

# Une introduction aux capacités, aux jeux et aux prévisions<sup>1</sup>

Jean Goubault-Larrecq  
LSV/ UMR 8643 CNRS & ENS Cachan,  
INRIA Futurs projet SECSI &  
61, avenue du président-Wilson, 94235 Cachan, France  
goubault@lsv.ens-cachan.fr

Version 1.8 préliminaire du 28 juin 2007

<sup>1</sup>Ce projet a été financé en partie par l'ACI nouvelles interfaces des mathématiques "GéoCal", et par l'ARC "ProNobis" de l'INRIA.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Illustration : jeux stochastiques . . . . .	7
1.2	Travaux connexes . . . . .	8
<b>I</b>	<b>Fondements</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>13</b>
2.1	Topologie . . . . .	13
2.2	Préordres, ordres . . . . .	15
2.3	Cpos et topologies d'ordres . . . . .	16
2.3.1	La topologie de Scott, cpos continus . . . . .	17
2.3.2	Espaces sobres, cohérents, stablement compacts . . . . .	19
2.3.3	Espaces localement finitaires . . . . .	21
2.3.4	Produits d'ensembles ordonnés, produits d'espaces topologiques . . . . .	22
2.3.5	Un panorama du monde des espaces topologiques . . . . .	22
2.4	Limites . . . . .	24
2.5	Ordres bien fondés, beaux préordres, ordinaux . . . . .	25
2.6	Correspondances de Galois . . . . .	27
2.7	Combinatoire . . . . .	28
2.8	Capacités, jeux, et valuations . . . . .	30
2.8.1	Une taxonomie élémentaire des capacités . . . . .	30
2.8.2	Valuations simples, et quasi-simples . . . . .	32
2.9	Espaces métriques, de Banach, convexité, cônes . . . . .	33
2.10	Intégration . . . . .	36
2.10.1	L'intégrale de Riemann . . . . .	36
2.10.2	L'intégrale de Kurzweil-Henstock . . . . .	38
2.10.3	L'intégrale de Riemann-Stieltjes . . . . .	40
2.10.4	Intégrales impropres . . . . .	43
2.11	Tribus . . . . .	43

<b>3</b>	<b>Quelques compléments</b>	<b>47</b>
3.1	Cohérence des cpos continus . . . . .	47
3.2	Rétractions . . . . .	49
3.3	Le cpo $\mathcal{Q}(X)$ des choix démoniaques . . . . .	52
3.4	Les espaces $\mathcal{H}(X)$ , $\mathcal{H}^{op}(X)$ , $\mathcal{H}_u(X)$ de choix angéliques, et $\mathcal{O}(X)$ . . . . .	55
3.5	Les espaces $\mathcal{P}l(X)$ et $\mathcal{P}l_\nu(X)$ de choix chaotiques, et $\mathcal{L}(X)$ . . . . .	64
3.6	L'espace $\mathcal{P}_\nu(X)$ des $\mathbf{A}$ -valuations continues . . . . .	79
3.7	Valuations continues et topologie faible . . . . .	94
3.8	Produits de valuations continues . . . . .	98
3.9	Plongements . . . . .	99
3.10	Hémi-distances, espaces hémi-métriques . . . . .	103
3.11	Combinatoire . . . . .	122
3.12	Convexité . . . . .	124
<b>4</b>	<b>L'intégrale de Choquet</b>	<b>145</b>
4.1	Définition de l'intégrale de Choquet . . . . .	145
4.2	Propriétés de l'intégrale de Choquet . . . . .	151
4.3	Convexité, concavité . . . . .	155
4.4	Comonotonie . . . . .	158
4.5	La topologie faible . . . . .	162
4.6	Produits de jeux . . . . .	170
4.7	Hémi-distances entre jeux . . . . .	178
4.7.1	L'hémi-distance de Levy-Prohorov . . . . .	179
4.7.2	L'hémi-distance de Hutchinson . . . . .	182
4.7.3	Le théorème de Kantorovich-Rubinstein . . . . .	187
<b>II</b>	<b>Crédibilités, plausibilités, estimations</b>	<b>197</b>
<b>5</b>	<b>Crédibilités : P joue, puis C contre</b>	<b>199</b>
5.1	Crédibilités simples . . . . .	199
5.2	L'ordre $\leq$ sur les crédibilités simples . . . . .	201
5.3	La relation $\ll$ sur les crédibilités simples . . . . .	204
5.4	Capacités linéairement extensibles par le bas . . . . .	207
5.5	L'ensemble ordonné continu des crédibilités continues . . . . .	218
5.6	La topologie faible sur les espaces de crédibilités . . . . .	222
5.7	Crédibilités produits . . . . .	226
<b>6</b>	<b>Plausibilités : P joue, puis C coopère</b>	<b>235</b>
6.1	Plausibilités simples . . . . .	235
6.2	La dualité convexe-concave . . . . .	238
6.2.1	Le dual $\nu^\perp$ d'une capacité $\nu$ . . . . .	238
6.2.2	Intégration par rapport à $\nu^\perp$ . . . . .	248

6.3	Capacités linéairement extensibles par le haut . . . . .	252
6.4	Les topologies cofaible et co-Scott . . . . .	271
6.5	Plausibilités produits . . . . .	276
<b>7</b>	<b>Estimations : P joue, puis C fait... quoi ?</b>	<b>283</b>
7.1	Estimations . . . . .	283
7.2	Estimations simples . . . . .	290
7.3	Des estimations aux valuations sur $\mathcal{P}_\nu(X)$ . . . . .	292
7.3.1	La pré-tribu engendrée par les $\square U, \diamond V$ . . . . .	292
7.3.2	Propriétés de $P_\nu^1$ . . . . .	298
7.3.3	La touche finale à la construction de $\langle \nu \rangle$ . . . . .	302
7.4	Espaces d'estimations continues . . . . .	308
7.5	Relation entre $\nu, \nu^\uparrow$ , et $\nu^\downarrow$ . . . . .	317
7.6	L'intégrale mixte . . . . .	325
<b>III</b>	<b>Systèmes de transitions ludiques</b>	<b>351</b>
<b>8</b>	<b>Systèmes de transition ludiques</b>	<b>353</b>
8.1	Introduction . . . . .	353
8.2	Logiques temporelles . . . . .	354
8.3	Model-checking . . . . .	361
8.3.1	Sur des bases effectivement décrites d'ouverts . . . . .	362
8.3.2	Sur des bases effectives de compacts ouverts . . . . .	371
8.4	Évaluation de gains . . . . .	377
<b>9</b>	<b>Agglomérations, topologies agglomérantes</b>	<b>391</b>
9.1	Topologies agglomérantes . . . . .	392
9.2	Topologies agglomérantes intérieures . . . . .	401
9.3	Topologies agglomérantes ouvertes . . . . .	406
9.4	Systèmes bilatères, cotopologies coagglomérantes . . . . .	410
9.5	Topologies $\sigma$ -agglomérantes, tribus agglomérantes . . . . .	415
9.6	Crédos, plausos, estimos . . . . .	424
<b>IV</b>	<b>Prévisions</b>	<b>439</b>
<b>10</b>	<b>Convexité, concavité, prévisions colinéaires</b>	<b>441</b>
10.1	Prévisions, prévisions basses, prévisions hautes . . . . .	441
10.2	Prévisions dans le cas fini . . . . .	446
10.3	Drapeaux ouverts, théorèmes de Shapley et de Rosenmuller . . . . .	453
10.4	Prévisions pessimistes et démoniaques, optimistes et angéliques . . . . .	468

<b>11 Prévisions générales</b>	<b>473</b>
11.1 Composition séquentielle . . . . .	473
11.2 Tangentes supérieures . . . . .	477
11.3 Prévisions normalisées . . . . .	486
11.4 Prévisions sous-normalisées . . . . .	490
11.5 Tangentes inférieures . . . . .	495
11.6 La topologie faible sur les espaces de prévisions . . . . .	509
11.7 Le cœur et la peau . . . . .	512
11.7.1 Le cas démoniaque : le cœur . . . . .	515
11.7.2 Le cas angélique : la peau . . . . .	526
11.7.3 Le cas chaotique : fourchettes, et le corps . . . . .	536
11.8 Complétude . . . . .	545
11.9 Domaines de prévisions continues . . . . .	549
11.9.1 Domaines de prévisions basses . . . . .	549
11.9.2 Domaines de prévisions hautes . . . . .	553
11.9.3 Domaines de fourchettes . . . . .	557
<b>12 Monades de prévisions continues</b>	<b>561</b>
12.1 Les monades par l'exemple . . . . .	561
12.1.1 Catégories . . . . .	561
12.1.2 Monades . . . . .	563
12.1.3 Limites . . . . .	566
12.1.4 Monades monoïdales, commutatives . . . . .	567
12.1.5 Monades fortes, continuations ; catégories cartésiennes closes . . . . .	571
12.1.6 Monades de prévisions continues . . . . .	577
12.2 Le $\lambda$ -calcul monadique . . . . .	577
12.3 Approximation simpliciale et colinéarité . . . . .	583
12.4 La transformée d'une prévision . . . . .	590
<b>V Annexes</b>	<b>597</b>
Index . . . . .	626
Index des notations . . . . .	635
Index des noms . . . . .	641

# Chapitre 1

## Introduction

Le but de ce document est de donner une introduction aussi complète que possible à quelques extensions de la notion de mesure et de probabilité. Les plus importantes sont celles de *jeux convexes*, de fonctions de *crédibilité*, et via des théorèmes de correspondance à la Riesz, de fonctionnelles appelées *prévisions basses*. Par dualité, nous considérerons aussi des *jeux concaves*, des fonctions de *plausibilité*, et des *prévisions hautes*.

### 1.1 Illustration : jeux stochastiques

La ligne directrice de ce document est que ces notions sont des réponses adéquates à la question de donner une sémantique suffisamment simple aux langages de programmation qui incluent à la fois la notion de choix non déterministe et de tirage probabiliste. Un cas particulier relativement simple est celui des *jeux stochastiques*, qui sont des automates formés sur un ensemble d'états  $Q$ , séparé en deux sous-ensembles disjoints  $Q_c$  et  $Q_p$ . Les états de  $Q_c$  sont les états de choix non déterministe. Tout état  $q \in Q_c$  est associé à un ensemble  $\delta(q) \subseteq Q_p$  de successeurs de  $q$ . Lorsqu'on arrive dans un tel état, on peut ensuite voyager vers n'importe quel état de  $\delta(q)$ . Les états de  $Q_p$  sont les états probabilistes. Dans ce cas,  $q \in Q_p$  est associé à une distribution de probabilités  $P(q)$  sur  $Q_c$ . Lorsqu'on arrive en l'état  $q$ , on va voyager ensuite vers l'état  $q'$  avec probabilité  $P(q)(q')$ .

La différence entre choix non déterministe et choix probabiliste n'est pas extrêmement claire au vu de cette présentation. En voici une autre. Un jeu stochastique peut être vu comme un jeu entre deux joueurs, C et P. À tout moment, il y a un unique jeton dans le jeu, posé sur un état  $q \in Q$ . C'est au tour de C de jouer lorsque  $q \in Q_c$ , et c'est au tour de P de jouer lorsque  $q \in Q_p$ . Le but du joueur P est d'amener le jeton sur un état final, c'est-à-dire dans un état d'un ensemble  $F \subseteq Q$  précisé à l'avance. S'il y arrive, on dit que P *gagne* et C *perd*. Si C arrive à systématiquement détourner le jeton hors de  $F$ , C gagne et P perd. (On pourrait choisir des conditions de gain plus complexes, mais celle-ci suffira pour une introduction.) Maintenant, C et P sont deux joueurs aux possibilités très différentes : alors que C peut décider de déplacer le jeton vers n'importe quel successeur  $q' \in \delta(q)$ , et en particulier vers celui qui l'arrange le plus, P ne peut que tirer au hasard l'état  $q'$  sur lequel il déplacera le jeton, avec probabilité  $P(q)(q')$ .

Cette vision correspond à celle des *jeux contre nature* de Papadimitriou (1994), dans laquelle on incarne le joueur C, et la nature joue le rôle de P. L'intuition est que l'on peut calculer vers quel état aller pour maximiser nos chances de gagner, mais que la nature ne calcule pas, et se contente de faire évoluer le système selon des lois de probabilité prédéterminées.

Une vision duale est utilisée dans la conception de protocoles cryptographiques. Ici, on incarne P, et l'adversaire C peut utiliser tous les moyens pour, par exemple, obtenir un secret. Notre seul moyen de se défendre contre l'adversaire est de tirer des objets au hasard, sachant qu'aucun moyen calculatoire ne peut prédire un tel objet.

Une idée suggérée par François Laviolette et Josée Desharnais en juillet 2003 pour modéliser tant le choix non déterministe que le tirage probabiliste est de coder les deux sous forme d'une sorte de tirage probabiliste, avec une notion un peu plus laxiste que d'ordinaire de la notion de probabilité, que nous appellerons pour l'instant une préprobabilité. En général, notons  $P(q)(E)$  la préprobabilité que le jeton se déplace vers un état de l'ensemble  $E \subseteq Q$ , sachant qu'il est en ce moment sur l'état  $q$ . Si  $P(q)$  est une probabilité,  $P(q)(E)$  est simplement la somme des  $P(q)(q')$  lorsque  $q'$  parcourt  $E$ .

Soit  $A$  un ensemble fixé d'états, et définissons  $P(q)(E)$  comme valant 1 si et seulement si  $A \subseteq E$ . Clairement,  $P(q)$  n'est *pas* une probabilité. Mais nous prétendons que  $P(q)$  code exactement le choix non déterministe d'un état successeur  $q'$  parmi  $A$ . Plaçons-nous dans un cadre pessimiste, où nous jouons le rôle de P, et l'adversaire C peut choisir n'importe quel état  $q' \in \delta(q) = A$ . Si  $A$  contient un état  $q'$  hors de  $E$ , C peut toujours choisir d'aller vers cet état  $q'$ , et ruiner notre espoir d'arriver dans  $E$ . Définissons informellement la préprobabilité  $P(q)(E)$  comme la probabilité minimale que le jeton arrive dans un état de  $E$ . Lorsque  $E \setminus A \neq \emptyset$ , on vient de voir que l'adversaire peut toujours forcer cette probabilité à 0. En revanche, si  $A \subseteq E$ , l'adversaire C est obligé de choisir un état de  $A$ , donc de  $E$ , et la préprobabilité vaut 1.

Le parti pris de ce document est de décrire cette construction sous un angle le plus général possible. Les notions de jeux, de crédibilité, etc., sont traditionnellement explicitées dans un cadre fini. Il semble que le cadre topologique soit bien adapté à une extension de ces notions et des principaux résultats afférents dans le cas d'espaces infinis.

## 1.2 Travaux connexes

La question de trouver la bonne façon de combiner le non-déterminisme et le choix probabiliste en sémantique des langages de programmation ne date pas d'hier. Même si j'ai des raisons de croire que les notions de ce document sont un bon choix, je n'irai pas jusqu'à prétendre que c'est l'unique bon choix.

Une construction relativement générale consiste à combiner les deux monades de non-déterminisme et de choix probabiliste, dans une catégorie donnée. La bonne façon de combiner deux monades est elle aussi sujette à discussion. Lüth (1997) a proposé dans sa thèse que la bonne façon de combiner deux monades était leur coproduit, qui existe sous des conditions relativement courantes (Kelly, 1980). Cependant, dans le cas général, le coproduit de deux monades est un objet relativement incompréhensible. Dans des cas particuliers, on peut en donner une description plus simple. C'est notamment le cas pour le coproduit de deux monades *idéales*

(Ghani and Uustalu, 2004). En particulier, la combinaison de la monade de non-déterminisme *non bloquant* (où l'ensemble des choix possibles par le joueur C est toujours non vide) et de celle des probabilités tombe dans ce cas. Comme on peut se l'imaginer, la monade résultante consiste en celle de toutes les suites de choix tant probabilistes que non déterministes (Ghani and Uustalu, 2004, exemple 4.3).

Varacca (2002) a lui aussi proposé une monade intégrant les notions de choix non déterministe et de choix probabiliste. Ghani and Uustalu remarquent que la monade coproduit ci-dessus est très proche de la notion d'arbres de synchronisation que Varacca utilise.

En sémantique des langages de programmation, il est souvent nécessaire de remplacer l'usage d'ensembles par ceux de cpo (voir la section 2.3 pour la définition). Ceci introduit trois notions de choix non déterministe : le non-déterminisme *démoniaque* (à la Smyth), le non-déterminisme *angélique* (à la Hoare), et le non-déterminisme *chaotique* (à la Plotkin-Egli-Milner). Intuitivement, le non-déterminisme démoniaque est celui où le joueur C essaie de faire perdre P, pour reprendre l'exemple de l'introduction. Il est donc clair que nous nous intéresserons davantage à cette forme de non-déterminisme. Cependant, nous verrons que nous pouvons ramener l'étude des deux autres formes de non-déterminisme à celle du non-déterminisme démoniaque, notamment grâce à la notion de dualité convexe-concave, que nous introduirons à la section 6.2.

Le non-déterminisme angélique est celui où C, au contraire, essaie de choisir un état suivant qui fera gagner P s'il en existe un. Les valuations indexées de Varacca (2002) sont une combinaison de tirage probabiliste et de non-déterminisme angélique, comme l'auteur le remarque.

Tix et al. (2005) étudient des modèles très généraux rendant compte du mélange du tirage probabiliste avec les trois formes de non-déterminisme. On pourrait naturellement se demander pourquoi nous devrions nous fatiguer à en inventer encore d'autres. J'espère que la simplicité et une certaine clarté des modèles que je propose dans ce document plaideront en leur faveur. Nous verrons d'autre part que nos modèles sont en fait très proches de ceux de Tix et al.. La relation entre les deux formes de modèles demandera cependant beaucoup d'efforts, et nous n'aurons les moyens d'en parler qu'à la fin de la section 11.6.

## Remerciements

Ce document est, comme on peut s'en douter, le résultat d'un travail de longue haleine. Si j'en ai commencé la rédaction en septembre 2005, après avoir trouvé les premiers théorèmes en août 2005 (essentiellement, une version préliminaire du théorème 5.4.8), je dois à Vincent Danos, Josée Desharnais, et François Laviolette de m'être intéressé à la question, lors de rencontres à l'université Paris VII en juillet 2003. Je dois remercier Nadia Tawbi de m'avoir invité en juillet 2004 à l'université Laval, Québec, ce qui m'a permis de continuer à explorer les prémises de ce qui allait devenir ce document, avec Josée Desharnais et François Laviolette.

Tout en espérant que ceux que j'aurais oublié ne m'en voudront pas, je dois remercier Mike Mislove pour son extrême gentillesse et sa patience à répondre à mes questions techniques ; Prakash Panangaden pour m'avoir grandement encouragé à poursuivre mes travaux lors d'une présentation de ceux-ci à la session résidentielle GeoCal à Marseille en février 2006 (et m'avoir même offert une heure d'exposé de plus, pris sur son temps d'exposé) ; Catuscia Palamidessi,

avec qui nous avons fondé l'ARC (action de recherche concertée) de l'INRIA ProNoBis, dont une grosse moitié consistait justement à développer les idées aujourd'hui présentes dans ce document. Et puis, en vrac, Laurent Mazaré, Jérémie Jakubowicz, Elie Bursztein, Romain Beauxis.

# **Première partie**

## **Fondements**



# Chapitre 2

## Préliminaires

Nous récapitulons dans ce chapitre toute une série de notions et résultats connus. Le style est emprunté à Alvarez-Manilla (2000, chapitre 1). En particulier, les notions introduites ici sont notées non en italique comme il est l'usage, mais en gras, pour faciliter la recherche des concepts importants.

### 2.1 Topologie

Un **espace topologique** est un couple  $(X, \mathcal{O})$  formé d'un ensemble  $X$  et d'un ensemble  $\mathcal{O}$  de parties de  $X$ , appelées les **ouverts**, tel que toute union et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.  $\mathcal{O}$  est alors appelé une **topologie**. On note en général  $X$  tout court l'espace topologique, la topologie restant implicite.

Lorsque  $\mathcal{O}$  est l'ensemble  $\mathbb{P}X$  de toutes les parties de  $X$ , on parle de **topologie discrète**.

Un **fermé** est par définition le complémentaire d'un ouvert. Toute partie  $A$  de  $X$  contient un plus grand ouvert  $\overset{\circ}{A}$ , son **intérieur**. Symétriquement, il existe un plus petit fermé  $cl(A)$  contenant  $A$ , son **adhérence**. Une partie  $A$  de  $X$  est **partout dense** dans  $X$  si et seulement si  $cl(A) = X$ .

Un **voisinage** d'un point  $x \in X$  est une partie  $A$  de  $X$  dont l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  contient  $x$ .

Un espace topologique peut avoir des propriétés de séparation plus ou moins fortes. De la moins forte à la plus forte :

- $X$  est  $T_0$  ou **de Kolmogoroff** si et seulement si, pour tous  $x \neq y$  dans  $X$ , il existe un voisinage de  $x$  ne contenant pas  $y$ , ou un voisinage de  $y$  ne contenant pas  $x$ .
- $X$  est  $T_1$  si et seulement si, pour tous  $x \neq y$  dans  $X$ , il existe un voisinage  $A$  de  $x$ , et un voisinage  $B$  de  $y$ , tels que  $x \notin B$  et  $y \notin A$ . La dénomination bourbakienne de tels espaces est "espace accessible".
- $X$  est  $T_2$ , ou **de Hausdorff**, si et seulement si, pour tous  $x \neq y$  dans  $X$ , il existe un voisinage  $A$  de  $x$ , et un voisinage  $B$  de  $y$ , tels que  $A \cap B = \emptyset$ . C'est le cas de la plupart des espaces topologiques rencontrés en topologie générale usuelle (Bourbaki, 1971, 1974). La dénomination bourbakienne de tels espaces est "espace séparé".

Il existe aussi d'autres notions plus fortes, dont nous n'aurons pas besoin ( $T_3$  et au-delà). Tout espace  $T_2$  est  $T_1$ , et tout espace  $T_1$  est  $T_0$ . La plupart des espaces usuels en topologie, comme  $\mathbb{R}$ ,

$\mathbb{R}^n$  par exemple sont  $T_2$ . L'**espace de Sierpiński**  $\mathbb{S}$  est l'ensemble  $\{0, 1\}$  muni de la topologie dont les seuls ouverts sont  $\emptyset$ ,  $\mathbb{S}$  et  $\{1\}$ , mais pas  $\{0\}$ .  $\mathbb{S}$  est  $T_0$  mais pas  $T_1$  : tout ouvert contenant 0 contient aussi 1.  $\mathbb{S}$  n'est donc en particulier pas  $T_2$  non plus.

Un sous-ensemble  $K$  de  $X$  est **compact** si et seulement s'il vérifie la propriété de **Heine-Borel** : de tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $K$  on peut extraire un sous-recouvrement fini. Une famille  $(U_i)_{i \in I}$  de parties de  $X$  est un **recouvrement** de  $K$  si et seulement si  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ . Un tel recouvrement est **ouvert** si et seulement si tous les  $U_i$  sont ouverts. Un **sous-recouvrement** est une sous-famille  $(U_i)_{i \in J}$ ,  $J \subseteq I$ , qui est encore un recouvrement de  $K$  :  $K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ . Bourbaki (1971) appelle les compacts *quasi-compacts*, et réserve le terme de compact aux compacts  $T_2$ .

Une définition équivalente de la notion de compact est la suivante :  $K$  est compact si et seulement si, pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts (pour l'ordre d'inclusion) qui est un recouvrement de  $K$ , il existe  $i \in I$  tel que  $K \subseteq U_i$ .

Si  $X$  est un espace topologique, on peut définir le **préordre de spécialisation**  $\leq$  par :  $x \leq y$  si et seulement si tout ouvert  $U$  qui contient  $x$  contient aussi  $y$ . De façon équivalente, si  $x \in cl\{y\}$ , où l'on rappelle que  $cl\{y\}$  est l'adhérence du point  $y$ . Nous noterons généralement simplement  $\leq$  le préordre de spécialisation d'un espace topologique donné.

Une partie  $A$  de  $X$  est **saturée** si et seulement si elle est égale à l'intersection des ouverts  $U$  qui la contiennent. C'est exactement la même chose que de demander que  $A$  soit close par le haut dans le préordre de spécialisation, c'est-à-dire que  $x \in A$  et  $x \leq y$  impliquent  $y \in A$ . De façon symétrique, on dira que  $A$  est **cosaturée** si et seulement si elle est égale à l'union des fermés  $F$  contenus dans  $A$ . Les ensembles cosaturés sont exactement les ensembles clos par le bas dans le préordre de spécialisation.

Les ensembles  $\uparrow E = \{x \in X \mid \exists y \in E \cdot y \leq x\}$ , où  $E$  est une partie finie de  $X$ , sont toujours des compacts saturés de  $X$  (les compacts **finitaires**), mais il y en a en général d'autres. Si  $K$  est un compact, alors  $\uparrow K$  est le plus petit compact saturé contenant  $K$ .

On notera en général les compacts  $K, K', K_i$ , et les compacts saturés  $Q, Q', Q_i$ , etc. Toute union finie de compacts saturés est un compact saturé. Cependant, en général même une intersection de deux compacts saturés n'est pas nécessairement compacte. (C'est le cas si  $X$  est  $T_2$ , cependant : en effet, l'intersection d'un fermé avec un compact est toujours compact, et dans un espace  $T_2$ , tout compact est fermé.)

Un espace topologique est **localement compact** si et seulement si tout voisinage ouvert  $U$  de tout point  $x \in X$  contient un voisinage compact de  $x$ . (De plus, on ne perd aucune généralité en demandant que ce voisinage compact soit saturé.) Autrement dit, si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  contenant  $x \in X$ , il existe un compact saturé  $Q$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq U$ . Une conséquence est que, si  $\overset{\circ}{Q}$  est un compact saturé inclus dans un ouvert  $U$ , il existe un compact saturé  $Q'$  tel que  $Q \subseteq \overset{\circ}{Q'} \subseteq Q' \subseteq U$ . (Pour tout  $x \in Q$ , choisir un compact saturé  $Q_x$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q_x} \subseteq Q_x \subseteq U$ . La famille des  $\overset{\circ}{Q_x}$ ,  $x \in Q$ , est alors un recouvrement ouvert de  $Q$ . L'union des  $Q_x$  obtenus à partir d'un sous-recouvrement fini de  $Q$  répond alors à la question.)

Tout espace compact  $T_2$  est localement compact. Nous nous intéresserons en majorité à des espaces non  $T_2$ , cependant, pour lesquelles la compacité n'entraîne pas en général la compacité locale.

Un fermé non vide  $F$  de  $X$  est **irréductible** si et seulement si on ne peut pas l'écrire comme union de fermés non vides plus petits : si  $F \subseteq F_1 \cup F_2$ , où  $F_1$  et  $F_2$  sont fermés, alors  $F \subseteq F_1$  ou  $F \subseteq F_2$ . Dans tout espace topologique  $X$ , l'adhérence  $cl\{x\}$  de tout point  $x \in X$  est un tel fermé irréductible. Si de plus  $X$  est  $T_0$ ,  $cl\{x\} = cl\{y\}$  implique  $x = y$ , ce qui implique que tout fermé irréductible de la forme  $cl\{x\}$  est l'adhérence d'un unique point ( $x$ ). Un espace topologique  $X$  est **sobre** si et seulement si *tout* fermé irréductible est l'adhérence d'un unique point ; autrement dit, s'il est  $T_0$  et les seuls fermés irréductibles sont ceux de la forme  $cl\{x\}$ . Il est facile de voir que tout espace  $T_2$  est sobre, mais la réciproque est fautive.

Une topologie  $\mathcal{O}$  est **plus fine** qu'une autre,  $\mathcal{O}'$ , si et seulement si  $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ , autrement dit s'il y a plus d'ouverts dans  $\mathcal{O}$  que dans  $\mathcal{O}'$ .

Si  $A$  est une partie quelconque de  $X$ , il existe une plus petite topologie  $\mathcal{O}(A)$  contenant  $A$ . C'est la **topologie engendrée** par  $A$ . Elle consiste en toutes les unions d'intersections finies d'éléments de  $A$ .

Une fonction  $f$  d'un espace topologique  $X$  vers un espace topologique  $Y$  est **continue** si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert de  $Y$  est un ouvert de  $X$ . La fonction identité est toujours continue, et la composition de deux fonctions continues est encore continue. On notera  $[X \rightarrow Y]$  l'espace de toutes les fonctions continues de  $X$  vers  $Y$ .

D'autre part, l'image d'un compact par une fonction continue est toujours compacte. Le **lemme d'Alexander** énonce que, dans tout espace topologique  $X$  dont la topologie est engendrée par une famille de parties  $B$ , un sous-ensemble  $K \subseteq X$  est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $K$ , où tous les  $U_i$  sont dans  $B$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, on peut définir la compacité en se restreignant à des  $B$ -recouvrements, c'est-à-dire des recouvrements formés d'ouverts de  $B$  seulement.

Un **sous-espace**  $Y$  d'un espace topologique  $X$  est un sous-ensemble  $Y$  de  $X$ , muni de la **topologie induite**, formée des ouverts  $U \cap Y$ , lorsque  $U$  parcourt les ouverts de  $X$ . Les fermés de  $Y$  sont alors exactement les  $F \cap Y$ , où  $F$  parcourt les fermés de  $X$ .

Le **produit** de deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  est l'ensemble  $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ , muni de la topologie formée des unions quelconques d'ouverts de la forme  $U \times V$ ,  $U$  ouvert de  $X$ ,  $V$  ouvert de  $Y$ . En général, le produit d'une famille  $(X_i)_{i \in I}$  d'espaces topologiques est l'ensemble des fonctions  $x = (x_i)_{i \in I}$  qui à chaque  $i \in I$  associe  $x_i \in X_i$ , muni de la topologie la moins fine qui rend toutes les projections  $\pi_i : x = (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$  continues. C'est la topologie engendrée par les produits  $\prod_{i \in I} U_i$  d'ouverts  $U_i$  de  $X_i$ , tels que tous les  $U_i$  sauf un nombre fini sont égaux à  $X_i$ . Cette topologie est la **topologie produit**.

Le **théorème de Tychonoff** énonce que tout produit d'espaces compacts est compact.

## 2.2 Préordres, ordres

Un **préordre** sur un ensemble  $X$  est une relation binaire  $\leq$  qui est **réflexive** ( $x \leq x$  pour tout  $x \in X$ ), et **transitive** (si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors  $x \leq z$ ). C'est une relation d'**ordre** si et seulement s'il est aussi **antisymétrique** (si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors  $x = y$ ). Un ensemble  $X$  muni d'une relation d'ordre  $\leq$  est appelé un **ensemble ordonné**.

Si  $X$  est un ensemble ordonné, l'ensemble des éléments de  $X$  muni de l'ordre inverse  $\geq$  est appelé l'**opposé** de  $X$ , et est noté  $X^{op}$ .

On note  $\uparrow A$  l'ensemble  $\{y \in X \mid \exists x \in A \cdot x \leq y\}$  : c'est automatiquement une partie close par le haut. Si  $x$  est un point de  $X$ , on note aussi  $\uparrow x = \uparrow \{x\}$ . Rappelons qu'un ensemble  $A$  est **clos par le haut** si et seulement si, pour tout  $x \in A$ , si  $x \leq y$  alors  $y \in A$ . De façon équivalente, si et seulement si  $A = \uparrow A$ .

De façon symétrique, on définit les **clos par le bas**, et  $\downarrow A = \{y \in X \mid \exists x \in A \cdot y \leq x\}$ ,  $\downarrow x = \downarrow \{x\}$ .

Un **majorant**  $x$  d'une partie  $F$  de  $X$  est un élément tel que  $y \leq x$  pour tout  $y \in F$ . Si l'ensemble des majorants de  $F$  admet un plus petit élément, celui-ci est appelé une **borne supérieure** de  $F$ , et est noté  $\sup F$ . Une telle borne supérieure est unique dès que  $\leq$  est antisymétrique, et donc une relation d'ordre.

On définit de façon symétrique la notion de **minorant** et de **borne inférieure**  $\inf F$ .

Un **treillis complet** est un ensemble ordonné  $X$  dont toute partie  $A$  admet une borne supérieure  $\sup A$  et une borne inférieure  $\inf A$ . Il est équivalent de demander l'existence des bornes inférieures seules, puisqu'alors  $\sup A = \inf \{x \in X \mid x \text{ majore } A\}$ ; ou de demander l'existence des bornes supérieures seules, puisque  $\inf A = \sup \{x \in X \mid x \text{ minore } A\}$ .

Une fonction  $f$  d'un ensemble ordonné  $X$  vers un ensemble ordonné  $Y$  est **croissante** si et seulement si  $x_1 \leq x_2$  implique  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Pour toute fonction  $f$  d'un ensemble ordonné  $X$  dans lui-même, un **point fixe** de  $f$  est un élément  $x \in X$  tel que  $f(x) = x$ . On dit que  $x$  est un **pré-point fixe** si et seulement si  $x \leq f(x)$ , et que  $x$  est un **post-point fixe** si et seulement si  $f(x) \leq x$ .

Lorsque  $X$  est un treillis complet et  $f$  est croissante de  $X$  dans  $X$ , la borne inférieure de tous les post-points fixes de  $f$  est encore un post-point fixe de  $f$  : c'est le plus petit post-point fixe de  $f$ . On peut alors montrer que c'est aussi un point fixe de  $f$ , qui est nécessairement le plus petit. C'est le **théorème de Tarski** : toute fonction croissante d'un treillis complet  $X$  dans lui-même a un plus petit point fixe, qui est aussi son plus petit post-point fixe. De façon symétrique, toute fonction croissante d'un treillis complet  $X$  dans lui-même a un plus grand point fixe, qui est aussi son plus grand pré-point fixe. Ces résultats forment le début du **théorème de Knaster-Tarski** : l'ensemble des points fixes d'une fonction croissante  $f$  d'un treillis complet  $X$  dans lui-même est un sous-treillis complet de  $X$ .

## 2.3 Cpos et topologies d'ordres

Tout préordre  $\leq$  sur  $X$  définit une topologie, la **topologie d'Alexandroff** : les ouverts sont les parties  $O$  de  $X$  qui sont closes par le haut. Une fonction d'un ensemble ordonné  $X$  vers un ensemble ordonné  $Y$  est croissante si et seulement si elle est continue pour les topologies d'Alexandroff respectives.

Réciproquement, on peut toujours voir un espace topologique comme un ensemble ordonné, muni de son préordre de spécialisation. Le préordre de spécialisation de la topologie d'Alexandroff de  $\leq$  est de nouveau  $\leq$ .

Une **partie dirigée**  $D \subseteq X$  est par définition non vide, et telle que tout couple d'éléments de  $D$  a un majorant dans  $D$  : si  $x, y \in D$ , il existe  $z \in D$  tel que  $x \leq z$  et  $y \leq z$ . Un **cpo** est un ensemble ordonné  $X$  dont toute partie dirigée  $D$  admet une borne supérieure  $\sup D$ . Un cas particulier important de cpo est formé par les treillis complets.

### 2.3.1 La topologie de Scott, cpos continus

La **topologie de Scott** sur un ensemble ordonné  $X$  a pour ouverts les parties  $U \subseteq X$  qui sont closes par le haut et telles que toute partie dirigée  $D \subseteq X$  qui a une borne supérieure dans  $U$  intersecte  $U$ . De façon sans doute plus claire, cette dernière propriété se réexprime en disant que  $F$  est un fermé si et seulement si son complémentaire est clos par le haut, et la borne supérieure de toute famille dirigée d'éléments de  $F$ , si elle existe, est encore dans  $F$ . La topologie de Scott d'un ensemble ordonné est toujours  $T_0$ , mais n'est jamais  $T_1$ , sauf dans le cas trivial où l'ordre sous-jacent est l'égalité. La topologie de Scott est clairement moins fine que celle d'Alexandroff.

On peut démontrer que, pour tous ensembles ordonnés  $X$  et  $Y$ , la fonction  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si  $f$  est **Scott-continue**, c'est-à-dire que pour toute famille dirigée  $D \subseteq X$  dont la borne supérieure  $\sup D$  existe, alors  $\sup f(D)$  existe et est égale à  $f(\sup D)$ . Ceci implique en particulier que  $f$  est croissante :  $x \leq x'$  implique  $f(x) \leq f(x')$ .

Comme pour la topologie d'Alexandroff, l'ordre de spécialisation d'une topologie de Scott est l'ordre  $\leq$ . L'adhérence  $cl\{x\}$  du point  $x$  est identique à sa clôture par le bas  $\downarrow x$ , qui est donc en particulier fermée.

Dans un cpo  $X$ , la relation d'**approximation**  $\ll$  (lire : "est bien au-dessous de") est définie par :  $x \ll y$  si et seulement si pour toute famille dirigée  $D$  telle que  $y \leq \sup D$ , il existe  $z \in D$  tel que  $x \leq z$ . On note  $\uparrow x$  l'ensemble  $\{y \in X \mid x \ll y\}$ , et  $\downarrow x$  l'ensemble  $\{y \in X \mid y \ll x\}$ . Un cpo est **continu** si et seulement si, pour tout  $x \in X$ ,  $\downarrow x$  est dirigé et  $x = \sup \downarrow x$ .

En général, on peut définir  $\ll$  sur tout ensemble ordonné par  $x \ll y$  si et seulement si pour toute famille dirigée  $D$  ayant une borne supérieure et telle que  $y \leq \sup D$ , il existe  $z \in D$  tel que  $x \leq z$ . Un **ensemble ordonné continu** est alors un ensemble ordonné  $X$  dans lequel  $\downarrow x$  est dirigé et  $x = \sup \downarrow x$  pour tout  $x \in X$ .

L'ensemble  $\uparrow x$  est toujours ouvert pour la topologie de Scott. Si  $X$  est un cpo continu, de plus, tout ouvert  $U$  est une union de tels ouverts :  $U = \bigcup_{x \in U} \uparrow x$ . Ces propriétés se déduisent de propriétés élémentaires : si  $x \leq y \ll z$ , alors  $x \ll z$ ; si  $x \ll y \leq z$ , alors  $x \ll z$ ; et la propriété d'**interpolation** : si  $x \ll y$  alors il existe  $z$  tel que  $x \ll z \ll y$ .

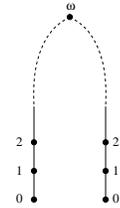
La propriété d'interpolation est vraie en général dans tout ensemble ordonné continu. On peut en trouver une démonstration dans le cas des cpo continus, par exemple chez Abramsky and Jung (1994, lemme 2.2.15), chez Heckmann (1990, proposition 6.7.4), ou bien chez Mislove (1998, lemme 4.16). Dans le cas des ensembles ordonnés continus, la démonstration est pratiquement similaire, mais n'est pas facile à trouver dans la littérature. La voici donc. (Je remercie Mike Mislove de me l'avoir communiquée.) Soit  $y \in X$  quelconque, et considérons  $A = \{w \in X \mid \exists z \in X \cdot w \ll z \ll y\}$ .  $A$  est non vide parce que  $\downarrow y$  est non vide, et pour tout  $z \in \downarrow y$ ,  $\downarrow z$  est non vide. On remarque que  $A$  est dirigé : si  $w_1 \ll z_1 \ll y$  et  $w_2 \ll z_2 \ll y$ , comme  $\downarrow y$  est dirigé, il existe  $z \ll y$  tel que  $z_1, z_2 \leq z$ ; donc  $w_1 \ll z \ll y$  et  $w_2 \ll z \ll y$ ; comme  $\downarrow z$  est dirigé, il existe  $w \ll z$  tel que  $w_1, w_2 \leq w$ . On remarque aussi que  $y$  est la borne supérieure de

$A$ . En effet,  $y$  en est clairement un majorant, et il ne reste qu'à montrer que tout majorant  $y'$  de  $A$  est supérieur ou égal à  $y$ . Puisque  $y'$  majore  $A$ , pour tous  $w, z$  tels que  $w \ll z \ll y$  on a  $w \leq y'$ . Fixons  $z \ll y$ . Comme  $z$  est la borne supérieure des  $w \ll z$ , on a donc  $z \leq y'$ . Puisque  $y$  est la borne supérieure des  $z \ll y$ , on a donc  $y \leq y'$ . Donc  $y = \sup A$ . Mais alors, si  $x \ll y$ , il existe un élément  $w \in A$  tel que  $x \leq w$ , donc  $x \leq w \ll z \ll y$  pour un certain  $z$ .

Un exemple typique d'ensemble ordonné continu est  $\mathbb{R}$ , ordonné par l'ordre usuel  $\leq$ , où  $\ll$  est juste la partie stricte  $<$  de l'ordre. Sur  $\mathbb{R}^+$  ou  $\overline{\mathbb{R}}^+$  (l'ensemble  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , avec  $x < +\infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ), la relation  $\ll$  est définie par  $x \ll y$  si et seulement si  $x = 0$  ou  $x < y$ .  $\overline{\mathbb{R}}^+$  est un cpo continu. Un des exemples les plus simples de cpo non continu est donné à l'exercice suivant.

▷ **Exercice 2.1**

Soit  $X$  le cpo formé des éléments  $0, 1, 2, \dots$ , ainsi que  $0^*, 1^*, 2^*, \dots$ , et  $\omega$ , avec  $0 < 1 < 2 < \dots < \omega$  et  $0^* < 1^* < 2^* < \dots < \omega$ , tous les autres éléments étant incomparables. Montrer qu'il n'existe aucun élément bien en-dessous de  $\omega$ . En déduire que  $X$  n'est pas un cpo continu.



Une **base**  $B$  d'un ensemble ordonné  $X$  est une partie de  $X$  telle que, pour tout  $x \in X$ , l'ensemble des  $y \in B$  tels que  $y \ll x$  est dirigé et admet  $x$  comme borne supérieure. Un ensemble ordonné est  $X$  continu si et seulement s'il a une base, et alors  $X$  lui-même est une base. Mais il existe des cas où  $X$  a une base plus petite. Par exemple,  $\overline{\mathbb{R}}^+$  a une base formée uniquement de nombres rationnels. Si  $X$  est un cpo continu de base  $B$ , tout ouvert  $U$  s'écrit  $\bigcup_{x \in B \cap U} \uparrow x$ .

Dans un ensemble ordonné continu équipé d'une base  $B$ , on peut raffiner la propriété d'interpolation : si  $x \ll y$  alors il existe  $z$  dans  $B$  tel que  $x \ll z \ll y$ . Nous appellerons ceci la propriété d'**interpolation raffinée**. En effet, par la propriété d'interpolation classique, il existe  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $x \ll z_1 \ll z_2 \ll y$ . Comme  $z_2$  est borne supérieure d'une famille dirigée d'éléments de  $B$ , et  $z_1 \ll z_2$ , il existe un élément  $z$  de  $B$  tel que  $z_1 \leq z \leq z_2$ . Mais alors  $x \ll z \ll y$ .

Un élément  $x$  d'un ensemble ordonné  $X$  est dit **fini** si et seulement si  $x \ll x$ . Un cpo est **algébrique** si et seulement s'il admet une base formé uniquement d'éléments finis. Autrement dit, si et seulement si l'ensemble des éléments finis inférieurs ou égaux à  $x$  est dirigé, et de borne supérieure égale à  $x$ , pour tout  $x \in X$ . Tout cpo algébrique est continu, mais la réciproque n'est pas vraie :  $[0, 1]$  muni de la topologie de Scott est continu, mais son unique élément fini vaut 0.

Un **domaine** est un cpo continu dans lequel tout couple d'éléments  $x, y$  qui a un majorant a une borne supérieure  $\sup(x, y)$ . De façon équivalente, dans lequel toute partie finie non vide  $F$  qui a un majorant a une borne supérieure  $\sup F$  ; ou encore, dans lequel toute partie non vide qui a un majorant a une borne supérieure ; ou encore, dans lequel toute partie non vide a une borne inférieure. Toutes ces conditions sont équivalentes. L'intérêt de la notion de domaine est que les domaines forment une catégorie cartésienne close, comme on le verra au chapitre 12.

Tout cpo continu est un **C-espace** (Erné, 1991), c'est-à-dire un espace  $X$  tel que, pour tout ouvert  $U$ , pour tout point  $y \in U$ , il existe un point  $x \in U$  tel que  $y$  soit dans l'intérieur de  $\uparrow x$ . Autrement dit, tout point a une base de voisinages formé d'ensembles de la forme  $\uparrow x$ . Par

Erné (1991, proposition 2.2.C),  $X$  est un C-espace si et seulement si l'intérieur de toute union d'ensembles  $A_i$  clos par le haut,  $i \in I$ , égale l'union des intérieurs  $\overset{\circ}{A}_i$ .

### 2.3.2 Espaces sobres, cohérents, stablement compacts

Le théorème de Hofmann-Mislove (Abramsky and Jung, 1994, théorème 7.2.9) énonce que dans tout espace sobre  $X$ , il existe une correspondance bijective entre filtres Scott-ouverts d'ouverts de  $X$  et compacts saturés de  $X$ . Un **filtre** d'ouverts est une famille  $\mathcal{U}$  d'ouverts qui est non vide, close par le haut (si  $U \in \mathcal{U}$  et  $U \subseteq V$ , alors  $V \in \mathcal{U}$ ), et stable par intersection binaire (si  $U, V \in \mathcal{U}$ , alors  $U \cap V \in \mathcal{U}$ ). Un filtre  $\mathcal{U}$  est **Scott-ouvert**, c'est-à-dire ouvert pour la topologie de Scott sur l'ensemble des ouverts de  $X$  muni de l'inclusion, si et seulement si pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  telle que  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$ , alors il existe  $i \in I$  tel que  $U_i \in \mathcal{U}$ .

Au vu de la définition, il est clair que, pour tout compact saturé  $Q$ , l'ensemble des ouverts  $U$  qui contient  $Q$  est un filtre Scott-ouvert d'ouverts. Réciproquement, dans un espace sobre, si  $\mathcal{U}$  est un filtre Scott-ouvert d'ouverts, alors  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$  est un compact saturé. Soit  $\mathcal{Q}(X)$ , l'**espace de Smyth**, l'ensemble des compacts saturés non vides de  $X$ , ordonné par inclusion inverse  $\supseteq$ . Une conséquence directe du théorème de Hofmann-Mislove est que, si  $X$  est sobre, alors  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo isomorphe à celui des filtres Scott-ouverts non triviaux d'ouverts de  $X$ , ordonnés par inclusion  $\subseteq$ . (Un filtre est **non trivial** si et seulement s'il est différent du filtre formé de tous les ouverts de  $X$ , autrement dit s'il ne contient pas l'ouvert vide.)

De plus, toujours si  $X$  est sobre, on a une propriété duale de celle de Heine-Borel, au sens où le rôle des compacts et des ouverts est échangé :  $X$  est **bien filtrant**, au sens où  $X$  est  $T_0$ , et si  $(Q_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de compacts saturés contenue dans un ouvert  $U$ , alors il existe un  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq U$  (Abramsky and Jung, 1994, corollaire 7.2.11). Une famille est **filtrante**, ici pour l'inclusion, si et seulement si elle est dirigée pour l'ordre inverse, ici l'ordre  $\supseteq$  de  $\mathcal{Q}(X)$ .

Si  $X$  est un espace sobre, alors muni de son ordre de spécialisation,  $X$  est un cpo. Appelons **ouvert de Scott**, ou encore **Scott-ouvert**, tout ouvert de  $X$  vu comme cpo, muni de la topologie de Scott. Alors tout ouvert de  $X$  est ouvert de Scott, autrement dit la topologie de Scott sur  $X$  est plus fine que la topologie de l'espace sobre  $X$ . (Un espace topologique qui est un cpo muni de son ordre de spécialisation, et dont la topologie de Scott est plus fine que la topologie de départ, est parfois appelé un **espace à convergence monotone**.)

Réciproquement, il existe des cpos qui, munis de la topologie de Scott, ne sont pas sobres. Cependant, tout cpo continu est sobre. De plus, tout cpo continu est aussi, trivialement, localement compact : pour tout ouvert  $U$ , pour tout  $x \in U$ , il existe  $y \ll x$  tel que  $y \in U$ , donc  $x \in \uparrow y \subseteq \uparrow y \subseteq U$ , où  $\uparrow y$  est un compact finitaire, et  $\uparrow y$  est l'intérieur de  $\uparrow y$ .

Il sera parfois intéressant de considérer d'autres topologies que la topologie de Scott sur un ensemble ordonné  $X$ . Notamment, la topologie engendrée par les ensembles  $X \setminus \downarrow x$ ,  $x \in X$ , est appelée la **topologie haute**, et l'on notera  $X_u$  l'espace topologique résultant. La **topologie basse** est, elle, engendrée par les ensembles  $X \setminus \uparrow x$ ,  $x \in X$ ; on notera  $X_\ell$  l'espace topologique correspondant. (Il serait tentant de noter, par exemple,  $X_\sigma$  l'espace  $X$  muni de sa topologie de Scott, pour le distinguer de l'ensemble ordonné  $X$ . Nous préférons le noter juste  $X$ , cependant, la topologie de Scott étant la topologie par défaut sur un ensemble ordonné dans cet ouvrage.)

Si  $X$  est un ensemble ordonné muni de l'ordre  $\leq$ , rappelons que  $\downarrow x$  est un fermé de Scott pour tout  $x \in X$ . Ceci implique que la topologie de Scott est toujours plus fine que la topologie haute. Rappelons aussi que la topologie d'Alexandroff est plus fine que celle de Scott. Toutes ces topologies ont le même préordre de spécialisation  $\leq$ . En fait, la topologie haute est la moins fine dont  $\leq$  est l'ordre de spécialisation, et la topologie d'Alexandroff est la plus fine, la topologie de Scott étant au milieu.

Par ces considérations, si  $X$  est un espace sobre, d'ordre de spécialisation  $\leq$ , la topologie de  $X$  est à la fois plus fine que celle de  $X_u$  et moins fine que celle de Scott sur  $X$ . Un espace dont la topologie est plus fine que la topologie haute et moins fine que la topologie de Scott est appelé **correctement ordonné** ("order-consistent").

Nous dirons qu'un espace topologique  $X$  est **cohérent** si et seulement l'intersection de deux compacts de  $X$  est toujours compacte. (Il est équivalent de demander que l'intersection de deux compacts saturés soit un compact saturé.) L'appellation **espace cohérent** est en général réservée aux espaces *sobres* tels que toute intersection de deux compacts est compacte (voir par exemple Alvarez-Manilla 2000, définition 1.11 ou Tix 1995, définition 3.1, qui définit un espace cohérent comme additionnellement sobre et localement compact). Notre définition est en accord avec Jung (2004, proposition 2.6). Il se trouve que les espaces sobres, localement compacts, et cohérents sont exactement les espaces sobres, localement compacts, et vérifiant la condition de **cohérence relative** : pour tous ouverts  $U, V_1, V_2$  de  $X$ , si  $U \subseteq V_1$  et  $U \subseteq V_2$  alors  $U \subseteq V_1 \cap V_2$ , où  $\subseteq$  est la relation "bien au-dessous" de l'ensemble des ouverts de  $X$  ordonné par l'inclusion  $\subseteq$ . De tels espaces sont appelés **stablement localement compacts**. Un espace stablement localement compact qui est de plus compact, autrement dit dans lequel toute intersection finie de compacts est compacte, est dit **stablement compact**.

Lorsque  $X$  est un espace localement compact,  $X$  est sobre si et seulement si  $X$  est bien filtrant (Gierz et al. 2003, théorème II.1-21, cité par Jung 2004, juste après la définition 2.7). Un espace stablement localement compact est donc, de façon équivalente, un espace bien filtrant, localement compact, et cohérent.

Tout espace localement compact et  $T_2$  étant sobre, est aussi stablement localement compact. Rappelons que tout cpo continu est sobre et localement compact. Il existe des cpos continus qui ne sont pas cohérents, cependant (Tix et al., 2005, exemple 1.11).

