Types intersection et modèles de filtres

Documents autorisés (en particulier le poly).

I. Types intersection.

On considère la discipline de typage suivante. Soient A, B, C, …, des variables de types. Les types F, G, H, …, sont définis inductivement par:

- les variables de types sont des types;
- la constante spéciale Ω est un type;
- $F \to G$ est un type pour tous types F, G;
- $F \cap G$ est un type pour tous types F, G.

("Inductivement" signifie qu'il n'existe aucune autre façon de fabriquer un type.)

Les règles de typage sont données par le système suivant, appelé $\mathcal{D}\Omega$:

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Ax) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t : \Omega}\,(\Omega)$$

$$\frac{\Gamma, x : F \vdash t : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot t : F \to G}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash s : F \to G \quad \Gamma \vdash t : F}{\Gamma \vdash st : G}\,(\to E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : F \quad \Gamma \vdash t : G}{\Gamma \vdash t : F \cap G}\,(\cap I) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : F \cap G}{\Gamma \vdash t : F}\,(\cap E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash t : F \cap G}{\Gamma \vdash t : G}\,(\cap E_2)$$

Comparé au système des types simples, les règles supplémentaires sont: (Ω), qui énonce que l'on peut typer n'importe quel terme de type Ω; et les règles $(\cap I)$, $(\cap E_1)$, $(\cap E_2)$, qui expriment que les termes de type $F \cap G$ sont ceux qui ont exactement les deux types F et G.

Le système $\mathcal{D}$ est défini comme le système $\mathcal{D}\Omega$, à ceci près que Ω n'est plus dans l'algèbre des types, et que donc la règle (Ω) en est aussi retirée.

1. Montrer que $\delta = \lambda x \cdot xx$ est typable en système $\mathcal{D}$ mais pas dans le système des types simples.

2. On admettra la propriété d'auto-réduction pour la β-réduction pour les systèmes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}\Omega$.

   En adaptant la preuve de normalisation forte du système des types simples du cours, montrer que tout terme typable dans le système $\mathcal{D}$ est fortement normalisant pour la β-réduction. (On ignorera la règle η.) On pourra se contenter d'énumérer les cas qui changent par rapport à la démonstration du cours, et de se concentrer dessus.

3. En déduire que, bien que δ soit typable en système $\mathcal{D}$, $\delta\delta$ ne l'est pas.

4. Montrer que $\mathcal{D}\Omega$ n'admet pas la propriété d'auto-réduction pour η.

II. Préordre $\leq$ sur les types.

On définit un préordre $\leq$ sur l'ensemble des types du système $\mathcal{D}\Omega$ par: $F \leq G$ si et seulement si, pour tout terme t et tout contexte Γ tel que $\Gamma \vdash t : F$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors $\Gamma \vdash t : G$ est aussi dérivable. On rappelle qu'un préordre est une relation réflexive et transitive.

1. Montrer que:
   (a) Si $\Gamma \vdash t : F$ est dérivable et $F \leq G$, alors $\Gamma \vdash t : G$ est dérivable.
   (b) $F \leq F \cap F$ pour tout type F.
   (c) $F \cap G \leq F$, $F \cap G \leq G$ pour tous types F, G.
   (d) Si $F \leq F'$ et $G \leq G'$ alors $F \cap G \leq F' \cap G'$.
   (e) $F \leq \Omega$ pour tout type F.

2. Soit $\equiv$ la relation d'équivalence induite par le préordre $\leq$, autrement dit $F \equiv F'$ si et seulement si $F \leq F'$ et $F' \leq F$. Montrer que $F \cap \Omega \equiv \Omega \cap F \equiv F$ pour tout type F, que $F \cap G \equiv G \cap F$ et $F \cap (G \cap H) \equiv (F \cap G) \cap H$ pour tous types F, G, H.

3. Montrer que si $\Gamma \vdash \lambda x \cdot t : F$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors il existe une famille finie de types flèches $G_i \to H_i$, $1 \leq i \leq n$, telle que $\Gamma, x : G_i \vdash t : H_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et telle que $F \equiv \bigcap_{i=1}^{n}(G_i \to H_i)$, où le signe $\bigcap$ dénote une intersection quelconque, le parenthésage étant arbitraire. Par convention, l'intersection vide est Ω.

