \rho(x)$, alors il existe Γ, à savoir le contexte $x : F$, tel que $\Gamma \vdash x : F$ (par (Ax)), et clairement $\Gamma \models \rho$. Donc $[\![x]\!]\,\rho = \rho(x)$.
Si u est une application st, et si $\Gamma \vdash u : G$, alors par la question II.4, il existe une famille finie de dérivations de $\Gamma \vdash s : F_i \to G_i$ et de $\Gamma \vdash t : F_i$, $1 \leq i \leq n$ et $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \leq G$. Si $\Gamma \models \rho$, par hypothèse de récurrence tous les $F_i \to G_i$ sont dans $[\![s]\!]\,\rho$, et tous les F_i sont dans $[\![t]\!]\,\rho$. Par définition, il s'ensuit que tous les G_i sont

dans $[\![s]\!]\,\rho\cdot[\![t]\!]\,\rho$. Comme ce dernier est un filtre, et est stable par intersections finies, $\bigcap_{i=1}^n G_i$ est dans $[\![s]\!]\,\rho\cdot[\![t]\!]\,\rho$, donc G aussi, puisque $\bigcap_{i=1}^n G_i \leq G$. Donc

$$\{F \in \mathcal{D}\Omega | \exists\Gamma\cdot\Gamma \models \rho \textit{ et } \Gamma \vdash u : F \textit{ dérivable en } \mathcal{D}\Omega\} \quad\subseteq\quad [\![s]\!]\,\rho\cdot[\![t]\!]\,\rho = [\![u]\!]\,\rho$$

Réciproquement, si $G \in [\![u]\!]\,\rho$, alors par définition il existe une famille finie de types G_i tels que $\bigcap_{i=1}^n G_i \leq G$ et telle que, pour chaque i, il existe $F_i \in [\![t]\!]\,\rho$ tel que $F_i \to G_i$ soit dans $[\![s]\!]\,\rho$. Par hypothèse de récurrence, il existe des contextes Γ_i et Γ'_i pour chaque i tels que $\Gamma_i \models \rho$, $\Gamma'_i \models \rho$, et $\Gamma_i \vdash s : F_i \to G_i$ et $\Gamma'_i \vdash t : F_i$ sont dérivables. Sans perte de généralité, on peut supposer que tous les contextes Γ_i et Γ'_i sont identiques: sinon on les remplace tous par le contexte Γ qui donne à chaque variable x apparaissant dans l'un quelconque des Γ_i le type intersection des types que x a dans tous les Γ_i et Γ'_i dans lesquels elle apparaît. Il est facile de voir que $\Gamma \vdash s : F_i \to G_i$ et $\Gamma \vdash t : F_i$ sont alors dérivables, en utilisant quelques instances de $(\cap E_1)$ et $(\cap E_2)$ en plus dans chaque dérivation. On en déduit que $\Gamma \vdash st : G_i$ est dérivable, et ce pour tout i. Donc $\Gamma \vdash st : \bigcap_{i=1}^n G_i$. Comme $\bigcap_{i=1}^n G_i \leq G$, on en déduit $\Gamma \vdash st : G$. Comme $\Gamma_i \models \rho$ et $\Gamma'_i \models \rho$ pour tout i, et comme $\rho(x)$ est un filtre, et est donc stable par intersections finies, $\Gamma \models \rho$. On en conclut

$$[\![u]\!]\,\rho \quad\subseteq\quad \{F \in \mathcal{D}\Omega | \exists\Gamma\cdot\Gamma \models \rho \textit{ et } \Gamma \vdash u : F \textit{ dérivable dans le système } \mathcal{D}\Omega\}$$

D'où l'égalité.

Finalement, si $u = \lambda x\cdot t$, et si $\Gamma \vdash u : G$, alors par la question II.3, il existe une famille finie de types flèches $G_i \to H_i$, $1 \leq i \leq n$, telle que $\Gamma, x : G_i \vdash t : H_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et telle que $G \equiv \bigcap_{i=1}^n (G_i \to H_i)$. Si $\Gamma \models \rho$, on a $\Gamma, x : G_i \models \rho[x :=\uparrow G_i]$, et par hypothèse de récurrence $H_i \in [\![t]\!]\,(\rho[x :=\uparrow G_i])$. Donc, par définition, $\bigcap_{i=1}^n (G_i \to H_i)$ est dans $[\![\lambda x\cdot t]\!]\,\rho$. Comme c'est un filtre, et que $\bigcap_{i=1}^n (G_i \to H_i) \leq G$, $G \in [\![\lambda x\cdot t]\!]\,\rho$. Donc

$$\{F \in \mathcal{D}\Omega | \exists\Gamma\cdot\Gamma \models \rho \textit{ et } \Gamma \vdash u : F \textit{ dérivable dans le système } \mathcal{D}\Omega\} \quad\subseteq\quad [\![u]\!]\,\rho$$

Réciproquement, si $G \in [\![\lambda x\cdot t]\!]\,\rho$, alors par définition il existe une famille de types G_i, H_i tels que $\bigcap_{i=1}^n (G_i \to H_i) \leq G$ et $H_i \in [\![t]\!]\,(\rho[x :=\uparrow G_i])$ pour tout i. Par hypothèse de récurrence, il existe $\Gamma_i \models \rho[x :=\uparrow G_i]$ tels que $\Gamma_i \vdash t : H_i$ pour chaque i. On peut d'abord supposer que x apparaît dans Γ_i; sinon, ajouter $x : \Omega$ à Γ_i. Posons donc $\Gamma_i = \Gamma'_i, x : G'_i$. Comme $\Gamma_i \models \rho[x :=\uparrow G_i]$, $G_i \leq G'_i$. Par la question II.6, on a aussi $\Gamma'_i, x : G_i \vdash t : H_i$. Ensuite, on peut comme plus haut supposer que tous les Γ'_i sont identiques, appelons-les Γ'. Donc $\Gamma', x : G_i \vdash t : H_i$, et $\Gamma' \models \rho$. Par $(\to I)$, $\Gamma' \vdash \lambda x\cdot t : G_i \to H_i$. Donc $\Gamma' \vdash \lambda x\cdot t : \bigcap_{i=1}^n (G_i \to H_i)$, et comme $\bigcap_{i=1}^n (G_i \to H_i) \leq G$, $\Gamma' \vdash \lambda x\cdot t : G$. Comme $\Gamma' \models \rho$, on en déduit

$$[\![u]\!]\,\rho \quad\subseteq\quad \{F \in \mathcal{D}\Omega | \exists\Gamma\cdot\Gamma \models \rho \textit{ et } \Gamma \vdash u : F \textit{ dérivable dans le système } \mathcal{D}\Omega\}$$

Et l'on conclut.

3. Montrer que ceci définit un modèle du λ-calcul, au sens où si $u =_\beta v$, alors $[\![u]\!]\,\rho = [\![v]\!]\,\rho$. On rappelle (vu en exercice 8 du TD 6) que si $u =_\beta v$ et $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable en système $\mathcal{D}\Omega$, alors $\Gamma \vdash v : F$ est aussi dérivable en système $\mathcal{D}\Omega$.

   Si $u =_\beta v$ alors $\Gamma \vdash u : F$ implique $\Gamma \vdash v : F$, donc $[\![u]\!]\,\rho \subseteq [\![v]\!]\,\rho$ par la question précédente. Par symétrie, $[\![u]\!]\,\rho = [\![v]\!]\,\rho$.