Tout produit topologique d'espaces stablement compacts est stablement compact (Jung, 2004, Proposition 2.15). Ceci se démontre aisément via la correspondance entre espaces stablement compacts et espaces de Nachbin. Un **espace de Nachbin** est un espace compact  $X'$ , muni d'une relation d'ordre  $\preceq$  dont le graphe est fermé dans le produit topologique  $X' \times X'$ . Tout espace de Nachbin est compact et  $T_2$ . En général, les espaces de Nachbin possèdent un certain nombre de propriétés remarquables, on consultera par exemple Jung (2004, Section 2) pour plus de détails. Si  $X'$  muni de  $\preceq$  est un espace de Nachbin, la collection des ouverts de  $X'$  qui sont clos par le haut pour  $\preceq$  forme une topologie stablement compacte, sa **topologie supérieure**. Soit  $X$  l'espace  $X'$  muni de la topologie supérieure de  $X'$ . De façon peut-être surprenante, on peut retrouver la topologie de  $X'$  et l'ordre  $\preceq$  à partir de la seule topologie supérieure, c'est-à-dire de  $X$ . D'abord,  $\preceq$  est l'ordre de spécialisation de  $X$ . Ensuite, la topologie de  $X'$  est la topologie **patch** de  $X$ . La **topologie patch** d'un espace  $X$  est par définition la plus petite topologie contenant à la fois les ouverts et les complémentaires de compacts saturés de  $X$ . Si  $X$  est stablement compact, alors  $X'$ ,

l'espace  $X$  muni de la topologie patch de  $X$ , est un espace de Nachbin. (Nous démontrerons le nécessaire pour établir ce résultat, et un petit peu plus, à la proposition 3.5.8.) Il y a donc correspondance bijective entre espaces de Nachbin et espaces stablement compacts. De plus, si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'espaces stablement compacts, et  $\leq_i$  est l'ordre de spécialisation de  $X_i$ , alors en posant  $X'_i$  l'espace  $X_i$  muni de sa topologie patch,  $X' = \prod_{i \in I} X'_i$  muni de l'ordre composante par composante  $\leq$  est un espace de Nachbin. De plus  $X'$  muni de l'ordre  $\leq$  est exactement l'espace de Nachbin associé au produit  $\prod_{i \in I} X_i$ . Autrement dit, la topologie patch d'un produit d'espaces stablement compacts coïncide avec le produit des topologies patch, et l'ordre de spécialisation du produit est l'ordre composante par composante (Jung, 2004, Proposition 2.15).

Cette correspondance permet aussi de montrer facilement que tout sous-espace patch-fermé d'un espace stablement compact  $X$  est stablement compact (Jung, 2004, Proposition 2.16). (Un **patch-fermé** est par définition un fermé de la topologie patch, de même qu'un **patch-ouvert** est un ouvert de la topologie patch.) Ceci est la généralisation aux topologies non- $T_2$  du résultat bien connu que tout sous-espace fermé d'un espace compact  $T_2$  est compact  $T_2$ .

Toute union finie de parties compactes saturés d'un espace  $X$  est toujours compacte saturée. Lorsque  $X$  est stablement compact, de plus, toute intersection, même infinie, de compacts saturés, est compacte. En effet, l'intersection vide est  $X$  lui-même, qui est compact saturé. Toute intersection finie non vide est compacte saturée, parce que  $X$  est cohérent. Donc toute intersection finie de compacts saturés est compacte. Comme toute intersection de compacts saturés peut s'écrire comme une intersection filtrante d'intersections finies, et comme  $X$  est bien filtrant, toute intersection de compacts saturés est bien compacte saturée. Il s'ensuit que, lorsque  $X$  est stablement compact, l'ensemble des complémentaires des compacts saturés de  $X$  forme une topologie, la **topologie cocompacte**. Lorsque  $X$  est un espace topologique quelconque, on appelle topologie cocompacte la topologie engendrée par les complémentaires des compacts saturés de  $X$ , et elle prend donc une forme légèrement moins simple dans le cas général : appelons **protocompact** toute intersection quelconque de compacts saturés de  $X$ , alors les ouverts de la topologie cocompacte, les **cocompacts** de  $X$ , sont les complémentaires des protocompacts de  $X$ . (Les protocompacts sont juste les compacts saturés lorsque  $X$  est bien filtrant et cohérent.)

On note  $X^d$  l'espace topologique dont l'ensemble des points est juste  $X$ , muni de la topologie cocompacte.  $X^d$  est appelé le **dual de de Groot** de  $X$ .

Lorsque  $X$  est stablement compact,  $X^d$  est encore stablement compact. De plus,  $X^{dd} = X$ , les compacts saturés de  $X$  sont les fermés de  $X^d$ , les fermés de  $X$  sont les compacts saturés de  $X^d$ , et le préordre de spécialisation de  $X^d$  est l'opposé de celui de  $X$ . Tout ceci est immédiat via la correspondance avec les espaces de Nachbin (Jung, 2004, corollaire 2.13) : si  $X'$  est l'espace de Nachbin obtenu en équipant  $X$  de sa topologie patch,  $X^{d'}$  est juste l'espace de Nachbin  $X^d$  muni de l'opposé  $\geq$  de l'ordre de spécialisation de  $X$ .

### 2.3.3 Espaces localement finitaires

En remplaçant la notion de compact par celle de compact finitaire dans la définition d'un espace localement compact, on définit un espace **localement finitaire** (Heckmann, 1996) comme étant un espace où tout voisinage ouvert  $U$  de tout point  $x$  contient un voisinage de  $x$  qui est un

compact finitaire, autrement dit il existe un ensemble fini  $E$  tel que  $x \subseteq \overset{\circ}{\uparrow} E \subseteq \uparrow E \subseteq U$ . Tout cpo est localement finitaire, car pour tout ouvert  $U$ , pour tout  $x \in U$ , il existe  $y \ll x$  tel que  $y \in U$ , donc  $x \in \uparrow y \subseteq \uparrow y \subseteq U$ , où  $\uparrow y$  est un compact finitaire, et  $\uparrow y$  est l'intérieur de  $\uparrow y$ .

Un espace est **finitairement sobre** (Goubault-Larrecq, 2005, définition 3.10) si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  et toute famille filtrante  $(\uparrow E_i)_{i \in I}$  de compacts finitaires non vides telle que  $\bigcap_{i \in I} \uparrow E_i \subseteq U$ , alors il existe  $i \in I$  tel que  $\uparrow E_i \subseteq U$ . Le **lemme de Rudin** (Jung, 1998, théorème 4.11) énonce que, dans un ensemble ordonné, de toute famille filtrante  $(\uparrow E_i)_{i \in I}$  de compacts finitaires non vides on peut extraire un ensemble dirigé  $Z \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$  qui intersecte chaque  $E_i, i \in I$ . Il s'ensuit que tout cpo est finitairement sobre (Heckmann, 1990, lemme 3.9.4). (Le lemme de Rudin est un équivalent de l'axiome du choix, voir la section 2.5.)

Nous dirons qu'un espace topologique  $X$  est **finitairement cohérent** si et seulement si l'intersection de deux compacts finitaires est un compact finitaire. Cette propriété est appelée propriété M par Jung (1998, définition, p.38). Elle exprime que, pour tous  $x, y \in X$ , l'ensemble des majorants communs à  $x$  et à  $y$  est égal à l'union d'un nombre fini d'ensembles de la forme  $\uparrow z, z \in X$ . Un espace  $X$  est **stablement localement finitaire** si et seulement s'il est finitairement sobre, localement finitaire, et finitairement cohérent. (La notion "stablement localement finitaire" est appelée "finitairement cohérent" par Goubault-Larrecq 2005, définition 3.10. Nous la renommons ici par souci de cohérence avec les notions "stablement localement compact" et "cohérent".) Un cpo est stablement localement finitaire si et seulement s'il est finitairement cohérent.

### 2.3.4 Produits d'ensembles ordonnés, produits d'espaces topologiques

Le **produit** de deux ensembles ordonnés  $X$  et  $Y$  est l'ensemble  $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ , muni de l'ordre défini par  $(x, y) \leq (x', y')$  si et seulement si  $x \leq x'$  et  $y \leq y'$ . Ici l'on doit mentionner une subtilité. En tant qu'ensemble ordonné,  $X$  peut être vu comme un espace topologique, muni de la topologie de Scott. De même pour  $Y$ , et pour le produit d'ensembles ordonnés  $X \times Y$ . Cependant, en général, le produit d'ensembles ordonnés  $X \times Y$ , vu comme un espace topologique, est distinct du produit d'espaces topologiques  $X \times Y$  : la topologie de Scott sur  $X \times Y$  contient en général plus d'ouverts que la topologie produit. Cependant, les deux coïncident lorsque  $X$  et  $Y$  sont des ensembles ordonnés continus. De plus,  $X \times Y$  est alors encore un ensemble ordonné continu, et l'on a  $(x, y) \ll (x', y')$  si et seulement si  $x \ll x'$  et  $y \ll y'$  (la démonstration de Jones 1990, lemme 2.1, par exemple, s'adapte du cas des cpos continus à celui des ensembles ordonnés continus).

### 2.3.5 Un panorama du monde des espaces topologiques

On présente en figure 2.1 un résumé de l'essentiel des inclusions de classes d'espaces. (Deux classes n'ont pas encore été définies : les espaces localement relativement compacts seront définis en définition 3.4.8, les espaces stablement localement relativement compacts le seront en définition 3.6.18.) Une flèche pleine de  $A$  vers  $B$  énonce que tout espace de la classe  $A$  est aussi

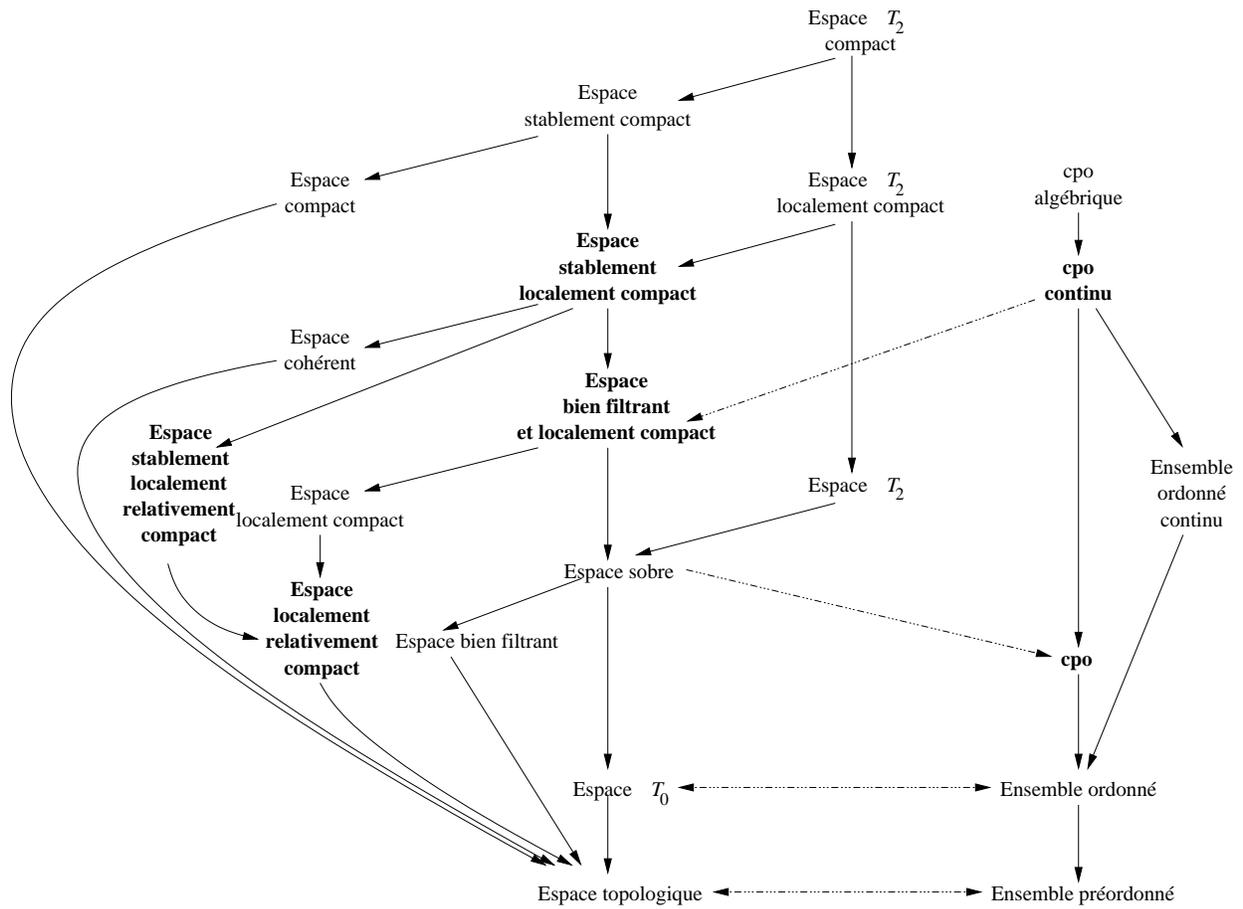


FIG. 2.1 – Quelques inclusions utiles de classes d'espaces topologiques

de la classe  $B$ . Une flèche pointillée d'une classe d'espaces topologiques  $A$  vers une classe d'ensembles ordonnés  $B$  énonce que tout espace topologique de  $A$  est un ensemble ordonné de  $B$ , muni de son préordre de spécialisation. Une flèche pointillée dans le sens inverse énonce que tout ensemble ordonné de  $B$  est un espace de la classe  $A$ , muni de sa topologie de Scott. Les flèches sont orientées de telle sorte que les classes d'espaces les plus générales se trouvent en bas, les plus spécifiques en haut. Les espaces topologiques usuels rencontrés en mathématiques ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$ , etc.) seraient en général au-dessus de la case "espace  $T_2$  localement compact", voire "espace  $T_2$  compact" pour certains ( $[0, 1]$ , le cube de Hilbert  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  par exemple). Les classes en gras sont celles qui revêtiront le plus d'importance dans le reste de ce document.

## 2.4 Limites

Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments d'un espace topologique  $X$ , on dit que  $x$  est une **limite** de la suite, ou que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **tend vers**  $x$ , ou bien **converge vers**  $x$ , si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  contenant  $x$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in U$  pour tout  $n \geq n_0$ . Autrement dit, si  $x_n$  est dans  $U$  pour tout  $n$  suffisamment grand. La limite est unique si  $X$  est  $T_2$ , mais pas en général.

On peut généraliser la notion de convergence, au sens de Moore et Smith, en remplaçant l'ensemble d'indices  $\mathbb{N}$  par des familles plus générales  $J$ , munies d'un préordre  $\sqsubseteq$ , et qui sont dirigées dans le préordre  $\sqsubseteq$ . Un **philtre**  $(x_j)_{j \in J}$  (*net* en anglais) est une famille d'éléments de  $X$  indexée par les éléments de  $J$ . On dit que  $x_j$  est dans l'ensemble  $U$  pour  $j$  **suffisamment grand** si et seulement s'il existe  $j_0 \in J$  tel que  $x_j \in U$  pour tout  $j \in J$  tel que  $j_0 \sqsubseteq j$ . On dit finalement que le philtre admet  $x$  pour limite, ou tend vers  $x$ , ou converge vers  $x$ , si et seulement si pour tout ouvert  $U$  contenant  $x$ ,  $x_j \in U$  pour  $j$  suffisamment grand.

On dit de même que  $x_j$  vérifie la propriété  $P$  pour  $j$  suffisamment grand si et seulement s'il existe  $j_0 \in J$  tel que  $x_j$  vérifie  $P$  pour tout  $j \in J$  tel que  $j_0 \sqsubseteq j$ . On note que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si  $x_j$  vérifie la propriété  $P_1$  pour  $j$  suffisamment grand, et aussi  $P_2$  pour  $j$  suffisamment grand, ... et aussi  $P_k$  pour  $j$  suffisamment grand, alors  $x_j$  vérifie la conjonction des propriétés  $P_1, \dots, P_k$  pour  $j$  suffisamment grand.

Lorsque  $X$  est muni d'un préordre  $\leq$ , par exemple le préordre de spécialisation de  $X$ , un philtre **monotone** est un philtre  $(x_j)_{j \in J}$  tel que la fonction qui à  $j \in J$  associe  $x_j$  est croissante : si  $j \sqsubseteq k$  alors  $x_j \leq x_k$ . La famille  $(x_j)_{j \in J}$  est alors une famille dirigée, en utilisant le fait que  $J$  est dirigée dans l'ordre  $\sqsubseteq$ . Réciproquement, toute famille dirigée  $(x_i)_{i \in I}$  définit un philtre monotone, à condition d'équiper  $I$  de l'ordre  $\sqsubseteq$  défini par  $i \sqsubseteq i'$  si et seulement si  $x_i \leq x_{i'}$ . On peut donc voir, en particulier, toute famille dirigée comme un philtre monotone, et parler des limites de cette famille dirigée.

Lorsque  $X$  est muni de la topologie de Scott d'une relation d'ordre  $\leq$ , alors la borne supérieure  $x$  d'une famille dirigée  $(x_i)_{i \in I}$ , si elle existe, est non seulement le plus petit de ses majorants, mais aussi la plus grande de ses limites. Les limites de  $(x_i)_{i \in I}$  sont exactement tous les éléments inférieurs ou égaux à  $x$ .

Un sous-ensemble  $F$  d'un espace topologique  $X$  est fermé dans  $X$  si et seulement si pour toute limite  $x$  de tout philtre  $(x_j)_{j \in J}$  formé d'éléments de  $F$ ,  $x$  est encore dans  $F$ . Autrement dit,  $F$  est clos par l'opération consistant à prendre les limites de philtres dans  $F$ .

Pour tous espaces topologiques  $X$  et  $Y$ , pour toute fonction  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  est continue si et seulement si  $f$  préserve les limites, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout philtre  $(x_j)_{j \in J}$  dans  $X$  qui converge vers  $x$ , alors  $(f(x_j))_{j \in J}$  converge vers  $f(x)$  dans  $Y$ .

En revenant aux nombres réels, notons que, pour tout philtre  $(r_i)_{i \in I}$  de réels, où  $I$  est préordonné par  $\sqsubseteq$ ,

$$\begin{aligned} \limsup_{i \in I} r_i &= \inf_{i \in I} \sup_{j \in I, i \sqsubseteq j} r_j \\ \liminf_{i \in I} r_i &= \sup_{i \in I} \inf_{j \in I, i \sqsubseteq j} r_j \end{aligned}$$

si ces quantités sont définies, sont respectivement appelées la **limite supérieure** et la **limite inférieure** du philtre.

## 2.5 Ordres bien fondés, beaux préordres, ordinaux

Une relation  $<$  sur un ensemble  $X$  est **irréflexive** si et seulement si  $x < x$  pour aucun  $x \in X$ . Un **ordre strict** est une relation transitive et irréflexive. Un préordre  $\leq$  définit automatiquement un ordre strict  $<$ , défini par  $x < y$  si et seulement si  $x \leq y$  et  $y \not\leq x$ .

Un ordre strict  $<$  sur  $X$  est **bien fondé** si et seulement s'il n'admet aucun chaîne infinie décroissante  $x_1 > x_2 > \dots > x_k > \dots$ . De façon équivalente,  $<$  est bien fondé si et seulement si toute partie non vide  $A$  de  $X$  a un élément minimal pour  $X$ , c'est-à-dire un élément  $a \in A$  tel que  $b < a$  implique  $b \notin A$ .

Une propriété  $P$  des éléments de  $X$  est dite **inductive** par rapport à  $<$  si et seulement si  $P(x)$  est vraie dès que  $P(y)$  est vraie pour tout  $y < x$ . Un ordre strict  $<$  sur  $X$  est bien fondé si et seulement si le principe de **récurrence** le long de  $<$  est valide : toute propriété inductive  $P$  par rapport à  $<$  est vraie de tout  $x \in X$ .

Un **beau préordre**  $\leq$  sur  $X$  est un préordre tel que, de toute suite infinie  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  d'éléments de  $X$  on peut extraire une sous-suite croissante infinie  $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_j} \leq \dots$  ( $i_1 < i_2 < \dots < i_j < \dots$ ). Il est équivalent de demander que l'on puisse extraire deux éléments  $x_{i_1} \leq x_{i_2}$  avec  $i_1 < i_2$ . Il est encore équivalent de demander que toute famille infinie contient deux éléments comparables, ou que toute famille d'éléments incomparables est finie. (Deux éléments  $x$  et  $y$  sont **incomparables** si et seulement si  $x \not\leq y$  et  $y \not\leq x$ .) Il est encore équivalent de demander que tout ensemble clos par le haut  $A$  de  $X$  ait un nombre fini d'éléments minimaux  $x_1, \dots, x_n$  et que  $A = \uparrow \{x_1, \dots, x_n\}$ .

En particulier, tout beau préordre  $\leq$  définit un ordre strict  $<$  qui est bien fondé. Cependant, il existe des préordres  $\leq$  dont l'ordre strict associé  $<$  est bien fondé, mais qui ne sont pas beaux.

Il sera utile de lire la dernière définition ci-dessus d'un beau préordre sous la forme suivante :  $\leq$  est un beau préordre si et seulement si toutes les parties closes par le haut sont des compacts finitaires, autrement dit si les notions d'ouvert d'Alexandroff et de compact finitaire coïncident.

L'ordre composante par composante sur  $\mathbb{N}^k$  est défini par :  $(i_1, \dots, i_k) \leq (j_1, \dots, j_k)$  si et seulement si  $i_1 \leq j_1$  et  $\dots$   $i_k \leq j_k$ . Le **lemme de Dickson** énonce que cet ordre est un beau préordre pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

De nombreux résultats de ce document reposent sur l'**axiome du choix**. Celui-ci exprime que, pour toute propriété  $P(x, y)$  de deux éléments  $x \in X, y \in Y$ , si pour tout  $x \in X$  il existe un  $y \in Y$  tel que  $P(x, y)$  soit vraie, alors il existe une fonction  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $P(x, f(x))$  soit vraie pour tout  $x \in X$ . Les principes élémentaires de la logique font que, à  $x$  fixé, s'il existe  $y \in Y$  tel que  $P(x, y)$ , alors on peut en choisir un. En  $n$  étapes de raisonnement, on peut choisir un  $y_1$  tel que  $P(x_1, y_1), \dots$ , un  $y_n$  tel que  $P(x_n, y_n)$ , et donc fabriquer une fonction de domaine fini  $x_1 \mapsto y_1, \dots, x_n \mapsto y_n$ . L'axiome du choix est nécessaire lorsque  $X$  est infini, pour montrer que l'on peut faire une infinité de choix  $x_i \mapsto y_i$ , en une seule étape de raisonnement.

L'axiome du choix a de très nombreuses formulations équivalentes. Une de celles-ci est le **lemme de Zorn**. Un ensemble ordonné  $X$  est **inductif** si et seulement si toute partie totalement ordonnée de  $X$  est majorée. Le lemme de Zorn exprime que tout ensemble ordonné inductif a un élément maximal. Un élément **maximal** est un élément  $x$  de  $X$  tel que si  $x \leq y$  alors  $x = y$ . Un élément maximal n'est pas nécessairement unique, au contraire d'un plus grand élément, qui est un élément  $x$  tel que  $y \leq x$  pour tout  $y \in X$ .

Une autre est le **principe de maximalité de Hausdorff**. Celui-ci énonce que toute partie totalement ordonnée  $A$  de  $X$  est incluse dans une partie totalement ordonnée maximale — pour l'ordre d'inclusion. Ceci se démontre en appliquant le lemme de Zorn à l'ensemble  $Y$  de toutes les parties totalement ordonnées de  $X$  contenant  $A$ .  $Y$  est inductif, car pour tout  $B \in Y, \bigcup_{A' \in B} A'$  est encore totalement ordonné et contient  $A$ .

Une autre conséquence du lemme de Zorn est le fait que, pour tout ensemble ordonné bien fondé  $X$ , d'ordre  $\leq$ , il existe un ordre total  $\leq'$  sur  $X$  étendant  $\leq$ , c'est-à-dire tel que  $x \leq y$  implique  $x \leq' y$ , et tel que  $\leq'$  soit encore bien fondé. Pour démontrer ceci, on considère l'ensemble  $Z$  des couples  $(A, \leq_A)$ , où  $A$  est une partie close par le bas de  $X$  et  $\leq_A$  est un ordre total bien fondé sur  $A$  étendant  $\leq$ . On ordonne  $Z$  par  $(A, \leq_A) \sqsubseteq (B, \leq_B)$  si et seulement si  $A \subseteq B$  et pour tous  $x, y \in A, x \leq_A y$  si et seulement si  $x \leq_B y$ . Pour toute partie totalement ordonnée  $\{(A_i, \leq_{A_i}) \mid i \in I\}$  de  $Z$ , posons  $A = \bigcup_{i \in I} A_i, x \leq_A y$  si et seulement si  $x \leq_{A_i} y$ , où  $i$  est n'importe quel indice tel que  $x, y \in A_i$ .  $A$  est close par le bas,  $\leq_A$  est un ordre total sur  $A$ . Il est de plus bien fondé, car s'il admettait une chaîne infinie décroissante  $x_1 >_A x_2 >_A \dots$ , alors cette chaîne serait aussi une chaîne infinie décroissante pour  $>_{A_i}$  dans  $A_i$ , où  $i$  est n'importe quel indice tel que  $x_1 \in A_i$ , puisque  $A_i$  est clos par le bas. Donc  $Z$  est inductif, et a en conséquence un élément maximal  $(A, \leq_A)$ . Si  $A$  était différent de  $X$ , il existerait un élément  $z \in X \setminus A$ , et  $(A \cup \{z\}, \leq_{A \cup \{z\}})$  serait un élément plus grand (pour  $\sqsubseteq$ ) que  $(A, \leq_A)$ , où  $x \leq_{A \cup \{z\}} y$  si et seulement si  $x, y \in A$  et  $x \leq_A y$ , ou  $y = z$ . (Ceci est un ordre bien fondé car  $\leq_A$  l'est, et parce que  $A$  est clos par le bas.) Ceci contredirait la maximalité de  $(A, \leq_A)$ . Donc  $A = X$ , et  $\leq_A$  est l'ordre bien fondé total cherché.

La collection de tous les ensembles est bien fondée, au sens où il n'existe aucune chaîne infinie décroissante pour l'ordre strict d'appartenance  $x_1 \ni x_2 \ni \dots \ni x_k \ni \dots$ . C'est une conséquence de l'un des axiomes de la théorie des ensembles, appelé axiome de fondation. Ceci permet de définir des ensembles totalement ordonnés et bien fondés canoniques appelés les **ordinaux**. Un ordinal  $\alpha$  est un ensemble tel que  $x \in y \in \alpha$  implique  $x \in \alpha$ , et ayant la propriété de **trichotomie** : pour tous  $x, y \in \alpha, x \in y$  ou  $x = y$  ou  $y \in x$ . La relation d'inclusion  $\subseteq$  définit alors un ordre sur  $\alpha$ , tel que  $x \subseteq y$  si et seulement si  $x \in y$  ou  $x = y$ . L'ordre strict associé à  $\subseteq$  est donc  $\in$ . De plus,  $\subseteq$  est bien fondé sur  $\alpha$  par l'axiome de fondation, et est total par la

propriété de trichotomie. On peut démontrer que tout ensemble  $X$  muni d'un ordre total et bien fondé  $\leq$  est isomorphe à un unique ordinal  $\alpha$ , au sens où il existe une bijection  $f : \alpha \rightarrow X$  telle que  $x \subseteq y$  si et seulement si  $f(x) \leq f(y)$ . On notera à l'avenir  $<$  plutôt que  $\in$  et  $\leq$  plutôt que  $\subseteq$  dans les ordinaux.

On peut former des ordinaux à l'aide de trois constructions fondamentales. D'abord, l'ensemble vide est un ordinal, que l'on notera usuellement  $0$ . Ensuite, pour tout ordinal  $\alpha$ ,  $\alpha \cup \{\alpha\}$  est encore un ordinal, que l'on appellera l'ordinal **successeur** de  $\alpha$ , et que l'on notera  $\alpha + 1$ . Enfin, pour toute famille d'ordinaux  $(\alpha_i)_{i \in I}$ ,  $\bigcup_{i \in I} \alpha_i$  est un ordinal, appelé la **limite** de la famille, et on le notera  $\lim_{i \in I} \alpha_i$ . On identifie les entiers aux ordinaux  $0, 1 = 0 + 1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1$ , etc. L'ordinal  $\lim_{n \in \mathbb{N}} n$  est noté  $\omega$ , et est le plus petit ordinal infini. Notons que  $\omega$  n'est le successeur d'aucun ordinal. Un ordinal différent de  $0$  qui n'est le successeur d'aucun ordinal est appelé **ordinal limite**. L'axiome de fondation a comme conséquence le principe de **récurrence ordinale** : pour toute propriété  $P$  des ordinaux telle que  $P$  est vraie en  $0$ , si  $P(\alpha)$  est vraie alors  $P(\alpha + 1)$  aussi, et pour tout ordinal limite  $\beta$ , si  $P(\alpha)$  est vraie pour tout  $\alpha < \beta$  alors  $P(\beta)$  aussi, alors  $P$  est vraie de tous les ordinaux. Le principe de récurrence ordinale permet notamment de montrer que si deux ordinaux sont isomorphes, alors ils sont en fait égaux.

On dispose aussi du principe de **définition par récurrence ordinale**, permettant de définir une quantité  $f(\alpha)$  pour tout ordinal  $\alpha$  en spécifiant la valeur de  $f(0)$ , celle de  $f(\alpha + 1)$  en fonction de celle de  $f(\alpha)$  pour tout  $\alpha$ , et celle de  $f(\beta)$  en fonction des  $f(\alpha)$ ,  $\alpha < \beta$ , pour tout ordinal limite  $\beta$ .

Notamment, soit  $X$  un treillis complet et  $f$  une fonction croissante de  $X$  dans  $X$ . Posons  $x_0 = \perp$ , le plus petit élément de  $X$ ,  $x_{\alpha+1} = f(x_\alpha)$ , et  $x_\beta = \sup_{\alpha < \beta} x_\alpha$  pour tout ordinal limite  $\beta$ . La famille des  $(x_\alpha)_{\alpha \text{ ordinal}}$  est une partie de  $X$ , et sa borne supérieure  $\sup_\alpha x_\alpha$  est en fait le plus petit point fixe de  $f$ . Rappelons que  $f$  a nécessairement un plus petit point fixe et un plus grand point fixe, par le théorème de Tarski. On peut même montrer qu'il existe un ordinal  $\alpha$  tel que  $x_\beta = x_\alpha$  pour tout  $\beta$ ,  $\alpha \leq \beta$ , et alors  $f(x_\alpha) = x_{\alpha+1} = x_\alpha$  est un point fixe de  $f$ . C'est nécessairement le plus petit car on peut montrer par récurrence ordinale que si  $y$  est un point fixe quelconque de  $f$ , alors  $x_\beta \leq y$  pour tout  $\beta$ .

De même, on peut obtenir le plus grand point fixe de  $f$  en construisant par récurrence ordinale  $y_0 = \top$ , le plus grand élément de  $X$ ,  $y_{\alpha+1} = f(y_\alpha)$ , et  $y_\beta = \inf_{\alpha < \beta} y_\alpha$  pour tout ordinal limite  $\beta$ .

## 2.6 Correspondances de Galois

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles ordonnés, et notons  $\leq$  leurs ordres. Une **correspondance de Galois**  $\alpha \dashv \gamma$  est un couple de deux fonctions croissantes  $\alpha : X \rightarrow Y$  et  $\gamma : Y \rightarrow X$  telles que, pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ ,  $\alpha(x) \leq y$  si et seulement si  $x \leq \gamma(y)$ .

On a alors  $\alpha(\gamma(y)) \leq y$  pour tout  $y \in Y$ , et  $x \leq \gamma(\alpha(x))$  pour tout  $x \in X$ . Il s'ensuit que  $\alpha(x)$  est le plus petit élément  $y$  tel que  $x \leq \gamma(y)$ , et que  $\gamma(y)$  est le plus grand élément  $x$  tel que  $\alpha(x) \leq y$ .

Ceci implique aussi que  $\alpha \circ \gamma \circ \alpha = \alpha$  et que  $\gamma \circ \alpha \circ \gamma = \gamma$ .

Si de plus  $\gamma \circ \alpha$  est l'identité sur  $X$ , alors  $\gamma$  est surjective et  $\alpha$  est injective. Réciproquement, si  $\gamma$  est surjective, alors  $\gamma(\alpha(x)) = x$  pour tout  $x$  : en effet, comme  $\gamma$  est surjective, il existe un

$y \in Y$  tel que  $\gamma(y) = x$ ; alors  $\gamma(\alpha(x)) = \gamma(\alpha(\gamma(y))) = \gamma(y) = x$ . De même, si  $\alpha$  est injective, alors  $\gamma(\alpha(x)) = x$  pour tout  $x$  : en effet, c'est une conséquence de  $\alpha(\gamma(\alpha(x))) = \alpha(x)$  et de l'injectivité de  $\alpha$ .

Si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée :  $\gamma \circ \alpha$  est l'identité sur  $X$ ,  $\gamma$  est surjective,  $\alpha$  est injective ; alors on dit que  $\alpha \dashv \gamma$  est une **surrection de Galois** de  $X$  dans  $Y$ . L'injection  $\alpha : X \rightarrow Y$  est alors automatiquement un **plongement d'ordre**, c'est-à-dire que  $\alpha(x) \leq \alpha(x')$  si et seulement si  $x \leq x'$ . De plus,  $X$  et  $Y$  sont des cpos, alors  $\alpha$  est de plus automatiquement un plongement d'espaces topologiques. Un **plongement d'espaces topologiques** de  $X$  dans  $Y$  est par définition une fonction continue injective  $i$  de  $X$  dans  $Y$  dont l'inverse est aussi continue de l'image  $\mathfrak{S}(i)$  de  $i$  dans  $X$ , où  $\mathfrak{S}(i)$  est équipé de la topologie induite par celle de  $Y$ . Mais attention : un plongement d'ordre n'est pas en général un plongement d'espaces topologiques. Par exemple, si l'on pose

On peut définir de façon similaire les **insertions de Galois**, caractérisées de façon équivalente en ce que  $\alpha \circ \gamma$  est l'identité sur  $Y$ ,  $\gamma$  est injective, ou  $\alpha$  est surjective.

Lorsque  $\alpha : X \rightarrow Y$  et  $\gamma : Y \rightarrow X$  sont croissantes, et que  $\alpha \circ \gamma$  et  $\gamma \circ \alpha$  sont toutes les deux égales à l'identité,  $\alpha$  et  $\gamma$  forment un **isomorphisme d'ordre**. On a alors trivialement  $\alpha \dashv \gamma$ , et ceci forme à la fois une surrection de Galois et une insertion de Galois. Si  $X$  et  $Y$  sont des cpos, un isomorphisme d'ordre entre  $X$  et  $Y$  est automatiquement un **homéomorphisme**, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces topologiques : deux fonctions continues inverses l'une de l'autre.

Un résultat important est le **lemme de Cousot** : soit  $f$  une fonction croissante de  $X$  dans  $X$ ,  $lfp(f)$  le plus petit point fixe de  $f$ , et le plus petit point fixe  $lfp(\alpha \circ f \circ \gamma)$  de  $\alpha \circ f \circ \gamma$  dans  $Y$ , alors  $\alpha(lfp(f)) \leq lfp(\alpha \circ f \circ \gamma)$ . En effet,  $lfp(\alpha \circ f \circ \gamma)$  est le plus petit post-point fixe  $y$  de  $\alpha \circ f \circ \gamma$ , c'est-à-dire le plus petit  $y \in Y$  tel que  $(\alpha \circ f \circ \gamma)(y) \leq y$ , ou de façon équivalente,  $f(\gamma(y)) \leq \gamma(y)$ . Donc  $\gamma(y)$  est un post-point fixe de  $f$ , qui est donc supérieur ou égal au plus petit post-point fixe  $lfp(f)$ . Mais  $lfp(f) \leq \gamma(y)$  est équivalent à  $\alpha(lfp(f)) \leq y$ .

De façon symétrique,  $gfp(\gamma \circ g \circ \alpha) \leq \gamma(gfp(g))$  pour toute fonction croissante  $g$  de  $Y$  dans  $Y$ , où  $gfp(g)$  désigne le plus grand point fixe de  $g$ .

## 2.7 Combinatoire

Soit  $X$  un ensemble ordonné fini. Soit  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . On peut alors construire une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $g(x) = \sum_{x' \leq x} f(x')$ .

Réciproquement, étant donnée une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut se demander s'il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $g(x) = \sum_{x' \leq x} f(x')$ . La réponse est positive, et est donnée par la **formule d'inversion de Möbius** :

$$f(x') = \sum_{x \leq x'} \mu_X(x, x') g(x)$$

où  $\mu_X(x, x')$ , la **fonction de Möbius**, dépend de la structure de l'intervalle  $[x, x'] = \{z \in X \mid x \leq z \leq x'\}$  (Stanley, 1986).

On peut s'en convaincre comme suit. Si  $g(x) = \sum_{x' \leq x} f(x')$ , alors nécessairement  $f(x) = g(x) - \sum_{x' < x} f(x')$ , ce qui définit une fonction  $f$  de façon unique sur  $X$ , par récurrence sur  $x$ .

(Ce principe de récurrence est valide car  $X$  est fini, donc  $\leq$  est bien fondé.) En développant cette formule, on en déduit que nécessairement

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) - \sum_{x_1 < x} f(x_1) \\
 &= g(x) - \sum_{x_1 < x} g(x_1) + \sum_{x_2 < x_1 < x} f(x_2) \\
 &= g(x) - \sum_{x_1 < x} g(x_1) + \sum_{x_2 < x_1 < x} g(x_2) - \sum_{x_3 < x_2 < x_1 < x} f(x_3) \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x_k < \dots < x_2 < x_1 < x}} (-1)^k g(x_k)
 \end{aligned}$$

On en déduit la formule d'inversion de Möbius, avec

$$\mu_X(x, x') = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x = x_k < \dots < x_2 < x_1 < x_0 = x'}} (-1)^k = \sum_{\pi \in x \nearrow x'} (-1)^{|\pi|}$$

où  $x \nearrow x'$  désigne l'ensemble des **chaînes finies croissantes** de  $x$  vers  $x'$ , c'est-à-dire des suites  $\pi = x_k, \dots, x_2, x_1, x_0$  telles que  $x = x_k < \dots < x_2 < x_1 < x_0 = x'$ . On note  $|\pi|$  la **longueur**  $k$  de  $\pi$ . On vérifie alors qu'effectivement

$$\begin{aligned}
 \sum_{x' \leq x} f(x') &= \sum_{x' \leq x} \sum_{x'' \leq x'} \mu_X(x'', x') g(x'') \\
 &= \sum_{x' \leq x} \sum_{x'' \leq x'} \sum_{\pi \in x'' \nearrow x'} (-1)^{|\pi|} g(x'') \\
 &= \sum_{x'' \leq x} \left( \sum_{\substack{x' / x'' \leq x' \leq x \\ \pi \in x'' \nearrow x'}} (-1)^{|\pi|} \right) g(x'') = g(x)
 \end{aligned}$$

La raison en est que, d'une part, lorsque  $x = x''$ ,  $\sum_{\substack{x' / x'' \leq x' \leq x \\ \pi \in x'' \nearrow x'}} (-1)^{|\pi|}$  vaut 1 puisque la seule valeur possible de  $x'$  est  $x$  et l'unique chaîne croissante  $\pi$  consiste juste en  $x$ . D'autre part, si  $x'' < x$ , on peut découper la somme  $\sum_{\substack{x' / x'' \leq x' \leq x \\ \pi \in x'' \nearrow x'}} (-1)^{|\pi|}$  en une somme sur les chaînes  $\pi \in x'' \nearrow x'$  avec  $x' < x$  et les autres ; mais ces dernières sont exactement les chaînes de la forme  $\pi.x$ , lorsque  $\pi \in x'' \nearrow x'$  avec  $x' < x$ . (On note  $\pi.x$  la chaîne obtenue en ajoutant  $x$  à la fin de  $\pi$ .) Comme  $|\pi.x| = |\pi| + 1$ , les termes des deux sommes s'annulent deux à deux, donc  $\sum_{\substack{x' / x'' \leq x' \leq x \\ \pi \in x'' \nearrow x'}} (-1)^{|\pi|} = 0$  pour tout  $x'' < x$ .

Lorsque  $X$  est l'ensemble des parties non vides d'un ensemble fini  $I$  donné, on a  $\mu_X(x, x') = (-1)^{|x'| - |x|}$ .

## 2.8 Capacités, jeux, et valuations

Une grande partie des notions sont ici reprises de Gilboa and Schmeidler (1992), que nous adaptons au cas d'un espace topologique sous-jacent  $X$  quelconque. Gilboa and Schmeidler (1992) considèrent en effet implicitement un espace  $X$  fini. (C'est un cas particulier de notre cadre : équiper  $X$  de la topologie discrète.) Pour ce qui est de la notion de valuation, voir Jones (1990).

### 2.8.1 Une taxonomie élémentaire des capacités

Soit  $X$  un espace topologique. Une **capacité**  $\nu$  sur  $X$  est une fonction qui à tout ouvert  $U$  de  $X$  associe un réel  $\nu(U) \in \mathbb{R}^+$ , tel que  $\nu(\emptyset) = 0$ . Autrement dit, une capacité est une fonction **stricte** de l'ensemble des ouverts de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . On dit que :

- $\nu$  est **monotone** ssi  $U \subseteq V$  implique  $\nu(U) \leq \nu(V)$  ; une capacité monotone est appelée un **jeu**.
- $\nu$  est **modulaire** ssi  $\nu(U \cup V) + \nu(U \cap V) = \nu(U) + \nu(V)$  ;
- $\nu$  est une **valuation** ssi  $\nu$  est un jeu modulaire ;
- $\nu$  est **sous-normalisée** ssi  $\nu(X) \leq 1$  ;
- $\nu$  est **normalisée** ssi  $\nu(X) = 1$  ; une valuation normalisée est appelée une **loi de probabilité** ;
- $\nu$  est **continue** si et seulement si, pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts,

$$\nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \sup_{i \in I} \nu(U_i)$$

Autrement dit, ssi  $\nu$  est continue vue comme fonction du cpo des ouverts de  $X$  muni de l'inclusion  $\subseteq$  vers l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  muni de l'ordre usuel. En particulier, toute capacité continue est un jeu. On peut considérer les valuations continues comme une notion adéquate de mesure sur les espaces topologiques, en particulier les cpo (Jones, 1990).

- $\nu$  est **convexe** ssi  $\nu(U \cup V) + \nu(U \cap V) \geq \nu(U) + \nu(V)$ . Une capacité monotone et convexe est appelé un **jeu convexe**.
- $\nu$  est **totalelement convexe** ssi, pour toute famille finie  $(U_i)_{i=1}^n$  d'ouverts,

$$\nu \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) \geq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \quad (2.1)$$

où  $|I|$  dénote le cardinal de  $I$ . Une capacité monotone et totalelement convexe est appelé une **loi de crédibilité** (“belief function”), ou simplement une **crédibilité**.

- $\nu$  est **concave** ssi  $\nu(U \cup V) + \nu(U \cap V) \leq \nu(U) + \nu(V)$ . Une capacité monotone et convexe est appelé un **jeu concave**.
- $\nu$  est **totalelement concave** ssi, pour toute famille finie  $(U_i)_{i=1}^n$  d'ouverts,

$$\nu \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) \leq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \quad (2.2)$$

où  $|I|$  dénote le cardinal de  $I$ . Une capacité monotone et totalement convexe est appelé une **loi de plausibilité** (“plausibility function”), ou simplement une **plausibilité**.

Toute valuation est totalement convexe et totalement concave. En fait, si  $\nu$  est une valuation, alors

$$\nu \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \quad (2.3)$$

Cette égalité est connue sous le nom de **principe d’inclusion-exclusion**. Si  $\nu$  est une valuation, on a aussi

$$\nu \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \quad (2.4)$$

qui en est une forme duale, et que l’on appellera le **principe d’exclusion-inclusion**. Ensuite, toute capacité totalement convexe est convexe : c’est le cas  $n = 2$  de l’inégalité (2.1). De même, toute capacité totalement concave est concave.

La propriété de convexité totale est traditionnellement appelée *monotonie totale*, voir par exemple Gilboa and Schmeidler (1992) ou Maaß (2001). Comme il s’agit d’une généralisation de la proposition de convexité, et non de monotonie, nous avons préféré la renommer. Ceci permet aussi de la distinguer de la propriété de concavité totale.

Notre exemple de “préprobabilité” de l’introduction est connu sous le nom de **jeu d’unanimité** (“unanimity game”)  $u_A$  :  $u_A(U)$  vaut 1 si  $A \subseteq U$ , et 0 sinon. Il est facile de voir que  $u_A$  est une capacité si et seulement si  $A$  est non vide, et est modulaire si et seulement si  $A$  est un singleton  $\{x\}$ . On note alors  $\delta_x = u_{\{x\}}$  : c’est la **valuation de Dirac** en  $x$ .

On peut vérifier que  $u_A$  est en revanche toujours monotone et totalement convexe, autrement dit une loi de crédibilité. Il existe donc des capacités et même des jeux totalement convexes mais non modulaires, et des lois de crédibilité qui ne sont pas des valuations. De même, il existe des jeux convexes qui ne sont pas totalement convexes, donc pas des lois de crédibilité. L’exemple typique est l’espace à trois éléments  $\{1, 2, 3\}$  (muni de la topologie discrète) avec :

$U$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\nu(U)$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

On vérifie que  $\nu$  n’est pas totalement convexe : prendre  $U_1 = \{2, 3\}$ ,  $U_2 = \{1, 3\}$ ,  $U_3 = \{1, 2\}$ .

Sur un ensemble fini  $X$ , toute capacité  $\nu$  s’exprime comme une combinaison linéaire unique de jeux d’unanimité. Par exemple, la capacité ci-dessus s’écrit  $\frac{1}{2}u_{\{1,2\}} + \frac{1}{2}u_{\{1,3\}} + \frac{1}{2}u_{\{2,3\}} - \frac{1}{2}u_{\{1,2,3\}}$ . En général, on a

$$\nu = \sum_{A \neq \emptyset, A \subseteq X} \alpha_A u_A \quad (2.5)$$

où

$$\begin{aligned}\alpha_A &= \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} \nu(B) \\ &= \nu(A) - \sum_{I \neq \emptyset, I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\end{aligned}$$

lorsque  $A$  est de cardinal  $n$ , et où  $A_i$  est  $A$  privé de son  $i$ ème élément. Les coefficients  $\alpha_A$  peuvent être négatifs, comme l'exemple ci-dessus le montre. La sous-classe des capacités dont tous les coefficients  $\alpha_A$  sont positifs ou nuls coïncide avec celle des crédibilités, c'est-à-dire des jeux totalement convexes.

Nous introduirons toutes notions supplémentaires sur les capacités, les jeux convexes, et les lois de crédibilité au fur et à mesure, et en profiterons pour les adapter de façon adéquate au cas topologique.

## 2.8.2 Valuations simples, et quasi-simples

Une valuation sur  $X$  est **simple** si et seulement si elle est de la forme  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$ , où tous les  $\alpha_i$  sont positifs ou nuls, et  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Une valuation est **quasi-simple** (l'appellation est de Goubault-Larrecq 2005, mais la notion est introduite, et joue un rôle fondamental, dans Jones 1990) si et seulement si elle est borne supérieure d'une famille dirigée de valuations simples. Toute valuation quasi-simple est continue.

Si  $X$  est un cpo continu, réciproquement, toute valuation continue est quasi-simple (Jones, 1990, théorème 5.2). En fait, on peut montrer que les valuations quasi-simples sur un espace topologique quelconque  $X$  sont exactement celles qui s'étendent en des valuations continues sur la topologie d'Alexandroff du préordre de spécialisation de  $X$  — qui est une topologie plus fine que celle de  $X$  (Goubault-Larrecq, 2005). Sur tous les C-espaces, en particulier les cpos continus, mais aussi les ensembles ordonnés continus, il existe alors une *plus petite* valuation continue étendant une valuation continue donnée  $\nu$  à la topologie d'Alexandroff, qui est celle qui à tout ensemble clos par le haut  $A$  associe  $\nu(\overset{\circ}{A})$  (Goubault-Larrecq, 2005, fait 1). Notamment, toute valuation continue sur un ensemble ordonné continu  $X$  (pas seulement un cpo continu) est quasi-simple. A contrario, sur tout espace stablement localement finitaire, toute valuation continue a une *plus grande* extension à la topologie d'Alexandroff, qui à tout ensemble clos par le haut  $A$  associe  $\sup_{E \text{ finie} \subseteq A} \inf_{U \text{ ouvert}, U \supseteq E} \nu(U)$  (Goubault-Larrecq, 2005, fait 2).

En particulier, si  $X$  est un cpo continu, l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  des valuations continues sous-normalisées est alors un cpo continu (Jones, 1990, corollaire 5.4). De plus, il admet une base formée uniquement de valuations simples. C'est le **théorème de Jones**. On peut déduire par les mêmes techniques que l'espace  $\mathbf{V}(X)$  de toutes les valuations continues sur un cpo continu  $X$  est un ensemble ordonné continu. On en déduit aussi que, si  $X$  est un cpo continu avec un plus petit élément  $\perp$ , alors l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des valuations continues normalisées, c'est-à-dire telles que  $\nu(X) = 1$ , est aussi un cpo continu, avec une base formée de valuations simples normalisées (Edalat, 1995, corollaire 3.3). C'est le **théorème d'Edalat**.

L'espace  $\mathcal{V}(X)$  de toutes les valuations continues n'est pas un cpo : par exemple,  $(r\delta_x)_{r \in \mathbb{R}^+}$  n'a pas de borne supérieure. La raison en est que, comme nous l'avons déjà mentionné, nos valuations sont bornées : il existe  $K \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout ouvert  $U$ ,  $\nu(U) \leq K$ . (Prendre  $K = \nu(X)$ .) Si nous redéfinissions les valuations comme étant à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , l'espace  $\mathcal{V}(X)$  de toutes les valuations continues ainsi non bornées sur  $X$  serait un cpo, continu si  $X$  est continu (Kirch, 1993).

On utilisera dans la suite le **lemme de découpage** ("splitting lemma") de Jones (1990, théorème 4.10). Ce lemme énonce que la valuation simple  $\sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i}$  est inférieure ou égale à la valuation simple  $\sum_{j=1}^n b_j \delta_{y_j}$  si et seulement s'il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  tels que la somme des coefficients sur chaque ligne donne les  $a_i$  ( $\sum_{j=1}^n t_{ij} = a_i$ ), la somme des coefficients sur chaque colonne donne une quantité inférieure ou égale aux  $b_j$  ( $\sum_{i=1}^m t_{ij} \leq b_j$ ), et telle que les seules entrées  $t_{ij}$  non nulles de la matrice sont telles que  $x_i \leq y_j$ .

En étant formel, le lemme de découpage de Jones ne s'applique qu'au cas où  $X$  est un cpo. Mais le lemme de découpage reste valide dans le cas où  $X$  est un espace topologique quelconque ; ceci est dû à Sünderhauf (1997, théorème 2.4, corollaire 2.6).

On peut de même démontrer un **lemme de découpage adapté à  $\ll$**  (Jones, 1990, lemme 4.13) : lorsque  $X$  est un cpo continu,  $\sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i} \ll \sum_{j=1}^n b_j \delta_{y_j}$  (où les  $b_j$  sont non nuls) si et seulement s'il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que la somme des coefficients sur chaque ligne donne les  $a_i$  ( $\sum_{j=1}^n t_{ij} = a_i$ ), la somme des coefficients sur chaque colonne donne une quantité *strictement* inférieure aux  $b_j$  ( $\sum_{i=1}^m t_{ij} < b_j$ ), et telle que les seules entrées  $t_{ij}$  non nulles de la matrice sont telles que  $x_i \ll y_j$ .

## 2.9 Espaces métriques, de Banach, convexité, cônes

Une **distance**  $d$  sur un ensemble  $X$  est une fonction de  $X^2$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ , telle que  $d(x, y) = d(y, x)$  pour tous  $x, y \in X$ , et telle que  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  pour tous  $x, y, z \in X$ . Un ensemble muni d'une distance est appelé un **espace métrique**.

Une **distance ultramétrique** est une fonction de  $X^2$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ , telle que  $d(x, y) = d(y, x)$  pour tous  $x, y \in X$ , et telle que  $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$  pour tous  $x, y, z \in X$ . Toute distance ultramétrique est une distance. Un ensemble muni d'une distance ultramétrique est appelé un **espace ultramétrique**.

Un espace métrique  $X$  définit un espace topologique sous-jacent, dont les ouverts sont les unions d'intersections finies de **boules ouvertes**  $B(x, \epsilon) = \{y \mid d(x, y) < \epsilon\}$ , où  $\epsilon > 0$ . Cette topologie est toujours  $T_2$ .