4. Montrer que si $\Gamma \vdash st : G$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors il existe une famille finie de dérivations de $\Gamma \vdash s : F_i \to G_i$ et de $\Gamma \vdash t : F_i$, $1 \leq i \leq n$, telles que $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \leq G$. (Lorsque $n = 0$, ceci signifie simplement que $G \equiv \Omega$.)

5. Montrer que si $\Gamma \vdash x : G$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, alors soit $G \equiv \Omega$, soit $x : F$ apparaît dans Γ et $F \leq G$.

6. Montrer que si $\Gamma, x : F \vdash t : G$ est dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$, et $F' \leq F$, alors $\Gamma, x : F' \vdash t : G$ est aussi dérivable dans le système $\mathcal{D}\Omega$.

III. Modèle de filtres.

Soit $\mathcal{D}\Omega$ l'ensemble des types $\mathcal{D}\Omega$. Un *filtre* $X \subseteq \mathcal{D}\Omega$ est un ensemble de types tel que:

- $\Omega \in X$;
- si $F \in X$ et $F \leq G$, alors $G \in X$;
- si $F \in X$ et $G \in X$, alors $F \cap G \in X$.

Le filtre $\mathcal{F}(E)$ *engendré* par un ensemble E de types de $\mathcal{D}\Omega$ est le plus petit filtre contenant E. On peut le définir constructivement par

$$\mathcal{F}(E) \quad = \quad \{G \in \mathcal{D}\Omega | \exists n \in \mathbb{N}, F_1, \ldots, F_n \in E \cdot \bigcap_{i=1}^{n} F_i \leq G\}$$

Ce que l'on admettra. Comme cas particulier, $\uparrow F = \mathcal{F}(\{F\}) = \{G \in \mathcal{D}\Omega | F \leq G\}$ est le *filtre principal* engendré par le type F.

Étant donnés deux filtres X et Y, on pose

$$X \cdot Y \quad = \quad \mathcal{F}(\{G \in \mathcal{D}\Omega | \exists F \in Y \cdot F \to G \in X\})$$

C'est l'*application* du filtre X au filtre Y.

1. On définit la sémantique suivante des λ-termes (non typés), où ρ est une fonction qui à chaque variable associe un filtre:

$$\begin{aligned}
[\![x]\!]\,\rho &= \rho(x) \\
[\![st]\!]\,\rho &= [\![s]\!]\,\rho \cdot [\![t]\!]\,\rho \\
[\![\lambda x \cdot t]\!]\,\rho &= \{G \in \mathcal{D}\Omega | \exists G_1, H_1, \ldots, G_n, H_n \in \mathcal{D}\Omega \text{ tels que} \\
&\qquad \bigcap_{i=1}^{n} (G_i \to H_i) \leq G \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, n\} \cdot H_i \in [\![t]\!]\,(\rho[x := \uparrow G_i])\}
\end{aligned}$$

   Montrer que ceci est bien défini, au sens où $[\![t]\!]\,\rho$ est toujours un filtre, quel que soit le terme t.

2. Soit $\Gamma = x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$ un contexte de typage. On dit que $\Gamma \models \rho$ si et seulement si $F_i \in \rho(x_i)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Montrer que, pour tout λ-terme u,

$$[\![u]\!]\,\rho \quad = \quad \{F \in \mathcal{D}\Omega | \exists \Gamma \cdot \Gamma \models \rho \text{ et } \Gamma \vdash u : F \text{ dérivable dans le système } \mathcal{D}\Omega\}$$

   On admettra le lemme d'affaiblissement pour $\mathcal{D}\Omega$.

3. Montrer que ceci définit un modèle du λ-calcul, au sens où si $u =_\beta v$, alors $[\![u]\!]\,\rho = [\![v]\!]\,\rho$. On rappelle (vu en exercice 8 du TD 6) que si $u =_\beta v$ et $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable en système $\mathcal{D}\Omega$, alors $\Gamma \vdash v : F$ est aussi dérivable en système $\mathcal{D}\Omega$.