Selon cette définition, une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la limite  $x \in X$  si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $d(x_n, x) < \epsilon$  pour tout  $n$  assez grand. Une fonction d'un espace métrique vers un autre est continue si et seulement si elle préserve toutes les limites de suites convergentes. Un compact d'un espace métrique est une partie  $K$  telle que de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $x_n \in K$  pour tout  $n$ , on peut extraire une sous-suite convergente.

Une **suite de Cauchy** est une suite telle que pour toute  $\epsilon > 0$ ,  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  pour tous  $n, m$

assez grands. Toute suite convergente est de Cauchy. Un espace  $X$  dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit **complet**.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Une **norme** sur  $E$  est une fonction  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ,  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , et telle que  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel muni d'une norme.

Toute norme sur  $E$  induit une distance définie par  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Un espace vectoriel normé complet est appelé un **espace de Banach**.

Une fonction  $f$  de l'espace vectoriel  $E$  vers l'espace vectoriel  $F$  est **linéaire** si  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  et  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Une **forme linéaire** sur  $E$  est une fonction linéaire de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ . Lorsque  $E$  est un espace vectoriel normé, toute forme linéaire  $f$  sur  $E$  est continue (avec  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie métrique usuelle, pas sa topologie de Scott) si et seulement si elle est **lipschitzienne**, c'est-à-dire si et seulement si  $|f(x)|$  est borné lorsque  $x$  varie parmi les  $x \in E$  tels que  $\|x\| = 1$ . On peut alors définir la **norme sup** sur l'espace  $\mathcal{L}_E$  des formes linéaires continues par

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)|$$

Un sous-ensemble  $A$  d'un espace vectoriel  $E$  est **convexe** si et seulement si, pour tous  $x, x' \in A$ , pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ , on a  $\alpha x + \beta x' \in A$ . Autrement dit, si deux points  $x$  et  $x'$  sont dans  $A$ , alors le segment reliant  $x$  à  $x'$  est tout entier dans  $A$ .

Une fonction  $f$  d'un sous-ensemble convexe  $A$  de  $E$  est **concave** si et seulement si l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $y \leq f(x)$  est une partie convexe de l'espace vectoriel  $E \times \mathbb{R}$ . De façon équivalente, si et seulement si, pour tout  $x, x' \in A$ , pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ , on a  $f(\alpha x + \beta x') \geq \alpha f(x) + \beta f(x')$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Appelons **forme sous-linéaire** sur  $E$  toute fonction  $p$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ , et  $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Les normes et les formes linéaires sont des exemples de formes sous-linéaires.

Le **théorème de Hahn-Banach** énonce que si  $p$  est une forme sous-linéaire sur l'espace vectoriel normé  $E$ , et si  $f$  est une forme linéaire sur un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  telle que  $f(x) \leq p(x)$  pour tout  $x \in F$ , alors il existe une forme linéaire  $f^*$  sur tout  $E$  qui coïncide avec  $f$  sur  $F$  et telle que  $f^*(x) \leq p(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Un corollaire immédiat est que pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de l'espace vectoriel normé  $E$ , si  $f$  est une forme linéaire continue sur  $F$ , alors  $f$  s'étend en une forme linéaire continue  $f^*$  sur  $E$ , de même norme :  $\|f^*\| = \|f\|$ . C'est le théorème de Hahn-Banach appliqué à la fonction sous-linéaire  $p(x) = \|f\| \|x\|$ .

Soit  $O$  un voisinage ouvert et convexe de 0 dans l'espace vectoriel normé  $E$ . La **fonction de Minkowski**  $p_O$  de  $O$  est définie par :  $p_O(x)$  est la borne inférieure des réels  $\alpha > 0$  tels que  $\frac{1}{\alpha}x$  soit dans  $O$ . Il s'agit d'une fonction sous-linéaire. On en déduit le **théorème de Minkowski** : si  $x_0 \notin O$ , alors il existe une forme linéaire continue  $f^*$  sur  $E$  telle que  $f^*(x) < f^*(x_0)$  pour tout  $x \in O$ . (Prendre  $f$  la forme linéaire définie sur la droite  $F$  passant par  $x_0$  telle que  $f(x_0) = 1$ .)

Le noyau d'une telle forme linéaire étant par convention un **hyperplan**, ceci s'exprime en disant qu'il existe un hyperplan passant par  $x_0$ , séparant  $E$  en deux demi-espaces, de sorte que  $O$  soit entièrement contenu dans l'un des deux demi-espaces.

On en déduit aussi le **théorème de séparation** par un hyperplan : si  $A$  est un sous-ensemble convexe non vide de  $E$ ,  $O$  est un ouvert convexe non vide de  $E$ , et si  $A$  et  $O$  sont disjoints, alors il existe une forme linéaire continue  $f^*$  sur  $E$  telle que  $f^*(x) < f^*(y)$  pour tous  $x \in A$  et  $y \in O$ . C'est une application du théorème de Minkowski : fixer  $x_0 \in A$ ,  $y_0 \in O$ , et réaliser que  $\{(x - y) - (x_0 - y_0) | x \in A, y \in O\}$  est un voisinage ouvert convexe de 0 qui ne contient pas  $x_0 - y_0$ .

En général, nous ne pourrons pas travailler sur des espaces vectoriels. La notion dont nous aurons besoin est celle de *cône* (Tix et al., 2005, chapitre 2). Un **cône** est un ensemble  $C$  muni de deux opérations, l'**addition**  $+$  :  $C \times C \rightarrow C$  et la **multiplication scalaire**  $\cdot$  :  $\mathbb{R}^+ \times C \rightarrow C$ , ainsi que d'un **zéro**  $0 \in C$ , tels que les lois suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) & a + b &= b + a & a + 0 &= a \\ 1 \cdot a &= a & 0 \cdot a &= 0 & (rs) \cdot a &= r \cdot (s \cdot a) \\ r \cdot (a + b) &= r \cdot a + r \cdot b & (r + s) \cdot a &= r \cdot a + s \cdot a \end{aligned}$$

Autrement dit,  $C$  muni de l'addition est un monoïde commutatif (et non un groupe commutatif comme dans le cas d'un espace vectoriel). Un exemple immédiat de cône est  $\mathbb{R}^+$  lui-même, ou bien  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , qui est  $\mathbb{R}^+$  avec un point  $+\infty$  en plus, tel que  $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ ,  $r \cdot (+\infty) = +\infty$  pour tout  $r > 0$  et  $0 \cdot (+\infty) = 0$ . Mais  $\mathbb{R}$ , par exemple, n'est pas un cône : dans un cône  $C$ , 0 est nécessairement le plus petit élément, puisque  $0 = 0 \cdot a \leq 1 \cdot a = a$  pour tout  $a \in C$  ;

Une fonction  $f$  d'un cône  $C$  vers un cône  $D$  est **linéaire** si et seulement si

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad f(r \cdot a) = r \cdot f(a)$$

Un **cône ordonné** est un cône muni d'une relation d'ordre  $\leq$  qui rend  $+$  et  $\cdot$  croissantes en leurs deux arguments. Un **d-cône** est un cône ordonné qui est un cpo, et pour lequel  $+$  et  $\cdot$  sont Scott-continues. Un **cône topologique** est un cône  $C$  tel que l'addition soit continue de  $C \times C$  vers  $C$ , et la multiplication scalaire soit continue de  $\mathbb{R}^+ \times C$  vers  $C$ ,  $\mathbb{R}^+$  étant comme d'habitude muni de la topologie de Scott. Tout cône topologique  $T_0$  est un cône ordonné, une fois équipé de son ordre de spécialisation. En revanche, un d-cône n'est pas nécessairement un cône topologique, la topologie produit ne coïncidant pas nécessairement avec la topologie de Scott sur le produit. Cependant, un d-cône continu est toujours un cône topologique.

Dans un d-cône, 0 est le plus petit élément. Ceci, avec le fait que l'addition soit croissante, implique que le d-cône  $C$  soit lui-même dirigé, ce qui implique que  $C$  a un élément maximal. En conséquence,  $\mathbb{R}^+$  n'est pas un d-cône. Mais  $\overline{\mathbb{R}}^+$  est un d-cône, et même un d-cône continu.

Un analogue du théorème de Hahn-Banach est le **théorème du sandwich de Roth** (Tix et al., 2005, théorème 3.1), que voici. Soit  $C$  un cône ordonné. En adaptant la définition donnée plus haut, une fonction  $p : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  est **sous-linéaire** si et seulement si  $p(a + b) \leq p(a) + p(b)$  et  $p(r \cdot a) = r \cdot p(a)$  pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$ . De façon symétrique, une fonction  $q : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  est **sur-linéaire** si et seulement si  $q(a + b) \geq q(a) + q(b)$  et  $q(r \cdot a) = r \cdot q(a)$  pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$ . Alors, si pour tous  $a, b \in C$  tels que  $a \leq b$  on a  $q(a) \leq p(b)$  (par exemple si  $q \leq p$  et  $q$  ou  $p$  est croissante), alors il existe une fonction linéaire croissante  $f$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $q \leq f \leq p$ .

Nous aurons besoin de ce théorème de façon répétitive en partie IV. Nous en donnerons une démonstration complète, ainsi qu'une série de conséquences, à la section 3.12.

## 2.10 Intégration

Il existe de nombreuses notions d'intégrales dans la littérature. L'une des plus connues est l'intégrale de Lebesgue. La théorie de l'intégrale de Lebesgue est fondée sur la notion de mesure, dont nous parlerons plus loin, à la section 2.11.

Il est déjà possible ici de donner une idée de ce que serait la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , en définissant la notion proche de **valuation de Lebesgue** sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . (Nos valuations sont à valeur dans  $\mathbb{R}^+$ , excluant  $+\infty$ . Elles sont donc bornées, ce qui simplifie le traitement mathématique — sauf à quelques rares endroits, notamment au théorème 11.2.9. En revanche, ceci nous force à restreindre la valuation de Lebesgue à un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ .)

La valuation de Lebesgue  $\nu_L$  est définie par : pour toute union disjointe dénombrable  $U$  d'intervalles ouverts  $]x_i, y_i[ \subseteq [a, b]$ ,  $i \in I$ ,  $\nu_L(U) = \sum_{i \in I} (y_i - x_i)$ . Ceci est bien défini, sur tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$  (pour la topologie métrique usuelle), car  $U$  est une union d'intervalles ouverts par définition. Chaque composante connexe de  $U$  est un intervalle ouvert  $]x_i, y_i[$ , et la somme des  $y_i - x_i$  étant nécessairement inférieure ou égale à  $b - a$ , il ne peut y avoir qu'un nombre dénombrable de tels intervalles.

Nous aurons besoin de savoir intégrer des fonctions d'un intervalle  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ . Il est traditionnel de mettre en concurrence deux notions d'intégrale, l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann. En grande partie, nous n'aurons besoin que de l'intégrale de Riemann dans la suite, et nous insisterons donc sur ses propriétés. Il sera pratique de savoir qu'on peut la généraliser, à peu de frais, pour obtenir d'autres notions d'intégrales. Nous mentionnerons celle de Kurzweil-Henstock et celle de Riemann-Stieltjes. Il existe aussi une généralisation commune, l'intégrale de Kurzweil-Henstock-Stieltjes, mais dont le traitement est un peu plus difficile.

### 2.10.1 L'intégrale de Riemann

Commençons par l'intégrale de Riemann. Notre définition est relativement non classique, et tire parti du fait de la notion de limite telle que nous l'avons définie à la section 2.4.

Une **subdivision pointée**  $D$  de l'intervalle  $[a, b]$  est une suite  $a_0, t_1, a_1, t_2, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  ( $n \geq 1$ ) de réels de  $[a, b]$ , avec  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  et  $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Pour toute subdivision pointée  $D$  de cette forme, la **somme de Darboux**  $\int_D f(t)dt$  de  $f$  est définie comme étant  $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})f(t_i)$ . On peut ordonner l'ensemble des subdivisions pointées par  $D \trianglelefteq D'$  si et seulement si  $D$  est une sous-suite de  $D'$ , autrement dit si l'on peut obtenir  $D'$  à partir de  $D$  en ajoutant des frontières d'intervalles  $a_i$  et des points  $t_i$  dans les intervalles  $[a_{i-1}, a_i]$ . On note que l'ensemble  $\mathcal{D}_{[a,b]}$  des subdivisions pointées sur  $[a, b]$  est ordonné par  $\trianglelefteq$ , et est dirigé dans cet ordre.

On dit que la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **Riemann-intégrable**, ou simplement **intégrable**, si et seulement si le philtre des sommes de Darboux  $\int_D f(t)dt$ ,  $D \in \mathcal{D}_{[a,b]}$  converge vers une

limite dans  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie métrique usuelle. Cette limite, si elle existe, est nécessairement unique, car  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie métrique est  $T_2$ . On note cette limite  $\int_a^b f(t)dt$  : c'est l'**intégrale de Riemann** de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On peut montrer que toute fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , au sens de la topologie métrique usuelle, est Riemann-intégrable. Dans ce document,  $\mathbb{R}$  est équipé par défaut de sa topologie de Scott. La topologie métrique usuelle de  $\mathbb{R}$  ou de  $[a, b]$  est, rappelons-le, la topologie patch de cette dernière topologie. Une fonction continue de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , ces deux espaces étant munis de leurs topologies patch, sera dite **patch-continue**. (Nous généraliserons cette notion à la définition 3.6.12.) Toute fonction patch-continue est donc Riemann-intégrable.

Ceci est moins connu, mais il en est de même des fonctions, non nécessairement continues, mais croissantes, ou bien des fonctions décroissantes. Nous utiliserons fréquemment la notion d'intégrale de Riemann de fonctions décroissantes : c'est ce dont nous aurons besoin pour définir l'intégrale de Choquet à la section 4.1. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est décroissante, soit  $f(a) = f(b)$ , donc  $f$  est constante et donc clairement Riemann-intégrable, soit  $f(a) > f(b)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , considérons une subdivision pointée  $D = a_0, t_1, a_1, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  de  $[a, b]$  quelconque dont le **diamètre**  $\max_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})$  est d'au plus  $\epsilon / (f(a) - f(b))$ . Alors  $\int_D f(t)dt$  est compris entre  $\sum_{i=1}^n f(a_{i-1})(a_i - a_{i-1})$  et  $\sum_{i=1}^n f(a_i)(a_i - a_{i-1})$ , et la différence entre ces deux quantités est d'au plus  $\sum_{i=1}^n (f(a_{i-1}) - f(a_i))\epsilon / (f(a) - f(b)) \leq \epsilon$ . Disons que  $D$  est une subdivision gauche si et seulement si  $t_i = a_{i-1}$  pour tout  $i$ , et que  $D$  est une subdivision droite si  $t_i = a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Si  $D$  est une subdivision  $a_0, t_1, a_1, t_2, a_2, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  de  $[a, b]$ , elle définit une subdivision gauche  $D^+ = a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n-1}, a_n$  et une subdivision droite  $D^- = a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_n$ . Nous venons de démontrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une subdivision  $D$  telle que  $\int_{D^-} f(t)dt \leq \int_{D^+} f(t)dt + \epsilon$ . Comme  $f$  est décroissante, la famille des  $\int_{D^+} f(t)dt$ ,  $D^+$  subdivision gauche, est filtrante, et celle des  $\int_{D^-} f(t)dt$ ,  $D^-$  subdivision droite, est dirigée. On en déduit que  $f$  est Riemann-intégrable, et que  $\int_a^b f(t)dt = \sup_{D^-} \int_{D^-} f(t)dt = \inf_{D^+} \int_{D^+} f(t)dt$ .

L'intégrale de Riemann est linéaire en la fonction intégrée : si  $f$  et  $g$  sont Riemann-intégrables, alors  $\lambda f(t) + \mu g(t)$  aussi, et  $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$  ; elle est croissante en la fonction intégrée : si  $f \leq g$  (c'est-à-dire si  $f(t) \leq g(t)$  pour tout  $t \in [a, b]$ ) alors  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$  ; elle vérifie la relation de Chasles : si  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$ , alors elle est Riemann-intégrable sur  $[a, c]$  est  $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ . Si  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  et  $f'$  ne diffère de  $f$  qu'en un nombre fini de points, alors  $f'$  est aussi Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  et  $\int_a^b f'(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ .

On dispose aussi d'un **théorème de Scott-continuité** pour les intégrales de Riemann de fonctions décroissantes : soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de fonctions décroissantes sur  $[a, b]$ , de borne supérieure  $f$ , alors  $\int_a^b f(t)dt = \sup_{i \in I} \int_a^b f_i(t)dt$ . C'est évident :  $\int_a^b f(t)dt = \sup_{D^-} \int_{D^-} f(t)dt = \sup_{D^-} \int_{D^-} \sup_{i \in I} f_i(t)dt = \sup_{D^-} \sup_{i \in I} \int_{D^-} f_i(t)dt$  (parce que les sommes de Darboux sont des combinaison linéaires finies de valeurs  $f_i(t_j)$  à coefficients positifs, et que l'addition et la multiplication par une constante positive sont Scott-continues)  $= \sup_{i \in I} \sup_{D^-} \int_{D^-} f_i(t)dt = \sup_{i \in I} \int_a^b f_i(t)dt$ .

On démontre de même le **théorème de Scott-cocontinuité** pour les intégrales de Riemann de

fonctions décroissantes : soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de fonctions décroissantes sur  $[a, b]$ , de borne inférieure  $f$ , alors  $\int_a^b f(t)dt = \inf_{i \in I} \int_a^b f_i(t)dt$ . Ceci se démontre en utilisant les sommes de Darboux sur les subdivisions gauches  $D^+$  plutôt que les subdivisions droites  $D^-$ .

Ces théorèmes sont encore valides pour des familles de fonctions croissantes plutôt que décroissantes (remplacer  $f$  par  $-f$ ,  $f_i$  par  $-f_i$ ). Mais ils ne le sont plus sur des familles de fonctions Riemann-intégrables quelconques. Par exemple, considérons la famille des fonctions indicatrices  $\chi_E$  de parties finies  $E$  de  $[a, b]$  :  $\chi_E(t) = 1$  si  $t \in E$ ,  $\chi_E(t) = 0$  sinon. Il est facile de voir que  $\int_a^b \chi_E(t)dt = 0$ , mais  $\sup_E \chi_E = \chi_{[a,b]}$  et  $\int_a^b \chi_{[a,b]}(t)dt = b - a$ .

Sous certaines conditions, l'intégrale de Riemann  $\int_a^b \dot{f}(t)dt$  existe et vaut  $f(b) - f(a)$ , où  $\dot{f}$  est la dérivée de  $f$ . La **dérivée**  $\dot{f}(t)$  d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  au point  $t \in [a, b]$  est la limite de la quantité  $(f(t + \epsilon) - f(t))/\epsilon$  lorsque  $t + \epsilon \in [a, b]$  et  $\epsilon \neq 0$  tend vers 0, au sens de la topologie métrique usuelle de  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est **dérivable** en  $t$  si et seulement si  $\dot{f}(t)$  est bien défini. Elle est dérivable sur un ensemble  $E$  si et seulement si elle est dérivable en tout point de  $E$ . Une fonction  $f$  est **de classe  $C^1$**  sur un ensemble  $E$  si et seulement si elle est dérivable sur  $E$  et sa dérivée  $\dot{f}$  est patch-continue sur  $E$ . Un résultat classique est que si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^s \dot{f}(t)dt = f(s) - f(a)$ , quantité que l'on note souvent  $[f]_{t=a}^s$ . Il ne suffit pas que  $\dot{f}$  soit Riemann-intégrable. La patch-continuité est nécessaire ; c'est une faiblesse de l'intégrale de Riemann. De même, si  $f$  est une fonction patch-continue de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , alors la fonction  $F(s) = \int_a^s f(t)dt$  est de classe  $C^1$  et  $\dot{F} = f$  : on dit que  $F$  est une **primitive** de  $f$ . De nouveau, il est nécessaire de supposer que  $f$  soit patch-continue pour que ce résultat soit juste. Finalement, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $C^1$ , on a la formule d'intégration par parties :  $\int_a^b f(t)\dot{g}(t)dt = [fg]_{t=a}^b - \int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt$ .

## 2.10.2 L'intégrale de Kurzweil-Henstock

Une façon de réparer la faiblesse ci-dessus de l'intégrale de Riemann est de passer à l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Elle permet notamment de s'affranchir des conditions de patch-continuité, ou de classe  $C^1$  dans les énoncés ci-dessus (Demilly, 2005).

Dire que  $\int_D f(t)dt$  tend vers une quantité  $I$  — l'intégrale de Riemann — lorsque  $D$  parcourt l'ensemble dirigé par l'ordre  $\trianglelefteq$  des subdivisions pointées, c'est demander que pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $|\int_D f(t)dt - I| < \epsilon$  pour toute subdivision pointée  $D$  assez grande. On peut raffiner cette approche en mesurant les subdivisions pointées par des jauges.

Une **jauge** sur  $[a, b]$  est une fonction  $\delta$  de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Intuitivement, une jauge sera un moyen de contraindre les subdivisions pointées  $D = a_0, t_1, a_1, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  de sorte à majorer la largeur  $a_i - a_{i-1}$  de l'intervalle autour de  $t_i$  : on demandera que  $|g(a_i) - g(a_{i-1})| < \delta(t_i)$ . Ceci permet d'ajuster la largeur des intervalles autour de chaque  $t_i$  finement. Si  $|g(a_i) - g(a_{i-1})| < \delta(t_i)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on dira que  $D$  est  **$\delta$ -fine**. On dit que la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **Kurzweil-Henstock intégrable**, et d'intégrale égale à  $I$ , si et seulement si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une jauge  $\delta$  telle que  $|\int_D f(t)dt - I| < \epsilon$  pour toute subdivision pointée  $D$  qui est  $\delta$ -fine. (Le **lemme de Cousin** énonce que pour toute jauge  $\delta$ , il existe une subdivision pointée  $\delta$ -fine, ce qui garantit que cette définition n'est pas trivialement satisfaite.)

Il n'est pas évident que ceci fournisse réellement une généralisation de l'intégrale de Rie-

mann, mais c'est pourtant le cas : toute fonction Riemann-intégrable est intégrable au sens de Lebesgue, et toute fonction intégrable au sens de Lebesgue l'est au sens de Kurzweil-Henstock. De plus, les valeurs des intégrales coïncident. Nous noterons donc encore  $\int_a^b f(t)dt$  l'intégrale de Kurzweil-Henstock de  $f$  lorsqu'elle est définie. (À noter que si l'on modifie la définition de "δ-fin" en  $]a_{i-1}, a_i[ \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ , on obtient une autre notion d'intégrale, celle de MacShane, qui est équivalente à celle de Lebesgue.)

La nouveauté par rapport à l'intégrale de Riemann est que si  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  (pas nécessairement de classe  $C^1$ ), alors sa dérivée  $\dot{f}$  est intégrable et  $\int_a^b \dot{f}(t)dt = f(b) - f(a)$ , même si  $\dot{f}$  n'est pas continue. C'est le **théorème fondamental de l'analyse**. L'argument est court. Fixons  $\epsilon > 0$ . En tout  $t \in [a, b]$ ,  $f$  est dérivable, donc il existe un réel strictement positif  $\delta(t)$  tel que pour tout  $s \in [a, b]$  avec  $|s-t| < \delta(x)$ ,  $\left| \frac{f(s) - f(t)}{s-t} - \dot{f}(t) \right| < \epsilon$  (sauf pour  $s = t$ ), donc  $\left| f(s) - f(t) - (s-t)\dot{f}(t) \right| \leq \epsilon|s-t|$  (y compris pour  $s = t$ ). Fixons une subdivision pointée  $D$  de  $[a, b]$  quelconque qui soit  $\delta$ -fine (il en existe par le lemme de Cousin), et notons-la  $a_0, t_1, a_1, t_2, a_2, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$ . Pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ ,  $|f(a_{i+1}) - f(a_i) - (a_{i+1} - a_i)\dot{f}(t_i)| = |(f(a_{i+1}) - f(t_i) - (a_{i+1} - t_i)\dot{f}(t_i)) + (f(t_i) - f(a_i) - (t_i - a_i)\dot{f}(t_i))| \leq |f(a_{i+1}) - f(t_i) - (a_{i+1} - t_i)\dot{f}(t_i)| + |f(t_i) - f(a_i) - (t_i - a_i)\dot{f}(t_i)| \leq \epsilon|a_{i+1} - t_i| + \epsilon|t_i - a_i| = \epsilon(a_{i+1} - a_i)$ . Donc  $|f(b) - f(a) - \int_D f(t)dt| \leq \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i) - (a_{i+1} - a_i)\dot{f}(t_i)| \leq \epsilon$ , d'où la conclusion.

De nouveau, l'intégrale de Kurzweil-Henstock est linéaire : si  $f$  et  $g$  sont intégrables, alors  $\lambda f(t) + \mu g(t)$  aussi, et  $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$ ; elle est croissante en la fonction intégrée : si  $f \leq g$  alors  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ ; elle vérifie la **relation de Chasles** : si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$ , alors elle est intégrable sur  $[a, c]$  et  $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ . Cette dernière propriété est peut-être la plus subtile des trois à démontrer, et ce malgré son apparente simplicité : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe par hypothèse une jauge  $\delta_1$  sur  $[a, b]$  et une jauge  $\delta_2$  sur  $[b, c]$  telles que pour toute subdivision pointée  $D_1$   $\delta_1$ -fine de  $[a, b]$ ,  $\left| \int_{D_1} f(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| < \epsilon/2$ , et pour toute subdivision pointée  $D_2$   $\delta_2$ -fine de  $[b, c]$ ,  $\left| \int_{D_2} f(t)dt - \int_b^c f(t)dt \right| < \epsilon/2$ . Posons  $\delta$  la jauge sur  $[a, b]$  définie par :  $\delta(t) = \min(\delta_1(t), b-t)$  si  $t < b$ ,  $\delta(t) = \min(\delta_2(t), t-b)$  si  $t > b$ ,  $\delta(b) = \min(\delta_1(b), \delta_2(b))$ . Toute subdivision pointée  $D$  qui est  $\delta$ -fine doit être de la forme  $a_0, t_1, a_1, \dots, a_{i-1}, t_i, a_i, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  avec l'un des  $t_i$  qui vaut exactement  $b$ , par construction de  $\delta$ . On peut donc la découper en deux subdivisions  $D_1$  et  $D_2$ , respectivement  $\delta_1$ -fine de  $[a, b]$ , et  $\delta_2$ -fine de  $[b, c]$ , et l'on conclut par des majorations standard.

On observe que toute fonction intégrable sur  $[a, b]$  est encore intégrable sur tout sous-intervalle. On déduit du théorème fondamental de l'analyse que, si  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et la fonction qui à  $s$  associe  $\int_a^s f(t)dt$  est une primitive de  $f$ ; en fait,  $\int_a^s f(t)dt = F(s) - F(a)$ .

De même, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur  $[a, b]$ , on sait que le produit  $fg$  est dérivable et que sa dérivée égale  $\dot{f}g + f\dot{g}$ . Puisque toute dérivée est intégrable,  $\dot{f}g + f\dot{g}$  est intégrable

si et seulement si  $f\dot{g}$  l'est, et :

$$\int_a^b f(t)\dot{g}(t)dt = [fg]_{t=a}^b - \int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt$$

C'est la formule d'**intégration par parties**. Enfin, si  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $[a, b]$ , alors pour toute fonction  $g$  dérivable de  $[\alpha, \beta]$  vers  $[a, b]$ , avec  $a = g(\alpha)$ ,  $b = g(\beta)$ , la fonction  $F \circ g$  est dérivable, et de dérivée  $(f \circ g) \times \dot{g}$ . On en déduit la formule de **changement de variables** :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(g(s))\dot{g}(s)ds$$

Notons que tous ces développements se font aisément, sans avoir à supposer de condition de continuité superflue.

### 2.10.3 L'intégrale de Riemann-Stieltjes

Les formules d'intégrations par parties, et de changement de variables, nécessitent que  $g$  soit dérivable. Ceci est parfois gênant, notamment en théorie des probabilités, où l'on dispose d'une probabilité, dite cumulative,  $G(t)$  qui mesure la probabilité que l'on a d'être dans l'intervalle  $[a, t]$ , mais où  $G$  n'est pas nécessairement dérivable. Si  $G$  était dérivable, la moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  serait l'intégrale de  $f(t)\dot{G}(t)dt$ . Lorsque  $G$  n'est pas dérivable, on souhaite intégrer directement par rapport à la probabilité cumulative  $dG(t)$ . De telles intégrales sont dites à la Stieltjes. Il existe une intégrale de Riemann-Stieltjes, et une de Kurzweil-Henstock-Stieltjes. Nous ignorerons la seconde, dont les propriétés sont plus délicates à établir.

La définition de l'intégrale de Riemann-Stieltjes est très proche de celle de Riemann. Pour toute subdivision pointée  $D$  de  $[a, b]$ , la **somme de Darboux-Stieltjes**  $\int_D f(t)dG(t)$  est la quantité  $\sum_{i=1}^n (G(a_i) - G(a_{i-1}))f(t_i)$ . On dit que la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **Riemann-Stieltjes intégrable** par rapport à  $G$ , ou simplement  **$G$ -intégrable**, et d'intégrale égale à  $I$ , si et seulement si le philtre des sommes de Darboux-Stieltjes  $\int_D f(t)dG(t)$  converge vers  $I$ , lorsque  $D$  est ordonné par l'ordre  $\triangleleft$ .

On pourrait penser que  $\int_a^b f(t)dG(t)$  n'est rien d'autre qu'une autre façon d'écrire l'intégrale de Riemann  $\int_a^b f(t)\dot{G}(t)dt$ . Mais ce n'est le cas que lorsque  $G$  est de classe  $C^1$ . En particulier, ces deux intégrales sont en général différentes, même lorsque  $G$  est dérivable mais pas de classe  $C^1$ .

On utilise surtout l'intégrale de Riemann-Stieltjes dans le cas où  $G$  est une fonction croissante. Alors toute fonction  $f$  patch-continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  est  $G$ -intégrable. Notons aussi que, dans ce cas,  $G$  définit une valuation  $\tilde{G}$  sur  $[a, b]$  muni de sa topologie d'Alexandroff, par :  $\tilde{G}[t, b] = \tilde{G}[t, b] = G(b) - G(t)$ .

Ceci se démontre en observant d'abord que toute fonction patch-continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$  est **uniformément continue** sur  $[a, b]$  : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tous  $t, t' \in [a, b]$  tels que  $|t' - t| \leq \delta$ , alors  $|f(t') - f(t)| < \epsilon$ . On pourra apprécier la différence en notant qu'en termes d' $\epsilon$  et de  $\delta$ , la propriété de patch-continuité énonce que pour tout  $t \in [a, b]$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t' \in [a, b]$  tel que  $|t' - t| \leq \delta$ ,

alors  $|f(t') - f(t)| < \epsilon$ . Soit donc  $f$  patch-continue de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , et supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas uniformément continue. Il existe donc  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\delta > 0$ , on peut trouver deux points  $t, t' \in [a, b]$  tels que  $|t' - t| \leq \delta$  et  $|f(t') - f(t)| \geq \epsilon$ . L'ensemble  $F_\delta$  des couples  $(t, t')$  d'éléments de  $[a, b]$  tels que  $|t' - t| \leq \delta$  et  $|f(t') - f(t)| \geq \epsilon$  est patch-fermé, puisque  $f$  est patch-continue, et non vide par hypothèse. La famille des  $F_\delta$ ,  $\delta > 0$ , est filtrante. Si son intersection était vide, puisque  $[a, b]$  est compact, l'un des  $F_\delta$  serait vide, contradiction. Donc  $\bigcap_{\delta > 0} F_\delta$  est non vide : il existe  $t, t' \in [a, b]$  tels que  $|t' - t| \leq \delta$  pour tout  $\delta > 0$  (donc  $t = t'$ ) et  $|f(t') - f(t)| \geq \epsilon$ , ce qui est impossible.

Soit donc  $f$  une fonction patch-continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $G$  une fonction croissante de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , et montrons que  $f$  est  $G$ -intégrable. Fixons  $\epsilon > 0$ . Si  $G(a) = G(b)$ , toutes les sommes de Darboux-Stieltjes sont nulles, donc  $f$  est trivialement  $G$ -intégrable, et de  $G$ -intégrale nulle. Sinon, puisque  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tous  $t, t' \in [a, b]$  tels que  $|t' - t| \leq \delta$ , on a  $|f(t') - f(t)| < \epsilon / (G(b) - G(a))$ . Pour toute subdivision pointée  $D = a_0, t_1, a_1, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  de diamètre au plus  $\delta$ , parce que  $G$  est croissante,

$$\sum_{i=1}^n \min_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t)(G(a_i) - G(a_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^n \max_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t)(G(a_i) - G(a_{i-1}))$$

Comme  $f$  est patch-continue sur les (patch-)compacts  $[a_{i-1}, a_i]$ , les minima et maxima impliqués dans les sommes ci-dessus sont atteints. La somme de gauche est donc une somme de Darboux-Stieltjes sur une subdivision pointée  $D^-[f]$ , qui ne dépend que de  $D$  et de  $f$ , et de même la somme de droite est une somme de Darboux-Stieltjes sur une subdivision pointée  $D^+[f]$  ne dépendant que de  $D$  et de  $f$ . Toutes ces subdivisions pointées sont de diamètre au plus  $\delta$ , donc  $\max_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t) - \min_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t) < \epsilon / (G(b) - G(a))$ . En sommant, on obtient :

$$\int_{D^+[f]} f(t)dG(t) - \int_{D^-[f]} f(t)dG(t) < \epsilon$$

Comme  $\epsilon$  est arbitraire, on en déduit que  $\sup_D \int_{D^-[f]} f(t)dG(t) = \inf_D \int_{D^+[f]} f(t)dG(t)$ , et la valeur commune est nécessairement la  $G$ -intégrale de  $f$ . En particulier, la fonction patch-continue  $f$  est intégrable par rapport à la fonction croissante  $G$ .

L'intégrale de Riemann-Stieltjes est de nouveau linéaire en la fonction intégrée : si  $f$  et  $g$  sont  $G$ -intégrables, alors  $\lambda f(t) + \mu g(t)$  aussi, et  $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dG(t) = \lambda \int_a^b f(t)dG(t) + \mu \int_a^b g(t)dG(t)$ . Elle est aussi linéaire en la distribution : si  $f$  est  $G$ -intégrable et  $G'$ -intégrable, alors  $f$  est aussi  $(\lambda G + \mu G')$ -intégrable, et  $\int_a^b f(t)d(\lambda G(t) + \mu G'(t)) = \lambda \int_a^b f(t)dG(t) + \mu \int_a^b f(t)dG'(t)$ . Lorsque  $G$  est croissante, la  $G$ -intégrale est elle-même croissante en la fonction intégrée : si  $f \leq g$  alors  $\int_a^b f(t)dG(t) \leq \int_a^b g(t)dG(t)$ . (L'hypothèse  $G$  croissante est nécessaire.) La  $G$ -intégrale vérifie de nouveau la **relation de Chasles** : si  $f$  est  $G$ -intégrable sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$ , alors elle est intégrable sur  $[a, c]$  est  $\int_a^c f(t)dG(t) = \int_a^b f(t)dG(t) + \int_b^c f(t)dG(t)$ .

Appelons **point de discontinuité** d'une fonction  $G$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  un élément  $t$  de  $[a, b]$  tel qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que dans tout voisinage ouvert  $U$  de  $t$  dans  $[a, b]$ , il existe toujours deux points  $t_1, t_2$  avec  $|f(t_2) - f(t_1)| \geq \epsilon$ . Alors, si  $f$  est  $G$  intégrable sur  $[a, b]$  et  $f'$  ne diffère de

$f$  qu'en un nombre fini de points, dont aucun n'est un point de discontinuité de  $G$ , alors  $f'$  est aussi  $G$ -intégrable sur  $[a, b]$  et  $\int_a^b f'(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ .

L'intégrale de Riemann-Stieltjes dispose, comme celle de Riemann, d'un **théorème de Scott-continuité** des intégrales de fonctions décroissantes, à condition que  $G$  soit croissante et patch-continue : soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de fonctions décroissantes sur  $[a, b]$ , de borne supérieure  $f$ , et  $G$  une fonction croissante patch-continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\int_a^b f(t)dG(t) = \sup_{i \in I} \int_a^b f_i(t)dG(t)$ . L'argument est le même que pour l'intégrale de Riemann, en utilisant le fait que  $\int_a^b f(t)dG(t) = \sup_{D^-} \int_{D^-} f(t)dG(t)$ ,  $D^-$  parcourant les subdivisions droites. On dispose de nouveau d'un **théorème de Scott-cocontinuité** des intégrales de Riemann-Stieltjes de fonctions décroissantes par rapport aux distributions croissantes patch-continues : soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de fonctions décroissantes sur  $[a, b]$ , de borne inférieure  $f$ , et  $G$  une fonction croissante patch-continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\int_a^b f(t)dG(t) = \inf_{i \in I} \int_a^b f_i(t)dG(t)$ .

Notons le **théorème des valeurs intermédiaires** : pour toute fonction patch-continue  $g$  de  $[\alpha, \beta]$  vers  $\mathbb{R}$ , telle que  $a = \inf_{s \in [\alpha, \beta]} g(s)$  et  $b = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} g(s)$ , alors pour tout réel  $t \in [a, b]$  il existe un réel  $s$  tel que  $g(s) = t$ . Ceci se démontre aisément par un procédé dichotomique.

On a pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes une formule de **changement de variables** peu contraignante et relativement transparente : si  $f$  est  $G$ -intégrable sur  $[a, b]$ ,  $g$  est une fonction croissante patch-continue de  $[\alpha, \beta]$  vers  $[a, b]$ , avec  $a = g(\alpha)$  et  $b = g(\beta)$  ; alors  $f \circ g$  est  $(G \circ g)$ -intégrable et :

$$\int_a^b f(t)dG(t) = \int_\alpha^\beta f(g(t))dG(g(t))$$

En effet, pour tout  $\epsilon > 0$ , par hypothèse, pour toute subdivision pointée  $D$  de  $[a, b]$  assez grande dans l'ordre  $\trianglelefteq$ , on a  $|\int_D f(t)dG(t) - I| < \epsilon$ , où  $I = \int_a^b f(t)dG(t)$ . Soit  $D_0 = a_0, t_1, a_1, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  une telle subdivision pointée. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver une subdivision pointée  $\Delta_0 = \alpha_0, s_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, s_n, \alpha_n$  de  $[\alpha, \beta]$  telle que  $a_i = g(\alpha_i)$  et  $t_i = g(s_i)$  pour tout  $i$ . Pour toute subdivision pointée  $\Delta = \alpha'_0, s'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m-1}, s'_m, \alpha'_m$  de  $[\alpha, \beta]$  telle que  $\Delta_0 \trianglelefteq \Delta$ , l'image  $D = g(\Delta)$  de  $\Delta$ , qui est obtenue à partir de  $g(\alpha'_0), g(s'_0), g(\alpha'_1), \dots, g(\alpha'_{m-1}), g(s'_m), g(\alpha'_m)$  en éliminant les sous-intervalles vides (c'est-à-dire  $g(s'_i)$  et  $g(\alpha'_i)$  si  $g(\alpha'_i) = g(\alpha'_{i-1})$ ) est telle que  $D_0 \trianglelefteq D$ , et  $\int_\Delta f(g(s))dG(g(s)) = \int_D f(t)dG(t)$ , donc  $|\int_\Delta f(g(s))dG(g(s)) - I| < \epsilon$ , et l'on conclut.

Finalement, on a une formule d'**intégration par parties**, de nouveau très générale et peu contraignante. Si  $f$  est  $g$ -intégrable sur  $[a, b]$ , alors  $g$  est  $f$ -intégrable sur  $[a, b]$ , et :

$$\int_a^b f(t)dg(t) = [fg]_{t=a}^b - \int_a^b g(t)df(t)$$

En effet, pour tout  $\epsilon > 0$  par hypothèse il existe une subdivision pointée  $D_0 = a_0, t_1, a_1, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$  de  $[a, b]$  telle que  $|\int_{D_0} f(t)dg(t) - I| < \epsilon$  pour toute  $D$  telle que  $D_0 \trianglelefteq D$ , où  $I = \int_a^b f(t)dg(t)$ . Quitte à remplacer  $D_0$  par un tel  $D$ , on peut supposer  $n \geq 2$ ,  $t_1 = a_0 = a$  et  $t_n = a_n = b$ . On peut de plus supposer  $t_i < t_{i+1}$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Soit  $D'_0$  la subdivision pointée  $t_1, a_1, t_2, \dots, t_{n-1}, a_{n-1}, t_n$  de  $[a, b]$ . Pour toute subdivision pointée  $D'$  telle que  $D'_0 \trianglelefteq D'$ ,

disons  $D' = t'_1, a'_1, t'_2, \dots, t'_{p-1}, a'_{p-1}, t'_p$ , on note que la subdivision pointée  $D$  obtenue à partir de  $a = a'_0, t'_1, a'_1, t'_2, \dots, t'_{p-1}, a'_{p-1}, t'_p, a'_p = b$  en éliminant les sous-intervalles vides (c'est-à-dire les  $t'_i, a'_i$  tels que  $a'_i = a'_{i-1}$ ) est telle que  $D_0 \trianglelefteq D$ , et  $\int_D f(t)dg(t) = \sum_{i=1}^p f(t'_i)(g(a'_i) - g(a'_{i-1})) = \sum_{i=1}^{p-1} g(a'_i)(f(t'_i) - f(t'_{i+1})) - g(a'_0)f(t'_1) + g(a'_p)f(t'_p) = [fg]_{t=a}^b - \int_{D'} g(t)df(t)$ . Donc  $|\int_{D'} g(t)f(t) - ([fg]_{t=a}^b - I)| < \epsilon$ , et l'on conclut.

On déduit de la formule d'intégration par parties, au passage, que toute fonction croissante  $f$  est  $G$ -intégrable dès que  $G$  est patch-continue, puisque  $G$  est  $f$ -intégrable. Par linéarité de la  $G$ -intégrale en  $f$ , toute fonction décroissante  $f$  est aussi  $G$ -intégrable lorsque  $G$  est patch-continue.

### 2.10.4 Intégrales impropres

Les **intégrales impropres**  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  et  $\int_{-\infty}^b f(t)dt$  sont définies respectivement comme les limites de  $\int_a^b f(t)dt$  lorsque  $b$  tend vers  $+\infty$ , et lorsque  $a$  tend vers  $-\infty$  respectivement, lorsque ces limites existent. De même pour les intégrales à la Stieltjes  $\int_a^{+\infty} f(t)dG(t)$  et  $\int_{-\infty}^b f(t)dG(t)$ . Nous ne les utiliserons que dans le cas où  $f$  vaut 0 en-dehors d'un intervalle donné, auquel cas ces intégrales impropres ne sont que des notations pour des intégrales ordinaires, dont nous ne souhaitons pas préciser les bornes.

Tous les théorèmes et formules portant sur les intégrales sur  $[a, b]$  s'adapteront alors aux intégrales impropres de fonctions nulles en-dehors d'un intervalle fermé, sans plus de considération.

## 2.11 Tribus

Une caractéristique fondamentale d'une topologie est qu'elle n'est en général pas close par complémentaire : si  $U$  est un ouvert de  $X$ ,  $X \setminus U$  n'est en général pas ouvert. Un espace topologique tel que tout ouvert a un complémentaire ouvert, ou de façon équivalente tel que tout ouvert soit fermé, est appelé **extrêmement discontinu** (Bourbaki, 1971, Exercice 21, I.11, p. I.118). Le préordre de spécialisation d'une telle topologie est alors une relation d'équivalence, et tout ouvert, c'est-à-dire aussi tout fermé, est juste une union quelconque de classes d'équivalence. Un exemple de topologie extrêmement discontinue sur  $X$  est donné par l'ensemble de toutes les parties de  $X$  ; c'est la seule topologie extrêmement discontinue qui soit aussi  $T_0$ .

Une **tribu** sur un ensemble  $E$  est une famille  $\mathcal{T}$  de parties de  $E$  qui est stable par complémentaire (si  $A \in \mathcal{T}$  alors  $E \setminus A \in \mathcal{T}$ ), contient le vide, et est stable par unions dénombrables (si  $A_i \in \mathcal{T}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , alors  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$ ).  $\mathcal{T}$  contient alors aussi  $E$  tout entier, et est aussi stable par intersections dénombrables. Notons qu'il ne serait pas raisonnable de demander que  $\mathcal{T}$  soit stable par unions quelconques, sinon  $\mathcal{T}$  serait une topologie extrêmement discontinue, qui est un objet mathématique beaucoup moins intéressant.

Étant donné une famille  $(B_i)_{i \in I}$  de parties de  $E$ , il existe toujours une plus petite tribu la contenant : c'est la tribu **engendrée** par la famille  $(B_i)_{i \in I}$ . En particulier, si  $X$  est un espace topologique, la tribu engendrée par les ouverts de  $X$  s'appelle la **tribu borélienne** sur  $X$ . La tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$ , par exemple, sur  $\mathbb{R}$ , contient non seulement les ouverts de Scott  $]r, +\infty[$ , mais aussi tous les intervalles, ouverts ou fermés, et plus. L'utilisation de l'axiome du choix

permet cependant de montrer que la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$  ne coïncide pas avec l'ensemble de toutes les parties de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire qu'il existe des ensembles non boréliens sur  $\mathbb{R}$ .

Un ensemble  $E$  muni d'une tribu  $\mathcal{T}$  sera appelé un **espace mesurable**, et les éléments de  $\mathcal{T}$  seront simplement appelés les **mesurables** de  $E$ . Une fonction  $f$  d'un espace mesurable  $E$  vers un espace mesurable  $F$  est dite **mesurable** si et seulement si  $f^{-1}(A)$  est un mesurable de  $E$  pour tout mesurable  $A$  de  $F$ .

Une **mesure** sur un espace mesurable  $E$  est une fonction  $\mu$  de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\mu(\emptyset) = 0$ , et  $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$  pour toute famille dénombrable  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de mesurables de  $E$  deux à deux disjoints : on dit que  $\mu$  est  **$\sigma$ -additive**. Par ceci, nous entendons que la somme de droite converge, et vaut la quantité de gauche. En particulier,  $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=0}^n \mu(A_i)$  pour toute famille finie  $(A_i)_{i=1}^n$  de mesurables deux à deux disjoints. Cette notion est usuellement appelée mesure *bornée* dans la littérature. Toutes nos mesures, de mêmes que toutes nos capacités, seront bornés, et nous ferons l'économie de l'adjectif.

De façon analogue, nous appellerons **pré-tribu** toute famille de parties de  $E$  stable par complémentaires et unions finies. Il existe encore une pré-tribu **engendrée** par une famille quelconque de parties. Un ensemble muni d'une pré-tribu sera appelé **pré-mesurable**, et les éléments de la tribu seront les **pré-mesurables**. Une **pré-mesure** sur un ensemble  $E$  muni d'une pré-tribu  $\mathcal{T}$  est une fonction  $\mu$  de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=0}^n \mu(A_i)$  pour toute famille finie  $(A_i)_{i=1}^n$  de pré-mesurables deux à deux disjoints : on dit que  $\mu$  est **additive**.

On notera que toute pré-mesure vérifie des propriétés similaires aux valuations. Toute pré-mesure  $\mu$  est stricte ( $\mu(\emptyset) = 0$ ), monotone (si  $A \subseteq B$  alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$  : en effet,  $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$ ), modulaire, et vérifie le principe d'inclusion-exclusion :

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \quad (2.6)$$

où cette fois-ci les  $A_i$  sont des éléments de la pré-tribu, et non des ouverts.

Le **théorème de Smiley-Horn-Tarski**, parfois aussi appelé théorème de Pettis, énonce que pour toute valuation  $\nu$  sur un espace topologique  $X$ , il existe une unique pré-mesure  $\nu^{\%}$  sur la pré-tribu engendrée par la topologie de  $X$  et qui étende  $\nu$ . Les éléments de la pré-tribu engendrée par la topologie de  $X$  sont les unions finies disjointes de **croissants**  $U \setminus V$ , où  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $X$ . On a alors  $\nu^{\%}(U \setminus V) = \nu(U) - \nu(U \cap V) = \nu(U \cup V) - \nu(V)$ .

Le problème de l'existence d'extensions de valuations continues à des mesures sur un espace topologique  $X$  donné est plus complexe (Keimel and Lawson, 2005). C'est le cas des valuations quasi-simples lorsque  $X$  est un espace à convergence monotone (Keimel and Lawson, 2005, théorème 4.4), de toutes les valuations continues lorsque  $X$  est un espace sobre localement compact (Keimel and Lawson, 2005, théorème 5.3).

On peut adapter les définitions des capacités, des jeux, etc., aux espaces mesurables. De façon explicite, soit  $E$  un ensemble mesurable. On appelle *capacité* sur  $E$  toute fonction  $\mu$  qui à tout mesurable  $A$  de  $E$  associe un élément de  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , et telle que  $\mu(\emptyset) = 0$ . Un *jeu*  $\mu$  sur  $E$  est une capacité *monotone*, c'est-à-dire telle que  $A \subseteq B$  implique  $\mu(A) \leq \mu(B)$  pour tous mesurables  $A, B$  de  $E$ . Une capacité  $\mu$  sur  $E$  est :

- *convexe* ssi  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A) + \mu(B)$  pour tous mesurables  $A, B$  de  $E$  ;
- *concave* ssi  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$  pour tous mesurables  $A, B$  de  $E$  ;
- $\omega$ -**continu** ssi  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  pour toute famille croissante  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$  de mesurables de  $E$ .
- $\omega$ -**cocontinu** ssi  $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  pour toute famille décroissante  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$  de mesurables de  $E$ .

On notera que, comme toute tribu est stable par complémentaires, la  $\omega$ -continuité est équivalente à la  $\omega$ -cocontinuité dès que  $\mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu(X)$  pour tout mesurable  $A$  de  $X$  ; en particulier dès que  $\mu$  est additive. (Ceci ne serait pas tout à fait le cas pour le cas de mesures non bornées.)

Une capacité convexe et concave est la même chose qu'une pré-mesure. Il est aussi facile de voir que les mesures sont exactement les pré-mesures  $\omega$ -continues.

Une capacité est  $\sigma$ -**sous-additive** si et seulement si, pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ . Pour toute capacité  $\mu$  sur  $E$  muni de la tribu formé de toutes les parties de  $E$ , on dit que le sous-ensemble  $A$  est  $\mu$ -**mesurable** si et seulement si  $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$  pour toute partie  $B$  de  $E$ . Le **théorème de Carathéodory** énonce que la famille des parties  $\mu$ -mesurables de  $E$  est une pré-tribu  $\mathcal{M}(\mu)$ , et que  $\mu$  définit une pré-mesure sur  $E$  muni de la pré-tribu  $\mathcal{M}(\mu)$ . Si de plus,  $\mu$  est  $\sigma$ -sous-additive, alors  $\mathcal{M}(\mu)$  est une tribu et  $\mu$  définit une mesure sur  $E$  muni de la tribu  $\mathcal{M}(\mu)$ .

Nous terminons par un théorème important. Une famille de parties de  $X$  contenant  $X$ , stable par unions de suites croissantes, et par différences  $E \setminus E'$  avec  $E' \subseteq E$ , est appelée un **système de Dynkin**. Un  $\pi$ -**système** est une famille  $\mathcal{C}$  de parties de  $X$  contenant  $X$  et stable par intersections binaires : si  $E, E' \in \mathcal{C}$  alors  $E \cap E' \in \mathcal{C}$ . Le **théorème de classe monotone** exprime que si  $\mathcal{C}$  est un  $\pi$ -système,  $\mathcal{D}$  est un système de Dynkin, et  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ , alors la tribu engendrée par  $\mathcal{C}$  est incluse dans  $\mathcal{D}$ .

En voici une démonstration. Notons  $D(\mathcal{A})$  le système de Dynkin engendré par une famille  $\mathcal{A}$  de parties de  $X$ . Soit  $\mathcal{C}$  un  $\pi$ -système sur  $X$ , on commence par montrer que  $D(\mathcal{C})$  est un  $\pi$ -système. Pour ceci, introduisons, pour tout  $A \in D(\mathcal{C})$ , l'ensemble  $\Gamma(A)$  des  $B \in D(\mathcal{C})$  tels que  $A \cap B$  soit dans  $D(\mathcal{C})$ . Clairement  $\mathcal{C} \subseteq \Gamma(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{C}$ , puisque  $\mathcal{C}$  est un  $\pi$ -système. Il est aussi facile de voir que  $\Gamma(A)$  est un système de Dynkin pour tout  $A \in D(\mathcal{C})$ . Donc  $D(\mathcal{C}) \subseteq \Gamma(A)$ , pour tout  $A \in \mathcal{C}$ . On en déduit que  $\Gamma(A)$  contient  $\mathcal{C}$  non seulement lorsque  $A$  est dans  $\mathcal{C}$ , mais pour n'importe quel  $A \in D(\mathcal{C})$  : pour tout  $B \in \mathcal{C}$ , il suffit de montrer que  $B \cap A \in D(\mathcal{C})$ , mais c'est évident puisque  $A \in D(\mathcal{C}) \subseteq \Gamma(B)$ . Comme  $\Gamma(A)$  est un système de Dynkin contenant  $\mathcal{C}$ , il contient  $D(\mathcal{C})$ , et ce pour tout  $A \in D(\mathcal{C})$ . Donc pour tout  $B \in D(\mathcal{C})$ ,  $B \in \Gamma(A)$ , c'est-à-dire  $A \cap B \in D(\mathcal{C})$  :  $D(\mathcal{C})$  est un  $\pi$ -système. Ceci étant démontré, il est facile de voir que tout système de Dynkin qui est aussi un  $\pi$ -système est une tribu, et que toute tribu est un système de Dynkin ; donc, si  $\mathcal{C}$  est un  $\pi$ -système,  $D(\mathcal{C})$  coïncide avec la tribu engendrée par  $\mathcal{C}$ , et l'on conclut.



# Chapitre 3

## Quelques compléments

Le but de ce chapitre est d'introduire quelques résultats qui, sans être réellement nouveaux, ne sont pas non plus nécessairement connus. Certains sont des résultats faciles, d'autres sont des variantes de résultats publiés. Nous aurons besoin de tous à un moment où à un autre dans la suite de ce document.

### 3.1 Cohérence des cpos continus

Nous avons vu en section 2.3 que tout cpo continu était sobre et localement compact. Nous nous demandons ici dans quel cas un cpo continu est *stablement* localement compact. Il faut et il suffit qu'il soit cohérent, c'est-à-dire que l'intersection de deux compacts soit toujours compacte.

**Lemme 3.1.1** *Dans un ensemble ordonné continu  $X$ , l'intérieur de  $\uparrow E$  est  $\hat{\uparrow}E$ , pour toute partie  $E$  de  $X$ .*

*Démonstration.*  $\hat{\uparrow}E$  est un ouvert inclus dans  $\uparrow E$ , donc  $\hat{\uparrow}E$  est inclus dans l'intérieur de  $\uparrow E$ . Réciproquement, si  $U$  est un ouvert inclus dans  $\uparrow E$ ,  $U = \bigcup_{x \in U} \uparrow x$ . Pour tout  $x \in U$ , comme  $x \in \uparrow E$ ,  $\uparrow x \subseteq \hat{\uparrow}E$  puisque dès que  $z \leq x \ll y$ ,  $z \ll y$ . Donc  $U \subseteq \hat{\uparrow}E$ .  $\square$

**Lemme 3.1.2** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu, de base  $B$ . Une partie  $A$  de  $X$  est compacte si et seulement si, pour toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $B$  telle que  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \uparrow x_i$ , il existe une sous-famille finie  $J$  de  $I$  telle que  $A \subseteq \bigcup_{i \in J} \uparrow x_i$ .*

*Démonstration.* C'est le lemme d'Alexander, appliqué au fait que les ouverts  $\uparrow x$ ,  $x \in B$ , forment une base de la topologie de  $X$ .  $\square$

**Lemme 3.1.3** *Si  $X$  est un espace topologique bien filtrant, l'intersection de toute famille filtrante de compacts saturés est un compact saturé.*

*Démonstration.* Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de compacts saturés. Soit  $(U_j)_{j \in J}$  un recouvrement ouvert de  $\bigcap_{i \in I} Q_i$ . Comme  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ .

Comme  $Q_i$  est compact, on peut donc extraire un sous-recouvrement fini  $(U_j)_{j \in K}$  de  $Q_i$ , donc de  $\bigcap_{i \in I} Q_i$ . La propriété de saturation est immédiate.  $\square$

Rappelons qu'un compact finitaire est un ensemble de la forme  $\uparrow E$  pour  $E$  fini, c'est-à-dire de la forme  $\uparrow x_1 \cup \dots \cup \uparrow x_n$ .

Le lemme suivant est une très légère généralisation de Jung (1998, lemme 4.10, (ii)).

**Lemme 3.1.4** *Soit  $X$  un cpo continu, et  $B$  une base de  $X$ . Un compact finitaire  $\uparrow E$  est à support dans  $B$  si et seulement si  $E \subseteq B$ .*

*Les compacts saturés  $Q$  de  $X$  sont exactement les intersections de familles filtrantes  $(\uparrow E_i)_{i \in I}$  de compacts finitaires à support dans  $B$ . On peut de plus demander que  $Q \subseteq \overset{\circ}{\uparrow} E_i$  pour tout  $i \in I$ .*

*Démonstration.* Soit  $Q$  un compact saturé de  $X$ . Comme  $Q$  est saturé,  $Q$  s'écrit sous la forme d'une intersection  $\bigcap_{i \in I} U_i$  d'une famille filtrante  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts, à savoir la famille de tous les ouverts contenant  $Q$ . Comme  $X$  est un cpo continu et  $B$  en est une base,  $U_i = \bigcup_{x \in B \cap U_i} \uparrow x$ . Comme  $Q \subseteq U_i$  et  $Q$  est compact, on peut extraire un ensemble fini  $E_i \subseteq B \cap U_i$  tel que  $Q \subseteq \bigcup_{x \in E_i} \uparrow x = \uparrow E_i$ . Or  $\overset{\circ}{\uparrow} E_i$  est l'intérieur du compact finitaire  $\uparrow E_i$  par le lemme 3.1.1. En

particulier,  $Q \subseteq \overset{\circ}{\uparrow} E_i \subseteq \uparrow E_i$ .

Montrons que la famille  $(\uparrow E_i)_{i \in I}$  est filtrante. Elle est non vide car  $I$  est non vide. Soient

$i, j \in I$ .  $\uparrow E_i \cap \uparrow E_j$  contient l'ouvert  $\overset{\circ}{\uparrow} E_i \cap \overset{\circ}{\uparrow} E_j$ . Comme ce dernier contient  $Q$ , il s'écrit  $U_k$  pour un certain  $k \in I$ . Mais  $\uparrow E_k \subseteq U_k$  par construction, donc  $(\uparrow E_i)_{i \in I}$  est filtrante.

Clairement, tous les  $\uparrow E_i$  sont à support dans  $B$ , et comme  $Q \subseteq \uparrow E_i \subseteq U_i$  pour tout  $i$ , en prenant l'intersection de chaque côté, on obtient  $Q \subseteq \bigcap_{i \in I} \uparrow E_i \subseteq Q$ , donc  $Q = \bigcap_{i \in I} \uparrow E_i$ .

Réciproquement, toute intersection de compacts finitaires est un compact saturé, par le lemme 3.1.3, puisque  $X$ , en tant que cpo continu est sobre, donc bien filtrant.  $\square$

On en déduit immédiatement un résultat dû à Lawson (1988, section V).

**Corollaire 3.1.5** *Soit  $X$  un cpo continu. Alors la topologie basse sur  $X$  coïncide avec la topologie cocompacte :  $X_\ell = X^d$ .*

*Démonstration.* Rappelons que les fermés de  $X_\ell$  sont les intersections d'unions finies de parties de la forme  $\uparrow x$ ,  $x \in X$ . Ce sont donc les intersections de compacts finitaires. Tout compact finitaire étant compact saturé, tout fermé de  $X_\ell$  est donc une intersection de compacts saturés, donc un fermé de  $X^d$ . Réciproquement, tout fermé de  $X^d$  est une intersection d'unions finies de compacts saturés, donc, par le lemme 3.1.4, une intersection d'unions finies de compacts finitaires (en faisant distribuer les unions finies sur les intersections filtrantes), donc un fermé de  $X_\ell$ .  $\square$

**Proposition 3.1.6** *Soit  $X$  un cpo continu. Supposons qu'il existe une base  $B$  de  $X$  telle que, pour tous  $x, y \in B$ ,  $\uparrow x \cap \uparrow y$  est compact. Alors  $X$  est cohérent, et donc stablement localement compact.*

*Démonstration.* Soient  $Q, Q'$  deux compacts saturés. En utilisant le lemme 3.1.4, écrivons les sous forme d'intersections filtrantes de compacts finitaires à support dans  $B$  :  $Q = \bigcap_{i \in I} \uparrow E_i$ ,  $Q' = \bigcap_{j \in J} \uparrow E'_j$ . Alors  $Q \cap Q' = \bigcap_{i \in I, j \in J} (\uparrow E_i \cap \uparrow E'_j)$ . La famille  $(\uparrow E_i \cap \uparrow E'_j)_{i \in I, j \in J}$  est dirigée, et n'est formée que de compacts saturés. Par le lemme 3.1.3, et comme  $X$  est continu, donc sobre, donc bien filtrant,  $Q \cap Q'$  est donc un compact saturé. On en conclut que  $X$  est cohérent.  $\square$

La condition de la proposition 3.1.6 est nécessaire : si  $X$  est cohérent, l'intersection des deux compacts finitaires  $\uparrow x$  et  $\uparrow y$  est nécessairement compacte. On peut en général donner une caractérisation ne faisant intervenir que la notion d'ordre et la relation  $\ll$  : voir Jung (1998, lemme 4.18), mais nous ne l'utiliserons pas.

**Corollaire 3.1.7** *Soit  $X$  un cpo continu. Supposons que  $X$  a une base  $B$  ayant la*

*Propriété M : Pour tous  $x, y \in B$ , il existe un nombre fini d'éléments  $x_1, \dots, x_n \in B$  tels que, pour tous  $z \in X$ , on a  $x \leq z$  et  $y \leq z$  si et seulement s'il existe  $i, 1 \leq i \leq n$ , tel que  $x_i \leq z$*

*Alors  $X$  est cohérent, et donc stablement localement compact.*

*Démonstration.* La condition demandée est juste que  $\uparrow x \cap \uparrow y$  soit un compact finitaire  $\uparrow \{x_1, \dots, x_n\}$ .  $\square$

Notons que ceci est en particulier le cas lorsque  $X$  est un domaine, puisqu'alors  $x$  et  $y$  n'ont soit aucun majorant soit exactement une borne supérieure :

**Corollaire 3.1.8** *Tout domaine est cohérent, et stablement localement compact.*

Dans le cas particulier où tout couple d'éléments a une borne supérieure, on dit que l'espace est un *sup-demi-treillis*, auquel cas on peut prendre  $n = 1$  et  $x_1$  la borne supérieure de  $x$  et de  $y$ .

La propriété M est due à Jung (1998, définition, p.38), où elle est donnée non pour une base  $B$  quelconque, mais pour  $X$  tout entier. Dans ce cas, rappelons que nous disons que  $X$  est un espace finitairement cohérent.

Pour qu'additionnellement  $X$  soit stablement compact, il suffit qu'il soit compact. Ceci arrive dans un cas simple fréquent :

**Lemme 3.1.9** *Soit  $X$  un ensemble ordonné ayant un plus petit élément  $\perp$ . Alors  $X$  est compact.*

*Démonstration.* Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts telle que  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ . Alors  $\perp \in \bigcup_{i \in I} U_i$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $\perp \in U_i$ . Mais alors  $U_i = X$  puisque  $U_i$  est clos par le haut.  $\square$

## 3.2 Rétractions

La notion de rétract d'un espace topologique nous sera utile à plusieurs reprises. La définition est la suivante.

**Définition 3.2.1 (Rétract)** *Un rétract d'un espace topologique  $Y$  est un espace topologique  $Z$  tel qu'il existe deux fonctions continues  $s : Z \rightarrow Y$  (la section) et  $r : Y \rightarrow Z$  (la rétraction) avec  $r(s(z)) = z$  pour tout  $z \in Z$ .*

Il s'ensuit que  $r$  est surjective et  $s$  est injective, en particulier. D'après Jung (2004), le résultat suivant est dû à Jimmie Lawson.

**Lemme 3.2.2 (Lawson)** *Soit  $Z$  un rétract d'un espace topologique  $Y$ . Si  $Y$  est sobre, alors  $Z$  aussi. Si  $Y$  est localement compact, alors  $Z$  aussi. Si  $Y$  est cohérent, alors  $Z$  aussi. Si  $Y$  est compact, alors  $Z$  aussi.*

*En particulier, si  $Y$  est stablement localement compact, resp. stablement compact, alors  $Z$  aussi.*

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $Z$  est sobre, en supposant  $Y$  sobre. Ceci demande plusieurs étapes.

D'abord, on remarque que comme  $r$  et  $s$  sont continues, elles sont en particulier croissantes pour les préordres de spécialisation  $\leq$  des topologies des espaces respectifs. L'injection  $s$  est alors un plongement de préordres : si  $s(z) \leq s(x)$ , alors  $z = r(s(z)) \leq r(s(x)) = x$ .

Comme  $r \circ s$  est l'identité sur  $Z$ ,  $s(A) \subseteq r^{-1}(A)$  pour toute partie  $A$  de  $Z$ . Soit  $F$  un fermé irréductible de  $Z$ . Soit  $F' = cl(s(F))$ , un fermé de  $Y$ . Puisque  $s(F) \subseteq r^{-1}(F)$  et que  $r^{-1}(F)$  est fermé,  $F' \subseteq r^{-1}(F)$ .

Remarquons que  $s^{-1}(F') = F$ . En effet,  $s^{-1}(F') \supseteq s^{-1}(s(F)) \supseteq F$  par construction, et  $s^{-1}(F') \subseteq s^{-1}(r^{-1}(F)) = (r \circ s)^{-1}(F) = F$ .

Montrons maintenant que  $F'$  est un fermé irréductible. Pour ceci, supposons  $F' \subseteq F'_1 \cup F'_2$ , avec  $F'_1$  et  $F'_2$  deux fermés de  $Y$ . On a alors  $F = s^{-1}(F') \subseteq s^{-1}(F'_1 \cup F'_2) = s^{-1}(F'_1) \cup s^{-1}(F'_2)$ , donc  $F \subseteq s^{-1}(F'_1)$  ou  $F \subseteq s^{-1}(F'_2)$  puisque  $F$  est irréductible. Dans le premier cas,  $s(F) \subseteq F'_1$ , donc  $F' = cl(s(F)) \subseteq F'_1$ ; dans le deuxième cas, de même,  $F' \subseteq F'_2$ . Donc  $F'$  est bien un fermé irréductible de  $Y$ .

Comme  $Y$  est sobre,  $F'$  est l'adhérence  $cl(\{y\}) = \downarrow y$  d'un unique point  $y$ . Or  $F' = cl(s(F)) = cl(\bigcup_{x \in F} \{s(x)\}) \supseteq \bigcup_{x \in F} cl(\{s(x)\}) = \bigcup_{x \in F} \downarrow s(x)$ . En particulier, il existe  $x \in F$  tel que  $y \in \downarrow s(x)$ , c'est-à-dire tel que  $y \leq s(x)$ . Comme  $s(x) \in s(F) \subseteq F'$ , et que  $y$  est le plus grand élément de  $F'$ , on a  $y = s(x)$ . Maintenant  $F = s^{-1}(F') = s^{-1}(\downarrow s(x)) = \{z \in Z \mid s(z) \leq s(x)\} = \downarrow x$  puisque  $s$  est un plongement de préordres. Autrement dit,  $F = cl(\{x\})$ . Le point  $x$  est de plus unique, car si on avait  $F = \downarrow x = \downarrow x'$ , alors on aurait  $x \leq x'$  et  $x' \leq x$ , donc  $s(x) \leq s(x')$  et  $s(x') \leq s(x)$ , donc  $s(x) = s(x')$  puisque le préordre  $\leq$  est un ordre sur  $Y$ , donc  $x = x'$  puisque  $s$  est injective. Donc  $F$  est l'adhérence d'un unique point  $x$ .

On en conclut que  $Z$  est sobre.

Montrons que  $Z$  est localement compact dès que  $Y$  est localement compact. Soit  $z \in U$ , où  $U$  est un ouvert de  $Z$ . Alors  $s(z) \in s(U) \subseteq r^{-1}(U)$ . Comme  $Y$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q$  de  $Y$  tel que  $s(z) \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq r^{-1}(U)$ . Alors  $z \in s^{-1}(\overset{\circ}{Q})$ , et  $s^{-1}(\overset{\circ}{Q})$  est ouvert puisque  $s$  est continue. De plus,  $s^{-1}(\overset{\circ}{Q}) \subseteq r(Q)$  puisque tout  $x \in s^{-1}(\overset{\circ}{Q})$  est tel que  $s(x) \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q$ , donc  $x = r(s(x)) \in r(Q)$ ; et  $r(Q)$  est compact puisque  $Q$  est compact et  $r$  est continue. Finalement,  $r(Q) \subseteq r(r^{-1}(U)) = U$  puisque  $r$  est surjective.

Montrons que  $Z$  est cohérent dès que  $Y$  l'est. Soient  $Q_1, Q_2$  deux compacts saturés de  $Z$ . Alors  $s(Q_1)$  et  $s(Q_2)$  sont deux compacts de  $Y$ , donc  $\uparrow s(Q_1)$  et  $\uparrow s(Q_2)$  sont deux compacts saturés de  $Y$ . Puisque  $Y$  est cohérent,  $\uparrow s(Q_1) \cap \uparrow s(Q_2)$  est un compact saturé de  $Y$ . Comme  $r$  est continue,  $r(\uparrow s(Q_1) \cap \uparrow s(Q_2))$  est compacte dans  $Z$ . Montrons que ce compact est exactement  $Q_1 \cap Q_2$ . Si  $x \in Q_1 \cap Q_2$ ,  $x = r(s(x))$  est dans  $r(\uparrow s(Q_1) \cap \uparrow s(Q_2))$  puisque  $s(x)$  est à la fois dans  $s(Q_1) \subseteq \uparrow s(Q_1)$  et dans  $s(Q_2) \subseteq \uparrow s(Q_2)$ . Réciproquement, si  $x \in r(\uparrow s(Q_1) \cap \uparrow s(Q_2))$ , écrivons  $x = r(y)$ , avec  $s(x_1) \leq y$ ,  $x_1 \in Q_1$ , et  $s(x_2) \leq y$ ,  $x_2 \in Q_2$ . Alors  $x_1 = r(s(x_1)) \leq r(y) = x$  donc  $x \in Q_1$  et similairement  $x \in Q_2$ , donc  $x \in Q_1 \cap Q_2$ . Puisque  $r(\uparrow s(Q_1) \cap \uparrow s(Q_2))$  égale  $Q_1 \cap Q_2$ , et que le premier est compact,  $Q_1 \cap Q_2$  est aussi compact dans  $Z$ . De plus, il est clairement saturé dans  $Z$ . Donc  $Z$  est cohérent.

Finalement, comme  $r$  est continue, si  $Y$  est compact alors  $r(Y)$  est compact. Or  $r$  est surjective, donc  $Z = r(Y)$ . Donc  $Z$  est compact.

Le reste du lemme est conséquence immédiate des résultats ci-dessus.  $\square$

Les rétractions transportent aussi les structures de cpo continu et de domaine. Pour ceci, nous aurons besoin du lemme suivant (Heckmann, 1990, théorème 6.7.9). En termes savants, ceci est une propriété dite de super-compacité locale : si l'on remplaçait le compact finitaire  $\uparrow x'$  par un compact arbitraire dans la propriété ci-dessous, on retrouverait la propriété de compacité locale.

**Lemme 3.2.3** *Soit  $X$  un ensemble ordonné.  $X$  est continu (resp., de base  $B$ ) si et seulement si, pour tout  $x \in X$  et tout ouvert de Scott  $O$  de  $X$ , il existe un point  $x' \in X$  (resp.,  $x' \in B$ ) et un ouvert de Scott  $O'$  tels que  $x \in O' \subseteq \uparrow x' \subseteq O$ .*

*Démonstration.* Si  $X$  est continu, il existe  $x' \in O$  (resp.,  $x' \in O \cap B$ ) tel que  $x \in \uparrow x'$ , et  $\uparrow x' \subseteq \uparrow x'$ . Réciproquement, fixons  $x \in X$ , et supposons : (\*) pour tout ouvert de Scott  $O$  de  $X$ , il existe un point  $x' \in X$  (resp.,  $x' \in B$ ) et un ouvert de Scott  $O'$  tels que  $x \in O' \subseteq \uparrow x' \subseteq O$ . Posons  $D = \{u \in X \text{ (resp., } u \in B) \mid \exists O_u \in \mathcal{O}(X) \cdot x \in O_u \subseteq \uparrow u\}$ . Alors  $D$  est non vide, par (\*), en prenant  $O = X$ ,  $u = x'$ ,  $O_u = O'$ .  $D$  est dirigé : si  $u, v \in D$ , alors  $x \in O_u \cap O_v$  donc par (\*) il existe  $x' \in X$  (resp.,  $x' \in B$ ) et  $O'$  tels que  $x \in O' \subseteq \uparrow x' \subseteq O_u \cap O_v$ ; de  $\uparrow x' \subseteq O_u \cap O_v \subseteq \uparrow u \cap \uparrow v$ , on déduit  $u, v \leq x'$ , et de  $x \in O' \subseteq \uparrow x'$  on déduit  $x' \in D$ . Tout élément  $u$  de  $D$  est bien au-dessous de  $x$  : si  $(y_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée de borne supérieure  $y$  telle que  $x \leq y$ , alors comme  $x \in O_u$  et  $O_u$  est ouvert de Scott, il existe  $i \in I$  tel que  $y_i \in O_u$ ; et comme  $O_u \subseteq \uparrow u$ ,  $u \leq y_i$  : donc  $u \ll x$ .

Il ne reste qu'à montrer que  $D$  admet  $x$  comme borne supérieure. Clairement tout  $u \in D$  est inférieur ou égal à  $x$ , donc  $x$  est un majorant de  $D$ . Pour établir que  $x = \sup D$ , fixons un autre majorant  $y$  de  $D$  et montrons que  $x \leq y$ . Ceci revient à démontrer que tout ouvert  $O$  qui contient  $x$  contient  $y$ . Soit donc  $O$  un ouvert contenant  $x$ . Par (\*) il existe  $x' \in X$  (resp.,  $x' \in B$ ) et  $O'$  tels que  $x \in O' \subseteq \uparrow x' \subseteq O$ . Par définition,  $x' \in D$ . Comme  $y$  majore  $D$ ,  $x' \leq y$ . D'autre part,  $x' \in O$  puisque  $\uparrow x' \subseteq O$ . Comme  $O$  est clos par le haut et  $x' \leq y$ ,  $y \in O$ .  $\square$

**Lemme 3.2.4** *Soit  $Z$  un ensemble ordonné, rétract d'un ensemble ordonné (resp., cpo) continu  $Y$  de base  $B$ . Alors  $Z$  est un ensemble ordonné (resp., cpo) continu, de base l'image  $r(B)$  de  $B$  par la rétraction  $r : Y \rightarrow Z$ .*

*Démonstration.* Notons  $\ll_Z$  la relation “bien au-dessous” sur  $Z$ ,  $\ll_Y$  celle de  $Y$ . De même pour les notations  $\downarrow_Z E$  et  $\downarrow_Y E$ . On commence par observer que : (\*) si  $y \ll_Y s(z)$  alors  $r(y) \ll_Z z$ . En effet, soit  $(z_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de borne supérieure  $\sup_{i \in I} z_i$  telle que  $z \leq \sup_{i \in I} z_i$ . Comme  $s$  est continue,  $s(z) \leq \sup_{i \in I} s(z_i)$ , donc puisque  $y \ll_Y s(z)$ , il existe  $i \in I$  tel que  $y \leq s(z_i)$ . En appliquant  $r$  de chaque côté, puisque  $r \circ s$  est l’identité,  $r(y) \leq z_i$ . Donc  $r(y) \ll_Z z$ .

Pour montrer que  $Z$  est un ensemble ordonné continu, fixons  $z \in Z$  et  $O$  un ouvert de  $Z$  contenant  $z$ . Comme  $z = r(s(z))$ ,  $s(z) \in r^{-1}(O)$ . Puisque  $Y$  est continu de base  $B$ , et que  $r^{-1}(O)$  est (Scott-)ouvert, il existe  $y \in r^{-1}(O) \cap B$  tel que  $y \ll_Y s(z)$ . Par (\*),  $r(y) \ll_Z z$ . Or  $r(y) \in O$  par construction, donc  $z \in \uparrow r(y) \subseteq \uparrow r(y) \subseteq O$ , et  $r(y) \in r(B)$  : on conclut par le lemme 3.2.3.

Si en plus  $Y$  est un cpo, alors toute famille dirigée  $(z_i)_{i \in I}$  admet  $r(\sup_{i \in I} s(z_i))$  comme borne supérieure, donc  $Z$  est un cpo.  $\square$

Ceci est bien connu. Le lemme 3.2.4 établit, comme cas particulier, que tout rétract d’un cpo algébrique est un cpo continu. En général, on peut même démontrer que les cpos continus sont exactement les rétracts de cpos algébriques, voir par exemple Heckmann (1990, proposition 7.5.3). Partant d’un cpo continu  $X$ , on construit le cpo  $\mathcal{J}(X)$  des familles dirigées closes par le bas de  $X$ , ordonnées par l’inclusion.  $\mathcal{J}(X)$  est toujours un cpo algébrique, même si  $X$  n’est qu’un ensemble ordonné. Lorsque  $X$  est un cpo continu, la section  $s : X \rightarrow \mathcal{J}(X)$  envoie  $x$  vers  $\downarrow x$  et la rétraction  $r : \mathcal{J}(X) \rightarrow X$  envoie  $D$  vers  $\sup D$ .

**Lemme 3.2.5** *Tout rétract d’un domaine est un domaine.*

*Démonstration.* Soit  $s : Z \rightarrow Y$  la section et  $r : Y \rightarrow Z$  la rétraction. On a  $r(s(z)) = z$  pour tout  $z \in Z$ . Supposons que  $Y$  soit un domaine. Puisque  $Y$  est un cpo continu, par le lemme 3.2.4,  $Z$  est un cpo continu. Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux éléments de  $Z$ . Si  $z_1$  et  $z_2$  ont un majorant, disons  $z$ , alors  $s(z_1)$  et  $s(z_2)$  admettent  $s(z)$  comme majorant dans  $Y$ . Comme  $Y$  est un domaine,  $s(z_1)$  et  $s(z_2)$  ont une borne supérieure. Posons  $z_0 = r(\sup(s(z_1), s(z_2)))$ . Clairement,  $z_0$  est un majorant de  $z_1$  et de  $z_2$  : on a  $z_1 = r(s(z_1)) \leq r(\sup(s(z_1), s(z_2))) = z_0$ , et de même  $z_2 \leq z_0$ . Montrons que c’est le plus grand des majorants. Pour tout  $z \in Z$ , si  $z_1, z_2 \leq z$  alors  $s(z_1), s(z_2) \leq s(z)$ , donc  $\sup(s(z_1), s(z_2)) \leq s(z)$ , d’où  $z_0 \leq r(s(z)) = z$ .  $\square$

### 3.3 Le cpo $\mathcal{Q}(X)$ des choix démoniaques

Rappelons que  $\mathcal{Q}(X)$  est l’ensemble des compacts saturés non vides de  $X$ , ordonné par l’inclusion inverse  $\supseteq$ .

**Lemme 3.3.1** *Si  $X$  est bien filtrant, alors  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo. La borne supérieure de la famille dirigée (pour  $\supseteq$ , c’est-à-dire filtrante pour l’inclusion)  $(Q_i)_{i \in I}$  est  $\bigcap_{i \in I} Q_i$ .*

*Si de plus  $X$  est localement compact, alors  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo continu, et  $Q \ll Q'$  si et seulement si  $\overset{\circ}{Q} \supseteq Q'$ .*

*Démonstration.* Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d’éléments de  $\mathcal{Q}(X)$ . Comme l’ordre de  $\mathcal{Q}(X)$  est l’inclusion inverse  $\supseteq$ ,  $(Q_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de compacts saturés non vides. Par le

lemme 3.1.3,  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  est un compact saturé. Si de plus  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  était vide, alors  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq \emptyset$ , donc il existerait  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq \emptyset$ , puisque  $X$  est bien filtrant ; mais c'est impossible. Donc  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  est un compact saturé non vide, qui est clairement la borne supérieure (pour  $\supseteq$ ) de la famille  $(Q_i)_{i \in I}$ .

Supposons  $Q \ll Q'$ . En particulier,  $Q \supseteq Q'$ . Comme  $Q'$  est saturé,  $Q'$  est l'intersection de la famille filtrante  $(U_i)_{i \in I}$  de tous les ouverts contenant  $Q'$ . Pour chaque  $i \in I$ ,  $Q' \subseteq U_i$ , donc comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q_i$  tel que  $Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}_i \subseteq Q_i \subseteq U_i$ . En particulier,  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i = Q'$ .

Montrons que la famille  $(Q_i)_{i \in I}$  est filtrante. Clairement, elle est non vide. Soient  $Q_i, Q_j$ , deux compacts de cette famille. Alors  $\overset{\circ}{Q}_i \cap \overset{\circ}{Q}_j$  est un ouvert contenant  $Q'$  et contenu dans  $Q_i$  et  $Q_j$ . Il existe donc un indice  $k \in I$  tel que  $U_k = \overset{\circ}{Q}_i \cap \overset{\circ}{Q}_j$ , et donc  $Q_k \subseteq U_k \subseteq Q_i \cap Q_j$ .

Comme  $(Q_i)_{i \in I}$  est filtrante et  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq Q'$ , autrement dit comme  $(Q_i)_{i \in I}$  est dirigée pour  $\supseteq$  et que sa borne supérieure est au-dessus de  $Q'$ , on déduit de  $Q \ll Q'$  qu'il existe  $i \in I$  tel que  $Q \supseteq Q_i$ . Comme  $Q_i \supseteq \overset{\circ}{Q}_i \supseteq Q'$ ,  $Q$  contient un ouvert,  $\overset{\circ}{Q}_i$ , qui contient  $Q'$ , donc  $\overset{\circ}{Q} \supseteq Q'$ .

Réciproquement, supposons que  $\overset{\circ}{Q} \supseteq Q'$ . Pour toute famille filtrante  $(Q_i)_{i \in I}$  de compacts saturés telle que  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq Q'$ , on a  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq \overset{\circ}{Q}$ . Comme  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq \overset{\circ}{Q} \subseteq Q$ , donc  $Q \ll Q'$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{Q}(X)$  est continu. Soit  $Q$  un compact saturé non vide de  $X$ . On doit montrer que la famille des compacts  $(Q_i)_{i \in I}$  tels que  $\overset{\circ}{Q}_i \supseteq Q$  est dirigée et que  $\bigcap_{i \in I} Q_i = Q$ . Or, supposons que  $\overset{\circ}{Q}_i \supseteq Q$  et  $\overset{\circ}{Q}_j \supseteq Q$ . Comme  $\overset{\circ}{Q}_i \cap \overset{\circ}{Q}_j$  est ouvert et contient  $Q$ , et que d'autre part  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q'$  tel que  $Q \subseteq \overset{\circ}{Q}' \subseteq Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}_i \cap \overset{\circ}{Q}_j$ , donc  $Q'$  apparaît comme un certain  $Q_k$ ,  $k \in I$ . En particulier,  $Q_k \subseteq \overset{\circ}{Q}_i \cap \overset{\circ}{Q}_j \subseteq Q_i \cap Q_j$ , et la famille est donc dirigée.

Ensuite, comme  $Q$  est saturé,  $Q$  est l'intersection des ouverts  $U$  contenant  $Q$ . Par compacité locale, chacun de ces ouverts  $U$  contient un compact saturé  $Q'$  tel que  $Q \subseteq \overset{\circ}{Q}' \subseteq Q' \subseteq U$ , c'est-à-dire l'un des  $Q_i$ ,  $i \in I$ . Donc  $\bigcap_{i \in I} Q_i = Q$ .  $\square$

**Proposition 3.3.2** *Si  $X$  est stablement localement compact,  $\mathcal{Q}(X)$  est un domaine ;  $Q \ll Q'$  si et seulement si  $\overset{\circ}{Q} \supseteq Q'$ . De plus, pour tout ensemble fini  $A$  non vide de  $\mathcal{Q}(X)$ , soit  $A$  n'a aucun majorant, soit  $A$  a une borne supérieure  $\bigcap_{Q \in A} Q$ . En tant qu'espace topologique,  $\mathcal{Q}(X)$  est stablement localement compact.*

*Si  $X$  est stablement compact,  $\mathcal{Q}(X)$  a un plus petit élément et est stablement compact.*

*Démonstration.* La première partie de la proposition est par le lemme 3.3.1. Comme  $X$  est cohérent, l'intersection  $Q \cap Q'$  de deux compacts saturés  $Q$  et  $Q'$  est un compact saturé. En particulier, pour toute partie  $A$  finie non vide de  $\mathcal{Q}(X)$ , soit  $\bigcap_{Q \in A} Q$  est vide et alors  $A$  n'a aucun majorant, soit  $\bigcap_{Q \in A} Q$  est non vide et c'est nécessairement la borne supérieure de  $A$  dans  $\mathcal{Q}(X)$ .

Par le corollaire 3.1.7 (avec  $n = 0$  ou  $n = 1$  selon le cas),  $\mathcal{Q}(X)$  est cohérent, donc stablement localement compact.

Si de plus  $X$  est stablement compact, donc compact, alors  $\mathcal{Q}(X)$  admet  $X$  comme plus petit élément, et est donc compact par le lemme 3.1.9.  $\square$

Dans le cas des cpo continus, on peut préciser une base de  $\mathcal{Q}(X)$ .

**Lemme 3.3.3** *Soit  $X$  un cpo continu, de base  $B$ .  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo continu, et une base en est donnée par les compacts finitaires  $\uparrow E$  non vides avec  $E$  fini inclus dans  $B$ .*

*Démonstration.* Comme  $X$  est un cpo continu, il est sobre donc bien filtrant, et aussi localement compact. Par le lemme 3.3.1,  $\mathcal{Q}(X)$  est donc un cpo continu. Fixons  $Q \in \mathcal{Q}(X)$ .  $Q$  est la borne supérieure, c'est-à-dire l'intersection, de la famille filtrante  $(Q_i)_{i \in I}$  de tous les compacts saturés non vides  $Q_i$  tels que  $Q_i \ll Q$ . Par le lemme 3.1.4,  $Q_i$  est l'intersection d'une famille filtrante  $(\uparrow E_{ij})_{j \in J_i}$  de compacts finitaires à support dans  $B$ . Puisque  $Q_i$  est non vide, tous les  $E_{ij}$  sont aussi non vides.

Montrons que la famille des  $(\uparrow E_{ij})_{i \in I, j \in J_i}$  est filtrante. Étant donnés  $\uparrow E_{ij}$  et  $\uparrow E_{i'j'}$ , il existe  $i'' \in I$  tel que  $Q_i, Q_{i'} \supseteq Q_{i''}$ . Comme  $Q_{i''} \ll Q$ , par la propriété d'interpolation, il existe  $i''' \in I$  tel que  $Q_{i''} \ll Q_{i'''} \ll Q$ . Donc il existe  $j''' \in J_{i'''}$  tel que  $\uparrow E_{i'''j'''} \subseteq Q_{i''} \subseteq \uparrow E_{ij}, \uparrow E_{i'j'}$ .

Finalement, il est clair que  $Q$  est l'intersection de la famille  $(\uparrow E_{ij})_{i \in I, j \in J_i} : \bigcap_{i \in I, j \in J_i} \uparrow E_{ij} = \bigcap_{i \in I} Q_i = Q$ .  $\square$

On peut aussi s'intéresser à la structure des ouverts de  $\mathcal{Q}(X)$ .

**Lemme 3.3.4** *Soit  $X$  un espace bien filtrant. Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,*

$$\square U = \{Q \text{ compact saturé non vide de } X \mid Q \subseteq U\}$$

*est un ouvert de Scott de  $\mathcal{Q}(X)$ .*

*Démonstration.*  $\square U$  est clairement clos par le haut (c'est-à-dire que si  $Q' \subseteq Q$  et  $Q \in \square U$ , alors  $Q' \in \square U$ ). Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de  $\mathcal{Q}(X)$ , c'est-à-dire une famille filtrante de compacts saturés non vides. Supposons qu'elle ait une borne supérieure, autrement dit que  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  soit non vide, et que cette borne supérieure  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  soit dans  $\square U$ . Alors, par définition,  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$ , donc comme  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq U$ , c'est-à-dire  $Q_i \in \square U$ .  $\square$

**Lemme 3.3.5** *Pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$ ,  $\square(U \cap V) = \square U \cap \square V$ . Si  $U \subseteq V$  alors  $\square U \subseteq \square V$ . Pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$ ,  $(\square U_i)_{i \in I}$  est dirigée et  $\square \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \square U_i$ .*

*Démonstration.*  $\square(U \cap V) = \{Q \in \mathcal{Q}(X) \mid Q \subseteq U \cap V\} = \{Q \in \mathcal{Q}(X) \mid Q \subseteq U \text{ et } Q \subseteq V\} = \square U \cap \square V$ . Si  $U \subseteq V$ , alors tout  $Q \in \square U$  est tel que  $Q \subseteq U \subseteq V$ , donc  $Q \in \square V$ . Donc si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée d'ouverts de  $X$ ,  $(\square U_i)_{i \in I}$  est dirigée aussi. De plus,  $\square U_i \subseteq \square \bigcup_{i \in I} U_i$  pour tout  $i \in I$ , donc  $\bigcup_{i \in I} \square U_i \subseteq \square \bigcup_{i \in I} U_i$ . Réciproquement, si  $Q \in \square \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $Q \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ . Comme  $Q$  est compact, il existe  $i \in I$  tel que  $Q \subseteq U_i$ , donc  $Q \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ , c'est-à-dire  $Q \in \square \bigcup_{i \in I} U_i$ .  $\square$

**Corollaire 3.3.6** *Si  $X$  est bien filtrant et localement compact, les ouverts de  $\mathcal{Q}(X)$  sont les unions d'ouverts de la forme  $\square U$ ,  $U$  ouvert de  $X$ . Plus précisément, tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{Q}(X)$  s'écrit  $\bigcup_{Q \in \mathcal{U}} \square \overset{\circ}{Q}$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{Q}(X)$  est continu, tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{Q}(X)$  est l'union des  $\uparrow Q$ ,  $Q \in \mathcal{U}$ . Or  $\uparrow Q = \{Q' \in \mathcal{Q}(X) \mid Q \ll Q'\} = \{Q' \in \mathcal{Q}(X) \mid \overset{\circ}{Q} \supseteq Q'\} = \square \overset{\circ}{Q}$ , en utilisant le lemme 3.3.1. Réciproquement, toute union d'ouverts est ouverte, et  $\square U$  est ouvert par le lemme 3.3.4.  $\square$

On aura aussi besoin des résultats suivants, repris de Tix (1995, lemme 3.3) :

**Lemme 3.3.7** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact.*

*Si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux compacts saturés, et  $W$  est un ouvert contenant  $Q_1 \cap Q_2$ , alors il existe deux ouverts  $V_1$  et  $V_2$  tels que  $Q_1 \subseteq V_1$ ,  $Q_2 \subseteq V_2$ , et  $V_1 \cap V_2 \subseteq W$ .*

*Démonstration.* Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  deux compacts saturés, et  $W$  un ouvert contenant  $Q_1 \cap Q_2$ . Si  $Q_1$  ou  $Q_2$  est vide, le lemme est évident. Sinon, par la proposition 3.3.2,  $Q_1$  est la borne supérieure  $\bigcap_{i \in I_1} Q_{1i}$  d'une famille filtrante (dirigée pour  $\supseteq$ ) de compacts saturés  $Q_{1i} \ll Q_1$ , et de même  $Q_2$  est la borne supérieure  $\bigcap_{j \in I_2} Q_{2j}$  d'une famille filtrante (dirigée pour  $\supseteq$ ) de compacts saturés  $Q_{2j} \ll Q_2$ . Donc  $Q_1 \cap Q_2 = \bigcap_{i \in I_1, j \in I_2} Q_{1i} \cap Q_{2j}$ , qui est une intersection d'une famille filtrante de compacts saturés, puisque  $X$  est cohérent. Comme  $Q_1 \cap Q_2 \subseteq W$  et que  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I_1$  et  $j \in I_2$  avec  $Q_{1i} \cap Q_{2j} \subseteq W$ . Il suffit maintenant de prendre  $V_1 = \overset{\circ}{Q}_{1i}$  et  $V_2 = \overset{\circ}{Q}_{2j}$  : comme  $Q_{1i} \ll Q_1$ ,  $Q_1 \subseteq V_1$ , et de même  $Q_2 \subseteq V_2$ .  $\square$

**Lemme 3.3.8** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact.*

*Si  $Q$  est un compact saturé et  $V_1$  et  $V_2$  sont deux ouverts tels que  $Q \subseteq V_1 \cup V_2$ , alors il existe deux compacts saturés  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que  $Q_1 \subseteq V_1$ ,  $Q_2 \subseteq V_2$ , et  $Q \subseteq Q_1 \cup Q_2$ .*

*Démonstration.* Soit  $Q$  un compact saturé et  $V_1$  et  $V_2$  deux ouverts tels que  $Q \subseteq V_1 \cup V_2$ . Comme  $X$  est localement compact, pour tout point  $x \in V_1$ , il existe un compact saturé  $Q_{1x}$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q}_{1x} \subseteq Q_{1x} \subseteq V_1$  ; de même, pour tout  $y \in V_2$ , il existe un compact saturé  $Q_{2y}$  tel que  $y \in \overset{\circ}{Q}_{2y} \subseteq Q_{2y} \subseteq V_2$ . En particulier,  $V_1 = \bigcup_{x \in V_1} \overset{\circ}{Q}_{1x}$ , et  $V_2 = \bigcup_{y \in V_2} \overset{\circ}{Q}_{2y}$ . Comme  $Q \subseteq V_1 \cup V_2$  et  $Q$  est compact, il existe une famille finie  $I_1$  de points de  $V_1$  et une famille finie  $I_2$  de points de  $V_2$  telles que  $Q \subseteq \bigcup_{x \in I_1} \overset{\circ}{Q}_{1x} \cup \bigcup_{y \in I_2} \overset{\circ}{Q}_{2y}$ . Posons  $Q_1 = \bigcup_{x \in I_1} Q_{1x}$  et  $Q_2 = \bigcup_{y \in I_2} Q_{2y}$ . Alors  $Q_1 \subseteq V_1$ ,  $Q_2 \subseteq V_2$ , et  $Q \subseteq Q_1 \cup Q_2$ .  $\square$

### 3.4 Les espaces $\mathcal{H}(X)$ , $\mathcal{H}^{op}(X)$ , $\mathcal{H}_u(X)$ de choix angéliques, et $\mathcal{O}(X)$

Soit  $X$  un espace topologique, et  $\leq$  son préordre de spécialisation. À l'opposé de la section 3.3, définissons  $\mathcal{H}(X)$  comme étant l'ensemble des fermés non vides de  $X$ , ordonné par

inclusion  $\subseteq$ . C'est l'espace de Hoare de  $X$ , qui est souvent utilisé pour modéliser le non-déterminisme angélique, là où l'espace de Smyth  $\mathcal{Q}(X)$  est utilisé pour modéliser le non-déterminisme démoniaque.

**Lemme 3.4.1** *L'ensemble  $\mathcal{H}_\emptyset(X)$  des fermés de  $X$ , muni de l'ordre d'inclusion  $\subseteq$ , est un treillis complet. En particulier,  $\mathcal{H}(X)$  est un cpo. La borne supérieure  $\sup A$  d'une famille (resp. non vide)  $A$  de fermés (resp. non vides) est l'adhérence  $cl(\bigcup A)$  de l'union des fermés de  $A$ .*

*Démonstration.* Comme toute intersection de fermés est fermée, toute famille  $A$  de fermés de  $X$  a pour borne inférieure  $\bigcap A$ . Comme  $\mathcal{H}_\emptyset(X)$  a toutes les bornes inférieures, il a aussi toutes les bornes supérieures, et  $\sup A = \inf\{F \in \mathcal{H}(X) \mid F \text{ majore } A\} = \bigcap_{F \text{ fermé, } F \supseteq \bigcup A} F = cl(\bigcup A)$ . On en déduit immédiatement que  $\mathcal{H}(X)$  a toutes les bornes supérieures de familles non vides, en particulier celles qui sont dirigées.  $\square$

Remarquons que tout fermé est clos par le bas : si  $y \in F$  et  $x \leq y$ ,  $x \in F$ . En effet, sinon  $x$  serait dans l'ouvert  $X \setminus F$ , donc  $y$  aussi par définition du préordre de spécialisation  $\leq$ . De plus, tout fermé  $F$  s'écrit  $\bigcup_{x \in F} \downarrow x$  : l'inclusion  $\subseteq$  est triviale, et l'inclusion  $\supseteq$  vient du fait que  $F$  est clos par le bas. En particulier, tout fermé s'écrit comme l'union dirigée des  $\downarrow E$ , où  $E$  parcourt les parties finies de  $F$ . De plus, pour tout point  $x$ ,  $\downarrow x = cl(\{x\})$ , donc  $\downarrow E = cl(E)$  pour toute partie finie  $E$ . On en déduit :

**Lemme 3.4.2** *Pour  $F, F' \in \mathcal{H}(X)$ , si  $F \ll F'$ , alors il existe une partie finie  $E$  de  $X$  telle que  $F \subseteq cl(E) \subseteq F'$ . En particulier, tout élément fini de  $\mathcal{H}(X)$  est de la forme  $cl(E)$ , avec  $E$  fini.*

*Démonstration.* Supposons  $F \ll F'$ . Pour toute partie finie  $E$  de  $F'$ ,  $cl(E)$  est inclus dans  $F'$  puisque  $F'$  est fermé. De plus,  $F' = \bigcup_{E \text{ fini } \subseteq F'} cl(E)$ , et l'union est dirigée. Comme  $F \ll F'$ , il existe  $E$  fini inclus dans  $F'$  tel que  $F \subseteq cl(E)$ . De plus,  $cl(E) \subseteq F'$  car  $E \subseteq F'$  et  $F'$  est fermé. Si  $F$  est fini,  $F \ll F$ , donc  $F \subseteq cl(E) \subseteq F$ , et l'on conclut.  $\square$

Notons que,  $E$  étant fini,  $\downarrow E$  est lui-même fermé, donc  $cl(E) \subseteq \downarrow E$ . Comme  $cl(E)$  est clos par le bas,  $\downarrow E = cl(E)$ , donc  $cl(E) = \downarrow E$ . L'égalité entre l'adhérence et la clôture par le bas n'est pas en général valide pour des ensembles infinis.

**Lemme 3.4.3** *Soit  $X$  un espace topologique.  $\mathcal{H}(X)$  est stablement localement finitaire.*

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{H}(X)$  est un cpo, il est finitairement sobre et localement finitaire.  $\mathcal{H}(X)$  est finitairement cohérent, en fait toute paire d'éléments  $F, F'$  de  $\mathcal{H}(X)$  a une unique borne supérieure  $F \cup F'$ .  $\square$

Il est difficile d'en dire vraiment davantage sur la topologie de  $\mathcal{H}(X)$  en général. On sait que, si  $X$  est un cpo algébrique, alors  $\mathcal{H}(X)$  aussi ; et que, si  $X$  est un cpo continu, alors  $\mathcal{H}(X)$  aussi (Heckmann, 1990, section 18.6). Redémontrons-le ici.

**Lemme 3.4.4** *Soit  $X$  un cpo continu, de base  $B$ . Pour tous  $F, F' \in \mathcal{H}(X)$ ,  $F \ll F'$  si et seulement s'il existe une partie finie  $E$  de  $B$  telle que  $F \subseteq \downarrow E$  et  $E \subseteq \downarrow F'$ .*

*Démonstration.* Soit  $F'$  un fermé quelconque non vide de  $X$ . On commence par montrer que :

$$F' = cl \left( \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \right) \quad (3.1)$$

Si  $E \subseteq \downarrow F'$ , alors pour tout  $x \in \downarrow E$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x \leq y$ , et il existe  $z \in F'$  tel que  $y \ll z$ ; donc  $x \ll z$ , donc  $x \leq z$ , et comme  $z \in F'$  et  $F'$  est clos par le bas,  $x \in F'$ . On en déduit que si  $E \subseteq \downarrow F'$  alors  $\downarrow E \subseteq F'$ . Donc  $\bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \subseteq F'$ , et comme

$F'$  est fermé,  $cl \left( \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \right) \subseteq F'$ . Réciproquement, pour tout  $x \in F'$ , montrons

que  $x \in cl \left( \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \right)$ . Pour tout  $y \ll x$ , avec  $y \in B$ , on remarque d'abord que

$y \in \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E$  : il suffit de prendre  $E = \{y\}$ . Donc  $y \in cl \left( \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \right)$ .

Or, puisque  $X$  est continu de base  $B$ ,  $x$  est borne supérieure de la famille dirigée formée de ces  $y \ll x, y \in B$ . Comme  $cl \left( \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \right)$  est Scott-fermé, cette borne supérieure  $x$  est

encore dans  $cl \left( \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \right)$ . Donc  $F' \subseteq cl \left( \bigcup_{E \subseteq B, E \text{ fini } \subseteq \downarrow F'} \downarrow E \right)$ .

On déduit de (3.1) que si  $F \ll F'$ , alors il existe une partie finie  $E$  de  $B$  telle que  $F \subseteq \downarrow E$  et  $E \subseteq \downarrow F'$ .

Réciproquement, supposons que  $F \subseteq \downarrow E$  et  $E \subseteq \downarrow F'$ , où  $E \subseteq B$  est fini, et montrons que  $F \ll F'$ . Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de fermés non vides de  $X$  tels que  $F' \subseteq cl \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right)$ . Puisque  $E \subseteq \downarrow F'$ , pour tout  $x \in E$  il existe  $y \in F'$ , donc dans  $cl \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right)$ , tel que  $x \ll y$ . Autrement dit,  $y$  est dans l'ouvert  $\uparrow x$ . Fixons  $x \in E$ . Nous venons de montrer que  $cl \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right) \cap \uparrow x$  n'était pas vide. De façon équivalente,  $cl \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right)$  n'est pas inclus dans le complémentaire  $X \setminus \uparrow x$  de  $\uparrow x$ . Or  $X \setminus \uparrow x$  est par construction fermé, donc  $cl \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right) \subseteq X \setminus \uparrow x$  si et seulement si  $\bigcup_{i \in I} F_i \subseteq X \setminus \uparrow x$ . On en déduit que  $\bigcup_{i \in I} F_i$  n'est pas inclus dans  $X \setminus \uparrow x$ , donc qu'il existe un élément  $y_x$  tel que  $x \ll y_x$  et  $y_x \in \bigcup_{i \in I} F_i$ . Il existe donc un indice  $i_x \in I$  tel que  $y_x \in F_{i_x}$ . Comme  $(F_i)_{i \in I}$  est dirigée, il existe un indice  $i \in I$  tel que  $F_i$  contienne tous les  $F_{i_x}, x \in E$ . Pour cet  $i$ , on a donc : pour tout  $x \in E$ , il existe un élément  $y_x$  tel que  $x \ll y_x$  et  $y_x \in F_i$ , autrement dit  $E \subseteq \downarrow F_i$ . Comme  $F_i$  est fermé, donc clos par le bas,  $\downarrow F_i \subseteq \downarrow F_i = F_i$ , donc  $E \subseteq F_i$ , et aussi  $\downarrow E \subseteq F_i$ . Comme  $F \subseteq \downarrow E, F \subseteq F_i$ . Donc  $F \ll F'$ .  $\square$

**Proposition 3.4.5** Soit  $X$  un cpo continu, de base  $B$ . Alors  $\mathcal{H}(X)$  est un cpo continu, et même un domaine. Une base en est donnée par les fermés finitaires non vides. Un fermé finitaire est n'importe quel ensemble de la forme  $\downarrow E$ , où  $E$  est une partie finie de  $B$ . De plus,  $\downarrow E \ll F'$  si et seulement si  $E \subseteq \downarrow F'$ .

*Démonstration.* La formule (3.1) exprime tout fermé  $F'$  comme borne supérieure de la famille  $D_{F'}$  des  $\downarrow E, E$  partie finie de  $B, E \subseteq \downarrow F'$ . Par le lemme 3.4.4 appliqué à  $F = \downarrow E$ , tout

élément de  $D_{F'}$  est bien au-dessous de  $F'$ . De plus,  $D_{F'}$  est dirigée : d'abord,  $D_{F'}$  est non vide, car contenant  $\downarrow \emptyset$ ; ensuite, si  $E$  et  $E'$  sont deux parties finies de  $B$  telles que  $E \subseteq \downarrow F'$  et  $E' \subseteq \downarrow F'$ , alors clairement  $E \cup E'$  est encore une partie finie de  $B$ , et  $E \cup E' \subseteq \downarrow F'$ . Donc  $\mathcal{H}(X)$  est un cpo continu. C'est un domaine, car c'est un sup-demi-treillis, la borne supérieure de  $F_1$  et  $F_2$  étant  $F_1 \cup F_2$ .

Finalement, si  $E \subseteq \downarrow F'$  alors  $\downarrow E \ll F'$ , par le lemme 3.4.4 appliqué à  $F = \downarrow E$ . Réciproquement, si  $\downarrow E \ll F'$ , alors il existe une partie finie  $E'$  de  $B$  telle que  $\downarrow E \subseteq \downarrow E'$  et  $E' \subseteq \downarrow F'$ . Ceci implique que, pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in E'$  tel que  $x \leq y$ , et il existe  $z \in F'$  tel que  $y \ll z$ . Donc pour tout  $x \in E$ , il existe  $z \in F'$  tel que  $x \ll z$ , autrement dit  $E \subseteq \downarrow F'$ .  $\square$

Lorsque  $X$  est stablement compact, on pourrait penser étudier  $\mathcal{H}(X)$  via le dual de de Groot  $X^d$  de  $X$ . En effet, les fermés non vides de  $X$  sont exactement les compacts saturés non vides de  $X^d$ . Cependant, en conclure que  $\mathcal{H}(X) = \mathcal{Q}(X^d)$  serait une erreur : l'ordre est en effet inversé entre  $\mathcal{H}(X)$  et  $\mathcal{Q}(X^d)$ , puisque  $F$  est plus petit ou égal à  $F'$  dans  $\mathcal{H}(X)$  si et seulement si  $F \subseteq F'$ , et dans  $\mathcal{Q}(X^d)$  si et seulement si  $F \supseteq F'$ .

Donnons un nom à cet espace :

**Définition 3.4.6**  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est l'ensemble des fermés non vides de  $X$ , ordonnés par inclusion inverse.

Rappelons la notion d'opposé d'un ensemble ordonné (section 2.2).

**Fait 3.4.7**  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est l'opposé de  $\mathcal{H}(X)$ . L'application  $F \mapsto X \setminus F$  est un isomorphisme d'ordre de  $\mathcal{H}^{op}(X)$  sur l'ensemble ordonné  $\mathcal{O}^*(X)$  des ouverts  $U \neq X$  muni de l'ordre d'inclusion  $\subseteq$ .

Lorsque  $X$  est stablement compact,  $\mathcal{H}^{op}(X) = \mathcal{Q}(X^d)$ .

Étudions en passant l'ensemble  $\mathcal{O}(X)$  des ouverts de  $X$  muni de l'ordre d'inclusion  $\subseteq$ . La définition suivante est d'Escardó and Heckmann (2002, section 5). Rappelons que l'on note  $\Subset$  la relation "bien au-dessous" entre ouverts de  $X$  ordonnés par  $\subseteq$ . De façon équivalente, pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$ ,  $U \Subset V$  si et seulement si de tout recouvrement ouvert de  $V$  on peut extraire un sous-recouvrement fini de  $U$ .

**Définition 3.4.8 (Espace localement relativement compact)** L'espace  $X$  est localement relativement compact si et seulement si, pour tout  $x \in X$  et tout ouvert  $V$  contenant  $x$ , il existe un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $x \in U \Subset V$ .

$X$  est relativement compact si et seulement si  $X$  est compact et localement relativement compact.

On observe :

**Lemme 3.4.9** Si  $(V_i)_{i=1}^n$  est une famille finie d'ouverts tels que  $V_i \Subset U$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , alors  $\bigcup_{i=1}^n V_i \Subset U$ .

*Démonstration.* Soit  $(U_j)_{j \in J}$  un recouvrement ouvert de  $U$ . Pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini  $(U_j)_{j \in J_i}$  de  $V_i$ . Alors  $(U_j)_{j \in \bigcup_{i=1}^n J_i}$  est un sous-recouvrement fini de  $\bigcup_{i=1}^n V_i$ , donc  $\bigcup_{i=1}^n V_i \Subset U$ .  $\square$

Le lemme suivant est bien connu.

**Lemme 3.4.10**  $\Subset$  est la relation “bien au-dessous” sur  $\mathcal{O}(X)$ .  $\mathcal{O}(X)$  est un treillis complet, qui est un cpo continu si et seulement si  $X$  est localement relativement compact.

*Démonstration.* Supposons  $U \Subset V$ , et soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d’ouverts telle que  $V \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ . Comme  $U \Subset V$ , il existe une sous-famille finie  $J \subseteq I$  telle que  $U \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ . Comme  $(U_i)_{i \in I}$  est dirigée, il existe  $i \in I$  tel que  $U \subseteq U_i$ . Donc  $U$  est bien au-dessous de  $V$ .

Réciproquement, soit  $\mathbb{P}_{\text{fin}}(I)$  l’ensemble des parties finies de  $I$ . Si  $U$  est bien au-dessous de  $V$ , pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $V$ , la famille  $(\bigcup_{i \in J} U_i)_{J \in \mathbb{P}_{\text{fin}}(I)}$  est dirigée, et son union contient  $V$ , donc il existe  $J \in \mathbb{P}_{\text{fin}}(I)$  tel que  $U \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ . Autrement dit,  $U \Subset V$ .

$\mathcal{O}(X)$  est un treillis complet, car il a toutes les bornes supérieures, donc aussi toutes les bornes inférieures. C’est donc en particulier un cpo.

Si  $X$  est localement relativement compact, tout ouvert  $U$  est l’union des ouverts  $V \Subset U$ . En effet, d’une part si  $V \Subset U$  alors  $V \subseteq U$ , dont l’union des ouverts  $V \Subset U$  est incluse dans  $U$ . Réciproquement, si  $x \in U$ , comme  $X$  est localement relativement compact, il existe un ouvert  $V$  tel que  $x \in V \Subset U$ , donc  $x$  appartient à l’union des ouverts  $V \Subset U$ . De plus, par le lemme 3.4.9, l’ensemble des  $V$  tels que  $V \Subset U$  est dirigé. Donc  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu.

Réciproquement, si  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu, tout ouvert  $V$  est l’union des ouverts  $U \Subset V$ . Si  $x \in V$ , il existe alors un ouvert  $U \Subset V$  tel que  $x \in U$ . En d’autres termes,  $X$  est localement relativement compact.  $\square$

Le lemme suivant est lui aussi bien connu.

**Lemme 3.4.11** *S’il existe un compact  $K$  tel que  $U \subseteq K \subseteq V$ , alors  $U \Subset V$ . Réciproquement, si  $X$  est localement compact, alors  $U \Subset V$  implique l’existence d’un compact saturé  $Q$  tel que  $U \subseteq Q \subseteq V$ .*

*Tout espace localement compact est localement relativement compact.*

*Démonstration.* Supposons  $U \subseteq K \subseteq V$ . Tout recouvrement ouvert de  $V$  en est un de  $K$ . On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini, qui est alors aussi un sous-recouvrement fini de  $U$ . Donc  $U \Subset V$ .

Si  $X$  est localement compact, supposons  $U \Subset V$ . Pour chaque  $x \in V$ , soit  $Q_x$  un compact saturé tel que  $x \in \overset{\circ}{Q}_x \subseteq Q_x \subseteq V$ .  $(\overset{\circ}{Q}_x)_{x \in V}$  est un recouvrement ouvert de  $V$ , on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini  $(\overset{\circ}{Q}_x)_{x \in E}$  de  $U$ , où  $E$  est une partie finie de  $V$ . Mais alors  $\bigcup_{x \in E} Q_x$  est un compact saturé, qui contient  $\bigcup_{x \in E} \overset{\circ}{Q}_x$  donc  $U$ , et est contenu dans  $V$ .

Si  $X$  est localement compact, pour tout  $x \in X$ , et tout ouvert  $V$  contenant  $x$ , il existe un compact saturé  $Q$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq V$ . Soit  $U$  l’ouvert  $\overset{\circ}{Q}$ . Alors  $U \Subset V$  par ci-dessus.  $\square$

Notons aussi que tout espace  $T_2$  et localement relativement compact est localement compact : il n’y aurait donc pas lieu de distinguer les deux notions si nous étudions des espaces  $T_2$ .

Dans le cas d’espaces non  $T_2$ , le lemme suivant peut alors être vu comme une généralisation du lemme 3.3.8.

**Lemme 3.4.12** *Soit  $(V_i)_{i=1}^n$  une famille finie d’ouverts d’un espace topologique  $X$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , s’il existe une famille d’ouverts  $(U_i)_{i=1}^n$  tels que  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ , et  $U_i \Subset V_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , alors  $U \Subset \bigcup_{i=1}^n V_i$ .*

La réciproque, à savoir que si  $U \in \bigcup_{i=1}^n V_i$  alors on peut trouver des ouverts  $(U_i)_{i=1}^n$  tels que  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ , et  $U_i \in V_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est vraie dès que  $X$  est localement relativement compact.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une famille d'ouverts  $(U_i)_{i=1}^n$  tels que  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ , et  $U_i \in V_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . De tout recouvrement ouvert de  $\bigcup_{i=1}^n V_i$  — qui est aussi un recouvrement ouvert de  $V_i$  — on peut extraire un sous-recouvrement fini de  $U_i$ , puisque  $U_i \in V_i$ . En prenant l'union des  $n$  sous-recouvrements finis, on obtient un sous-recouvrement fini de  $U$ , puisque  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Donc  $U \in \bigcup_{i=1}^n V_i$ .

Réciproquement, supposons  $X$  localement relativement compact, et  $U \in \bigcup_{i=1}^n V_i$ . Comme  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu, la propriété d'interpolation s'applique : il existe un ouvert  $W$  tel que  $U \in W \in \bigcup_{i=1}^n V_i$ . Fixons  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Pour chaque  $x \in W \cap V_i$ , comme  $X$  est localement relativement compact, il existe un ouvert  $W_{ix}$  tel que  $x \in W_{ix} \in V_i$ . En particulier,  $(W_{ix})_{x \in W \cap V_i}$  est un recouvrement ouvert de  $W \cap V_i$ , donc  $(W_{ix})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x \in W \cap V_i}}$  est un recouvrement ouvert de  $W \cap \bigcup_{i=1}^n V_i = W$ . Comme  $U \in W$ , il existe un sous-recouvrement  $(W_{ix})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x \in J_i}}$  de  $U$  —  $J_i$  est ici une partie finie de  $W \cap V_i$ . Posons  $U_i = \bigcup_{x \in J_i} W_{ix}$ .  $U_i$  est ouvert pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et par construction  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ . De plus, comme  $W_{ix} \in V_i$  pour tout  $x \in J_i$ , et que  $J_i$  est fini,  $U_i = \bigcup_{x \in J_i} W_{ix} \in V_i$  par le lemme 3.4.9.  $\square$

▷ **Exercice 3.1**

Démontrer la variante suivante du lemme d'Alexander : Soit  $X$  un espace topologique, dont la topologie est engendrée par une famille  $B$ . Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $X$ . Alors  $U \in V$  si et seulement si, pour tout recouvrement  $(V_k)_{k \in K}$  de  $V$  formé d'éléments de  $B$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini de  $U$ .

On peut maintenant reprendre les résultats de la section 3.3 au travers de l'identité entre  $\mathcal{H}^{op}(X)$  et  $\mathcal{Q}(X^d)$ , valable lorsque  $X$  est stablement compact. Nous les démontrons cependant dans le cadre le plus général possible.

**Proposition 3.4.13** *Si  $X$  est compact,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un cpo. Si  $X$  est localement relativement compact,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un ensemble ordonné continu, et  $F \ll F'$  si et seulement si  $X \setminus F \in X \setminus F'$ .*

*Si  $X$  est relativement compact,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un cpo continu.*

*Si  $X$  est compact et localement compact,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un cpo continu, et  $F \ll F'$  si et seulement s'il existe un compact saturé  $Q$  de  $X$  tel que  $F' \subseteq X \setminus Q \subseteq F$  lorsque  $X$  est localement compact.*

*Pour tout ensemble fini  $A$  non vide de  $\mathcal{H}^{op}(X)$ , soit  $A$  n'a aucun majorant, soit  $A$  a une borne supérieure  $\bigcap_{F \in A} F$ .  $\mathcal{H}^{op}(X)$  a un plus petit élément. En tant qu'espace topologique,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est compact et cohérent. Si  $X$  est relativement compact,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est stablement compact.*

*Démonstration.* Si  $X$  est stablement compact, c'est une conséquence directe de la proposition 3.3.2 et du fait 3.4.7. Notons que, en particulier,  $F \ll F'$  si et seulement si l'intérieur dans  $X^d$  de  $F$  contient  $F'$ , si et seulement s'il existe un ouvert de  $X^d$  (un cocompact) contenu dans  $F$  et contenant  $F'$ , d'où l'existence d'un compact saturé  $Q$  de  $X$  tel que  $F' \subseteq X \setminus Q \subseteq F$ .

Plaçons-nous dans le cas général. Notons que : (\*) pour toute famille filtrante de fermés  $(F_i)_{i \in I}$  de  $X$ , et pour tout compact  $K$  de  $X$ , si  $\bigcap_{i \in I} F_i \cap K = \emptyset$ , alors il existe  $i \in I$  tel que

$F_i \cap K = \emptyset$ . C'est par la définition même de la compacité : si  $\bigcap_{i \in I} F_i \cap K = \emptyset$ ,  $(X \setminus F_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert dirigé de  $K$ , il existe donc  $i \in I$  tel que  $K \subseteq X \setminus F_i$ , donc  $K \cap F_i = \emptyset$ .

On en déduit que, si  $X$  est compact, alors  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un cpo : pour toute famille filtrante de fermés non vides  $(F_i)_{i \in I}$  de  $X$ ,  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un fermé non vide, qui est donc la borne supérieure de  $(F_i)_{i \in I}$ . En effet,  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est fermé, et s'il était vide, alors  $\bigcap_{i \in I} F_i \cap X$  serait vide, donc l'un des  $F_i$  serait vide par (\*), ce qui est impossible.

Pour tous fermés  $F$  et  $F'$  non vides de  $X$ ,  $F \ll F'$  si et seulement si, pour toute famille filtrante  $(F_i)_{i \in I}$  de fermés non vides, si  $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F'$  alors il existe  $i \in I$  tel que  $F_i \subseteq F$ . Ceci est équivalent à la même propriété pour les familles filtrantes  $(F_i)_{i \in I}$  de fermés possiblement vides, trivialement. En passant aux complémentaires, on a donc  $F \ll F'$  si et seulement si, pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  telle que  $X \setminus F' \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ , il existe  $i \in I$  tel que  $X \setminus F \subseteq U_i$ . Par le lemme 3.4.10,  $F \ll F'$  est donc équivalent à  $X \setminus F \in X \setminus F'$ . Si de plus  $X$  est localement relativement compact, par le lemme 3.4.10 encore, pour tout  $F \in \mathcal{H}^{op}(X)$ ,  $X \setminus F = \bigcup_{U \in X \setminus F} U = \bigcup_{F' \ll F} (X \setminus F')$ , donc  $F = \bigcap_{F' \ll F} F'$ .

Si  $X$  est localement relativement compact, pour tout fermé  $F$  non vide, l'ensemble des ouverts  $U$  tels que  $U \in X \setminus F$  est dirigé et  $X \setminus F = \bigcup_{U \in X \setminus F} U$ , par le lemme 3.4.10. Aucun des ouverts  $U \in X \setminus F$  n'est égal à  $X$ , sinon  $X \in X \setminus F$ , donc  $X \subseteq X \setminus F$ , ce qui impliquerait que  $F$  serait vide. On en déduit que l'ensemble des fermés  $F'$  tels que  $F' \ll F$  ne contient pas l'ensemble vide, et que de plus  $F = \bigcap_{F' \ll F} F'$ . Donc  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un ensemble ordonné continu.

En particulier, si  $X$  est relativement compact, alors  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un cpo continu.

Ceci est donc le cas lorsque  $X$  est compact et localement compact. De plus,  $F \ll F'$  si et seulement si  $X \setminus F \in X \setminus F'$ , si et seulement s'il existe un compact saturé  $Q$  tel que  $X \setminus F \subseteq Q \subseteq X \setminus F'$ , c'est-à-dire si et seulement si  $F' \subseteq X \setminus Q \subseteq F$ .

Pour ce qui est de la borne supérieure d'un ensemble fini  $A$  non vide d'éléments de  $\mathcal{H}^{op}(X)$ , soit  $\bigcap_{F \subseteq A} F$  est vide et alors  $A$  n'a aucun majorant, soit il est non vide et c'est naturellement la borne supérieure de  $A$ . Par le corollaire 3.1.7,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est donc cohérent. Finalement,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  a un plus petit élément, le fermé  $X$  lui-même, et est donc compact par le lemme 3.1.9.  $\square$

**Lemme 3.4.14** Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$ ,

$$\blacksquare Q = \{F \text{ fermé de } X \mid F \cap Q = \emptyset\}$$

est un ouvert de Scott de  $\mathcal{H}^{op}(X)$ .

*Démonstration.* Si  $X$  est un espace stablement compact, ceci vient du lemme 3.3.4 :  $X \setminus Q$  est un ouvert de  $X^d$ , donc  $\square(X \setminus Q) = \{F \text{ fermé de } X \mid F \subseteq X \setminus Q\}$  est un ouvert de  $\mathcal{Q}(X^d) = \mathcal{H}^{op}(X)$  par le lemme 3.3.4. Or  $\square(X \setminus Q)$  est exactement  $\blacksquare Q$ .

La démonstration directe est cependant tout aussi simple. D'abord,  $\blacksquare Q$  est clos par le haut : si  $F \supseteq F'$  et  $F' \cap Q = \emptyset$ , alors  $F \cap Q = \emptyset$ . Ensuite, si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de fermés dont la borne supérieure  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est telle que  $\bigcap_{i \in I} F_i \cap Q = \emptyset$ , alors  $(X \setminus F_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée d'ouverts telle que  $Q \subseteq \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$ . Comme  $Q$  est compact, il existe  $i \in I$  tel que  $Q \subseteq X \setminus F_i$ , c'est-à-dire  $Q \subseteq F_i$ . Donc  $\blacksquare Q$  est Scott-ouvert.  $\square$

**Lemme 3.4.15** *Pour tous compacts saturés  $Q, Q'$  de  $X$ ,  $\blacksquare(Q \cup Q') = \blacksquare Q \cap \blacksquare Q'$ . Si  $Q \supseteq Q'$  alors  $\blacksquare Q \subseteq \blacksquare Q'$ . Pour toute famille filtrante  $(Q_i)_{i \in I}$  de compacts saturés de  $X$ ,  $(\blacksquare Q_i)_{i \in I}$  est dirigée et si de plus  $X$  est bien filtrant, alors  $\blacksquare \bigcap_{i \in I} Q_i = \bigcup_{i \in I} \blacksquare Q_i$ .*

*Démonstration.* Si  $X$  est stablement compact, ceci est une conséquence directe du lemme 3.3.5. Traitons du cas général. D'abord,  $F \in \blacksquare(Q \cup Q')$  si et seulement si  $F \cap (Q \cup Q') = \emptyset$ , ce qui est équivalent à  $(F \cap Q) \cup (F \cap Q') = \emptyset$ , et donc à  $F \cap Q = \emptyset$  et  $F \cap Q' = \emptyset$ . Donc  $F \in \blacksquare(Q \cup Q')$  si et seulement si  $F \in \blacksquare Q$  et  $F \in \blacksquare Q'$  :  $\blacksquare(Q \cup Q') = \blacksquare Q \cap \blacksquare Q'$ . Si  $Q \supseteq Q'$ , alors aucun  $F \in \blacksquare Q$  n'intersecte  $Q$ , a fortiori  $Q'$ , donc  $\blacksquare Q \subseteq \blacksquare Q'$ . Si  $(Q_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de compacts saturés de  $X$ , il s'ensuit que  $(\blacksquare Q_i)_{i \in I}$  est dirigée. Alors  $F \in \blacksquare \bigcap_{i \in I} Q_i$  si et seulement si  $F \cap \bigcap_{i \in I} Q_i = \emptyset$ , si et seulement si  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  est inclus dans l'ouvert  $X \setminus F$ . Comme  $X$  est bien filtrant, ceci est équivalent à l'existence de  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq X \setminus F$ , c'est-à-dire tel que  $F \cap Q_i = \emptyset$ , autrement dit  $F \in \blacksquare Q_i$ .  $\square$

**Corollaire 3.4.16** *Si  $X$  est compact et localement compact, les ouverts de  $\mathcal{H}^{op}(X)$  sont les unions d'ouverts de la forme  $\blacksquare Q$ ,  $Q$  compact saturé de  $X$ .*

*Plus précisément, tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}^{op}(X)$  s'écrit  $\bigcup_{\substack{F \in \mathcal{U} \\ Q \text{ compact saturé} \\ Q \cup F = X}} \blacksquare Q$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un cpo continu, par la proposition 3.4.13, tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est l'union des  $\hat{\uparrow} F$ ,  $F \in \mathcal{U}$ . Or

$$\begin{aligned} \hat{\uparrow} F &= \{F' \in \mathcal{H}^{op}(X) \mid F \ll F'\} \\ &= \{F' \in \mathcal{H}^{op}(X) \mid \exists Q \text{ compact saturé de } X \cdot F' \subseteq X \setminus Q \subseteq F\} \\ &= \bigcup_{\substack{Q \text{ compact saturé} \\ X \setminus Q \subseteq F}} \blacksquare Q \end{aligned}$$

en utilisant la proposition 3.4.13. On conclut car  $X \setminus Q \subseteq F$  est équivalent à  $Q \cup F = X$ . Réciproquement, toute union d'ouverts est ouverte, et  $\square U$  est ouvert par le lemme 3.4.14.  $\square$

Finalement, voici ce qu'il semble qu'on puisse dire de mieux sur la relation entre  $\mathcal{H}^{op}(X)$  et  $\mathcal{H}(X)$  dans un cadre topologique. Rappelons que les points de ces deux espaces sont les mêmes, ce sont les fermés non vides de  $X$ .

**Proposition 3.4.17** *Soit  $\mathcal{H}_u(X)$  l'espace  $\mathcal{H}(X)$ , muni de la topologie haute. La topologie haute est engendrée par les ouverts  $\diamond U = \{F \text{ fermé de } X \mid F \cap U \neq \emptyset\}$ , lorsque  $U$  parcourt les ouverts de  $X$ . Son ordre de spécialisation est l'inclusion  $\subseteq$ .*

*Soit  $X$  un espace relativement compact. Alors  $\mathcal{H}^{op}(X)^d = \mathcal{H}_u(X)$ . De plus, la topologie de  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  est correctement ordonnée. En particulier, la topologie de  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  est moins fine que la topologie de Scott sur  $\mathcal{H}(X)$  : tout ouvert de  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  est un ouvert de  $\mathcal{H}(X)$ .*

*Démonstration.* Les ouverts standards qui engendrent la topologie haute sont ceux de la forme  $\{F' \text{ fermé de } X \mid F' \not\subseteq F\}$  lorsque  $F$  parcourt  $\mathcal{H}(X)$ , c'est-à-dire exactement les  $\diamond U$ , lorsque  $U$  parcourt les ouverts de  $X$  (prendre  $U = X \setminus F$ ).

Le préordre de spécialisation de n'importe quelle topologie haute formée à partir d'un ordre  $\leq$  est  $\leq$  lui-même. Donc le préordre de spécialisation de  $\mathcal{H}_u(X)$  est  $\subseteq$ .

Supposons maintenant que  $X$  soit relativement compact.  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  existe, car  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est stablement compact, par la proposition 3.4.13. Rappelons ensuite que l'ordre de spécialisation du dual de de Groot  $Y^d$  d'un espace  $Y$  est l'opposé de celui de  $Y$ . L'ordre de spécialisation de  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  est donc l'inclusion. Rappelons ensuite que  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  est aussi stablement compact, donc sobre, donc correctement ordonné (voir la section 2.3). Ceci signifie que tout ouvert de la topologie haute est ouvert dans  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$ , et que tout ouvert de  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  est ouvert de Scott.

Il ne reste qu'à montrer que  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  est en fait égal à  $\mathcal{H}_u(X)$ . Par la proposition 3.4.13,  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est un cpo continu. Par le corollaire 3.1.5, la topologie basse sur  $\mathcal{H}^{op}(X)$  coïncide avec la topologie cocompacte sur  $\mathcal{H}^{op}(X)$ . Or  $\mathcal{H}^{op}(X)$  muni de la topologie cocompacte est  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$ . Et la topologie basse sur  $\mathcal{H}^{op}(X)$  n'est rien d'autre que la topologie haute sur  $\mathcal{H}(X)$ , puisque leurs ordres de spécialisation sont opposés.  $\square$

**Lemme 3.4.18** *Pour tous ouverts  $U, U'$  de  $X$ ,  $\diamond(U \cup U') = \diamond U \cup \diamond U'$ . Si  $U \subseteq U'$  alors  $\diamond U \subseteq \diamond U'$ . Pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$ ,  $(\diamond U_i)_{i \in I}$  est dirigée, et  $\diamond \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \diamond U_i$ .*

*Démonstration.* D'abord,  $F \in \diamond(U \cup U')$  si et seulement si  $F \cap (U \cup U') \neq \emptyset$ , ce qui est équivalent à  $(F \cap U) \cup (F \cap U') \neq \emptyset$ , et donc à  $F \cap U \neq \emptyset$  ou  $F \cap U' \neq \emptyset$ . Donc  $F \in \diamond(U \cup U')$  si et seulement si  $F \in \diamond U$  ou  $F \in \diamond U'$  :  $\diamond(U \cup U') = \diamond U \cup \diamond U'$ . Si  $U \subseteq U'$ , alors tout fermé qui intersecte  $U$  intersecte aussi  $U'$ , donc  $\diamond U \subseteq \diamond U'$ . Si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée d'ouverts de  $X$ , alors  $F$  intersecte  $\bigcup_{i \in I} U_i$  si et seulement si  $F$  intersecte l'un des  $U_i$ , donc  $\diamond \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \diamond U_i$ .  $\square$

**Proposition 3.4.19** *Soit  $X$  un cpo continu. Alors les topologies haute et de Scott coïncident sur  $\mathcal{H}(X)$ , autrement dit  $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}_u(X)$ .*

*Démonstration.* La topologie de Scott est toujours plus fine que la topologie haute. Il ne reste donc qu'à montrer que tout ouvert de Scott est un ouvert haut. Pour ceci, il suffit de montrer que  $\uparrow F$  est un ouvert haut, pour tout fermé non vide  $F$  de  $X$ . Par le lemme 3.4.4, appliqué à la base  $B = X$ ,

$$\uparrow F = \{F' \in \mathcal{H}(X) \mid \exists E \text{ fini} \cdot F \subseteq \downarrow E \text{ et } E \subseteq \downarrow F'\}$$

Or  $E \subseteq \downarrow F'$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in F'$  tel que  $x \ll y$ ; autrement dit, pour tout  $x \in E$ , l'intersection de  $F'$  et de  $\uparrow x$  est non vide, c'est-à-dire  $F' \in \diamond \uparrow x$ . Donc

$$\begin{aligned} \uparrow F &= \{F' \in \mathcal{H}(X) \mid \exists E \text{ fini} \cdot F \subseteq \downarrow E \text{ et } \forall x \in E \cdot F' \in \diamond \uparrow x\} \\ &= \bigcup_{\substack{E \text{ fini} \\ F \subseteq \downarrow E}} \bigcap_{x \in E} \diamond \uparrow x \end{aligned}$$

est un ouvert de la topologie haute.  $\square$

### 3.5 Les espaces $\mathcal{P}\ell(X)$ et $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ de choix chaotiques, et $\mathcal{L}(X)$

Finalement, l'espace naturel qui sert traditionnellement à modéliser le non-déterminisme chaotique est celui des lentilles compactes, ou *espace de Plotkin* de  $X$ . Nous dirons simplement lentille au lieu de lentille compacte.

**Définition 3.5.1 (Lentille)** Une lentille  $L$  sur  $X$  est l'intersection  $Q \cap F$  d'un compact saturé  $Q$  de  $X$  et d'un fermé  $F$  de  $X$ , avec  $Q \cap F \neq \emptyset$ .

L'espace  $\mathcal{P}\ell(X)$  est l'espace des lentilles sur  $X$ , muni du préordre  $\sqsubseteq_{\text{EM}}$ , défini par  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$  si et seulement si  $\uparrow L \supseteq \uparrow L'$  et  $cl(L) \subseteq cl(L')$ .

Le préordre  $\sqsubseteq_{\text{EM}}$  est connu sous le nom d'ordre d'Egli-Milner topologique (Abramsky and Jung, 1994, Définition 6.2.16). Nous verrons plus loin que c'est une relation d'ordre, et pas seulement un préordre.

**Lemme 3.5.2** Toute lentille  $L$  s'écrit  $Q \cap F$ , où  $Q$  est le compact saturé  $\uparrow L$  et  $F$  est le fermé  $cl(L)$ . L'ensemble ordonné  $\mathcal{P}\ell(X)$ , ordonné par  $\sqsubseteq_{\text{EM}}$ , est isomorphe au sous-espace  $\mathcal{QH}(X)$  de l'espace  $\mathcal{Q}(X) \times \mathcal{H}(X)$  formé des couples  $(Q, F)$  tels que  $Q \cap F \neq \emptyset$ ,  $Q = \uparrow(Q \cap F)$ , et  $F = cl(Q \cap F)$ , ordonné par le produit  $\supseteq \times \subseteq$ , via l'isomorphisme qui à  $L$  associe  $(\uparrow L, cl(L))$ .

*Démonstration.* Soit  $L$  une lentille. En tant qu'intersection d'un compact et d'un fermé,  $L$  est compacte. Il est facile de voir qu'alors  $\uparrow L$  est compact : si  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $\uparrow L$ , c'est aussi un recouvrement ouvert de  $L$ , donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini  $(U_i)_{i \in J}$ , qui est aussi un sous-recouvrement fini de  $\uparrow L$  : comme  $L \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ ,  $\uparrow L \subseteq \uparrow \bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in J} \uparrow U_i = \bigcup_{i \in J} U_i$ , puisque  $U_i$  est clos par le haut. De plus,  $\uparrow L$  est clos par le haut par définition, donc  $\uparrow L$  est un compact saturé.

D'autre part, trivialement,  $cl(L)$  est fermé.

Montrons que  $L = \uparrow L \cap cl(L)$ . Clairement,  $L \subseteq \uparrow L \cap cl(L)$ . Réciproquement, supposons  $x \in \uparrow L \cap cl(L)$ , où  $L = Q \cap F$ . Comme  $x \in \uparrow L$ , il existe  $y \in L$  tel que  $y \leq x$ . Puisque  $y \in L$ ,  $y$  est dans  $Q$ , et comme  $Q$  est saturé,  $x$  appartient à  $Q$ . D'autre part,  $x \in cl(L)$ , autrement dit  $x$  est dans le plus petit fermé contenant  $L$ . Or  $F$  est un fermé contenant  $L$  par définition, donc  $x \in F$ . Donc  $x \in Q \cap F = L$ . On en conclut que  $L = \uparrow L \cap cl(L)$ .

Soit  $f$  la fonction qui à la lentille  $L$  associe le couple  $(\uparrow L, cl(L))$ . Clairement,  $f(L) \in \mathcal{QH}(X)$ . Par définition de l'ordre d'Egli-Milner topologique,  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$  si et seulement si  $f(L) (\supseteq \times \subseteq) f(L')$ , donc  $f$  est un plongement d'ordre. Il ne reste qu'à montrer que  $f$  est surjective. C'est évident : pour tout compact saturé  $Q$ , pour tout fermé  $F$  tels que  $Q \cap F \neq \emptyset$ ,  $L = Q \cap F$  est une lentille, et  $f(L) = (Q, F)$  dès que  $Q = \uparrow(Q \cap F)$  et  $F = cl(Q \cap F)$ , par définition.  $\square$

**Corollaire 3.5.3** Le préordre d'Egli-Milner topologique  $\sqsubseteq_{\text{EM}}$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{P}\ell(X)$ .

*Démonstration.* Supposons  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$  et  $L' \sqsubseteq_{\text{EM}} L$ . Alors  $\uparrow L = \uparrow L'$  et  $cl(L) = cl(L')$ , donc, en utilisant le lemme 3.5.2,  $L = \uparrow L \cap cl(L) = \uparrow L' \cap cl(L') = L'$ .  $\square$

**Lemme 3.5.4** *Si  $X$  est bien filtrant, alors  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo. La borne supérieure de toute famille dirigée  $(L_i)_{i \in I}$  de lentilles est  $L = Q \cap F$ , avec  $Q = \bigcap_{i \in I} \uparrow L_i$  et  $F = cl(\bigcup_{i \in I} cl(L_i))$ .*

*Démonstration.* Par l'isomorphisme d'ordre du lemme 3.5.2. Écrivons  $L_i = Q_i \cap F_i$  pour tout  $i \in I$ , où  $Q_i = \uparrow L_i$  et  $F_i = cl(L_i)$ , par le lemme 3.5.2. Puisque  $(L_i)_{i \in I}$  est dirigée, pour l'ordre  $\sqsubseteq_{EM}$ , la famille  $(Q_i)_{i \in I}$  est filtrante et la famille  $(F_i)_{i \in I}$  est dirigée. Par le lemme 3.3.1, la première admet  $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i$  comme borne supérieure; par le lemme 3.4.1, la seconde a  $F = cl(\bigcup_{i \in I} F_i)$  comme borne supérieure.

Si  $Q \cap F \neq \emptyset$ , alors  $L = Q \cap F$  sera une lentille, qui sera la borne supérieure de  $(L_i)_{i \in I}$ . Montrons donc que  $Q \cap F$  est non vide. Par contradiction, supposons que  $Q \cap F = \emptyset$ . Ceci est équivalent à  $Q \subseteq X \setminus F$ , autrement dit  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq X \setminus F$ . Comme  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq X \setminus F$ , donc  $Q_i \cap F = \emptyset$ . Comme  $F_i \subseteq F$ , on en déduit  $Q_i \cap F_i = \emptyset$ , c'est-à-dire  $L_i = \emptyset$ , ce qui est impossible.  $\square$

Lorsque  $E'$  est une partie finie de  $X$ ,  $Q = \uparrow E'$  est un compact saturé. Pour toute partie finie  $E$  de  $X$ ,  $F = \downarrow E$  est un fermé. En particulier,  $L = \uparrow E' \cap \downarrow E$  est une lentille dès qu'il existe  $x \in E$  et  $x' \in E'$  tels que  $x' \leq x$ .

Supposons que tous les éléments de  $E'$  soient incomparables deux à deux, et de même pour  $E$ , quitte à ne conserver de  $E'$  que les éléments minimaux, et dans  $E$  que les éléments maximaux. La condition  $Q = \uparrow L$ , équivalente à  $Q \subseteq \uparrow L$ , revient à demander que pour tout  $x' \in E'$ , il existe  $x \in L$  tel que  $x \leq x'$ . Si c'est le cas,  $x \in \uparrow E'$ . Comme les éléments de  $E'$  sont incomparables deux à deux, ceci implique que  $x = x'$  et  $x'$  est donc dans  $L$ . Puisque  $L \subseteq \downarrow E$ , on en conclut que si  $Q = \uparrow L$ , alors pour tout  $x' \in E'$ , il existe  $x \in E$  tel que  $x' \leq x$ . La réciproque est immédiate. De même, la condition  $F = cl(L)$  est équivalente au fait que pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in E'$  tel que  $x' \leq x$ . Pour ceci, on montre que  $cl(L) = \downarrow L$ , et on utilise un raisonnement similaire à l'argument ci-dessus. L'inclusion  $\downarrow L \subseteq cl(L)$  est claire, car tout fermé est clos par le bas. Réciproquement,  $\downarrow L = \downarrow \{x \in E \mid \exists x' \in E' \cdot x' \leq x\}$  est fermé, car  $E$  est fini, donc  $\downarrow L = cl(L)$ .

On en déduit que, lorsque  $E$  et  $E'$  sont deux parties finies non vides de  $X$  formées d'éléments incomparables deux à deux, et s'il existe  $x \in E$  et  $x' \in E'$  tels que  $x' \leq x$ , alors la lentille  $L = \uparrow E' \cap \downarrow E$  est sous la forme canonique  $\uparrow L \cap cl(L)$  si et seulement si :

- pour tout  $x' \in E'$ , il existe  $x \in E$  tel que  $x' \leq x$ ;
- pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in E'$  tel que  $x' \leq x$ .

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, on note  $E' \leq^{\natural} E$ . La relation  $\leq^{\natural}$  est l'ordre d'*Egli-Milner*. Lorsque seule la première condition est vérifiée, on note  $E' \leq^b E$ , c'est l'ordre de *Hoare*. On a  $E' \leq^b E$  si et seulement si  $cl(E') \subseteq cl(E)$ , si et seulement si  $\downarrow E' \subseteq \downarrow E$  : c'est l'ordre sur  $\mathcal{H}(X)$ , restreint aux fermés de la forme  $\downarrow E, \downarrow E'$ . De façon similaire, on note  $E' \leq^{\sharp} E$  lorsque seule la deuxième condition, pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in E'$  tel que  $x' \leq x$ , est vérifiée. C'est l'ordre de *Smyth*. On a  $E' \leq^{\sharp} E$  si et seulement si  $\uparrow E' \supseteq \uparrow E$  : c'est l'ordre de  $\mathcal{Q}(X)$ , restreint aux compacts finitaires.

**Définition 3.5.5** *Une lentille finitaire sur un cpo continu muni d'une base  $B$  est une partie de la forme  $\uparrow E' \cap \downarrow E$ , où  $E$  et  $E'$  sont des parties finies non vides de  $B$  telles que  $E' \leq^{\natural} E$ .*

**Lemme 3.5.6** *Les lentilles finitaires sur un cpo continu muni d'une base  $B$  sont exactement les ensembles de la forme  $\langle E \rangle = \uparrow E \cap \downarrow E$ , où  $E$  est une partie non vide de  $B$ . Plus précisément, la lentille finitaire  $\uparrow E' \cap \downarrow E$ , avec  $E' \leq^{\natural} E$ , égale  $\langle E \cup E' \rangle$ .*

*Pour toute partie finie non vide  $E$  de  $X$ , on a  $\uparrow \langle E \rangle = \uparrow E$  et  $cl(\langle E \rangle) = \downarrow E$ , en particulier  $\langle E \rangle$  est une lentille. Finalement, si  $E$  et  $E'$  sont finis et non vides,  $\langle E \rangle \sqsubseteq_{EM} \langle E' \rangle$  si et seulement si  $E \leq^{\natural} E'$ .*

*Démonstration.* Soit  $L = \uparrow E' \cap \downarrow E$  une lentille finitaire, avec  $E' \leq^{\natural} E$ . Notons que  $\uparrow (E' \cup E) = \uparrow E'$ . En effet,  $E' \leq^{\natural} E$  implique  $E' \leq^{\sharp} E$ , c'est-à-dire  $\uparrow E' \supseteq \uparrow E$ ; donc  $\uparrow (E' \cup E) = \uparrow E' \cup \uparrow E = \uparrow E'$ . Notons aussi que  $\downarrow (E' \cup E) = \downarrow E$  :  $E' \leq^{\natural} E$  implique  $E' \leq^{\flat} E$ , c'est-à-dire  $\downarrow E' \subseteq \downarrow E$ , donc  $\downarrow (E' \cup E) = \downarrow E' \cup \downarrow E = \downarrow E$ . Donc  $L$  est de la forme demandée. Réciproquement, tout ensemble de la forme  $\langle E \rangle$ , où  $E$  est une partie non vide de  $B$  est clairement une lentille finitaire.

Soit  $E$  une partie finie non vide. Montrons que  $\uparrow \langle E \rangle = \uparrow E$  et  $cl(\langle E \rangle) = \downarrow E$ . Le fait que  $\uparrow \langle E \rangle = \uparrow E$  est clair. D'autre part,  $\downarrow \langle E \rangle = \downarrow E$  et donc  $\downarrow \langle E \rangle$  est fermé. Il s'ensuit que  $cl(\langle E \rangle) \subseteq \downarrow \langle E \rangle$ . Or  $cl(\langle E \rangle) \supseteq \downarrow \langle E \rangle$  car  $cl(\langle E \rangle)$  est clos par le bas. Donc  $cl(\langle E \rangle) = \downarrow \langle E \rangle = \downarrow E$ . Comme  $\uparrow E$  est un compact (finitaire) et  $\downarrow E$  est un fermé (finitaire),  $\langle E \rangle$  est une lentille.

Soient finalement  $E$  et  $E'$  deux parties finies non vides. On a  $\langle E \rangle \sqsubseteq_{EM} \langle E' \rangle$  si et seulement si  $\uparrow \langle E \rangle \supseteq \uparrow \langle E' \rangle$  et  $cl(\langle E \rangle) \subseteq cl(\langle E' \rangle)$ . Par les points ci-dessus, ceci est équivalent à  $\uparrow E \supseteq \uparrow E'$  et  $\downarrow E \subseteq \downarrow E'$ , c'est-à-dire à  $E \leq^{\sharp} E'$  et  $E \leq^{\flat} E'$ , c'est-à-dire à  $E \leq^{\natural} E'$ .  $\square$

Nous souhaitons désormais démontrer que l'espace  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo continu dès que  $X$  est lui-même un cpo continu. Pour ceci, nous devons de plus supposer que  $X$  est cohérent. De plus, nous devons passer par des constructions mathématiques relativement complexes.

Un des instruments que nous devons utiliser est la topologie patch, qui capturera élégamment, en termes de compacité, les propriétés de cohérence que nous supposons de  $X$ .

Rappelons que la topologie patch d'un espace topologique  $X$  est celle engendrée par les ouverts et les complémentaires de compacts saturés de  $X$ . On dira qu'une partie de  $X$  est *patch-compacte* si et seulement si elle est compacte dans la topologie patch de  $X$ .

On note :

**Lemme 3.5.7** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et cohérent. Toute partie compacte  $K$  de  $X$  est patch-compacte.*

*Démonstration.* Par le lemme d'Alexander, il suffit de considérer un recouvrement de  $K$  de la forme  $\bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{j \in J} (X \setminus Q_j)$ , où les  $U_i$  sont ouverts et les  $Q_j$  compacts saturés. Si  $J$  est vide, on peut en extraire du recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  un sous-recouvrement fini, puisque  $K$  est compact. Sinon,  $\bigcap_{j \in J} Q_j = \bigcap_{\mathcal{J} \subseteq J, \mathcal{J} \text{ fini } \neq \emptyset} Q_{\mathcal{J}}$ , où  $Q_{\mathcal{J}} = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} Q_j$ , est une intersection filtrante d'intersections finies  $Q_{\mathcal{J}}$  de compacts saturés, qui est elle-même compacte puisque  $X$  est bien filtrant et cohérent. Posons  $Q$  le compact saturé  $\bigcap_{j \in J} Q_j = \bigcap_{\mathcal{J} \subseteq J, \mathcal{J} \text{ fini } \neq \emptyset} Q_{\mathcal{J}}$ . Alors  $K$  est inclus dans  $\bigcup_{i \in I} U_i \cup (X \setminus Q)$ , donc  $K \cup Q \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ . Or  $K \cup Q$  est compact, donc on peut trouver un ensemble fini  $I_0 \subseteq I$  tel que  $K \cup Q \subseteq \bigcup_{i \in I_0} U_i$ . Posons  $U$  l'ouvert  $\bigcup_{i \in I_0} U_i$ . L'intersection filtrante des  $K \cup Q_{\mathcal{J}}$  vaut  $K \cup Q$ , est incluse dans  $U$ . Comme  $X$  est bien filtrant, il existe donc un ensemble  $\mathcal{J} \subseteq J$ , fini et non vide, tel que  $K \cup Q_{\mathcal{J}} \subseteq U = \bigcup_{i \in I_0} U_i$ . Mais ceci entraîne  $K \subseteq \bigcup_{i \in I_0} U_i \cup \bigcup_{j \in \mathcal{J}} (X \setminus Q_j)$ .  $\square$

On en déduit la remarque cruciale suivante (voir par exemple Mislove 1998, proposition 4.40) :

**Proposition 3.5.8** *Soit  $X$  un espace topologique.*

*Si  $X$  est localement compact et  $T_0$ , alors  $X$ , muni de sa topologie patch, est  $T_2$ .*

*$X$  est patch-compact si et seulement si  $X$  est bien filtrant, cohérent et compact.*

*Démonstration.* Supposons d'abord  $X$  localement compact et  $T_0$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments distincts de  $X$ . Il est impossible que l'on ait à la fois  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , puisque  $X$  est  $T_0$ . Supposons, par symétrie, que  $x \not\leq y$ . Il existe alors un ouvert  $U$  qui contient  $x$  mais pas  $y$ . Puisque  $X$  est localement compact, on peut trouver un compact saturé  $Q$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq U$ . Alors  $\overset{\circ}{Q}$  est un patch-ouvert contenant  $x$ ,  $X \setminus Q$  est un patch-ouvert contenant  $y$ , et ces deux patch-ouverts ne se rencontrent pas. Donc  $X$  est  $T_2$  pour sa topologie patch.

Supposons  $X$  bien filtrant, cohérent et compact. Alors  $X$  est patch-compact par le lemme 3.5.7. Réciproquement, supposons  $X$  patch-compact. Soit  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $(Q_j)_{j \in J}$  une famille non vide de compacts saturés de  $X$  telle que  $\bigcap_{j \in J} Q_j \subseteq U$ . Alors  $X \subseteq U \cup \bigcup_{j \in J} (X \setminus Q_j)$ . Puisque  $X$  est patch-compact, il existe  $J_0 \subseteq J$  fini tel que  $X \subseteq U \cup \bigcup_{j \in J_0} (X \setminus Q_j)$  ou  $X \subseteq \bigcup_{j \in J_0} (X \setminus Q_j)$ . En ajoutant au besoin  $U$  à droite, et un  $X \setminus Q_j$  arbitraire, on peut supposer que  $X \subseteq U \cup \bigcup_{j \in J_0} (X \setminus Q_j)$  et que  $J_0$  est non vide. Alors  $\bigcap_{j \in J_0} Q_j \subseteq U$ . Lorsque  $J$  est une famille dirigée, on en déduit qu'il existe  $j \in J$  tel que  $Q_j \subseteq U$ , donc  $X$  est bien filtrant. Par un argument similaire, soient  $Q_1$  et  $Q_2$  deux compacts saturés de  $X$  et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $Q_1 \cap Q_2$ . Alors  $X$  est inclus dans  $\bigcup_{i \in I} U_i \cup (X \setminus Q_1) \cup (X \setminus Q_2)$ . Puisque  $X$  est patch-compact, il existe  $I_0$  fini inclus dans  $I$  tel que  $X$  soit inclus dans  $\bigcup_{i \in I_0} U_i \cup (X \setminus Q_1) \cup (X \setminus Q_2)$ , donc  $Q_1 \cap Q_2 \subseteq \bigcup_{i \in I_0} U_i$ . Donc  $Q_1 \cap Q_2$  est compact, et  $X$  est cohérent. Finalement, il est facile de voir que  $X$  est compact.  $\square$

**Lemme 3.5.9** *Soit  $X$  un espace topologique. Toute lentille  $L$  sur  $X$  est compacte et patch-fermée. Si  $X$  est bien filtrant et cohérent,  $L$  est aussi patch-compacte.*

*Démonstration.* Écrivons  $L$  sous la forme de l'intersection  $Q \cap F$  d'un compact saturé  $Q$  et d'un fermé  $F$ .  $L$  est alors clairement compacte, puisque l'intersection d'un compact et d'un fermé est toujours compacte.  $Q$  est par définition patch-fermé, ainsi que  $F$ , donc  $L$  est patch-fermé. La deuxième partie du lemme est par le lemme 3.5.7, puisque  $L$  est compacte.  $\square$

Lorsque  $X$  est un cpo continu cohérent et compact, toute lentille est en particulier patch-compacte. Ceci est utile, dans la mesure où ceci nous permettra de simplifier la condition  $L = Q \cap F$ ,  $F = cl(L)$  en  $F = \downarrow L$  :

**Lemme 3.5.10** *Soit  $X$  un cpo continu. Pour toute partie patch-compacte  $L$  de  $X$ ,  $\downarrow L$  est fermée, et  $cl(L) = \downarrow L$ .*

*Démonstration.* Montrons que  $X \setminus \downarrow L$  est ouvert. Soit  $x$  un élément de  $X \setminus \downarrow L$ . Pour tout  $y \in L$ , il existe  $z_y \ll x$  tel que  $z_y \not\leq y$ , sinon  $x$ , en tant que borne supérieure des  $z \ll x$ , serait inférieur ou égal à  $y$ . Alors  $V_y = X \setminus \uparrow z_y$  est cocompact, donc patch-ouvert, et contient  $y$ . Par

construction, la famille  $(V_y)_{y \in L}$  recouvre  $L$ . Comme  $L$  est patch-compact, il existe une partie finie  $\{y_1, \dots, y_n\}$  de  $L$  telle que  $\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$  contienne  $L$ . Notons  $z_1 = z_{y_1}, \dots, z_n = z_{y_n}$ . Comme tous les  $z_i$  sont bien au-dessous de  $x$ , et que la famille des  $z \ll x$  est dirigée, il existe un élément  $z \ll x$  tel que  $z_i \leq z$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Alors  $\uparrow z$  est ouvert, contient  $x$ , et ne rencontre pas  $L$  : sinon il existerait  $y \in L$  tel que  $z \ll y$ , ce qui impliquerait qu'il existerait  $i$  tel que  $z_i \ll y$ , donc  $z_i \leq y$ . Donc  $\uparrow z$  est un voisinage ouvert de  $x$  inclus dans  $X \setminus \downarrow L$ . Comme  $x$  est arbitraire dans  $X \setminus \downarrow L$ , on en déduit que ce dernier est ouvert.  $\square$

**Corollaire 3.5.11** *Appelons lentille forte toute intersection  $L = Q \cap F$  non vide d'un compact saturé  $Q$  et d'un fermé  $F$  de  $X$ , tels que  $Q = \uparrow L$  et  $F = \downarrow L$ . Toute lentille forte est une lentille.*

*Lorsque  $X$  est un cpo continu cohérent, réciproquement, toute lentille est forte.*

*Démonstration.* Que toute lentille forte soit une lentille est évident. Soit  $L$  une lentille.  $L$  s'écrit  $Q \cap F$ , où  $Q = \uparrow L$  est compact saturé et  $F = cl(L)$  est fermé, par le lemme 3.5.2. Supposons que  $X$  soit un cpo continu cohérent.  $X$  est en particulier bien filtrant et cohérent, donc par le lemme 3.5.9,  $L$  est patch-compacte. Par le lemme 3.5.10,  $cl(L) = \downarrow L$ , donc  $L$  est une lentille forte.  $\square$

On peut résumer ce que l'on sait sur l'espace des lentilles fortes dans la proposition suivante. Nous n'utiliserons pas la notion de lentille forte avant la section 11.7.3.

**Proposition 3.5.12** *Pour tout espace topologique  $X$ , soit  $\mathcal{P}L(X)$  l'ensemble des lentilles fortes de  $X$ , ordonné par  $\sqsubseteq_{EM}$ . Alors  $\mathcal{P}L(X)$  est un ensemble ordonné inclus dans  $\mathcal{P}\ell(X)$ .  $\mathcal{P}L(X)$  coïncide avec  $\mathcal{P}\ell(X)$ , et est donc un cpo si  $X$  est un cpo continu cohérent.*

**Proposition 3.5.13** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent. Alors  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo continu.*

*Une base de  $\mathcal{P}\ell(X)$  est donnée par la famille des lentilles finitaires  $\langle E \rangle$  à support dans  $B$ , c'est-à-dire telles que  $E \subseteq B$ .*

*On a  $\langle E \rangle \ll L$  dans  $\mathcal{P}\ell(X)$  si et seulement si  $E \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E$ , où  $F = cl(L)$  et  $Q = \uparrow L$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 3.5.4, qui s'applique parce que tout cpo continu est sobre donc bien filtrant,  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo. Montrons qu'il est continu. Pour ceci, nous devons étudier la relation  $\ll$  sur  $\mathcal{P}\ell(X)$ , et nous reprenons certains arguments du lemme 3.3.1 et du lemme 3.4.4. Pour bien distinguer les différentes relations  $\ll$ , notons  $\ll_Y$  la relation "bien au-dessous" sur l'espace  $Y$ , que  $Y$  soit  $\mathcal{P}\ell(X)$ ,  $\mathcal{Q}(X)$ , ou  $\mathcal{H}(X)$ .

1. Fixons  $L$  et  $L'$  deux éléments de  $\mathcal{P}\ell(X)$ . Montrons que s'il existe une famille finie  $E \subseteq B$  telle que  $L \sqsubseteq_{EM} \langle E \rangle$ ,  $L' \subseteq \uparrow E$  et  $E \subseteq \downarrow L'$ , alors  $L \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L'$ . Notons  $Q = \uparrow L$ ,  $F = cl(L)$ ,  $Q' = \uparrow L'$ ,  $F' = cl(L')$ . Puisque  $L \sqsubseteq_{EM} \langle E \rangle$ , on a : (a)  $Q \supseteq \uparrow E$  et : (b)  $F \subseteq \downarrow E$ , en utilisant

le lemme 3.5.6. Puisque  $L' \subseteq \uparrow E$  et que  $\uparrow E = \widehat{\uparrow E}$  par le lemme 3.1.1), on a : (c)  $Q' \subseteq \widehat{\uparrow E}$ . Puisque  $E \subseteq \downarrow L'$ , on a : (d)  $E \subseteq \downarrow F'$ .

Soit  $(L_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de lentilles telle que  $L' \sqsubseteq_{EM} \sup_{i \in I} L_i$ . Posons  $Q_i = \uparrow L_i$ ,  $F_i = cl(L_i)$ . On a alors  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq Q'$  et  $cl(\bigcup_{i \in I} F_i) \supseteq F'$ . Puisque  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq Q'$ , et par (c),

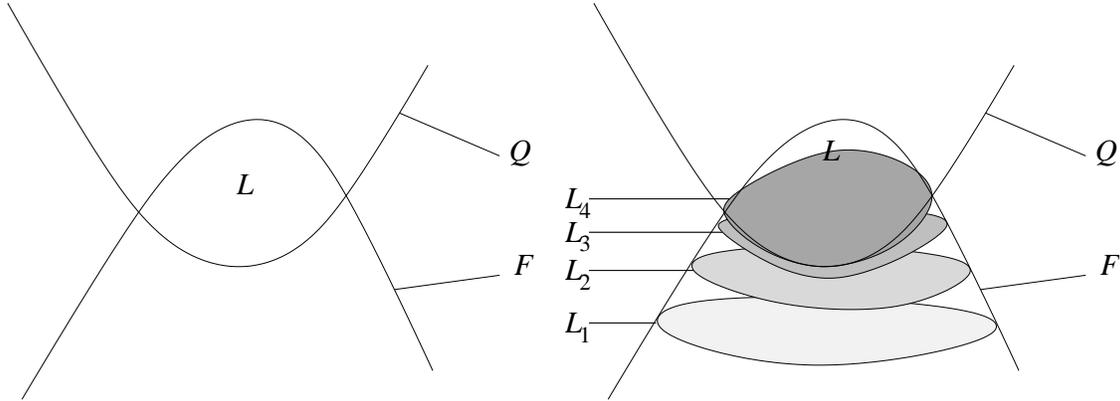


FIG. 3.1 – Comment approximer une lentille  $L = Q \cap F$

$\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq \overset{\circ}{\uparrow} E$ . Comme  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq \overset{\circ}{\uparrow} E$ . D'autre part, par (d) et la proposition 3.4.5,  $\downarrow E \ll_{\mathcal{H}(X)} F'$ . Or  $F'$  est inclus dans la borne supérieure  $cl(\bigcup_{i \in I} F_i)$  des  $F_i$  dans  $\mathcal{H}(X)$ , donc il existe  $j \in I$  tel que  $\downarrow E \subseteq F_j$ .

Choisissons  $k \in I$  tel que  $L_i, L_j \sqsubseteq_{EM} L_k$ , la famille étant dirigée. En particulier  $Q_k \subseteq Q_i \subseteq \overset{\circ}{\uparrow} E \subseteq \uparrow E \subseteq Q$  par (a), et  $F_k \supseteq F_j \supseteq \downarrow E \supseteq F$  par (b). Donc  $L \sqsubseteq_{EM} L_k$ .

2. En particulier, fixons une lentille  $L$ ,  $Q = \uparrow L$ ,  $F = cl(L)$ . Lorsque  $E$  est une partie finie non vide de  $B$ , il suffit que  $E \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E$  pour que  $\langle E \rangle \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L$ .

Il sera utile pour comprendre la suite de la démonstration de se référer à quelques figures illustratives. La partie gauche de la figure 3.1 illustre la lentille  $L$ , le compact  $Q = \uparrow L$ , et le fermé  $F = cl(L)$ . La partie droite de cette même figure montre quelques approximants  $L_1 \sqsubseteq_{EM} L_2 \sqsubseteq_{EM} L_3 \sqsubseteq_{EM} L_4 \sqsubseteq_{EM} L$ . Intuitivement, le bord bas de chaque  $L_i$  est au-dessous du bord bas de  $L = Q \cap F$ ; le bord haut monte jusqu'à épouser, asymptotiquement, le bord haut de  $L$ , et chaque  $L_i$  fait toute la largeur possible — une représentation graphique du fait que tout point de  $L$  est au-dessus d'un point de chaque  $L_i$ .

3. Considérons la famille des parties finies non vides  $E \subseteq B$  telles que  $E \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E$ , et montrons qu'elle est dirigée dans l'ordre  $\sqsubseteq_{EM}$ . Ceci est en réalité, et de loin, la partie la plus technique de la démonstration.

- Nous devons d'abord montrer que cette famille est non vide. Or,  $Q$  étant compact est l'intersection d'une famille filtrante de compacts finitaires  $\downarrow E$  non vides à support dans  $B$ , avec  $Q \subseteq \uparrow E$ . C'est le lemme 3.1.4, qui s'applique car  $X$  est un cpo continu de base  $B$ . Choisissons un tel ensemble fini non vide  $E_1$ , tel que  $Q \subseteq \uparrow E_1$ . Posons  $E = E_1 \cap \downarrow F$ . Pour tout  $x \in L$ , puisque  $x \in Q$  et  $Q \subseteq \uparrow E_1$ , il existe  $y \in E_1$  tel que  $y \ll x$ . Puisque  $L \subseteq F$ ,  $x \in F$ , donc  $y \in \downarrow F$ . Donc  $L \subseteq \uparrow(E_1 \cap \downarrow F) = \uparrow E$ . Comme  $\uparrow E$  est clos par le haut et  $Q = \uparrow L$ , on a  $Q \subseteq \uparrow E$ . En particulier,  $E$  est non vide,  $Q$  étant non vide. De plus, par définition,  $E \subseteq \downarrow F$ .
- Montrons ensuite que si  $E_1, E_2 \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E_1, \uparrow E_2$ , on peut trouver une lentille finitaire au-dessus de  $\langle E_1 \rangle$  et de  $\langle E_2 \rangle$ , et bien au-dessous de  $L$ . Nous la construisons sous

la forme  $\uparrow E \cap \downarrow E'$ , avec  $E \leq^h E'$ .

Puisque  $X$  est un cpo continu,  $X$  est sobre, donc bien filtrant. Puisque  $X$  est de plus cohérent, on peut appliquer le lemme 3.5.9 :  $L$  est patch-compact. Maintenant, par le lemme 3.5.10,  $F = cl(L) = \downarrow L$ . (C'est uniquement ici que nous avons besoin du fait que  $X$  soit cohérent.)

Puisque  $E_1 \subseteq \downarrow F$ , pour tout  $x_1 \in E_1$  il existe  $y \in F$  tel que  $x_1 \ll y$ . Comme  $F = \downarrow L$ , il existe  $z \in L$  tel que  $x_1 \ll y \leq z$ . Puisque  $z \in L$ ,  $z$  appartient à  $Q$ . Or  $Q \subseteq \uparrow E_2$ , donc il existe un élément  $x_2$  de  $E_2$  tel que  $x_2 \ll z$ .  $X$  étant un cpo continu,  $z$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $z' \in B$  tels que  $z' \ll z$ . Il existe en particulier un  $z' \ll z$  tel que  $x_1, x_2 \ll z'$ . Rassemblons en un ensemble  $E'_1$  les  $z$  ainsi construits lorsque  $x_1$  varie dans  $E_1$ . Construisons de même l'ensemble  $E'_2$  obtenu par la même construction, en échangeant le rôle des indices 1 et 2. Posons  $E'_0 = E'_1 \cup E'_2$ . Par construction :

- (a<sub>0</sub>)  $E'_0 \subseteq \downarrow F$ . En effet, chaque élément  $z'$  de  $E'_0$  est obtenu de sorte que  $z' \ll z$  pour un certain  $z \in L$ , donc  $z \in F$ .
- (b<sub>0</sub>)  $E_1, E_2 \subseteq \downarrow E'_0$ . En effet, tout élément  $x_1$  de  $E_1$  est tel que  $x_1 \ll z'$  pour le  $z'$  construit ci-dessus, et symétriquement pour  $E_2$ .
- (c<sub>0</sub>)  $E'_0 \subseteq \uparrow E_1, \uparrow E_2$ . Car tout  $z'$  de  $E'_1$  est non seulement tel que  $x_1 \ll z'$ , mais aussi tel qu'il existe  $x_2 \in E_2$  avec  $x_2 \ll z'$ , par construction. De même pour les éléments  $z'$  de  $E'_2$ .
- (d<sub>0</sub>)  $E'_0 \subseteq B$ .

On utilise maintenant le fait que  $Q \cup \uparrow E'_0$  est l'union d'un compact saturé et d'un compact finitaire, et est donc un compact saturé. Puisque  $Q \subseteq \uparrow E_1, \uparrow E_2$  et par (c<sub>0</sub>) ci-dessus,  $Q \cup \uparrow E'_0$  est un compact saturé inclus dans l'ouvert  $\uparrow E_1 \cap \uparrow E_2$ . Puisque  $X$  est un cpo continu,  $X$  est en particulier localement compact, donc il existe un compact saturé  $Q'$  tel que  $Q \cup \uparrow E'_0 \subseteq \overset{\circ}{Q'} \subseteq Q' \subseteq \uparrow E_1 \cap \uparrow E_2$ . Par le lemme 3.3.1,  $Q' \ll_{\mathcal{Q}(X)} Q \cup \uparrow E'_0$ . Par le lemme 3.3.3, il existe donc un compact finitaire  $\uparrow E_0$ , avec  $E_0 \subseteq B$ , tel que  $Q' \ll_{\mathcal{Q}(X)} \uparrow E_0 \ll_{\mathcal{Q}(X)} Q \cup \uparrow E'_0$ . En particulier,

- (e<sub>0</sub>)  $Q \cup \uparrow E'_0 \subseteq \uparrow E_0$ . On rappelle en effet que l'intérieur de  $\uparrow E_0$  est  $\uparrow E_0$ , par le lemme 3.1.1.
- (f<sub>0</sub>)  $E_0 \subseteq \uparrow E_1 \cap \uparrow E_2$ . En effet,  $E_0 \subseteq \uparrow E_0$ ,  $Q' \ll_{\mathcal{Q}(X)} \uparrow E_0$ , et  $Q' \subseteq \uparrow E_1 \cap \uparrow E_2$ .
- (g<sub>0</sub>)  $E_0 \subseteq B$ .

Posons  $E = E_0 \cap \downarrow F$ . Alors  $E$  vérifie essentiellement les mêmes propriétés que  $E_0$ , et de plus  $E \subseteq \downarrow F$  :

- (e)  $Q \cup \uparrow E'_0 \subseteq \uparrow E$ . En effet, on note que pour tout  $x \in L$ , en particulier  $x \in Q$ , donc il existe  $z_0 \in E_0$  tel que  $z_0 \ll x$  par (e<sub>0</sub>). Mais alors, comme  $x \in F$ ,  $z_0$  appartient aussi à  $\downarrow F$ , donc à  $E$ . On en déduit que  $x \in \uparrow E$ . Comme  $x$  est arbitraire,  $L \subseteq \uparrow E$ , et puisque  $E$  est clos par le haut,  $Q = \uparrow L \subseteq \uparrow E$ . Pour montrer (e), il ne reste qu'à justifier le fait que  $E'_0 \subseteq \uparrow E$ . Or, pour tout  $x \in E'_0$ , il existe  $z_0 \in E_0$  tel que  $z_0 \ll x$ , encore par (e<sub>0</sub>). De plus,  $x \in \downarrow F$  par (a<sub>0</sub>), donc  $z_0 \in \downarrow F$ . On en déduit de nouveau que  $x \in \uparrow E$ . D'où (e).
- (f)  $E \subseteq \uparrow E_1 \cap \uparrow E_2$ . Conséquence triviale de (e<sub>0</sub>).
- (g)  $E \subseteq B$ . Conséquence triviale de (g<sub>0</sub>).

Posons maintenant  $E' = E'_0 \cup (E \setminus \downarrow E'_0)$ . Montrons que  $E \leq^{\sharp} E'$ . Pour tout  $x \in E$ , soit  $x \in \downarrow E'_0$ , donc il existe  $y \in E'_0$  tel que  $x \ll y$ , en particulier  $x \leq y$ ; soit  $x \notin \downarrow E'_0$  et alors il existe  $y \in E'$  tel que  $x \leq y$ , à savoir  $y = x$ . Donc  $E \leq^b E'$ . Pour tout  $y \in E'$ , soit  $y \in E'_0$ , et alors par (e), il existe  $x \in E$  tel que  $x \ll y$ , en particulier  $x \leq y$ ; soit  $y \in E \setminus \downarrow E'_0$ , et alors  $x = y$  convient : donc  $E \leq^{\sharp} E'$ .

Posons donc  $L' = \uparrow E \cap \downarrow E'$ .  $L'$  est une lentille finitaire, par la définition 3.5.5.

On vérifie maintenant que  $\langle E_1 \rangle \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L'$ . Par le point 2. plus haut, il suffit de vérifier que  $E_1 \subseteq \downarrow\downarrow L'$  et que  $\uparrow L' \subseteq \uparrow E_1$ . Puisque  $E \leq^{\sharp} E'$ ,  $\downarrow\downarrow L' = \downarrow L' = \downarrow E'$ , et  $\uparrow L' = \uparrow E$ . Il suffit donc de montrer que  $E_1 \subseteq \downarrow E'$  et  $E \subseteq \uparrow E_1$ . La première inclusion est une conséquence de (b<sub>0</sub>), la seconde provient de (f).

De manière symétrique, on a  $\langle E_2 \rangle \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L'$ .

Par le lemme 3.5.6,  $L' = \langle E \cup E' \rangle$ . Par (d<sub>0</sub>) et (g),  $L'$  est à support dans  $B$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $E \cup E' \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow(E \cup E')$ . Pour la première inclusion, on note que  $E \cup E' = E \cup E'_0 \cup (E \setminus \downarrow E'_0) = E \cup E'_0$ . Or  $E = E_0 \cap \downarrow F \subseteq \downarrow F$  par définition de  $E$ , et  $E'_0 \subseteq \downarrow F$  par (a<sub>0</sub>). Pour la seconde inclusion, on a  $Q \subseteq \uparrow E$  par (e), donc trivialement  $Q \subseteq \uparrow E \cup \uparrow E' = \uparrow(E \cup E')$ .

4. Pour montrer que  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo continu, il ne reste plus qu'à montrer que  $L$  est la borne supérieure dans l'ordre  $\sqsubseteq_{EM}$  de la famille étudiée au point 3. Rappelons que cette famille est la famille des  $\langle E \rangle$ , lorsque  $E$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{F}$  des parties finies non vides incluses dans  $B$  telles que  $E \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E$ . Par le lemme 3.5.4, la borne supérieure (pour  $\sqsubseteq_{EM}$ ) de cette famille est  $\bigcap_{E \in \mathcal{F}} \uparrow E \cap cl(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} cl(E))$ .

Puisque  $Q \subseteq \uparrow E$  pour tout  $E \in \mathcal{F}$ ,  $\bigcap_{E \in \mathcal{F}} \uparrow E \supseteq Q$ . Réciproquement, par le lemme 3.3.3,  $Q$  égale l'intersection filtrante des  $\uparrow E_0$  avec  $Q \subseteq \uparrow E_0$ . Il est facile de voir que pour tout  $E_0$  tel que  $Q \subseteq \uparrow E_0$ , on a  $Q \subseteq \uparrow E$ , où  $E = E_0 \cap \downarrow F$ , et alors  $E$  est dans la famille  $\mathcal{F}$ . C'est un argument que nous avons déjà utilisé plus haut : pour tout  $x \in L$ , comme  $L \subseteq Q \subseteq \uparrow E_0$ , il existe  $y \in E_0$  tel que  $y \ll x$ , et alors  $y$  est en fait dans  $E$  puisque  $x \in F$ . Donc  $Q = \bigcap_{E_0/Q \subseteq \uparrow E_0} \uparrow E_0 \supseteq \bigcap_{E_0/Q \subseteq \uparrow E_0} \uparrow (E_0 \cap \downarrow F) \supseteq \bigcap_{E \in \mathcal{F}} \uparrow E$ . On en conclut que  $\bigcap_{E \in \mathcal{F}} \uparrow E = Q$ .

Puisque  $E \subseteq \downarrow F$  pour tout  $E \in \mathcal{F}$ , en particulier  $cl(E) = \downarrow E \subseteq \downarrow F$ , donc on a  $cl(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} cl(E)) \subseteq cl(\downarrow F) \subseteq F$ . Réciproquement, soit  $x$  un élément quelconque de  $F$ , et montrons que  $x$  est dans  $cl(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} cl(E))$ . Il suffit de montrer que pour tout ouvert  $U$  contenant  $x$ ,  $U$  intersecte l'un des  $E \in \mathcal{F}$ . Comme  $X$  est un cpo continu, on peut écrire  $x$  comme la borne supérieure des  $z$  dans  $B$  tels que  $z \ll x$ . Il en existe en particulier un dans  $U$ . Fixons une lentille finitaire quelconque  $\langle E_0 \rangle$  telle que  $E_0 \in \mathcal{F}$ , et considérons  $E = E_0 \cup \{z\}$ , et la lentille finitaire  $\langle E \rangle$ . On a  $Q \subseteq \uparrow E_0 \subseteq \uparrow E$ , et  $E \subseteq \downarrow F$  puisque  $E_0 \subseteq \downarrow F$ ,  $z \ll x$ , et  $x \in F$ . Comme  $z \in U$ , et que  $z$  appartient par construction à  $E$ ,  $U$  intersecte  $E$ . Donc  $cl(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} cl(E)) = F$ .

On en conclut que la borne supérieure des  $\langle E \rangle$ ,  $E \in \mathcal{F}$ , est  $Q \cap F = L$ .

5. Grâce au point 2., on sait que si  $E \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E$ , alors  $\langle E \rangle \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L$ . Réciproquement, supposons  $\langle E \rangle \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L$ . Écrivons  $L$  sous la forme d'une borne supérieure de lentilles finitaires  $\langle E' \rangle$  telles que  $E' \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E'$ , où comme d'habitude  $Q = \uparrow L$  et  $F = cl(L)$ . Puisque  $\langle E \rangle \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L$ , il en existe une telle que  $\langle E \rangle \sqsubseteq_{EM} \langle E' \rangle$ . Par le lemme 3.5.6,  $E \leq^{\sharp} E'$ , donc d'une part  $E \subseteq \downarrow E' \subseteq \downarrow F$ , d'autre part  $E' \subseteq \uparrow E$ . De cette dernière inclusion et de  $Q \subseteq \uparrow E'$ ,

on déduit  $Q \subseteq \hat{\uparrow}E$ . Ceci montre la dernière partie de la proposition.  $\square$

Sous les hypothèses de la proposition 3.5.13, on peut en fait affirmer davantage :  $\mathcal{P}\ell(X)$  est lui-même cohérent. Nous le démontrerons plus bas. L'argument est essentiellement celui de Mislove (1998, corollaire 4.48). Nous introduisons deux nouveaux espaces, cousins très proches de l'espace  $\mathcal{P}\ell(X)$ , et nous montrerons que tous ces espaces ont la même topologie patch, sous quelques hypothèses.

Le premier,  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ , est à  $\mathcal{P}\ell(X)$  ce que  $\mathcal{H}_u(X)$  est à  $\mathcal{H}(X)$  : un espace dont la topologie a une définition topologique claire à base d'ouverts simples. De plus, lorsque  $X$  est un cpo continu cohérent,  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  coïncidera avec  $\mathcal{P}\ell(X)$ .

Le second,  $\mathcal{L}(X)$ , est à  $\mathcal{P}\ell(X)$  ce que  $\mathcal{H}^{op}(X)$  est à  $\mathcal{H}(X)$  : un espace bien plus simple à comprendre, mais avec un ordre de spécialisation qui n'est pas celui qui nous intéresse.

Passons au premier de ces espaces. Nous reprenons ici les notations  $\square U$  du lemme 3.3.4 et  $\diamond U$  de la proposition 3.4.17, avec une définition légèrement différente. L'esprit des définitions est cependant le même. La topologie engendré par les ouverts  $\square U$  et  $\diamond U$  est traditionnellement appelée la topologie de Vietoris.

**Définition 3.5.14 (Vietoris)** *L'espace  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est l'espace des lentilles sur  $X$ , muni de la topologie de Vietoris, c'est-à-dire la topologie engendrée par les ensembles*

$$\begin{aligned}\square U &= \{L \text{ lentille de } X \mid L \subseteq U\} \\ \diamond U &= \{L \text{ lentille de } X \mid L \cap U \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

où  $U$  parcourt les ouverts de  $X$ .

**Lemme 3.5.15** *Dans  $\mathcal{P}\ell(X)$ , on a : (i)  $\square(U \cap V) = \square U \cap \square V$  ; (ii) si  $U \subseteq V$  alors  $\square U \subseteq \square V$  ; (iii) pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$ ,  $(\square U_i)_{i \in I}$  est dirigée et  $\square \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \square U_i$ .*

*On a aussi : (iv)  $\diamond(U \cup V) = \diamond U \cup \diamond V$  ; (v) si  $U \subseteq V$  alors  $\diamond U \subseteq \diamond V$  ; (vi) pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$ ,  $(\diamond U_i)_{i \in I}$  est dirigée, et  $\diamond \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \diamond U_i$ .*

*Enfin, on a : (vii)  $\square U \subseteq \diamond U$  ; (viii)  $\square(U \cup V) \subseteq \square U \cup \diamond V$  ; (ix)  $\square U \cap \diamond V \subseteq \diamond(U \cap V)$ . De plus, (x)  $\square(U \cup V) = \square U \cup (\square(U \cup V) \cap \diamond V)$ , et (xi)  $\square U \cap \diamond V = \square U \cap \diamond(U \cap V)$ .*

*Démonstration.* Mêmes arguments qu'aux lemmes 3.3.5 (en utilisant le fait que toute lentille est compacte) pour la première partie, et 3.4.18 pour la deuxième. Pour la troisième, d'abord, (vii)  $\square U \subseteq \diamond U$  est évident, car toute lentille est non vide. Démontrons (viii). Si  $L \in \square(U \cup V)$ , c'est-à-dire  $L \subseteq U \cup V$ , alors soit  $L$  est totalement inclus dans  $U$  et alors  $L \in \square U$ , soit il existe un élément de  $L$  hors de  $U$ , qui est donc dans  $V$ , donc  $L \in \diamond V$ . Donc  $\square(U \cup V) \subseteq \square U \cup \diamond V$ . (ix) Si  $L \in \square U \cap \diamond V$ , alors il existe un élément  $x$  de  $L$  qui est dans  $V$ , et comme  $L \subseteq U$ ,  $x$  est aussi dans  $U$ , donc dans  $U \cap V$ . Donc  $\square U \cap \diamond V \subseteq \diamond(U \cap V)$ . Finalement, (x) est une conséquence directe de (viii) et (ii) (utilisé pour montrer que  $\square U \subseteq \square(U \cup V)$ ), (xi) est une conséquence directe de (ix) et (v).  $\square$

Il y a une relation très forte entre la topologie de Vietoris et la topologie de Scott sur l'espace des lentilles.

**Lemme 3.5.16** *Soit  $X$  un espace bien filtrant. Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\square U$  et  $\diamond U$  sont des ouverts de Scott de  $\mathcal{P}\ell(X)$ . La topologie de Vietoris (de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ ) est moins fine que la topologie de Scott (de  $\mathcal{P}\ell(X)$ ).*

*Démonstration.* D'abord,  $\square U$  est clos par le haut : si  $L \in \square U$  et  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$ , en particulier  $\uparrow L \supseteq \uparrow L'$  et  $L \subseteq U$ . Comme  $U$  est clos par le haut,  $\uparrow L \subseteq U$ . Donc  $L' \subseteq \uparrow L' \subseteq U$ , c'est-à-dire  $L' \in \square U$ . Ensuite, si  $(L_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée dans  $\mathcal{P}\ell(X)$ , dont la borne supérieure est dans  $\square U$ , alors en utilisant le lemme 3.5.4,  $\bigcap_{i \in I} \uparrow L_i \cap cl(\bigcup_{i \in I} cl(L_i)) \subseteq U$ . Soit  $F$  le fermé  $cl(\bigcup_{i \in I} cl(L_i))$ . On a donc  $\bigcap_{i \in I} \uparrow L_i \cap F \subseteq U$ , donc  $\bigcap_{i \in I} \uparrow L_i \subseteq U \cup (X \setminus F)$ . Comme  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I$  tel que  $\uparrow L_i \subseteq U \cup (X \setminus F)$ , c'est-à-dire tel que  $\uparrow L_i \cap F \subseteq U$ . En particulier,  $L_i = \uparrow L_i \cap cl(L_i) \subseteq \uparrow L_i \cap F \subseteq U$ , c'est-à-dire  $L_i \in \square U$ . Donc  $\square U$  est un ouvert de Scott.

De même,  $\diamond U$  est clos par le haut : si  $L \in \diamond U$  et  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$ , en particulier  $cl(L) \subseteq cl(L')$  et  $L \cap U \neq \emptyset$ . Donc  $cl(L) \cap U \neq \emptyset$ , ce qui implique  $cl(L') \cap U \neq \emptyset$ , autrement dit  $cl(L') \not\subseteq X \setminus U$ . Or  $cl(L')$  est inclus dans le fermé  $X \setminus U$  si et seulement si  $L'$  y est inclus. Donc  $L' \not\subseteq X \setminus U$ , c'est-à-dire  $L' \cap U \neq \emptyset$ . Donc  $L' \in \diamond U$ . Ensuite, si  $(L_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée dans  $\mathcal{P}\ell(X)$ , dont la borne supérieure est dans  $\square U$ , alors en utilisant le lemme 3.5.4,  $\bigcap_{i \in I} \uparrow L_i \cap cl(\bigcup_{i \in I} cl(L_i))$  intersecte  $U$ . En particulier,  $cl(\bigcup_{i \in I} cl(L_i))$  intersecte  $U$ . Puisque  $U$  est ouvert,  $\bigcup_{i \in I} cl(L_i)$  intersecte lui-même  $U$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $cl(L_i)$  intersecte  $U$ . Il s'ensuit de même que  $L_i$  intersecte  $U$ , c'est-à-dire  $L_i \in \diamond U$ . Donc  $\diamond U$  est un ouvert de Scott.  $\square$

**Lemme 3.5.17** *Soit  $X$  un espace topologique. Le préordre de spécialisation de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est l'ordre d'Egli-Milner topologique  $\sqsubseteq_{\text{EM}}$ .*

*Démonstration.* Notons temporairement  $\preceq$  le préordre de spécialisation de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ . Supposons  $L \preceq L'$ . La saturation  $\uparrow L$  de  $L$  est l'intersection de tous les ouverts  $U$  tels que  $L \subseteq U$ . Pour chacun de ces ouverts  $U$ ,  $L \in \square U$ , donc  $L' \in \square U$  puisque  $L \preceq L'$ . En particulier,  $L' \subseteq U$ , pour tous les ouverts  $U$  contenant  $L$ . On en déduit que  $L' \subseteq \uparrow L$ , donc  $\uparrow L' \subseteq \uparrow L$ . Ensuite, considérons l'intérieur  $V$  du complémentaire  $X \setminus L'$  de  $L'$ . Clairement,  $L'$  n'est pas dans  $\diamond V$ . Puisque  $L \preceq L'$ ,  $L$  n'est pas non plus dans  $\diamond V$ , autrement dit  $L$  n'intersecte pas  $X \setminus cl(L')$ . Donc  $L \subseteq cl(L')$ , donc  $cl(L) \subseteq cl(L')$ . On en conclut que  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$ .

Réciproquement, supposons  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$ , c'est-à-dire  $L' \subseteq \uparrow L$  et  $L \subseteq cl(L')$ . Pour tout ouvert  $U$ , si  $L \in \square U$ , c'est-à-dire si  $L \subseteq U$ , alors  $L' \subseteq \uparrow U = U$ , donc  $L' \in \square U$ ; si  $L \in \diamond U$ , c'est-à-dire si  $L$  intersecte  $U$ , alors  $cl(L')$  intersecte aussi  $U$ , donc, puisque  $U$  est ouvert,  $U$  intersecte aussi  $L'$ , autrement dit  $L' \in \diamond U$ . On en déduit que si  $L$  appartient à une union d'intersections quelconque d'ouverts de la forme  $\square U$  ou  $\diamond U$ , alors il en est de même de  $L'$ . Donc  $L \preceq L'$ .  $\square$

**Proposition 3.5.18** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent. La topologie de Scott coïncide avec la topologie de Vietoris sur l'espace des lentilles sur  $X$  :  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X) = \mathcal{P}\ell(X)$ .*

*Démonstration.* Comme  $X$  est un cpo continu, il est sobre, donc bien filtrant. Au vu du lemme 3.5.16, il suffit donc de démontrer que tout ouvert de Scott est un ouvert de Vietoris. Par la proposition 3.5.13,  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo continu. Donc la topologie de Scott est engendrée par les  $\uparrow_{\mathcal{P}\ell(X)} \langle E \rangle = \{L' \in \mathcal{P}\ell(X) \mid \langle E \rangle \ll_{\mathcal{P}\ell(X)} L'\} = \{L' \in \mathcal{P}\ell(X) \mid E \subseteq \downarrow L' \text{ et } L' \subseteq \uparrow E\}$ , lorsque  $E$  parcourt les

parties finies non vides d'une base  $B$  de  $X$ . Écrivons  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $n \geq 1$ . Alors  $E \subseteq \downarrow L'$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i \in \downarrow L'$ . Or  $x_i \in \downarrow L'$  si et seulement s'il existe  $y \in L'$  tel que  $x_i \ll y$ , si et seulement si  $L'$  intersecte  $\uparrow x_i$ . Donc  $\uparrow_{\mathcal{P}\ell(X)} \langle E \rangle = \bigcap_{i=1}^n \diamond \uparrow x_i \cap \square \uparrow E$  est un ouvert de Vietoris.  $\square$

Passons au second espace,  $\mathcal{L}(X)$ .

**Définition 3.5.19 (Espace de lentilles)** *Pour tout espace topologique, on note  $\mathcal{L}(X)$  l'espace des lentilles sur  $X$ , ordonné par inclusion inverse  $\supseteq$ . On l'appellera simplement espace des lentilles sur  $X$ .*

Nous l'équiperons implicitement, comme d'habitude, de la topologie de Scott associée. Notons que  $\mathcal{L}(X)$  et  $\mathcal{P}\ell(X)$  diffèrent uniquement par leur ordre de spécialisation. Celui de  $\mathcal{L}(X)$  est l'inclusion inverse, celui de  $\mathcal{P}\ell(X)$  est  $\sqsubseteq_{EM}$ , dont on peut se faire une idée en regardant la figure 3.1.

Généralisons la notation  $\langle E \rangle$  au cas de n'importe quelle partie  $E$ . La nouvelle définition coïncidera avec la précédente ( $\langle E \rangle = \uparrow E \cap \downarrow E$ ) dans le cas où  $K = E$  est fini, par le lemme 3.5.6.

**Lemme 3.5.20** *Soit  $X$  un espace topologique. Notons, pour toute partie  $E$  de  $X$ ,  $\langle E \rangle = \uparrow E \cap cl(E)$ . Pour toute famille filtrante de lentilles  $(L_i)_{i \in I}$  de  $X$ ,  $\langle \bigcap_{i \in I} L_i \rangle = \bigcap_{i \in I} L_i$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\bigcap_{i \in I} L_i \subseteq L_i$  pour tout  $i \in I$ ,  $\langle \bigcap_{i \in I} L_i \rangle \subseteq \langle L_i \rangle = L_i$  (par le lemme 3.5.2), donc  $\langle \bigcap_{i \in I} L_i \rangle \subseteq \bigcap_{i \in I} L_i$ . L'inclusion inverse est évidente.  $\square$

Il n'y a aucune raison en général pour que  $\bigcap_{i \in I} L_i$  soit elle-même une lentille. Pour ceci, il est nécessaire et suffisant que  $\bigcap_{i \in I} L_i$  soit compact et non vide.

**Lemme 3.5.21** *Soit  $X$  un espace bien filtrant. Pour toute famille filtrante de lentilles  $(L_i)_{i \in I}$  de  $X$ ,  $\bigcap_{i \in I} L_i$  est une lentille.*

*Démonstration.* Montrons que  $\uparrow \bigcap_{i \in I} L_i = \bigcap_{i \in I} \uparrow L_i$ . On a  $\bigcap_{i \in I} L_i \subseteq L_i$  pour tout  $i \in I$ , donc  $\uparrow \bigcap_{i \in I} L_i \subseteq \uparrow L_i$ , donc  $\uparrow \bigcap_{i \in I} L_i \subseteq \bigcap_{i \in I} \uparrow L_i$ . Réciproquement, soit  $U$  un ouvert quelconque contenant  $\bigcap_{i \in I} L_i$ . Puisque  $X$  est bien filtrant, il existe  $i \in I$  tel que  $L_i \subseteq U$ . Comme  $U$  est clos par le haut,  $\uparrow L_i \subseteq U$ . En particulier,  $\bigcap_{i \in I} \uparrow L_i \subseteq U$ . Or  $\uparrow \bigcap_{i \in I} L_i$  est la plus petite partie saturée contenant  $\bigcap_{i \in I} L_i$ , et est donc l'intersection de tous les  $U$  contenant  $\bigcap_{i \in I} L_i$  : elle contient donc  $\bigcap_{i \in I} \uparrow L_i$ .

Puisque  $X$  est bien filtrant de nouveau, et comme  $\uparrow L_i$  est un compact saturé non vide pour tout  $i \in I$ ,  $\bigcap_{i \in I} \uparrow L_i$  est un compact saturé non vide. On en déduit que  $\uparrow \bigcap_{i \in I} L_i$  est un compact saturé non vide, donc  $\bigcap_{i \in I} L_i$  est un compact non vide. Par le lemme 3.5.20, c'est donc une lentille.  $\square$

**Proposition 3.5.22** *Soit  $X$  un espace bien filtrant. Alors  $\mathcal{L}(X)$  est un cpo. La borne supérieure de la famille dirigée (pour  $\supseteq$ , c'est-à-dire filtrante pour l'inclusion)  $(L_i)_{i \in I}$  est  $\bigcap_{i \in I} L_i$ .*

Lorsque  $X$  est stablement localement compact,  $\mathcal{L}(X)$  sera un cpo continu. C'est ce que nous montrons à la proposition 3.5.26 ci-dessous. Nous reprenons pour cela les arguments de Alvarez-Manilla (2000, lemme 5.23).

**Lemme 3.5.23** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Pour tout patch-ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout  $x \in U$ , il existe une lentille  $L = Q \cap F$  telle que  $L \subseteq U$ ,  $x \in \overset{\circ}{Q}$ , et  $x$  est dans l'intérieur pour la topologie cocompacte de  $F$ .*

*Démonstration.*  $U$  s'écrit comme une union d'intersections finies de parties de la forme  $O$  (ouvert de  $X$ ) ou  $X \setminus Q'$  ( $Q'$  compact saturé de  $X$ ). Comme  $x \in U$ ,  $x$  appartient à une de ces intersections finies. Comme toute intersection finie d'ouverts de  $X$  est encore un ouvert de  $X$ , et toute union finie de compacts saturés est un compact saturé, cette intersection finie s'écrit simplement  $O \cap (X \setminus Q') = O \setminus Q'$ . Il existe donc un ouvert  $O$  et un compact saturé  $Q'$  tels que  $x \in O \setminus Q' \subseteq U$ .

Comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq O$ . D'autre part, par le lemme 3.3.1,  $Q'$  est l'intersection de la famille filtrante des compacts saturés  $Q''$  dont l'intérieur contient  $Q'$ . Comme  $x$  n'est pas dans  $Q'$ , il existe un de ces  $Q''$  qui ne contient pas  $x$ . Autrement dit, il existe un compact saturé  $Q''$  tel que  $Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}''$  et  $x \notin Q''$ . Posons  $F$  le fermé  $X \setminus \overset{\circ}{Q}''$ . On a  $x \in X \setminus Q'' \subseteq F \subseteq X \setminus Q'$ . Or  $X \setminus Q''$  est cocompact par définition, donc  $x$  est dans l'intérieur pour la topologie cocompacte de  $F$ .

Il reste à montrer que  $L = Q \cap F$  est une lentille et que  $L \subseteq U$ .  $L$  est une lentille car  $L$  est non vide, puisque  $x \in L$ . Ensuite,  $L = Q \cap F \subseteq O \cap (X \setminus Q') \subseteq U$ .  $\square$

On en déduit que  $X$  muni de sa topologie patch est localement compact dans un sens fort. Si  $x \in U$ , non seulement on peut trouver un patch-compact  $K$  tel que  $x \in \overset{\circ}{K} \subseteq K \subseteq U$ , mais on peut en fait demander que  $K$  soit une lentille :

**Corollaire 3.5.24** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Pour tout patch-ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout  $x \in U$ , il existe une lentille  $L$  telle que  $x \in \overset{\circ}{L} \subseteq L \subseteq U$ , où  $\overset{\circ}{A}$  désigne le patch-intérieur de  $A$ , c'est-à-dire le plus grand patch-ouvert contenu dans  $A$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 3.5.23, si  $x \in U$ , alors il existe une lentille  $L = Q \cap F$  telle que  $L \subseteq U$ ,  $x \in \overset{\circ}{Q}$ , et  $x$  est dans l'intérieur  $V$  pour la topologie cocompacte de  $F$ . Mais  $\overset{\circ}{Q} \cap V$  est alors patch-ouvert, contient  $x$ , et est contenu dans  $Q \cap F = L$ .  $\square$

**Lemme 3.5.25** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Notons  $\ll_{\mathcal{L}(X)}$  est la relation "bien au-dessous" de  $\mathcal{L}(X)$ . Si  $L \ll_{\mathcal{L}(X)} L'$ , alors il existe une lentille  $L_1$  telle que  $\overset{\circ}{L} \supseteq L_1$  et  $\overset{\circ}{L}_1 \supseteq L'$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 3.3.1,  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo continu, et  $\uparrow L'$  s'écrit comme l'intersection de la famille filtrante des compacts saturés non vides  $Q'$  tels que  $\overset{\circ}{Q}' \supseteq L'$ . Comme  $X$  est localement compact, il est localement relativement compact. Donc  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu, par le lemme 3.4.10. L'ouvert  $X \setminus cl(L')$  est alors l'union de la famille dirigée des ouverts  $U'$  tels que  $U' \Subset X \setminus cl(L')$ . Alors  $L' = \uparrow L' \cap cl(L')$  (par le lemme 3.5.2) est l'intersection de la famille filtrante des  $Q' \cap (X \setminus U')$ , où  $Q'$  et  $U'$  sont comme ci-dessus. Notons que  $Q' \cap (X \setminus U')$  est une lentille, car  $X \setminus U'$  est un fermé, et  $Q' \cap (X \setminus U')$  est non vide car contient  $L'$ .

Puisque  $L \ll_{\mathcal{L}(X)} L'$ , il existe donc  $Q'$  avec  $\overset{\circ}{Q}' \supseteq L'$  et  $U' \in X \setminus cl(L')$  tels que  $Q' \cap (X \setminus U') \subseteq L$ . Comme  $\overset{\circ}{Q}' \supseteq L'$ , par compacité locale il existe un compact saturé  $Q''$  tel que  $\overset{\circ}{Q}' \supseteq Q'' \supseteq \overset{\circ}{Q}'' \supseteq L'$ . Par la propriété d'interpolation appliquée à  $\in$ , il existe aussi un ouvert  $U''$  tel que  $U' \in U'' \in X \setminus cl(L')$ .

Posons  $L_1 = Q'' \cap (X \setminus U'')$ , de nouveau une lentille. Puisque  $U' \in U''$  et  $X$  est localement compact, par le lemme 3.4.11, il existe un compact saturé  $Q_1$  tel que  $U' \subseteq Q_1 \subseteq U''$ . En utilisant de plus le fait que  $Q'' \subseteq \overset{\circ}{Q}'$ ,  $L_1 = Q'' \cap (X \setminus U'')$  est inclus dans  $\overset{\circ}{Q}' \cap (X \setminus Q_1)$ , qui est patch-ouvert. Ce patch-ouvert est inclus dans  $Q' \cap (X \setminus U') \subseteq L$ , donc  $\overset{\circ}{L} \supseteq L_1$ .

Puisque  $U'' \in X \setminus cl(L')$ , de même, il existe un compact saturé  $Q'_1$  tel que  $U'' \subseteq Q'_1 \subseteq X \setminus cl(L')$ . Puisque  $L' \subseteq \overset{\circ}{Q}''$ ,  $L' = \uparrow L' \cap cl(L')$  est inclus dans le patch-ouvert  $\overset{\circ}{Q}'' \cap (X \setminus Q'_1)$ , qui est lui-même inclus dans  $Q'' \cap (X \setminus U'') = L_1$ . Donc  $\overset{\circ}{L}_1 \supseteq L'$ .  $\square$

**Proposition 3.5.26** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact.  $\mathcal{L}(X)$  est un domaine. Si  $X$  est de plus compact, alors  $\mathcal{L}(X)$  a un plus petit élément, à savoir  $X$  lui-même.*

*Pour toutes lentilles  $L$  et  $L'$ , on a  $L \ll_{\mathcal{L}(X)} L'$  si et seulement si  $\overset{\circ}{L} \supseteq L'$ .*

*Démonstration.* Commençons par démontrer la deuxième partie de la proposition. Si  $L \ll_{\mathcal{L}(X)} L'$ , alors  $\overset{\circ}{L} \supseteq L'$  par le lemme 3.5.25. Réciproquement, supposons  $\overset{\circ}{L} \supseteq L'$ , soit  $(L_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de lentilles telle que  $\bigcap_{i \in I} L_i \subseteq L'$ . En particulier,  $\bigcap_{i \in I} L_i \subseteq \overset{\circ}{L}$ . Par la proposition 3.5.8, et comme  $X$  est localement compact et  $T_0$ ,  $X$  est  $T_2$  pour sa topologie patch.  $X$  est donc en particulier sobre pour sa topologie patch. Par le théorème de Hofmann-Mislove,  $X$  est donc bien filtrant dans sa topologie patch. Comme  $X$  est bien filtrant et cohérent, chaque  $L_i$  est patch-compacte par le lemme 3.5.9. Il existe donc  $i \in I$  tel que  $L_i \subseteq \overset{\circ}{L}$ , donc en particulier  $L_i \subseteq L$ . On en conclut que  $L \ll_{\mathcal{L}(X)} L'$ .

Montrons maintenant que  $X$  est un cpo continu. Fixons une lentille  $L'$ , et considérons la famille des  $L \ll_{\mathcal{L}(X)} L'$ , c'est-à-dire des lentilles  $L$  telles que  $\overset{\circ}{L} \supseteq L'$ . Cette famille est non vide : comme  $L'$  est compacte, et que  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q$  tel que  $L' \subseteq \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq X$  ; posons  $L = Q$ , alors  $L' \subseteq \overset{\circ}{Q} \subseteq \overset{\circ}{Q} = \overset{\circ}{L}$ . Si  $L_1 = Q_1 \cap F_1$  et  $L_2 = Q_2 \cap F_2$  sont deux lentilles telles que  $\overset{\circ}{L}_1$  et  $\overset{\circ}{L}_2$  contiennent tous les deux  $L'$ , alors  $L_1 \cap L_2 = (Q_1 \cap Q_2) \cap (F_1 \cap F_2)$  est une lentille car  $X$  est cohérent, et  $L' \subseteq \overset{\circ}{L}_1 \cap \overset{\circ}{L}_2 = \overbrace{\overset{\circ}{L}_1 \cap \overset{\circ}{L}_2}^{\circ}$ . Donc cette famille est dirigée.

Montrons que l'intersection des lentilles  $L$  telles que  $\overset{\circ}{L} \supseteq L'$  est exactement  $L'$ . On réutilise l'argument de la démonstration du lemme 3.5.25 :  $L' = \uparrow L' \cap cl(L')$  est l'intersection de la famille filtrante des  $Q' \cap (X \setminus U')$ , où  $Q'$  parcourt les compacts saturés tels que  $\overset{\circ}{Q}' \supseteq L'$  et  $U'$  parcourt les ouverts tels que  $U' \in X \setminus cl(L')$ . Il ne reste qu'à montrer que la lentille  $L = Q' \cap (X \setminus U')$  est telle que  $\overset{\circ}{L} \supseteq L'$ . Or, puisque  $U' \in X \setminus cl(L')$  et  $X$  est localement compact,

par le lemme 3.4.11, il existe un compact saturé  $Q_1$  tel que  $U' \subseteq Q_1 \subseteq X \setminus cl(L')$ . Donc  $cl(L') \subseteq X \setminus Q_1$ . D'autre part,  $L' \subseteq \overset{\circ}{Q}'$ , donc  $L' = \uparrow L' \cap cl(L')$  est inclus dans le patch-ouvert  $\overset{\circ}{Q}' \cap (X \setminus Q_1)$ . Ce patch-ouvert est lui-même inclus dans  $L = Q' \cap (X \setminus U')$ , puisque  $\overset{\circ}{Q}' \subseteq Q'$  et  $X \setminus Q_1 \subseteq X \setminus U'$ . Donc  $L' \subseteq \overset{\circ}{L}$ .

Finalement, pour montrer que  $\mathcal{L}(X)$  est un domaine, il suffit de réaliser que si  $L_1$  et  $L_2$  sont deux lentilles qui ont un majorant  $L \subseteq L_1, L_2$ , alors  $L_1 \cap L_2$  est une lentille, qui est clairement la borne supérieure de  $L_1$  et de  $L_2$ .  $\square$

Comparons les topologies patch de  $\mathcal{L}(X)$  et de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ . Après quelques lemmes, nous verrons qu'elles coïncident, sous quelques hypothèses.

**Lemme 3.5.27** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Tout ouvert de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est un patch-ouvert de  $\mathcal{L}(X)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\square U$  et  $\diamond U$  sont patch-ouverts dans  $\mathcal{L}(X)$ .

On montre que  $\square U = \{L \mid L \subseteq U\}$  est Scott-ouvert dans  $\mathcal{L}(X)$ . Il est clos par le haut pour  $\supseteq$ , et si  $(L_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de lentilles telles que  $\bigcap_{i \in I} L_i \subseteq U$ , alors il existe un  $i \in I$  tel que  $L_i \subseteq U$ . En effet, par le lemme 3.5.9, chaque  $L_i$  est patch-compact ;  $U$  est ouvert, donc patch-ouvert ; et par la proposition 3.5.8,  $X$  est  $T_2$  pour sa topologie patch, donc sobre, donc bien filtrant.

D'autre part,  $\diamond U = \{L \mid L \cap U \neq \emptyset\}$  est le complémentaire de  $\{L \mid L \subseteq X \setminus U\}$ . Or  $X \setminus U$  est fermé, donc est une lentille puisque  $X$  est compact. Si l'on note  $L'$  cette lentille,  $\diamond U$  est le complémentaire du compact finitaire formé des lentilles au-dessus de  $L'$  (pour  $\supseteq$ ). Donc  $\diamond U$  est patch-ouvert.  $\square$

**Lemme 3.5.28** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Tout compact finitaire de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ , ou bien de  $\mathcal{P}\ell(X)$ , est un patch-fermé de  $\mathcal{L}(X)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que tout compact finitaire de la forme  $\uparrow_{\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)} L$  (resp.  $\uparrow_{\mathcal{P}\ell(X)} L$ ) est patch-fermé dans  $\mathcal{L}(X)$ , où  $\uparrow_{\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)}$  désigne la clôture par le haut d'un élément dans  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  (resp.  $\mathcal{P}\ell(X)$ ). En effet, tout compact finitaire est une union finie de compacts finitaires de cette forme.

Par le lemme 3.5.17,  $\uparrow_{\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)} L = \{L' \mid L \sqsubseteq_{EM} L'\} = \{L' \mid L' \subseteq \uparrow L\} \cap \{L' \mid L' \subseteq cl(L')\}$ . Ceci coïncide avec  $\uparrow_{\mathcal{P}\ell(X)} L$ , par définition de  $\mathcal{P}\ell(X)$ . Il suffit maintenant de montrer que tant  $A = \{L' \mid L' \subseteq \uparrow L\}$  que  $B = \{L' \mid L' \subseteq cl(L')\}$  est patch-fermé dans  $\mathcal{L}(X)$ .  $A$  est juste le compact finitaire des  $L'$  plus grands que la lentille  $\uparrow L$ , et est donc patch-fermé.

Montrons ensuite que  $B = \{L' \mid L' \subseteq cl(L')\}$  est Scott-fermé dans  $\mathcal{L}(X)$ , ce qui impliquera qu'il est patch-fermé. Il est clos par le bas (pour  $\supseteq$ ). De plus, si  $(L_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante pour l'inclusion d'éléments de  $B$ , montrons que  $\bigcap_{i \in I} L_i$  est dans  $B$ , c'est-à-dire  $L \subseteq cl(\bigcap_{i \in I} L_i)$ . ( $\bigcap_{i \in I} L_i$  est la borne supérieure des  $L_i$ , par la proposition 3.5.22.)

Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors  $x \in L$  tel que  $x \notin cl(\bigcap_{i \in I} L_i)$ . Le complémentaire de  $cl(\bigcap_{i \in I} L_i)$  est un voisinage ouvert de  $x$ , donc, puisque  $X$  est localement compact, il existe un ouvert  $U$  et un compact saturé  $Q$  tels que  $x \in U \subseteq Q \subseteq X \setminus cl(\bigcap_{i \in I} L_i)$ .

Soit  $F$  le fermé  $X \setminus U$ . On remarque que  $cl(\bigcap_{i \in I} L_i) \subseteq \overset{\circ}{F}$ . En effet,  $cl(\bigcap_{i \in I} L_i)$  est inclus dans  $X \setminus Q$  (qui est cocompact, donc patch-ouvert), lequel est inclus dans  $F$ .

Comme  $X$  est compact,  $F = X \cap F$  est une lentille, à condition d'être non vide. Or si  $F$  était vide, on aurait  $U = X$ , donc  $cl(\bigcap_{i \in I} L_i) = \emptyset$ , donc  $\bigcap_{i \in I} L_i$  serait vide. Mais ce dernier est une lentille, par la proposition 3.5.22, et est donc non vide. Donc  $F$  est une lentille.

Puisque  $X$  est stablement localement compact, on peut appliquer la proposition 3.5.26 :  $F \ll_{\mathcal{L}(X)} cl(\bigcap_{i \in I} L_i)$ . Or  $(L_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de lentilles dont la borne supérieure  $\bigcap_{i \in I} L_i$  est supérieure ou égale, dans l'ordre  $\supseteq$ , à  $cl(\bigcap_{i \in I} L_i)$ . Donc il existe  $i \in I$  tel que  $F \supseteq L_i$ . Comme  $L_i \in B$ , et  $x \in L$ , on a  $x \in cl(L_i)$ , donc  $x \in F$ , ce qui est impossible.

On en conclut que  $B$  contient bien la borne supérieure  $\bigcap_{i \in I} L_i$  de la famille  $(L_i)_{i \in I}$ , et est donc Scott-fermé.  $\square$

**Proposition 3.5.29** *Soit  $X$  un cpo continu, cohérent et compact. Les topologies patch de  $\mathcal{P}\ell(X)$ , de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  et de  $\mathcal{L}(X)$  coïncident. Elles sont compactes et  $T_2$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 3.5.18, les topologies de  $\mathcal{P}\ell(X)$  et de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  coïncident, donc aussi leurs topologies patch.

Montrons que la topologie patch de  $\mathcal{L}(X)$  est plus fine que celle de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ , autrement dit que tout patch-ouvert de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est un patch-ouvert de  $\mathcal{L}(X)$ . D'abord, tout ouvert de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est un patch-ouvert de  $\mathcal{L}(X)$ , par le lemme 3.5.27. Le lemme s'applique en effet, car  $X$  est un cpo continu, cohérent et compact, donc est stablement compact. Il ne reste plus qu'à montrer que tout ouvert de la topologie cocompacte de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X) = \mathcal{P}\ell(X)$  est aussi un patch-ouvert de  $\mathcal{L}(X)$ . Or par la proposition 3.5.13,  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo continu. On peut alors utiliser le corollaire 3.1.5, et conclure que la topologie cocompacte de  $\mathcal{P}\ell(X)$  coïncide avec sa topologie basse : la topologie cocompacte est engendrée par les  $\mathcal{P}\ell(X) \setminus \uparrow_{\mathcal{P}\ell(X)} L$ , où  $L$  varie parmi les lentilles sur  $X$ . Ces ensembles  $\mathcal{P}\ell(X) \setminus \uparrow_{\mathcal{P}\ell(X)} L$  sont des complémentaires de compacts finitaires, qui sont donc des patch-ouverts de  $\mathcal{L}(X)$  par le lemme 3.5.28.

Comme  $X$  est stablement compact, par la proposition 3.5.26,  $\mathcal{L}(X)$  est un domaine avec un plus petit élément. Par le corollaire 3.1.8, et sachant qu'un cpo ayant un plus petit élément est compact,  $\mathcal{L}(X)$  est stablement compact, donc sa topologie patch est compacte et  $T_2$  par la proposition 3.5.8.

Comme  $\sqsubseteq_{EM}$  est un ordre (corollaire 3.5.3),  $\mathcal{P}\ell(X)$  est  $T_0$ . Comme  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo continu (proposition 3.5.13), il est localement compact. Donc, par la proposition 3.5.8,  $\mathcal{P}\ell(X)$  muni de sa topologie patch est  $T_2$ .

Nous sommes donc dans la situation où l'on a deux topologies  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sur le même ensemble de lentilles ( $\mathcal{O}_1$  étant la topologie patch de  $\mathcal{P}\ell(X) = \mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ ,  $\mathcal{O}_2$  étant la topologie patch de  $\mathcal{L}(X)$ ), où  $\mathcal{O}_2$  est plus fine que  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_1$  est  $T_2$ , et  $\mathcal{O}_2$  est compacte.

On sait alors que les deux topologies coïncident, et sont donc toutes les deux compactes et  $T_2$ . Par souci de complétude, démontrons-le. Tout  $\mathcal{O}_2$ -fermé  $F$  est  $\mathcal{O}_2$ -compact, puisque tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact, et  $\mathcal{O}_2$  est une topologie compacte. Comme  $\mathcal{O}_2$  est plus fine que  $\mathcal{O}_1$ ,  $F$  est nécessairement aussi  $\mathcal{O}_1$ -compact, tout recouvrement de  $F$  par des ouverts de  $\mathcal{O}_1$  étant aussi un recouvrement de  $F$  par des ouverts de  $\mathcal{O}_2$ . Comme  $\mathcal{O}_1$  est une topologie  $T_2$ , tout  $\mathcal{O}_1$ -compact est  $\mathcal{O}_1$ -fermé, donc  $F$  est  $\mathcal{O}_1$ -fermé. Nous venons de démontrer

que tout  $\mathcal{O}_2$ -fermé est  $\mathcal{O}_1$ -fermé, donc que  $\mathcal{O}_1$  est plus fine que  $\mathcal{O}_2$ . Comme d'autre part,  $\mathcal{O}_2$  est plus fine que  $\mathcal{O}_1$ , les deux topologies coïncident.  $\square$

Et l'on peut enfin conclure :

**Théorème 3.5.30** *Soit  $X$  un cpo continu, cohérent et compact. Alors  $\mathcal{P}\ell(X) = \mathcal{P}\ell_V(X)$  est un cpo continu, cohérent et compact. Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , alors  $\mathcal{P}\ell(X)$  aussi, à savoir  $\{\perp\}$ .*

*Démonstration.*  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo continu par la proposition 3.5.13. On a  $\mathcal{P}\ell(X) = \mathcal{P}\ell_V(X)$  par la proposition 3.5.18. Puisque  $X$  est un cpo continu cohérent,  $X$  est stablement localement compact. On peut donc utiliser la proposition 3.5.26, donc  $\mathcal{L}(X)$  est un domaine qui a un plus petit élément. Par le corollaire 3.1.8, et sachant qu'un cpo ayant un plus petit élément est compact,  $\mathcal{L}(X)$  est stablement compact.  $\mathcal{L}(X)$  est donc compact et  $T_2$  dans sa topologie patch par la proposition 3.5.8. Il en est donc de même pour  $\mathcal{P}\ell(X)$ , par la proposition 3.5.29. En utilisant de nouveau la proposition 3.5.8, on en déduit que  $\mathcal{P}\ell(X)$  est cohérent et compact.

Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , on remarque d'abord que  $\{\perp\}$  est l'intersection du compact finitaire  $\uparrow \perp$  et du fermé  $\downarrow \perp$ , et est donc une lentille. Ensuite, pour toute lentille  $L$ , on a  $\uparrow \perp = X \supseteq \uparrow L$  et  $\downarrow \perp \subseteq cl(L)$  (puisque  $cl(L)$  est non vide, et fermé donc clos par le bas), donc  $\{\perp\} \sqsubseteq_{EM} L$ .  $\square$

### 3.6 L'espace $\mathcal{P}_V(X)$ des $\mathbf{A}$ -valuations continues

La variante de l'espace de Plotkin qui nous intéressera le plus sera proche de  $\mathcal{P}\ell_V(X)$ . Elle est due à Heckmann (1997) :

**Définition 3.6.1 (A-valuation,  $\mathcal{P}_V(X)$ )** *Soit  $\mathbf{A}$  le cpo formé des trois éléments 0, M, et 1, muni de l'ordre  $\sqsubseteq$  tel que  $0 \sqsubseteq M \sqsubseteq 1$ . Une  $\mathbf{A}$ -évaluation sur un espace topologique  $X$  est une fonction  $\alpha$  des ouverts de  $X$  vers  $\mathbf{A}$  telle que :*

1.  $\alpha$  est stricte :  $\alpha(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\alpha$  est normalisée :  $\alpha(X) = 1$ ;
3.  $\alpha$  est monotone : si  $U \subseteq V$  alors  $\alpha(U) \sqsubseteq \alpha(V)$ ;
4. si  $\alpha(U) = 0$  alors  $\alpha(U \cup V) = \alpha(V)$ ;
5. si  $\alpha(U) = 1$  alors  $\alpha(U \cap V) = \alpha(V)$ .

*On dit qu'une  $\mathbf{A}$ -évaluation  $\alpha$  est continue si et seulement si  $\alpha(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigsqcup_{i \in I} \alpha(U_i)$  pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ , où  $\bigsqcup$  dénote la borne supérieure dans  $\mathbf{A}$ .*

*On note  $\mathcal{P}_V(X)$  l'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations continues sur  $X$ , muni de la topologie, dite de Vietoris, engendrée par*

$$\begin{aligned} \square U &= \{\alpha \text{ A-évaluation continue} \mid \alpha(U) = 1\} \\ \diamond U &= \{\alpha \text{ A-évaluation continue} \mid \alpha(U) \neq 0\} \end{aligned}$$

Notons que l'ordre  $\sqsubseteq$  sur  $\mathbf{A}$  peut être défini par :  $a \sqsubseteq a'$  si et seulement si  $a = 1$  implique  $a' = 1$  et  $a' = 0$  implique  $a = 0$ . Nous utiliserons cette caractérisation plusieurs fois dans la suite.

Toute lentille  $L$  donne naturellement naissance à une  $\mathbf{A}$ -évaluation  $L^*$ . Il y a a priori davantage de  $\mathbf{A}$ -valuations que de lentilles, sauf si  $X$  est  $T_2$  ou un cpo continu cohérent.

**Proposition 3.6.2** *Pour toute lentille  $L$  de  $X$ , soit  $L^*$  la fonction qui à tout ouvert  $U$  de  $X$  associe 0 si  $L$  n'intersecte pas  $U$ , 1 si  $L$  est inclus dans  $U$ , et  $\mathbb{M}$  sinon. Alors  $L^*$  est une  $\mathbf{A}$ -évaluation continue sur  $X$ .*

*Lorsque  $X$  est sobre, la fonction qui à toute lentille  $L$  de  $X$  associe  $L^*$  est un plongement d'espaces topologiques de  $\mathcal{P}_V(X)$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$ .*

*Démonstration.* Toutes les affirmations ci-dessus sont dues à Heckmann (1997). Elles seront d'autre part conséquences de la proposition 3.6.3 et du lemme 3.6.4 ci-dessous. Nous pourrions le démontrer à la main, mais préférons nous abstenir.  $\square$

Toute lentille  $L$  est l'intersection du compact saturé  $Q = \uparrow L$  et du fermé  $F = cl(L)$ . La proposition suivante montre que toute  $\mathbf{A}$ -évaluation est fondamentalement la même chose que la donnée d'un compact saturé  $Q$  et d'un fermé  $F$  satisfaisant presque les mêmes conditions que celles définissant la lentille  $L = Q \cap F$ . On demande toujours  $Q = \uparrow L$ , mais au lieu de demander  $F = cl(L)$ , ce qui est équivalent à  $F \subseteq cl(Q \cap F)$ , on requiert la condition plus faible selon laquelle  $F \subseteq cl(U \cap F)$  pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ .

**Proposition 3.6.3** *Soit  $\mathcal{P}'_V(X)$  l'espace des couples  $(Q, F)$  d'un compact saturé  $Q$  de  $X$  et d'un fermé  $F$  de  $X$  tels que, en posant  $L = Q \cap F$ , on a :*

1.  $L \neq \emptyset$ ;
2.  $Q = \uparrow L$ ;
3. pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ ,  $F \subseteq cl(U \cap F)$ .

*La topologie de  $\mathcal{P}'_V(X)$  est engendrée par les ouverts*

$$\begin{aligned} \square U &= \{(Q, F) \in \mathcal{P}'_V(X) \mid Q \subseteq U\} \\ \diamond U &= \{(Q, F) \in \mathcal{P}'_V(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

*La fonction qui à  $(Q, F) \in \mathcal{P}'_V(X)$  associe la fonction  $\alpha = (Q, F)^*$  qui à tout ouvert  $U$  associe 1 si  $Q \subseteq U$ , 0 si  $F \cap U = \emptyset$ ,  $\mathbb{M}$  sinon, est une fonction continue, et même un plongement topologique de  $\mathcal{P}'_V(X)$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$ .*

*Si  $X$  est sobre, alors c'est un homéomorphisme de  $\mathcal{P}'_V(X)$  sur  $\mathcal{P}_V(X)$ . L'image réciproque de l' $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$  sur  $X$  est  $\left(\bigcap_{U/\alpha(U)=1} U, \bigcap_{V/\alpha(V)=0} (X \setminus V)\right)$ , où les indices  $U$  et  $V$  sont à prendre parmi les ouverts de  $X$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\alpha = (Q, F)^*$  est une  $\mathbf{A}$ -évaluation continue. On doit d'abord montrer qu'elle est bien définie, c'est-à-dire que les cas  $Q \subseteq U$  et  $F \cap U = \emptyset$  ne peuvent

pas arriver en même temps. En effet,  $F$  serait inclus dans le complémentaire  $X \setminus U$  de  $U$ , donc  $L = Q \cap F$  serait inclus dans  $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$ , contredisant la condition 1.

Ensuite,  $\alpha$  est clairement stricte et normalisée. Montrons que  $\alpha$  est monotone. Si  $U \subseteq V$ , on doit montrer que  $\alpha(U) = 1$  entraîne  $\alpha(V) = 1$ , et  $\alpha(V) = 0$  entraîne  $\alpha(U) = 0$ . Or si  $\alpha(U) = 1$ ,  $Q \subseteq U$ , donc  $Q \subseteq V$ , donc  $\alpha(V) = 1$ . Et si  $\alpha(V) = 0$ , alors  $F$  n'intersecte pas  $V$ , donc pas  $U$  non plus, donc  $\alpha(U) = 0$ .

Montrons la propriété 4 de la définition 3.6.1. Supposons donc  $\alpha(U) = 0$ , c'est-à-dire  $U$  n'intersecte pas  $F$ . Comme  $\alpha(V) \subseteq \alpha(U \cup V)$  par monotonie, il suffit de montrer que  $\alpha(U \cup V) \subseteq \alpha(V)$ , autrement dit que  $\alpha(U \cup V) = 1$  entraîne  $\alpha(V) = 1$  et que  $\alpha(V) = 0$  entraîne  $\alpha(U \cup V) = 0$ . Si  $\alpha(U \cup V) = 1$ , c'est-à-dire si  $Q \subseteq U \cup V$ , en particulier  $L \subseteq Q \subseteq U \cup V$ ; d'autre part,  $L \cap U = Q \cap F \cap U = \emptyset$  puisque  $U$  n'intersecte pas  $F$ ; donc  $L$  n'intersecte pas  $U$ , et puisque  $L \subseteq U \cup V$ , on a donc  $L \subseteq V$ ; comme  $Q = \uparrow L$  (condition 2) et  $V$  est clos par le haut,  $Q \subseteq V$ , donc  $\alpha(V) = 1$ . Si  $\alpha(V) = 0$ ,  $F$  n'intersecte pas  $V$ ; si  $F$  intersectait  $U \cup V$ , il intersecterait  $U$ , une contradiction; donc  $F$  n'intersecte pas  $U \cup V$ , c'est-à-dire  $\alpha(U \cup V) = 0$ .

Montrons ensuite la propriété 5 de la définition 3.6.1. Supposons donc  $\alpha(U) = 1$ , c'est-à-dire  $Q \subseteq U$ . Comme  $\alpha(U \cap V) \subseteq \alpha(V)$ , il suffit de montrer  $\alpha(V) \subseteq \alpha(U \cap V)$ , c'est-à-dire que  $\alpha(V) = 1$  entraîne  $\alpha(U \cap V) = 1$  et que  $\alpha(U \cap V) = 0$  entraîne  $\alpha(V) = 0$ . Si  $\alpha(V) = 1$ , c'est-à-dire si  $Q \subseteq V$ , alors  $Q \subseteq U \cap V$ , donc  $\alpha(U \cap V) = 1$ . Si  $\alpha(U \cap V) = 0$ , alors  $F$  n'intersecte pas  $U \cap V$ ; supposons par contradiction que  $F$  intersecte  $V$ : comme  $Q \subseteq U$ , par la condition 3,  $F \subseteq cl(U \cap F)$ , donc  $V$  intersecte  $cl(U \cap F)$ , et comme  $V$  est ouvert, il intersecte aussi  $U \cap F$ , ce qui implique que  $U \cap V$  intersecte  $F$ , une contradiction.

Montrons maintenant que  $\alpha$  est Scott-continue. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'ouverts. Comme  $\alpha$  est monotone,  $\sup_{i \in I} \alpha(U_i) \subseteq \alpha(\bigcup_{i \in I} U_i)$ . Montrons l'inégalité réciproque, ce qui revient à démontrer que si  $\alpha(\bigcup_{i \in I} U_i) = 1$  alors il existe  $i \in I$  tel que  $\alpha(U_i) = 1$ , et que si  $\alpha(U_i) = 0$  pour tout  $i \in I$  alors  $\alpha(\bigcup_{i \in I} U_i) = 0$ . La première implication est une conséquence directe de la compacité de  $Q$ , la seconde est triviale.

Nous devons maintenant montrer que la fonction qui à  $(Q, F)$  associe  $(Q, F)^*$  est continue. L'image réciproque de  $\square U = \{\alpha \mid \alpha(U) = 1\}$  est l'ouvert  $\square U = \{(Q, F) \mid Q \subseteq U\}$ , et celle de  $\diamond V = \{\alpha \mid \alpha(V) \neq 0\}$  est l'ouvert  $\diamond V = \{(Q, F) \mid F \cap U \neq \emptyset\}$ , et l'affirmation est donc claire.

Supposons maintenant  $X$  sobre, et montrons que cette fonction est un homéomorphisme. Pour ceci, définissons son inverse : nous prétendons que c'est la fonction qui à  $\alpha$  associe  $\alpha^\circ = (Q, F)$ , où  $Q$  est l'intersection des éléments la famille  $\mathcal{F}$  des ouverts  $U$  tels que  $\alpha(U) = 1$ , et où  $F$  est le complémentaire de l'ouvert  $U_0$ , union des éléments de la famille  $\mathcal{F}'$  des ouverts  $U$  tels que  $\alpha(U) = 0$ .

On note que  $\mathcal{F}$  est non vide puisque  $\alpha$  est normalisée. Si  $U \in \mathcal{F}$  et  $U \subseteq U'$  alors  $U' \in \mathcal{F}$  puisque  $\alpha$  est monotone. Si  $U, V \in \mathcal{F}$ , alors  $\alpha(U \cap V) = \alpha(V) = 1$  puisque  $\alpha(U) = 1$ , donc  $U \cap V \in \mathcal{F}$ . Donc  $\mathcal{F}$  est un filtre d'ouverts. Pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ , si  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{F}$ , alors il existe  $i \in I$  tel que  $U_i \in \mathcal{F}$ , puisque  $\alpha$  est continue. Donc  $\mathcal{F}$  est un filtre Scott-ouvert d'ouverts. Par le théorème d'Hofmann-Mislove, puisque  $X$  est sobre,  $Q = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$  est un compact saturé de  $X$ .

La famille  $\mathcal{F}'$  est elle aussi non vide, puisque  $\alpha$  est stricte :  $\emptyset$  est dans  $\mathcal{F}'$ . Si  $U, V \in \mathcal{F}'$  alors  $U \cup V \in \mathcal{F}'$ , puisque  $\alpha(U \cup V) = \alpha(V) = 0$ , sachant  $\alpha(U) = 0$ . La famille  $\mathcal{F}'$  est donc dirigée. Rappelons que  $U_0$  est l'union des éléments de  $\mathcal{F}'$ . Puisque  $\alpha$  est continue,  $\alpha(U_0) =$

$\sup_{U \in \mathcal{F}} \alpha(U) = 0$ , donc  $U_0$  est lui-même dans  $\mathcal{F}'$ .

Posons  $L = Q \cap F$ , où  $F$  est, rappelons-le, le complémentaire de  $U_0$ . Montrons la condition 2 de la définition de  $\mathcal{P}'_\nu(X)$  :  $Q = \uparrow L$ . Puisque  $\alpha(U_0) = 0$ , pour tout ouvert  $V$ ,  $\alpha(U_0 \cup V) = \alpha(V)$ . C'est la propriété 4 de la définition 3.6.1. En particulier, pour tout ouvert  $V$  contenant  $L$ , on a  $L = Q \cap F \subseteq V$ , donc  $Q \subseteq U_0 \cup V$ , donc  $U_0 \cup V \in \mathcal{F}$ , donc  $\alpha(U_0 \cup V) = 1$ , donc  $\alpha(V) = \alpha(U_0 \cup V) = 1$ , donc  $V \in \mathcal{F}$ , donc  $Q \subseteq V$ . Or  $\uparrow L$  est le saturé de  $L$ , c'est-à-dire l'intersection de tous les ouverts  $V$  contenant  $L$ . Comme tous ces ouverts contiennent  $Q$ ,  $Q \subseteq \uparrow L$ . L'inclusion réciproque est évidente, donc  $Q = \uparrow L$ .

Comme  $\emptyset$  n'est pas dans  $\mathcal{F}$ ,  $Q$  est non vide : la correspondance de Hofmann-Mislove est bijective, et envoie déjà l'unique filtre contenant  $\emptyset$  vers le compact vide. Donc  $L$  est non vide, ce qui établit la condition 1.

Montrons enfin la condition 3. Pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ ,  $U$  est dans  $\mathcal{F}$ , donc  $\alpha(U) = 1$ . Par la propriété 5 de la définition 3.6.1, pour tout ouvert  $V$ ,  $\alpha(U \cap V) = \alpha(V)$ , en particulier si  $U \cap V \in \mathcal{F}'$  alors  $V \in \mathcal{F}'$ , c'est-à-dire que  $U \cap V \subseteq U_0$  entraîne  $V \subseteq U_0$ , ou de façon équivalente,  $U \cap V \cap F = \emptyset$  entraîne  $V \cap F = \emptyset$ . Choisissons  $V$  égal au complémentaire de  $cl(U \cap F)$ . On a clairement  $U \cap V \cap F = \emptyset$ , donc  $V \cap F = \emptyset$ . Donc  $F$  est inclus dans le complémentaire de  $V$ , qui est juste  $cl(U \cap F)$ .

La fonction qui à  $\alpha$  associe  $\alpha^\circ = (Q, F)$  est donc bien définie. L'image réciproque par cette fonction de  $\square U = \{(Q, F) \mid Q \subseteq U\}$  est  $\{\alpha \mid \bigcap_{V/\alpha(V)=1} V \subseteq U\}$ . Or, en reprenant les notations ci-dessus,  $\bigcap_{V/\alpha(V)=1} V \subseteq U$  si et seulement si  $\bigcap_{V \in \mathcal{F}} V \subseteq U$ , si et seulement si  $U \in \mathcal{F}$ , si et seulement si  $\alpha(U) = 1$  : l'image réciproque de  $\square U$  est donc  $\{\alpha \mid \alpha(U) = 1\} = \square U$ . L'image réciproque de  $\diamond V = \{(Q, F) \mid F \cap V \neq \emptyset\}$  est de même  $\{\alpha \mid \alpha(V) \neq 0\} = \diamond V$ , puisque, toujours en reprenant les notations ci-dessus,  $F \cap V \neq \emptyset$  si et seulement si  $V \not\subseteq U_0$ , si et seulement si  $V \notin \mathcal{F}'$ , si et seulement si  $\alpha(V) \neq 0$ . (Ces arguments finissent de justifier la coïncidence de notation entre les deux versions de  $\square U$ , resp.  $\diamond V$ , celle de  $\mathcal{P}_\nu(X)$  et celle de  $\mathcal{P}'_\nu(X)$ .)

Enfin, montrons que la fonction qui à  $\alpha$  associe  $\alpha^\circ$  est inverse de celle qui à  $(Q, F)$  associe  $(Q, F)^*$ . D'abord,  $(Q, F)^{\circ*} = \left( \bigcap_{U/Q \subseteq U} U, \bigcap_{V/F \cap V = \emptyset} (X \setminus V) \right) = (Q, F)$ , car d'une part  $Q$  est saturé, donc  $\bigcap_{U/Q \subseteq U} U = Q$ , et d'autre part  $\bigcap_{V/F \cap V = \emptyset} (X \setminus V) = \bigcap_{V \subseteq X \setminus F} (X \setminus V) = X \setminus \bigcup_{V \subseteq X \setminus F} V = X \setminus (X \setminus F) = F$ . Ensuite,  $\alpha^{\circ*}$  est la fonction qui à tout ouvert  $U$  associe 1 si  $Q \subseteq U$ , 0 si  $F$  n'intersecte pas  $U$ , où  $Q = \bigcap_{V/\alpha(V)=1} V$  et  $F = \bigcap_{V/\alpha(V)=0} (X \setminus V)$ . Or, en reprenant les notations utilisées plus haut,  $Q \subseteq U$  si et seulement si  $U \in \mathcal{F}$ , si et seulement si  $\alpha(U) = 1$ , et  $F$  n'intersecte pas  $U$  si et seulement si  $U$  est inclus dans le complémentaire  $U_0$  de  $F$ , si et seulement si  $U \in \mathcal{F}'$ , si et seulement si  $\alpha(U) = 0$ . Donc  $\alpha^{\circ*} = \alpha$ .  $\square$

**Lemme 3.6.4** *La fonction qui à toute lentille  $L$  associe  $(\uparrow L, cl(L))$  est un plongement d'espaces topologiques de  $\mathcal{P}_\nu(X)$  dans  $\mathcal{P}'_\nu(X)$ . Sa composée avec le plongement  $(Q, F) \mapsto (Q, F)^*$  de la proposition 3.6.3 est la fonction  $L \mapsto L^*$  de la proposition 3.6.2.*

*Démonstration.* On vérifie d'abord que  $(\uparrow L, cl(L))$  est dans  $\mathcal{P}'_\nu(X)$ . Posons  $Q = \uparrow L$ ,  $F = cl(L)$ . Par le lemme 3.5.2,  $L = Q \cap F$ . Les conditions  $L \neq \emptyset$  et  $Q = \uparrow L$  sont triviales. Pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ , on a  $F = cl(L) = cl(Q \cap F) \subseteq cl(U \cap F)$ , ce qui établit la dernière condition, la condition 3.

La fonction  $f$  qui à  $L$  associe  $(\uparrow L, cl(L))$  est continue : l'image réciproque de  $\square U = \{(Q, F) | Q \subseteq U\}$  est  $\{L | \uparrow L \subseteq U\} = \{L | L \subseteq U\} = \square U$ , puisque  $U$  en tant qu'ouvert est clos par le haut ; l'image réciproque de  $\diamond V = \{(Q, F) | F \cap V \neq \emptyset\}$  est  $\{L | cl(L) \cap V \neq \emptyset\} = \{L | L \cap V \neq \emptyset\} = \diamond V$ ,  $V$  étant ouvert.

La fonction  $f$  est de plus injective. C'est une conséquence triviale du lemme 3.5.2.

L'image directe par  $f$  de  $\square U = \{L | L \subseteq U\}$  est l'ensemble des  $(Q, F)$  tels que  $Q \cap F$  est une lentille (c'est-à-dire dans l'image de  $f$ ) et tels que  $Q \subseteq U$ , puisque  $U$  est clos par le haut. C'est donc l'intersection de l'image de  $f$  et de  $\square U = \{(Q, F) | Q \subseteq U\}$ . De même, l'image de  $\diamond V = \{L | L \cap V \neq \emptyset\}$  est l'intersection de l'image de  $f$  avec  $\diamond V = \{(Q, F) | F \cap V \neq \emptyset\}$ . En effet, si  $L$  intersecte  $V$ , alors  $F \subseteq L$  aussi, et réciproquement si  $F$  intersecte  $V$ , comme  $F = cl(L)$  et  $V$  est ouvert,  $V$  intersecte aussi  $L$ . Donc  $f$  est un plongement d'espaces topologiques. (Et ceci termine d'autre part de justifier que nous utilisons les mêmes notations  $\square U$  et  $\diamond V$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$  et dans  $\mathcal{P}l_V(X)$ .)

Finalement,  $(\uparrow L, cl(L))^*$  est l' $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$  qui envoie tout ouvert  $U$  vers 1 si  $\uparrow L \subseteq U$  (de façon équivalente, si  $L \subseteq U$ , puisque  $U$  est clos par le haut), vers 0 si  $cl(L) \cap U = \emptyset$  (de façon équivalente, si  $L \cap U = \emptyset$ ,  $U$  étant ouvert), et vers  $M$  sinon. C'est donc exactement  $L^*$ .  $\square$

On en déduit qu'il n'y a aucune différence entre  $\mathcal{P}_V(X)$  et  $\mathcal{P}l_V(X)$  si  $X$  est  $T_2$  (Heckmann, 1997, théorème 5.1) :

**Lemme 3.6.5** *Soit  $X$  un espace  $T_2$ . Tout élément  $(Q, F)$  de  $\mathcal{P}'_V(X)$  est tel que  $Q = \uparrow L$  et  $F = cl(L)$ , où  $L = Q \cap F$ . Plus précisément,  $Q = F = L = \uparrow L = cl(L)$ .*

*La fonction qui à  $L \in \mathcal{P}l_V(X)$  associe  $L^* \in \mathcal{P}_V(X)$  est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* L'inclusion  $cl(Q \cap F) \subseteq F$  étant triviale, nous devons démontrer  $F \subseteq cl(L)$ , où  $L = Q \cap F$ . Rappelons que  $L$  est non vide, que  $Q = \uparrow L$ , et que  $F \subseteq cl(U \cap F)$  pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ .

Regardons d'abord le cas où  $X$  est  $T_2$ . Supposons que  $F$  ne soit pas inclus dans  $cl(L)$ . Comme  $X$  est  $T_2$ , et  $L$  est compact,  $L$  est fermé, donc  $cl(L) = L$ , et  $F$  n'est pas inclus dans  $L$ . Il existe donc un élément  $x \in F$  tel que  $x \notin L$ . Puisque  $X$  est  $T_2$  de nouveau, pour tout  $y \in L$  il existe deux ouverts  $V_y$  et  $U_y$  tels que  $x \in V_y$ ,  $y \in U_y$  et  $V_y \cap U_y = \emptyset$ . La famille des  $U_y$  recouvre  $L$ , donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini  $(U_y)_{y \in E}$  ( $E$  fini inclus dans  $L$ ), puisque  $L$  est compact. Alors  $V = \bigcap_{y \in E} V_y$  est un ouvert contenant  $x$ ,  $U = \bigcup_{y \in E} U_y$  est un ouvert contenant  $L$ , et  $V \cap U = \emptyset$ . Puisque  $U$  contient  $L = \uparrow Q$ ,  $U$  contient  $Q$ . Par hypothèse,  $F \subseteq cl(U \cap F)$ . Si  $V$  intersectait  $cl(U \cap F)$ , il intersecterait  $U \cap F$ , puisque  $V$  est ouvert, donc en particulier  $U$ , ce qui est impossible. Donc  $V$  n'intersecte pas  $cl(U \cap F)$ . Mais  $x \in V$  par construction, et  $x \in F \subseteq cl(U \cap F)$  : contradiction.

Notons que l'on a non seulement  $F \subseteq cl(L)$ , mais encore  $F \subseteq L$ , et trivialement  $L \subseteq F$ , donc  $L = F$  ; d'autre part,  $L = \uparrow Q = Q$ , donc en fait  $L = F = Q$ .

La fonction  $L \mapsto (\uparrow L, cl(L))$  du lemme 3.6.4 est donc surjective. Son inverse envoie  $(Q, F) \in \mathcal{P}'_V(X)$  vers  $L = Q \cap F = Q = F$ . Cet inverse est clairement continu. Donc la fonction  $L \mapsto (\uparrow L, cl(L))$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{P}l_V(X)$  sur  $\mathcal{P}'_V(X)$ . La fonction  $(Q, F) \mapsto (Q, F)^*$

est un homéomorphisme de  $\mathcal{P}'_V(X)$  sur  $\mathcal{P}_V(X)$ , par la proposition 3.6.3, puisque  $X$  étant  $T_2$  est sobre. La composée  $L \mapsto L^*$  est donc un homéomorphisme de  $\mathcal{P}_V(X)$  sur  $\mathcal{P}'_V(X)$ .  $\square$

On peut aussi étudier la topologie de Scott sur l'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations continues.

**Lemme 3.6.6** *Le préordre de spécialisation  $\sqsubseteq_{\mathbf{A}}$  sur  $\mathcal{P}_V(X)$  est défini par  $\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha'$  si et seulement si  $\alpha(U) \sqsubseteq \alpha'(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

*Le préordre de spécialisation de  $\mathcal{P}'_V(X)$  est l'ordre d'Egli-Milner, que nous notons encore  $\sqsubseteq_{\text{EM}}$ , et défini par  $(Q, F) \sqsubseteq_{\text{EM}} (Q', F')$  si et seulement si  $Q \supseteq Q'$  et  $F \subseteq F'$ .*

*Démonstration.* D'abord, supposons  $\alpha(U) \sqsubseteq \alpha'(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Si  $\alpha \in \square U$ , c'est-à-dire si  $\alpha(U) = 1$ , alors  $\alpha'(U) = 1$ ; si  $\alpha \in \diamond V$ , c'est-à-dire si  $\alpha(V) \neq 0$ , alors  $\alpha'(V) \neq 0$ . Donc  $\alpha'$  appartient à tout ouvert qui contient  $\alpha$ . Réciproquement, si  $\alpha'$  appartient à tout ouvert qui contient  $\alpha$ , c'est en particulier le cas pour tout ouvert de la forme  $\square U$ , resp.  $\diamond U$ . Donc  $\alpha(U) = 1$  implique  $\alpha'(U) = 1$ , et  $\alpha(U) \neq 0$  implique  $\alpha'(U) \neq 0$ , autrement dit  $\alpha(U) \sqsubseteq \alpha'(U)$ , et ce pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .

Dans le cas de  $\mathcal{P}'_V(X)$ , si  $Q \supseteq Q'$  et  $F \subseteq F'$ , alors si  $(Q, F) \in \square U$ , clairement  $(Q', F') \in \square U$  puisque  $Q' \subseteq Q \subseteq U$ , et si  $(Q, F) \in \diamond V$  alors  $F \cap V \neq \emptyset$  donc  $F' \cap V \neq \emptyset$ , c'est-à-dire  $(Q', F') \in \diamond V$ . Donc  $(Q', F')$  appartient à tout ouvert qui contient  $(Q, F)$ . Réciproquement, si  $(Q', F')$  appartient à tout ouvert qui contient  $(Q, F)$ , c'est en particulier le cas pour tout ouvert de la forme  $\square U$ . Donc  $Q'$  est inclus dans tous les ouverts  $U$  qui contiennent  $Q$ , donc dans leur intersection, qui est le saturé  $\uparrow Q = Q$  de  $Q$ . C'est aussi le cas pour tout ouvert de la forme  $\diamond V$ . Donc  $F'$  intersecte tout ouvert  $V$  qui intersecte  $F$ . Pour  $V$  égal au complémentaire de  $F'$ , on en déduit que  $V$  n'intersecte pas  $F$ , c'est-à-dire que  $F$  est inclus dans le complémentaire  $F'$  de  $V$ .  $\square$

**Définition 3.6.7** ( $\mathcal{P}(X)$ ) *Soit  $\mathcal{P}(X)$  l'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations continues sur  $X$ , muni de l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{A}}$ . On note  $\mathcal{P}'(X)$  l'espace des couples  $(Q, F)$  éléments de  $\mathcal{P}'_V(X)$ , muni de l'ordre  $\sqsubseteq_{\text{EM}}$ . (Ces deux ordres sont définis au lemme 3.6.6.) Les deux espaces  $\mathcal{P}(X)$  et  $\mathcal{P}'(X)$  sont munis de leur topologie de Scott.*

**Lemme 3.6.8** *La fonction  $(Q, F) \mapsto (Q, F)^*$  est un plongement d'ordre de  $\mathcal{P}'(X)$  dans  $\mathcal{P}(X)$ . Si  $X$  est un espace sobre, c'est un isomorphisme d'ordre.*

*Démonstration.* Posons  $\alpha = (Q, F)^*$ ,  $\alpha' = (Q', F')^*$ . Si  $(Q, F) \sqsubseteq_{\text{EM}} (Q', F')$ , alors pour tout ouvert  $U$ , si  $\alpha(U) = 1$  c'est que  $Q \subseteq U$ , donc  $Q' \subseteq Q \subseteq U$ , donc  $\alpha'(U) = 1$ ; et si  $\alpha'(U) = 0$ , alors  $F' \cap U = \emptyset$ , donc  $F \cap U = \emptyset$  puisque  $F \subseteq F'$ , donc  $\alpha(U) = 0$ . Donc  $\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha'$ .

Réciproquement, si  $\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha'$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$  on a  $\alpha(U) = 1$  implique  $\alpha'(U) = 1$ , c'est-à-dire  $Q \subseteq U$  implique  $Q' \subseteq U$ . Donc  $Q'$  est inclus dans l'intersection des ouverts  $U \supseteq Q$ , donc dans le saturé  $\uparrow Q = Q$ . D'autre part,  $\alpha'(V) = 0$  implique  $\alpha(V) = 0$ , donc pour  $V$  égal au complémentaire de  $F'$ ,  $V$  n'intersecte pas  $F$ , donc  $F \subseteq F'$ . Donc  $(Q, F) \sqsubseteq_{\text{EM}} (Q', F')$ .

La fonction  $(Q, F) \mapsto (Q, F)^*$  est donc un plongement d'ordre. Si  $X$  est sobre, la proposition 3.6.3 implique qu'elle est bijective, donc un isomorphisme d'ordre.  $\square$

**Lemme 3.6.9**  $\mathcal{P}(X)$  est un cpo. La borne supérieure de la famille dirigée  $(\alpha_i)_{i \in I}$  envoie tout ouvert  $U$  de  $X$  vers  $\bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(U)$ , où  $\bigsqcup$  dénote la borne supérieure dans  $\mathbf{A}$ . La topologie de  $\mathcal{P}(X)$  (de Scott) est plus fine que la topologie de  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$  (de Vietoris).

*Démonstration.* Posons  $\alpha(U) = \bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(U)$ . Pour montrer que  $\alpha$  est la borne supérieure des  $\alpha_i$ ,  $i \in I$ , il suffit de montrer que  $\alpha$  est une  $\mathbf{A}$ -évaluation continue. Clairement,  $\alpha$  est stricte, normalisée, monotone. Si  $\alpha(U) = 0$ , c'est que  $\alpha_i(U) = 0$  pour tout  $i \in I$ , donc  $\alpha_i(U \cup V) = \alpha_i(V)$  pour tout ouvert fixé  $V$ , par la propriété 4 de la définition 3.6.1. Donc  $\alpha(U \cup V) = \bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(U \cup V) = \bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(V) = \alpha(V)$ , et  $\alpha$  vérifie aussi la propriété 4.

Si  $\alpha(U) = 1$ , il existe  $j_0 \in I$  tel que  $\alpha_{j_0}(U) = 1$ . La famille  $J$  des  $j \in I$  tels que  $\alpha_j(U) = 1$  est donc non vide. Pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in J$ , il existe  $k \in I$  tel que  $\alpha_i, \alpha_j \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha_k$ . En particulier,  $\alpha_k(U) = 1$ , puisque  $\alpha_j(U) = 1$ . On en déduit, dans le cas particulier où  $i$  est pris dans  $J$ , que  $J$  est dirigée. Dans le cas où  $i$  est quelconque dans  $I$  et  $j = j_0$ , on en déduit que  $\bigsqcup_{i \in I} \alpha_i \sqsubseteq \bigsqcup_{k \in J} \alpha_k$  : pour tout  $i \in I$ , il existe  $k \in J$  tel que  $\alpha_i \sqsubseteq \alpha_k$ . Comme  $J \subseteq I$ , l'inclusion inverse est évidente. Donc  $\alpha = \bigsqcup_{i \in I} \alpha_i = \bigsqcup_{j \in J} \alpha_j$ . Mais alors  $\alpha(U \cap V) = \bigsqcup_{j \in J} \alpha_j(U \cap V) = \bigsqcup_{j \in J} \alpha_j(V) = \alpha(V)$  puisque pour tout  $j \in J$ ,  $\alpha_j(U) = 1$ , donc  $\alpha_j(U \cap V) = \alpha_j(V)$  par la propriété 5.

Pour démontrer que la topologie de Scott est plus fine que la topologie de Vietoris, il suffit de montrer que  $\square U$  et  $\diamond U$  sont Scott-ouverts pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Or, si  $\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha'$ , en particulier  $\alpha(U) = 1$  implique  $\alpha'(U) = 1$  et  $\alpha(U) \neq 0$  implique  $\alpha'(U) \neq 0$ , donc  $\alpha \in \square U$  implique  $\alpha' \in \square U$  et  $\alpha \in \diamond U$  implique  $\alpha' \in \diamond U$  :  $\square U$  et  $\diamond U$  sont clos par le haut. Soit maintenant  $(\alpha_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de  $\mathbf{A}$ -valuations continues, de borne supérieure  $\alpha = \bigsqcup_{i \in I} \alpha_i$ . Si  $\alpha \in \square U$ , alors  $\bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(U) = 1$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $\alpha_i(U) = 1$ , c'est-à-dire  $\alpha_i \in \square U$ . Si  $\alpha \in \diamond U$ , alors  $\bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(U) \neq 0$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $\alpha_i(U) \neq 0$ , c'est-à-dire  $\alpha_i \in \diamond U$ .  $\square$

La proposition suivante est due, encore une fois, à Heckmann (1997, section 6).

**Proposition 3.6.10** Soit  $X$  un cpo continu de base  $B$ . Alors  $\mathcal{P}(X)$  et  $\mathcal{P}'(X)$  sont des cpos continus isomorphes. La topologie de Scott coïncide avec la topologie de Vietoris :  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ ,  $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(X)$ .

Une base de  $\mathcal{P}(X)$  est donnée par les  $\langle E \rangle^*$ ,  $E \subseteq B$  fini non vide. On a  $\langle E \rangle^* \ll \alpha$  dans  $\mathcal{P}(X)$  si et seulement si  $\alpha(\uparrow x) \neq 0$  pour tout  $x \in E$ , et  $\alpha(\uparrow E) = 1$ .

Une base de  $\mathcal{P}'(X)$  est donnée par les  $(\uparrow E, \downarrow E)$ ,  $E \subseteq B$  fini non vide. On a  $(\uparrow E, \downarrow E) \ll (Q, F)$  dans  $\mathcal{P}'(X)$  si et seulement si  $E \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E$ .

*Démonstration.* L'isomorphisme est donné au lemme 3.6.8.  $X$ , en tant que cpo continu, est en effet sobre. Les deux affirmations concernant les bases de  $\mathcal{P}(X)$  et de  $\mathcal{P}'(X)$  respectivement sont équivalentes, au vu de l'isomorphisme. Notons  $\prec$  la relation définie par  $E \prec \alpha$  si et seulement si  $\alpha(\uparrow x) \neq 0$  pour tout  $x \in E$ , et  $\alpha(\uparrow E) = 1$ .

1. Montrons que si  $E \prec \alpha$ , alors  $\langle E \rangle^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha$ . Si l'on écrit  $\alpha = (Q, F)^*$ ,  $E \prec \alpha$  signifie  $E \subseteq \downarrow F$  et  $Q \subseteq \uparrow E$ ; en particulier  $\downarrow E \subseteq \downarrow \downarrow F \subseteq \downarrow F = F$  (car  $F$  est clos par le bas) et  $Q \subseteq \uparrow E \subseteq \uparrow E$ , donc  $(\uparrow E, \downarrow E) \sqsubseteq_{\text{EM}} (Q, F)$ , donc  $\langle E \rangle^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha$ , via l'isomorphisme.

2. Montrons que si  $E \prec \alpha$ , alors  $\langle E \rangle^* \ll \alpha$  dans  $\mathcal{P}(X)$ . Soit  $(\alpha_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d' $\mathbf{A}$ -valuations continues dont la borne supérieure  $\bigsqcup_{i \in I} \alpha_i$  (par le lemme 3.6.9) est telle que

$\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \bigsqcup_{i \in I} \alpha_i$ . Pour tout  $x \in E$ ,  $\alpha(\uparrow x) \neq 0$ , donc  $\bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(\uparrow x) \neq 0$ , donc il existe  $i_x \in I$  tel que  $\alpha_{i_x}(\uparrow x) \neq 0$ . Comme  $\alpha(\uparrow E) = 1$ ,  $\bigsqcup_{i \in I} \alpha_i(\uparrow E) = 1$ , donc il existe un  $j \in I$  tel que  $\alpha_j(\uparrow E) = 1$ . Comme  $E$  est fini et la famille est dirigée, il existe un  $i \in I$  tel que  $\alpha_i(\uparrow x) \neq 0$  pour tout  $x \in E$ , et  $\alpha_i(\uparrow E) = 1$ , c'est-à-dire tel que  $E \prec \alpha_i$ . En particulier,  $\langle E \rangle^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha_i$  pour un certain  $i \in I$ . Donc  $\langle E \rangle^* \ll \alpha$ .

3. Considérons la famille  $\mathcal{F}$  des parties finies non vides  $E \subseteq B$  telles que  $E \prec \alpha$ , et montrons qu'elle est dirigée. C'était la partie compliquée de la proposition 3.5.13, où nous nous intéressions à  $\mathcal{P}\ell(X)$  plutôt qu'à  $\mathcal{P}(X)$ .

Pour ceci, on observe que : (\*) pour tout ouvert tel que  $\alpha(U) = 1$ , il existe un ensemble fini  $E \subseteq U \cap B$  non vide tel que  $E \prec \alpha$ . En effet, comme  $X$  est un cpo continu,  $U$  est l'union des  $\uparrow x$ ,  $x \in U \cap B$ , donc l'union dirigée des  $\uparrow E_1$ ,  $E_1 \subseteq B$  fini non vide. Puisque  $\alpha$  est continue, il existe donc une partie finie non vide  $E_1$  de  $B$  telle que  $\alpha(\uparrow E_1) = 1$ . Soit  $E$  le sous-ensemble des  $x \in E_1$  tels que  $\alpha(\uparrow x) \neq 0$ . Notons  $E_1 \setminus E = \{x_1, \dots, x_k\}$ , alors  $1 = \alpha(\uparrow E_1) = \alpha(\uparrow x_1 \cup \uparrow x_2 \cup \dots \cup \uparrow x_k \cup \uparrow E) = \alpha(\uparrow x_2 \cup \dots \cup \uparrow x_k \cup \uparrow E)$  (car  $\alpha(\uparrow x_1) = 0$ , par la propriété 4 de la définition 3.6.1)  $= \dots = \alpha(\uparrow x_k \cup \uparrow E)$  (car  $\alpha(\uparrow x_k) = 0$ , par la propriété 4)  $= \alpha(\uparrow E)$ . Donc  $E \prec \alpha$ . De plus,  $E$  est non vide car  $\alpha(\uparrow E) = 1$ , mais  $\alpha(\emptyset) = 0$ .

Par (\*) avec  $U = X$ , la famille  $\mathcal{F}$  est non vide. Si  $E_1, E_2 \prec \alpha$ , en particulier  $\alpha(\uparrow E_1) = 1$ , donc par la propriété 5 de la définition 3.6.1,  $\alpha(\uparrow E_1 \cap \uparrow E_2) = \alpha(\uparrow E_2) = 1$ . Par (\*) avec  $U$  égal à l'ouvert  $\uparrow E_1 \cap \uparrow E_2$ , il existe une partie non vide  $E_0$  de  $\uparrow E_1 \cap \uparrow E_2 \cap B$  telle que  $E_0 \prec \alpha$ . Pour tout  $x_1 \in E_1$ , on a  $\alpha(\uparrow x_1) \neq 0$ ; comme  $\alpha(\uparrow E_2) = 1$ , on a  $\alpha(\uparrow x_1 \cap \uparrow E_2) = \alpha(\uparrow x_1) \neq 0$  par la propriété 5; par (\*) avec  $U = \uparrow x_1 \cap \uparrow E_2$ , il existe une partie finie non vide  $E_{x_1}$  de  $\uparrow x_1 \cap \uparrow E_2 \cap B$  telle que  $E_{x_1} \prec \alpha$ , donc en particulier un  $z \in \uparrow x_1 \cap \uparrow E_2 \cap B$  tel que  $\alpha(\uparrow z) \neq 0$ ; rassemblons tous les  $z$  ainsi obtenus dans un ensemble  $E'_1$ . De même, soit  $E'_2$  un ensemble fini d'éléments  $z' \in \uparrow x_2 \cap \uparrow E_1$ , un pour chaque  $x_2 \in E_2$ , avec  $z' \in B$  et  $\alpha(\uparrow z') \neq 0$ . On pose  $E = E_0 \cup E'_1 \cup E'_2$ . Alors  $\alpha(\uparrow E) \geq \alpha(\uparrow E_0) = 1$  (puisque  $\alpha$  est monotone, et  $E_0 \prec \alpha$ ) d'une part, et pour tout  $x \in E$ ,  $\alpha(\uparrow x) \neq 0$  (car  $E_0 \prec \alpha$  si  $x \in E_0$ , par construction des  $z$  et  $z'$  ci-dessus si  $x \in E'_1$  ou  $x \in E'_2$ ); donc  $E \prec \alpha$ . D'autre part,  $E_1 \leq^{\sharp} E$  et  $E_2 \leq^{\sharp} E$  par construction : par exemple,  $E_1 \leq^{\flat} E$  car  $E_1 \leq^{\flat} E'_1$  puisque pour chaque  $x_1 \in E_1$ , on a construit  $z \in E'_1$  tel que  $z \in \uparrow x_1$ ; et  $E_1 \leq^{\sharp} E$  car  $E_0 \subseteq \uparrow E_1$ , tout  $z$  de  $E'_1$  est dans  $\uparrow x_1$  pour un certain  $x_1 \in E_1$ , et de même pour les  $z'$  de  $E'_2$ . Donc  $\langle E_1 \rangle, \langle E_2 \rangle \sqsubseteq_{\text{EM}} \langle E \rangle$  par le lemme 3.5.6. Donc  $\langle E_1 \rangle^*, \langle E_2 \rangle^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \langle E \rangle^*$ . Rappelons que  $E \prec \alpha$ , et que  $E$  est fini et inclus dans  $B$ , c'est-à-dire  $E \in \mathcal{F}$ . La famille  $\mathcal{F}$  est donc dirigée.

4. Montrons que  $\alpha$  est exactement la borne supérieure des  $\langle E \rangle^*$ , avec  $E \in \mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $E$  fini non vide inclus dans  $B$  tel que  $E \prec \alpha$ . Clairement,  $\alpha$  est supérieur ou égal à cette borne supérieure. Réciproquement, montrons que si  $\alpha(U) = 1$  alors il existe  $E \in \mathcal{F}$  tel que  $\langle E \rangle^*(U) = 1$ , c'est-à-dire tel que  $E \subseteq U$ , et que si  $\alpha(U) \neq 0$  alors il existe  $E' \in \mathcal{F}$  tel que  $\langle E' \rangle^*(U) \neq 0$ , c'est-à-dire tel que  $E'$  intersecte  $U$ .

Pour la première affirmation, c'est la propriété (\*). Pour la seconde, si  $\alpha(U) \neq 0$ , comme  $U$  est l'union dirigée des  $\uparrow E_1$ ,  $E_1 \subseteq B$  fini non vide et que  $\alpha$  est continue, il existe une partie finie non vide  $E_1$  de  $B$  telle que  $\alpha(\uparrow E_1) \neq 0$ . Par la propriété 4, il existe  $x \in E_1$  tel que  $\alpha(\uparrow x) \neq 0$ . Par (\*), il existe un ensemble fini non vide  $E_0 \subseteq B \cap U$  tel que  $E_0 \prec \alpha$ . Posons  $E' = E_0 \cup \{x\}$ . Alors  $\alpha(\uparrow E') \geq \alpha(\uparrow E_0) = 1$ , et pour tout  $z \in E'$ ,  $\alpha(\uparrow z) \neq 0$  — c'est vrai pour  $z = x$  par construction, et pour tout  $z \in E_0$  car  $E_0 \prec \alpha$ . Donc  $E \prec \alpha$ . De plus,  $E'$  intersecte  $U$  en  $x$ .

5. Démontrons que  $\langle E \rangle^* \ll \alpha$  si et seulement si  $E \prec \alpha$ . Par le point 2., si  $E \prec \alpha$  alors  $\langle E \rangle^* \ll \alpha$ . Réciproquement, si  $\langle E \rangle^* \ll \alpha$ , par le point 3.,  $\alpha$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $E'$  finis non vides inclus dans  $B$  tels que  $E' \prec \alpha$ , donc il existe un tel  $E'$  tel que  $\langle E \rangle^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \langle E' \rangle^*$ . Par l'isomorphisme du lemme 3.6.8, ceci implique  $\uparrow E \supseteq \uparrow E'$  et  $\downarrow E \subseteq \downarrow E'$ . Donc, d'une part,  $E' \subseteq \uparrow E$ , donc  $\uparrow E' \subseteq \uparrow E$ , d'où  $\alpha(\uparrow E) \geq \alpha(\uparrow E') = 1$ ; d'autre part, pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in E'$  tel que  $x \leq x'$ ; on a alors  $\uparrow x \supseteq \uparrow x'$ , donc  $\alpha(\uparrow x) \geq \alpha(\uparrow x') \neq 0$ . D'où  $E \prec \alpha$ .

6. Il nous reste à démontrer que la topologie de Scott coïncide avec la topologie de Vietoris. Puisque  $\mathcal{P}(X)$  est un cpo continu de base indiquée dans l'énoncé de la proposition, et par le point 5., la topologie de Scott sur  $\mathcal{P}(X)$  est engendrée par les  $\uparrow_{\mathcal{P}(X)} \langle E \rangle^* = \{\alpha \in \mathcal{P}(X) \mid E \prec \alpha\} = \bigcap_{x \in E} \diamond \uparrow x \cap \square \uparrow E$ , qui sont tous des ouverts de Vietoris. Réciproquement, la topologie de Scott est plus fine que la topologie de Vietoris par le lemme 3.6.9.  $\square$

Revenons à l'étude de la topologie de Vietoris. Contrairement à  $\mathcal{P}\ell_V(X)$ ,  $\mathcal{P}_V(X)$  est un espace ayant de très bonnes propriétés topologiques. Heckmann (1997) montre que  $\mathcal{P}_V(X)$  est sobre, pour tout espace topologique  $X$ . Nous allons montrer que, sous quelques hypothèses supplémentaires sur  $X$ ,  $\mathcal{P}_V(X)$  est en fait stablement compact. Ceci nous permettra aussi d'introduire une technique, inspirée de Jung (2004), que nous réutiliserons souvent dans la suite.

Rappelons que la topologie patch d'un espace  $X$  est la topologie engendrée par les ouverts et les cocompacts (complémentaires de compacts saturés) de  $X$ . L'espace  $X'$ , formé des éléments de  $X$  sous la topologie patch, est un espace de Nachbin dès que  $X$  est stablement compact. On dit que  $X'$  est l'espace de Nachbin associé à  $X$ .

**Lemme 3.6.11** *Soit  $T$  un ensemble, et  $A$  un espace stablement compact. L'espace  $A^T$  de toutes les fonctions de  $T$  vers  $A$ , muni de la topologie produit, est stablement compact. Son espace de Nachbin associé est  $A'^T$ , où  $A'$  est l'espace de Nachbin associé à  $A$ , muni de l'ordre composante par composante.*

*Démonstration.* On rappelle que tout produit (topologique) d'espaces stablement compacts est stablement compact, et que la topologie patch d'un produit d'espaces stablement compacts coïncide avec le produit des topologies patch, et l'ordre de spécialisation du produit est l'ordre composante par composante (voir la section 2.3, ou Jung 2004, Proposition 2.15).  $\square$

**Définition 3.6.12 (Patch-continue)** *Une fonction  $f$  de  $Y$  vers  $Z$  est dite patch-continue si et seulement si elle est continue de  $Y'$  vers  $Z'$ , où  $Y'$  est l'espace  $Y$  muni de sa topologie patch et  $Z'$  est  $Z$  muni de sa topologie patch.*

**Définition 3.6.13** *Soit  $T$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux espaces topologiques.*

*On appelle formule patch-continue sur  $T$ ,  $A$ ,  $B$  toute formule  $\Phi$  de la forme*

$$f(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n)) \in F$$

*où  $f$  est une fonction patch-continue de  $A^n$  dans  $B$ ,  $t_1, \dots, t_n$  sont  $n$  éléments de  $T$ , et  $F$  est un patch-fermé de  $B$ . On dit que  $\Phi$  est vraie en  $\alpha$ , où  $\alpha$  est une fonction de  $T$  vers  $A$ , si et seulement si  $f(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)) \in F$ .*

On appelle équation patch-continue sur  $T, A$  toute formule  $E$  de la forme

$$f(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n)) \doteq g(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n))$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions patch-continues de  $A^n$  dans  $A$ , et  $t_1, \dots, t_n$  sont  $n$  éléments de  $T$ . On dit que  $E$  est vraie en  $\alpha$ , où  $\alpha$  est une fonction de  $T$  vers  $A$ , si et seulement si  $f(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)) = g(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n))$ .

Un système patch-continu sur  $T, A, B$  est un ensemble quelconque  $\Sigma$  de formules patch-continues sur  $T, A, B$ . On dit que  $\Sigma$  est vrai en  $\alpha$  si et seulement si tout élément  $\Phi$  de  $\Sigma$  est vrai en  $\alpha$ .

Notons que toute équation patch-continue sur  $T, A$  est une formule patch-continue sur  $T, A, \mathbb{S}$ , où  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$  est l'espace de Sierpiński. On rappelle que les ouverts de  $\mathbb{S}$  sont  $\emptyset, \mathbb{S}$  et  $\{1\}$ , mais pas  $\{0\}$ .  $\mathbb{S}$  est stablement compact, et son espace de Nachbin associé  $\mathbb{S}'$  est juste  $\{0, 1\}$  muni de la topologie discrète, et de l'ordre défini par  $0 \leq 1$ . En effet, l'équation patch-continue  $f(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n)) \doteq g(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n))$  est juste la formule patch-continue  $f(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n)) \oplus g(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n)) \in F$ , où  $\oplus$  est la fonction (nécessairement patch-continue, puisque  $\mathbb{S}'$  est équipé de la topologie discrète) de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{S}$  qui à deux éléments égaux associe 0 et à deux éléments distincts associe 1, et où  $F$  est le patch-fermé  $\{0\}$ .

**Théorème 3.6.14** Soit  $T$  un ensemble,  $A$  un espace stablement compact,  $B$  un espace topologique, et  $\Sigma$  un système patch-continu sur  $T, A, B$ . Le sous-espace  $[\Sigma]$  de  $A^T$  des fonctions  $\alpha$  de  $T$  dans  $A$  telles que  $\Sigma$  est vrai en  $\alpha$  est patch-fermé dans  $A^T$ .

$[\Sigma]$  est un espace stablement compact.

*Démonstration.* Pour toute formule  $\Phi \in \Sigma$ , disons de la forme  $f(\_ (t_1), \dots, \_ (t_n)) \in F$ , l'ensemble  $[\Phi]$  des  $\alpha$  telles que  $\Phi$  est vrai en  $\alpha$  est juste  $\{\alpha \in A^T \mid f(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)) \in F\} = \{\alpha \in A^T \mid (\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)) \in f^{-1}(F)\}$ . Or la fonction qui à  $\alpha \in A^T$  associe  $\alpha(t_i)$ , pour n'importe quel  $i$ , est patch-continue : elle est en effet continue de  $A^{T'} = A^T$  vers  $A'$ , en tant que projection sur la composante  $t_i$ . La fonction qui à  $\alpha$  associe le  $n$ -uplet  $(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n))$  est donc elle aussi patch-continue de  $A^T$  vers  $A^n$ . Donc  $[\Phi]$  est patch-fermé. Or  $[\Sigma] = \bigcap_{\Phi \in \Sigma} [\Phi]$ , donc  $[\Sigma]$  est patch-fermé. On en déduit immédiatement que  $[\Sigma]$  est stablement compact, puisque tout sous-espace patch-fermé d'un espace stablement compact est stablement compact (voir la section 2.3 ou Jung 2004, Proposition 2.16), et que  $A^T$  est stablement compact par le lemme 3.6.11.  $\square$

On en déduit immédiatement :

**Proposition 3.6.15** Soit  $X$  un espace topologique. L'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations sur  $X$ , muni de la topologie induite par la topologie produit sur  $\mathbf{A}^{\Theta(X)}$ , est stablement compact.

*Démonstration.* Remarquons que  $\mathbf{A}$  est stablement compact, et son espace de Nachbin associé  $\mathbf{A}'$  est  $\{0, M, 1\}$  muni de la topologie discrète. Toute fonction de  $\mathbf{A}^n$  dans  $\mathbf{A}$  est donc patch-continue. L'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations sur  $X$  est ensuite le sous-espace  $[\Sigma]$  de  $\mathbf{A}^{\Theta(X)}$ , où  $\Sigma$  est formé des équations patch-continues :

- $\_ (\emptyset) = 0$  (caractère strict) ;

- $\_ (X) = 1$  (normalisation) ;
- $\_ (U) \sqcup \_ (V) = \_ (V)$  pour chaque couple  $(U, V)$  d'ouverts de  $X$  tels que  $U \subseteq V$ , et où  $\sqcup$  est la fonction borne supérieure dans  $\mathbf{A}$  (monotonie) ;
- $\_ (U) \star \_ (U \cup V) = \_ (U) \star \_ (V)$  pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$ , où  $\star$  est la fonction (nécessairement patch-continue) de  $\mathbf{A}^2$  dans  $\mathbf{A}$  définie par  $0 \star y = y$ ,  $M \star y = 1 \star y = 1$  (propriété 4) ;
- $\_ (U) \bar{\star} \_ (U \cap V) = \_ (U) \bar{\star} \_ (V)$  pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$ , où  $\bar{\star}$  est définie par  $1 \bar{\star} y = y$ ,  $M \bar{\star} y = 0 \bar{\star} y = 0$  (propriété 5).

On applique ensuite le théorème 3.6.14, avec  $T = \mathcal{O}(X)$ ,  $A = \mathbf{A}$ ,  $B = \mathbb{S}$ . □

Ceci ne permet pas encore de conclure que l'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations *continues* est stablement compact. Nous utiliserons pour ceci le lemme de Lawson 3.2.2, que nous appliquerons au cas des  $\mathbf{A}$ -valuations continues, en montrant que, sous quelques conditions mineures sur  $A$ , l'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations continues sur  $X$  est un rétract de l'espace de toutes les  $\mathbf{A}$ -valuations sur  $X$ . L'argument essentiel est dû à Dana Scott. La version simplifiée de la formule de Scott que nous utiliserons est tout ce dont nous aurons besoin.

**Lemme 3.6.16 (Scott)** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu de base  $B$ , et  $f$  une fonction quelconque de  $B$  vers un ensemble ordonné  $Y$ . On définit  $\tau(f)$  par la formule de Scott :*

$$\tau(f)(x) = \sup_{y \in B, y \ll x} f(y)$$

*Alors  $\tau(f)$  est Scott-continue de  $X$  dans  $Y$ . C'est la plus grande fonction Scott-continue inférieure ou égale à  $f$  sur  $B$ .*

*Démonstration.* On vérifie d'abord que  $\tau(f)$  est croissante. Si  $x \leq x'$ , on a :

$$\tau(f)(x) = \sup_{y \in B, y \ll x} f(y) \leq \sup_{y \in B, y \ll x'} f(y) = \tau(f)(x')$$

puisque  $y \ll x$  et  $x \leq x'$  impliquent  $y \ll x'$ . Montrons que  $\tau(f)$  est continue. Pour ceci, soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille dirigée dans  $X$  ayant une borne supérieure dans  $X$ . On a :

$$\begin{aligned} \tau(f)(\sup_{i \in I} x_i) &= \sup_{y \in B, y \ll \sup_{i \in I} x_i} f(y) \\ &= \sup_{\exists z \cdot y \ll z \ll \sup_{i \in I} x_i} f(y) \quad \text{par la propriété d'interpolation} \\ &= \sup_{\exists z \cdot y \ll z \text{ et } \exists i \in I \cdot z \leq x_i} f(y) \quad \text{par définition de } \ll \\ &= \sup_{\exists i \in I \cdot \exists z \cdot y \ll z \leq x_i} f(y) \\ &= \sup_{\exists i \in I \cdot y \ll x_i} f(y) = \sup_{i \in I} \sup_{y \ll x_i} f(y) = \sup_{i \in I} \tau(f)(x_i) \end{aligned}$$

Soit  $f'$  une autre fonction Scott-continue de  $B$  dans  $Y$  telle que  $f'(x) \leq f(x)$  pour tout  $x \in X$ . Puisque  $X$  est un ensemble ordonné continu,  $x$  est la borne supérieure de la famille dirigée des éléments  $y$  de  $B$  tels que  $y \ll x$ . Donc :

$$f'(x) = \sup_{y \in B, y \ll x} f'(y) \leq \sup_{y \in B, y \ll x} f(y) = \tau(f)(x)$$

Donc  $\tau(f)$  est bien la plus grande fonction Scott-continue inférieure ou égale à  $f$ .  $\square$

On souhaite montrer que  $\tau$  définit une rétraction de  $\mathbf{A}^{\mathcal{O}(X)}$  sur  $\mathcal{P}_V(X)$ . Pour ceci,  $\mathcal{O}(X)$  devra être un cpo continu, autrement dit  $X$  devra être localement relativement compact. C'est le lemme 3.4.10. Rappelons aussi que la relation "bien en-dessous" sur  $\mathcal{O}(X)$  est la relation  $\subseteq$  de la définition 3.4.8. Nous aurons besoin d'une autre propriété de  $X$  :

**Définition 3.6.17 (relativement cohérent)** *Un espace topologique  $X$  est relativement cohérent si et seulement si, pour tous ouverts  $U, V_1, V_2$  de  $X$ , si  $U \subseteq V_1$  et  $U \subseteq V_2$  alors  $U \subseteq V_1 \cap V_2$ .*

Ceci est équivalent à demander que la relation d'approximation  $\subseteq$  soit *multiplicative*, et donc que le treillis des ouverts  $\mathcal{O}(X)$  soit *arithmétique* (Abramsky and Jung, 1994, définition 7.2.18), (Gierz et al., 1980, proposition I.4.7).

Rappelons que tout espace localement compact est localement relativement compact (c'est le lemme 3.4.11). On remarque que tout espace cohérent et localement compact est relativement cohérent : si  $U \subseteq V_1$  et  $U \subseteq V_2$ , alors par le lemme 3.4.11 il existe deux compacts saturés  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que  $U \subseteq Q_1 \subseteq V_1$  et  $U \subseteq Q_2 \subseteq V_2$ , donc  $U \subseteq Q_1 \cap Q_2 \subseteq V_1 \cap V_2$  ; comme  $Q_1 \cap Q_2$  est compact puisque  $X$  est cohérent,  $U \subseteq V_1 \cap V_2$  par le lemme 3.4.11 de nouveau.

La combinaison des deux propriétés sera importante, donnons-lui un nom.

**Définition 3.6.18 (Espace stablement localement relativement compact)** *Un espace topologique  $X$  est stablement localement relativement compact si et seulement s'il est localement relativement compact et relativement cohérent.*

*$X$  est stablement relativement compact si et seulement s'il est compact et stablement localement relativement compact.*

Tout espace stablement localement compact est stablement localement relativement compact. En effet, comme nous l'avons remarqué plus haut, tout espace localement compact est localement relativement compact, et tout espace cohérent et localement compact est relativement cohérent.

Il n'y a pas une différence énorme entre espaces stablement localement relativement compacts et espaces stablement localement compacts. En fait, si  $X$  est sobre, alors  $X$  est stablement localement relativement compact si et seulement si  $X$  est stablement localement compact.

L'argument est le suivant. Supposons  $X$  stablement localement relativement compact. Si  $U \subseteq V$ , posons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des ouverts  $W$  tels que  $U \subseteq W$ . En utilisant le fait que  $X$  est relativement cohérent, on voit que  $\mathcal{F}$  est un filtre. Si  $(W_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée d'ouverts telle que  $\bigcup_{i \in I} W_i \in \mathcal{F}$ , alors par la propriété d'interpolation, il existe un ouvert  $W$  tel que  $U \subseteq W \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$ , d'où  $U \subseteq W_i$  pour un certain  $i \in I$  : donc  $\mathcal{F}$  est Scott-ouvert. Par le théorème d'Hofmann-Mislove,  $Q = \bigcap_{W \in \mathcal{F}} W$  est un compact saturé, et clairement  $U \subseteq Q \subseteq V$ . Comme  $X$  est localement relativement compact, pour tout ouvert  $V$  et tout point  $x \in V$ , il existe un ouvert  $U$  tel que  $x \in U \subseteq V$ , donc aussi un compact saturé  $Q$  tel que  $x \in U \subseteq Q \subseteq V$  :  $X$  est localement compact. De plus, en tant qu'espace localement relativement compact,  $X$  est cohérent.

La notion d'espace relativement cohérent nous permet d'établir un résultat dual du lemme 3.4.12.

**Lemme 3.6.19** Soit  $X$  un espace relativement cohérent,  $V, U_1, \dots, U_n$  des ouverts ( $n \geq 1$ ). Alors  $V \in \bigcap_{i=1}^n U_i$  si et seulement s'il existe  $n$  ouverts  $V_1, \dots, V_n$  tels que  $V \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_i$  et  $V_i \in U_i$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ .

*Démonstration.* Si  $V \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ , alors  $V \in U_i$  pour tout  $i$  : on pose  $V_i = V$  pour tout  $i$ . Réciproquement, si  $V_i \in U_i$  pour tout  $i$ , et  $V \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_i$ , alors  $V \in U_i$  pour tout  $i$ , donc  $V \in \bigcap_{i=1}^n U_i$  puisque  $X$  est relativement cohérent, par une récurrence simple sur  $n$ .  $\square$

**Lemme 3.6.20** Soit  $X$  un espace stablement relativement compact. Si  $\alpha$  est une  $\mathbf{A}$ -valuation sur  $X$ , alors  $\tau(\alpha)$  est une  $\mathbf{A}$ -valuation continue sur  $X$ .

*Démonstration.* Par le lemme 3.6.16,  $\tau(\alpha)$  est monotone et continue. Notons que  $\tau(\alpha)(U) = \sup_{V \in U} \alpha(V)$  par définition, en utilisant le lemme 3.4.11). La fonction  $\tau(\alpha)$  est stricte, car  $\tau(\alpha)(\emptyset) = \sup_{V \in \emptyset} \alpha(V) = \alpha(\emptyset) = 0$ , le seul ouvert bien en-dessous du vide étant le vide lui-même, et  $\alpha$  étant stricte. Elle est normalisée, car  $X$  est compact, donc  $X$  en tant qu'ouvert est tel que  $X \in X$  :  $\tau(\alpha)(X) = \sup_{V \in X} \alpha(V) = \alpha(X) = 1$ .

Si  $\tau(\alpha)(U) = 0$ , alors  $\alpha(W_1) = 0$  pour tout  $W_1 \in U$ .

$$\begin{aligned}
 \tau(\alpha)(U \cup V) &= \sup_{W \in U \cup V} \alpha(W) \\
 &= \sup_{W_1 \in U, W_2 \in V, W \subseteq W_1 \cup W_2} \alpha(W) \quad \text{par le lemme 3.4.12,} \\
 &\quad \text{car } X \text{ est localement relativement compact} \\
 &= \sup_{W_1 \in U, W_2 \in V} \alpha(W_1 \cup W_2) \quad \text{car } \alpha \text{ est monotone} \\
 &= \sup_{W_1 \in U, W_2 \in V} \alpha(W_2) \quad \text{puisque } \alpha(W_1) = 0 \text{ pour tout } W_1 \in U, \\
 &\quad \text{et par la propriété 4 de la } \mathbf{A}\text{-valuation } \alpha \\
 &= \sup_{W_2 \in V} \alpha(W_2) \quad \text{puisque'il existe } W_1 \in U, \text{ par exemple } \emptyset \\
 &= \tau(\alpha)(V)
 \end{aligned}$$

Si  $\tau(\alpha)(U) = 1$ , alors il existe un ouvert  $U_1$  tel que  $U_1 \in U$  et  $\alpha(U_1) = 1$ , par définition et le fait que  $\alpha$  ne prend que les valeurs 0, M, ou 1. Alors :

$$\begin{aligned}
 \tau(\alpha)(U \cap V) &= \sup_{W \in U \cap V} \alpha(W) \\
 &= \sup_{W_1 \in U, W_2 \in V, W \subseteq W_1 \cap W_2} \alpha(W) \quad \text{par le lemme 3.6.19,} \\
 &\quad \text{puisque } X \text{ est relativement cohérent} \\
 &\geq \sup_{W_2 \in V, W \subseteq U_1 \cap W_2} \alpha(W) \\
 &= \sup_{W_2 \in V} \alpha(U_1 \cap W_2) \quad \text{car } \alpha \text{ est monotone} \\
 &= \sup_{W_2 \in V} \alpha(W_2) \quad \text{par la propriété 5 de la } \mathbf{A}\text{-valuation } \alpha \\
 &= \tau(\alpha)(V)
 \end{aligned}$$

Comme d'autre part  $\tau(\alpha)(U \cap V) \leq \tau(\alpha)(V)$  puisque  $\tau(\alpha)$  est monotone, on en conclut que  $\tau(\alpha)(U \cap V) = \tau(\alpha)(V)$ .  $\square$

**Proposition 3.6.21** *Soit  $X$  un espace stablement relativement compact. La fonction  $\tau$  définie par la formule de Scott (définition 3.6.16), et  $\mathfrak{s}$  l'injection canonique de  $\mathcal{P}_V(X)$  dans l'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations sur  $X$ , muni de la topologie induite par la topologie produit sur  $\mathbf{A}^{\mathcal{O}(X)}$ , forment une rétraction et une section respectivement.*

*En particulier,  $\mathcal{P}_V(X)$  est stablement compact.*

*Démonstration.* Nommons temporairement  $Y$  l'espace des  $\mathbf{A}$ -valuations sur  $X$ , muni de la topologie induite par la topologie produit sur  $\mathbf{A}^{\mathcal{O}(X)}$ . D'abord,  $\tau$  est bien une fonction de  $Y$  vers  $\mathcal{P}_V(X)$ , par le lemme 3.6.20. Ensuite,  $\tau(\mathfrak{s}(\alpha)) = \alpha$  pour toute  $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$ , car pour tout ouvert  $U$ ,  $\tau(\mathfrak{s}(\alpha))(U) = \sup_{V \in U} \mathfrak{s}(\alpha)(V) = \sup_{V \in U} \alpha(V) = \alpha(U)$ , puisque  $\alpha$  est continue et que  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu,  $X$  étant localement relativement compact (lemme 3.4.10).

Montrons que  $\mathfrak{s}$  est continue. L'image réciproque de l'ouvert de base  $\{f \in Y \mid f(U) \in \{1\}\}$  est  $\square U$ , et celui de l'ouvert de base  $\{f \in Y \mid f(U) \in \{M, 1\}\}$  est  $\diamond U$ .

Il reste à montrer que  $\tau$  est elle aussi continue. L'image réciproque de  $\square U$  est l'ensemble des  $f \in Y$  tels que  $\tau(f)(U) = 1$ , c'est-à-dire tels que  $\sup_{V \in U} f(V) = 1$ , autrement dit tels qu'il existe  $V \in U$  tel que  $f(V) = 1$ . Ceci est l'union  $\bigcup_{V \in U} \{f \in Y \mid f(V) \in \{1\}\}$ , qui est donc ouverte. L'image réciproque de  $\diamond U$  est l'ensemble des  $f \in Y$  tels que  $\tau(f)(U) \in \{M, 1\}$ , c'est-à-dire tels que  $\sup_{V \in U} f(V) \in \{M, 1\}$ . On conclut de même, l'union  $\bigcup_{V \in U} \{f \in Y \mid f(V) \in \{M, 1\}\}$  étant ouverte.

$Y$  est stablement compact par la proposition 3.6.15. Comme  $\mathcal{P}_V(X)$  est un rétract de  $Y$ ,  $\mathcal{P}_V(X)$  est aussi stablement compact, par le lemme 3.2.2.  $\square$

On en déduit l'analogie du théorème 3.5.30.

**Corollaire 3.6.22** *Soit  $X$  un cpo continu, cohérent et compact. Alors  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_V(X)$  (resp.,  $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}'_V(X)$ ) est un cpo continu, cohérent et compact. Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , alors  $\mathcal{P}(X)$  (resp.,  $\mathcal{P}'(X)$ ) aussi, à savoir  $\langle \perp \rangle^*$  (resp.,  $(X, \{\perp\})$ ).*

*Démonstration.* On a  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}'_V(X)$ , par la proposition 3.6.10, et tous les espaces sont des cpos continus. Puisque  $X$  est un cpo continu, cohérent et compact, il est stablement compact. Par la proposition 3.6.21, ces espaces sont stablement compacts, donc cohérents et compacts. Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , le plus petit élément de  $\mathcal{P}'(X)$  est clairement  $(X, \{\perp\})$ , donc celui de  $\mathcal{P}(X)$  est  $(X, \{\perp\})^* = \langle \perp \rangle^*$ .  $\square$

On peut finalement se demander quel est le rapport entre  $\mathcal{P}_V(X)$  et  $\mathcal{P}\ell_V(X)$ . Par la proposition 3.6.2, la fonction  $L \mapsto L^*$  est un plongement de  $\mathcal{P}\ell_V(X)$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$  lorsque  $X$  est sobre. C'est aussi un plongement de  $\mathcal{P}\ell(X)$  dans  $\mathcal{P}(X)$  :

**Lemme 3.6.23** *La fonction  $L \mapsto (\uparrow L, cl(L))$  est un plongement d'ordre de  $\mathcal{P}\ell(X)$  dans  $\mathcal{P}'(X)$ . La fonction  $(Q, F) \mapsto (Q, F)^*$  est un plongement d'ordre de  $\mathcal{P}'(X)$  dans  $\mathcal{P}(X)$ . Leur composée  $L \mapsto L^*$  est un plongement d'ordre de  $\mathcal{P}\ell(X)$  dans  $\mathcal{P}(X)$ .*

*Démonstration.* Si  $L \sqsubseteq_{\text{EM}} L'$ , alors par définition  $\uparrow L \supseteq \uparrow L'$  et  $cl(L) \subseteq cl(L')$ , c'est-à-dire  $(\uparrow L, cl(L)) \sqsubseteq_{\text{EM}} (\uparrow L', cl(L'))$ , au sens du lemme 3.6.6. La réciproque est évidente. La fonction  $L \mapsto (\uparrow L, cl(L))$  est donc un plongement d'ordre.

Si  $(Q, F) \sqsubseteq_{\text{EM}} (Q', F')$ , c'est-à-dire si  $Q \supseteq Q'$  et  $F \subseteq F'$ , alors pour tout ouvert  $U$  : si  $(Q, F)^*(U) = 1$ , donc  $Q \subseteq U$ , alors  $Q' \subseteq U$ , donc  $(Q', F')^*(U) = 1$  ; et si  $(Q', F')^*(U) = 0$ , donc  $F' \cap U = \emptyset$ , alors  $F \cap U = \emptyset$ , donc  $(Q, F)^*(U) = 0$ . Donc  $(Q, F)^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} (Q', F')$ , et  $(Q, F) \mapsto (Q, F)^*$  est donc croissante. Réciproquement, si  $(Q, F)^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} (Q', F')$ , alors :  $Q = \bigcap_{U \supseteq Q} U$  (car  $Q$  est saturé,  $U$  parcourant les ouverts de  $X$ ) =  $\bigcap_{U/(Q,F)^*(U)=1} U$ , qui contient  $\bigcap_{U/(Q',F')^*(U)=1} U = Q'$  puisque  $(Q, F)^*(U) = 1$  implique  $(Q', F')^*(U) = 1$  ; et pour  $U$  égal au complémentaire de  $F'$ , donc tel que  $(Q', F')^*(U) = 0$ , on a  $(Q, F)^*(U) = 0$ , donc  $F \cap U = \emptyset$ , c'est-à-dire  $F \subseteq F'$ . Donc  $(Q, F) \sqsubseteq_{\text{EM}} (Q', F')$ , et  $(Q, F) \mapsto (Q, F)^*$  est bien un plongement d'ordre.  $\square$

**Lemme 3.6.24** *Soit  $X$  un espace bien filtrant. Alors la fonction  $L \mapsto L^*$  est Scott-continue de  $\mathcal{P}\ell(X)$  dans  $\mathcal{P}(X)$ .*

*Démonstration.* Soit  $(L_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de lentilles dans  $\mathcal{P}\ell(X)$ . En posant  $Q_i = \uparrow L_i$ ,  $F_i = cl(L_i)$ , la borne supérieure de cette famille est  $L = Q \cap F$ , avec  $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i$ ,  $F = cl(\bigcup_{i \in I} F_i)$ , par le lemme 3.5.4, qui s'applique car  $X$  est bien filtrant. On a  $\sup_{i \in I} L_i^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} L^*$  par croissance. Montrons l'inégalité inverse. Pour tout ouvert  $U$ , si  $L^*(U) = 1$ , c'est-à-dire si  $Q \subseteq U$ , alors il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq U$  puisque  $X$  est bien filtrant, donc  $L_i^*(U) = 1$ , en particulier  $\sup_{i \in I} L_i^*(U) = 1$ . Si en revanche  $\sup_{i \in I} L_i^*(U) = 0$ , alors  $F_i$  est inclus dans le fermé  $X \setminus U$  pour tout  $i \in I$ , donc aussi  $\bigcup_{i \in I} F_i$ , donc aussi son adhérence, puisque  $X \setminus U$  est fermé ; donc  $L^*(U) = 0$ . On en déduit que  $L^* \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \sup_{i \in I} L_i^*$ , donc  $L^* = \sup_{i \in I} L_i^*$ .  $\square$

**Théorème 3.6.25** *Soit  $X$  un cpo continu. La fonction  $L \mapsto L^*$  est un isomorphisme de  $\mathcal{P}\ell(X)$  sur  $\mathcal{P}(X)$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 3.6.23, la fonction  $h$  qui à toute  $\mathbf{A}$ -évaluation continue de la forme  $L^*$  associe  $L$  est bien définie et croissante. Par la proposition 3.6.10, toute  $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $\langle E \rangle^*$ , lorsque  $E$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{F}_\alpha$  des parties finies non vides de  $X$  telles que  $\langle E \rangle^* \ll \alpha$ . Puisque  $h$  est croissante, la famille des  $\langle E \rangle = h(\langle E \rangle^*)$ ,  $E \in \mathcal{F}_\alpha$ , est dirigée dans  $\mathcal{P}\ell(X)$ . Comme  $X$  est un cpo continu,  $X$  est sobre, donc bien filtrant. On peut donc appliquer la proposition 3.6.10 :  $\mathcal{P}\ell(X)$  est un cpo. Donc la borne supérieure des  $\langle E \rangle$ , lorsque  $E$  parcourt  $\mathcal{F}_\alpha$ , existe dans  $\mathcal{P}\ell(X)$ , notons-la  $f(\alpha)$ .

La fonction  $f$  est trivialement croissante. Par le lemme 3.6.24,  $(f(\alpha))^* = (\sup_{E \in \mathcal{F}_\alpha} \langle E \rangle^*)^* = \sup_{E \in \mathcal{F}_\alpha} \langle E \rangle^* = \alpha$ . D'autre part, ceci entraîne que pour toute lentille,  $f(L^*)^* = L^*$ , donc  $f(L^*) = h(f(L^*)^*) = h(L^*) = L$ . Donc  $f$  et  $L \mapsto L^*$  sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

En particulier, le théorème 3.5.30, la proposition 3.6.10, le corollaire 3.6.22, et le théorème 3.6.25 entraînent que :

**Fait 3.6.26** *Soit  $X$  un cpo continu, cohérent et compact. Tous les espaces  $\mathcal{P}\ell(X) = \mathcal{P}\ell_\nu(X)$ ,  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}'_\nu(X)$  sont des cpos continus, cohérents et compacts isomorphes.*

▷ **Exercice 3.2**

Pour toute fonction continue  $f : X \rightarrow Y$ , on pose  $\mathcal{P}_\nu(f)$  la fonction qui à toute  $\mathbf{A}$ -valuation continue  $\alpha$  sur  $X$  associe la fonction  $\mathcal{P}_\nu(f)(\alpha)$  de  $\mathcal{O}(Y)$  vers  $\mathbb{R}^+$  définie par :  $\mathcal{P}_\nu(f)(\alpha)(U) = \alpha(f^{-1}(U))$ . Montrer que  $\mathcal{P}_\nu(f)(\alpha)$  est une  $\mathbf{A}$ -valuation continue sur  $Y$ .

### 3.7 Valuations continues et topologie faible

Si  $X$  est un cpo continu, l'espace  $\mathbf{V}(X)$  des valuations continues sur  $X$  est un ensemble ordonné continu, avec une base formée de valuations simples. On sait que si de plus  $X$  est stablement compact, alors l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  des valuations continues sous-normalisées sur  $X$  est lui aussi stablement compact : voir Jung (2004, Section 3), Alvarez-Manilla (2000, théorèmes 7.26, 7.27), ainsi que Jung and Tix (1998, théorème 19) pour le cas où  $X$  est un cpo continu cohérent et compact, c'est-à-dire stablement compact.

Nous allons remonter ce dernier résultat, à la façon de Jung (2004, Théorème 3.2). Une partie sera démontrée ici, une autre à la section 4.5, au milieu de résultats plus généraux (théorèmes 4.5.12 et 4.5.13).

Pour ceci, nous équipons  $\mathbf{V}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , et  $\mathbf{V}_1(X)$  d'une autre topologie. Nous avons déjà opéré un changement similaire de topologie, en étudiant la topologie haute sur  $\mathcal{H}(X)$ , ou la topologie de Vietoris sur  $\mathcal{P}\ell(X)$ ,  $\mathcal{P}(X)$ , ou  $\mathcal{P}'(X)$ .

**Définition 3.7.1 (Topologie faible)** La topologie faible sur  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$ , est la topologie engendrée par les ouverts  $[U > r] = \{\nu \mid \nu(U) > r\}$ , lorsque  $U$  parcourt les ouverts de  $X$ , et  $r \in \mathbb{R}$ .

On notera  $\mathbf{V}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1\ wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$  les espaces  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$ , munis de la topologie faible.

L'idée est que la topologie faible est la moins fine qui rende continue les fonctions de test  $\nu \mapsto \nu(U)$  pour chaque ouvert  $U$ . Toute valuation  $\nu$  sur  $X$  est une fonction de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$ , donc un élément de  $\prod_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathbb{R}^+$ . La topologie faible n'est donc rien d'autre que la topologie induite par la topologie sur  $\prod_{U \in \mathcal{O}(X)} \mathbb{R}^+$ . Un nom courant pour la topologie ci-dessus est donc la topologie *produit*. Il est plus courant de définir la topologie faible comme étant la moins fine telle que la fonctionnelle qui à  $\nu$  associe l'intégrale de  $f$  par rapport à  $\nu$  soit continue, pour toute fonction continue bornée  $f$ . C'est ce que nous ferons en section 4.5, une fois que nous aurons introduit la notion pertinente d'intégrale. Nous montrerons alors que ces deux topologies coïncident.

**Lemme 3.7.2** La topologie faible est moins fine que la topologie de Scott sur  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$  :  $[U > r]$  est toujours un ouvert de Scott.

*Démonstration.* Clairement,  $[U > r]$  est clos par le haut. Si de plus  $\nu$  est la borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$  de valuations continues dans l'un des espaces indiqués, et  $\nu \in [U > r]$ , alors par définition  $\sup_{i \in I} \nu_i(U) > r$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $\nu_i(U) > r$ , c'est-à-dire  $\nu_i \in [U > r]$ .  $\square$

**Lemme 3.7.3** *La topologie faible est plus fine que la topologie haute sur  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y$  l'un des trois espaces  $\mathbf{V}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , ou  $\mathbf{V}_1(X)$ . Il suffit de montrer que, pour toute valuation  $\nu_0 \in Y$ ,  $\{\nu \in Y \mid \nu \not\leq \nu_0\}$  est ouvert dans la topologie faible. Or :

$$\{\nu \in Y \mid \nu \not\leq \nu_0\} = \{\nu \in Y \mid \exists U \cdot \nu(U) > \nu_0(U)\} = \bigcup_U [U > \nu_0(U)]$$

où  $U$  parcourt les ouverts de  $X$ . □

Ces deux lemmes peuvent se résumer par la proposition suivante.

**Proposition 3.7.4** *Les espaces  $\mathbf{V}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \ wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{1 \ wk}(X)$  sont correctement ordonnés.*

**Corollaire 3.7.5** *L'ordre de spécialisation de  $\mathbf{V}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \ wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{1 \ wk}(X)$  est l'ordre  $\leq$  usuel,  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu(U) \leq \nu'(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

Nous verrons au théorème 4.5.11 que  $\mathbf{V}_{\leq 1 \ wk}(X)$  est stablement compact dès que  $X$  est stablement localement relativement compact, et que  $\mathbf{V}_{1 \ wk}(X)$  est stablement compact dès que  $X$  est stablement relativement compact. L'argument utilise le théorème 3.6.14, et le lemme de Lawson 3.6.14 avec la rétraction de Scott, donnée au lemme 3.6.16.

En attendant, montrons que la topologie faible coïncide avec la topologie de Scott lorsque  $X$  est un cpo continu (et avec un plus petit élément dans le cas de  $\mathbf{V}_1(X)$ ). Le résultat est dû à Jung, qui se réfère à Tix (1995, Satz 4.10), laquelle se réfère à son tour à Kirch (1993, Satz 8.6). Ceci se démontre comme suit. On caractérise d'abord la relation  $\ll$  dans  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$ , comme chez Kirch (1993, corollaire 5.1), voir le lemme 3.7.7 ci-dessous.

**Lemme 3.7.6** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu. Si  $\nu_1 \ll \nu_2$  dans  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , il existe une valuation simple  $\nu$  dans  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  telle que  $\nu_1 \ll \nu \ll \nu_2$ .*

*Démonstration.* C'est clair dans le cas  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , où la propriété demandée est la propriété d'interpolation raffinée, appliquée à la base des valuations simples du cpo continu  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ . Pour  $\mathbf{V}(X)$ , on rappelle que  $\mathbf{V}(X)$  est un ensemble ordonné continu, et l'on conclut de même. □

Disons qu'une partie  $B$  est *close par le haut* dans une autre partie  $A$  si et seulement si  $B \subseteq A$  et pour tout  $x \in B$ , si  $x \leq y$  et  $y \in A$ , alors  $y \in B$ .

**Lemme 3.7.7** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu. Dans  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , pour tout ensemble fini  $A \subseteq X$ ,  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll \nu$  si et seulement si pour tout  $B$  clos par le haut dans  $A$ ,  $\sum_{x \in B} a_x < \nu(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$ .*

*Démonstration.* Supposons  $\sum_{x \in B} a_x < \nu(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$  pour tout  $B$  clos par le haut dans  $A$ . Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille dirigée telle que  $\nu \leq \sup_{i \in I} \nu_i$ . Donc  $\sum_{x \in B} a_x < \sup_{i \in I} \nu_i(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$  pour tout  $B$  clos par le haut dans  $A$ . Il s'ensuit que, pour tout  $B$  clos par le haut dans  $A$ , il existe  $i \in I$  tel que  $\sum_{x \in B} a_x < \nu_i(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$ . Comme  $(\nu_i)_{i \in I}$  est dirigée et qu'il n'y a qu'un nombre

fini de  $B$  possibles, il existe  $i \in I$  tel que  $\sum_{x \in B} a_x < \nu_i(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$  pour tout  $B$  clos par le haut dans  $A$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , soit  $B = A \cap U$ , qui est clairement clos par le haut dans  $A$ , alors  $(\sum_{x \in A} a_x \delta_x)(U) = \sum_{x \in B} a_x < \nu_i(\bigcup_{x \in B} \uparrow x) \leq \nu_i(U)$  puisque  $\uparrow x \subseteq \uparrow x \subseteq U$  pour tout  $x \in B \subseteq U$ . Donc  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x \leq \nu_i$ , ce qui montre que  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll \nu$ .

Réciproquement, supposons  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll \nu$ . Par le lemme 3.7.6, il existe une valuation simple  $\sum_{x \in A'} a'_x \delta_x$  telle que  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll \sum_{x \in A'} a'_x \delta_x \ll \nu$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $a'_x > 0$  pour tout  $x \in A'$ . Par le lemme de découpage adapté à  $\ll$ , il existe une matrice de coefficients  $(t_{xx'})_{\substack{x \in A \\ x' \in A'}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  tels  $\sum_{x' \in A'} t_{xx'} = a_x$  pour tout  $x \in A$ ,  $\sum_{x \in A} t_{xx'} < a'_{x'}$  pour tout  $x' \in A'$ , et telle que les seules entrées  $t_{xx'}$  non nulles de la matrice sont telles que  $x \ll x'$ . Soit  $B$  un sous-ensemble clos par le haut dans  $A$  arbitraire. Alors

$$\begin{aligned} \nu(\bigcup_{x \in B} \uparrow x) &\geq (\sum_{x' \in A'} a'_{x'} \delta_{x'}) (\bigcup_{x \in B} \uparrow x) = \sum_{x' \in A' / \exists x \in B \cdot x \ll x'} a'_{x'} \\ &> \sum_{x' \in A' / \exists x \in B \cdot x \ll x'} \sum_{x \in A} t_{xx'} = \sum_{x \in A} \sum_{x' \in A' / \exists x \in B \cdot x \ll x'} t_{xx'} \\ &\geq \sum_{x \in B} \sum_{x' \in A' / \exists x \in B \cdot x \ll x'} t_{xx'} \quad \text{puisque } B \subseteq A \\ &= \sum_{x \in B} \sum_{x' \in A'} t_{xx'} \quad \text{puisque les seuls } t_{xx'} \text{ non nuls sont tels que } x \ll x' \\ &= \sum_{x \in B} a_x \end{aligned}$$

D'où le résultat.  $\square$

On a un résultat similaire pour l'espace des probabilités, à condition que  $X$  ait de plus un plus petit élément  $\perp$ . Ceci dépend d'un raffinement du lemme de découpage adapté à  $\ll$  :

**Lemme 3.7.8** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu avec un plus petit élément  $\perp$ . Notons  $\ll_1$  la relation "bien au-dessous" sur  $\mathbf{V}_1(X)$ . On a alors  $\sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i} \ll_1 \sum_{j=1}^n b_j \delta_{y_j}$  (où les  $b_j$  tels que  $y_j \neq \perp$  sont non nuls) si et seulement s'il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, x_i \neq \perp \\ 1 \leq j \leq n, y_j \neq \perp}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que*

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq n, y_j \neq \perp} t_{ij} &= a_i \quad \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq m, x_i \neq \perp \\ \sum_{1 \leq i \leq m, x_i \neq \perp} t_{ij} &< b_j \quad \text{pour tout } j, 1 \leq j \leq n, y_j \neq \perp \end{aligned}$$

et telle que les seules entrées  $t_{ij}$  non nulles de la matrice sont telles que  $x_i \ll y_j$ .

*Démonstration.* On utilise l'astuce d'Edalat (Edalat, 1995, section 3), qui est une technique permettant de déduire que l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des probabilités continues sur un cpo continu ayant un plus petit élément  $\perp$  est continu, avec une base de probabilités simples. Pour toute valuation simple  $\nu = \sum_{x \in A} a_x \delta_x$  sur  $X$ , avec  $\perp \in A$ ,  $\sum_{x \in A} a_x = 1$ ,  $\nu_\perp = \sum_{x \in A \setminus \{\perp\}} a_x \delta_x$  est dans

$\mathbf{V}_{\leq 1}(X \setminus \{\perp\})$ . De plus,  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu_{\neq} \leq \nu'_{\neq}$ . En effet, en posant  $\nu = \sum_{x \in A} a_x \delta_x$  et  $\nu' = \sum_{x \in A} a'_x \delta_x$ ,  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\sum_{x \in A \cap U} a_x \leq \sum_{x \in A \cap U} a'_x$  : pour les ouverts  $U$  ne contenant pas  $\perp$ , ceci implique  $\nu_{\neq} \leq \nu'_{\neq}$  ; réciproquement, si  $\nu_{\neq} \leq \nu'_{\neq}$ , alors  $\nu(U) \leq \nu'(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  ne contenant pas  $\perp$ , et puisque  $\nu(U) = \nu'(U)$  pour l'unique ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $\perp$  ( $X$  lui-même), on a  $\nu \leq \nu'$ . La fonction qui à  $\nu$  associe  $\nu_{\neq}$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, puisque l'on peut retrouver  $\nu$  à partir de  $\nu_{\neq} = \sum_{x \in A'} a_x \delta_x$  (avec  $\perp \notin A'$ ) par  $\nu = \nu_{\neq} + (\sum_{x \in A'} a_x) \delta_{\perp}$ .

En particulier,  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll_1 \sum_{y \in A} b_y \delta_y$  dans  $\mathbf{V}_1(X)$  si et seulement si  $\sum_{x \in A \setminus \{\perp\}} a_x \delta_x \ll \sum_{y \in A \setminus \{\perp\}} b_y \delta_y$  dans  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ . On conclut en appliquant le lemme de découpage adapté à  $\ll$ .  $\square$

Mentionnons tout de suite le résultat analogue pour l'ordre  $\leq$ , qui se démontre de façon similaire à l'aide du lemme de découpage de Jones.

**Lemme 3.7.9** *Soit  $X$  un espace topologique  $T_0$ , ayant un plus petit élément  $\perp$  pour son ordre de spécialisation  $\leq$ . Pour toutes valuations simples normalisées  $\nu = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i}$  et  $\nu' = \sum_{j=1}^n b_j \delta_{y_j}$ , on a  $\nu \leq \nu'$  si et seulement s'il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, x_i \neq \perp \\ 1 \leq j \leq n, y_j \neq \perp}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que*

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq n, y_j \neq \perp} t_{ij} &= a_i \quad \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq m, x_i \neq \perp \\ \sum_{1 \leq i \leq m, x_i \neq \perp} t_{ij} &\leq b_j \quad \text{pour tout } j, 1 \leq j \leq n, y_j \neq \perp \end{aligned}$$

et telle que les seules entrées  $t_{ij}$  non nulles de la matrice sont telles que  $x_i \leq y_j$ .

Ceci implique une légère généralisation du théorème d'Edalat. Nous ne supposons plus que  $X$  soit un cpo continu, seulement un ensemble ordonné continu.

**Proposition 3.7.10** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu avec un plus petit élément  $\perp$ . Toute probabilité continue sur  $X$  est borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$  de probabilités simples telles que  $\nu_i \ll_1 \nu$  pour tout  $i \in I$ .*

*Démonstration.* Le lemme de découpage et le lemme 3.7.9 impliquent que, pour toutes probabilités simples  $\nu$  et  $\nu'$ ,  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu_{\neq} \leq \nu'_{\neq}$ . De même, en utilisant le lemme de découpage adapté à  $\ll$  et le lemme 3.7.8,  $\nu \ll_1 \nu'$  si et seulement si  $\nu_{\neq} \ll \nu'_{\neq}$ .

Puisque  $X$  est un ensemble ordonné continu et  $\perp$  son plus petit élément, il est facile de vérifier que  $X \setminus \{\perp\}$  est encore un ensemble ordonné continu. Pour tout  $x \in X \setminus \{\perp\}$  en effet,  $x$  est la borne supérieure d'une famille dirigée  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $X$ , avec  $x_i \ll x$  dans  $X$ . La sous-famille des  $x_i$  différents de  $\perp$  est encore dirigée et de borne supérieure égale à  $x$ . Supposons donc que  $x_i \neq \perp$  pour tout  $i \in I$ . Le fait que  $x_i$  soit bien en-dessous de  $x$  dans  $X$  implique que  $x_i$  soit aussi bien en-dessous de  $x$  dans  $X \setminus \{\perp\}$ .

Puisque  $X \setminus \{\perp\}$  est un ensemble ordonné continu, donc un C-espace, toute valuation continue sur  $X \setminus \{\perp\}$  est quasi-simple. Pour toute probabilité continue  $\nu$  sur  $C$ ,  $\nu_{\neq}$  est donc borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu'_i)_{i \in I}$  de valuations simples sur  $X \setminus \{\perp\}$  bien en-dessous de  $\nu_{\neq}$ .

Posons  $\nu_i = \nu'_i + (1 - \nu'_i(X \setminus \{\perp\}))\delta_\perp$ . Les considérations ci-dessus, et le fait que  $\nu_i \not\leq \nu'_i$ , impliquent que  $\nu$  est borne supérieure de la famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$ , où chaque  $\nu_i$  est une probabilité simple avec  $\nu_i \ll_1 \nu$ .  $\square$

**Lemme 3.7.11** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu avec un plus petit élément  $\perp$ . Dans  $\mathbf{V}_1(X)$ , pour tout ensemble fini  $A \subseteq X$ ,  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll_1 \nu$  si et seulement si pour tout  $B$  clos par le haut dans  $A \setminus \{\perp\}$ ,  $\sum_{x \in B} a_x < \nu(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$ .*

*Démonstration.* Similaire au lemme 3.7.7, en utilisant le lemme 3.7.8, ou bien directement l'astuce d'Edalat.  $\square$

**Proposition 3.7.12** *Soit  $Y$  l'un des espaces  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$ . Si  $X$  est un ensemble ordonné continu (avec un plus petit élément  $\perp$  dans le cas où  $Y = \mathbf{V}_1(X)$ ), alors la topologie de Scott et la topologie faible coïncident sur  $Y$ .*

*Démonstration.* Grâce au lemme 3.7.2, il suffit de montrer que tout ouvert de Scott est un ouvert de la topologie faible. Soit  $U$  un ouvert de Scott de  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$ . Ces espaces sont des ensembles ordonnés continus, donc  $U$  est une union d'ouverts de la forme  $\uparrow \nu_0$ , avec  $\nu_0$  une valuation simple. Il suffit donc de montrer que  $\uparrow \nu_0$  est un ouvert faible. Posons  $\nu_0 = \sum_{x \in A} a_x \delta_x$ ,  $A$  étant une partie finie. Par le lemme 3.7.7, dans les cas de  $\mathbf{V}(X)$  et  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ ,

$$\uparrow \nu_0 = \bigcap_{B \text{ clos par le haut dans } A} \left[ \bigcup_{x \in B} \uparrow x > \sum_{x \in B} a_x \right]$$

est un ouvert de la topologie faible. Dans le cas de  $\mathbf{V}_1(X)$ , on utilise le lemme 3.7.11, la sommation sur  $B$  étant restreinte aux clos par le haut dans  $A \setminus \{\perp\}$ .  $\square$

### 3.8 Produits de valuations continues

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Si  $\nu$  est une valuation continue sur  $X$  et  $\nu'$  est une valuation continue sur  $Y$ , il existe une unique valuation continue  $\nu \otimes \nu'$  sur  $X \times Y$  — le produit topologique de  $X$  et de  $Y$  — telle que

$$(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V) \tag{3.2}$$

pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$  (Jones, 1990, section 3.10). La valuation continue  $\nu \otimes \nu'$  est appelée la *valuation produit* de  $\nu$  et  $\nu'$ . Avant de continuer, il est bon de rappeler que  $X \times Y$  est le produit de  $X$  et de  $Y$  *en tant qu'espaces topologiques*. La topologie, dite produit, de  $X \times Y$  est formée de toutes les unions d'ouverts de la forme  $U \times V$ . Si  $X$  et  $Y$  sont des ensembles ordonnés, le produit  $\{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$  est aussi un ensemble ordonné, par  $(x, y) \leq (x', y')$  si et seulement si  $x \leq x'$  et  $y \leq y'$ . La topologie de Scott sur ce dernier est en général différente de la topologie produit sur  $X \times Y$ . Elle lui est cependant identique si  $X$  et  $Y$  sont des cpos continus.

Montrons comment l'on construit  $\nu \otimes \nu'$ . Notons que pour toute famille finie de couples d'ouverts  $(U_i, V_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de  $X$  et  $Y$ , nécessairement

$$\begin{aligned} (\nu \otimes \nu') \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \times V_i \right) &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} (\nu \otimes \nu') \left( \bigcap_{i \in I} U_i \times V_i \right) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \cdot \nu' \left( \bigcap_{i \in I} V_i \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

par le principe d'inclusion-exclusion. De plus, tout ouvert  $W$  de  $X \times Y$  est une union de la forme  $\bigcup_{j \in J_0} U_j \times V_j$ , ce que l'on peut réécrire sous forme d'une union dirigée  $\bigcup_{J \text{ finie } \subseteq J_0} W_J$ , où  $W_J = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$ . La valeur de  $(\nu \otimes \nu')(W_J)$  est définie de façon unique par (3.3), et la continuité de  $\nu \otimes \nu'$  implique

$$(\nu \otimes \nu') \left( \bigcup_{J \text{ finie } \subseteq J_0} W_J \right) = \sup_{J \text{ finie } \subseteq J_0} (\nu \otimes \nu')(W_J) \quad (3.4)$$

D'où l'unicité de  $\nu \otimes \nu'$ , en particulier.

Les produits de valuations simples sont particulièrement simples :

**Lemme 3.8.1** Soient  $\nu = \sum_{x \in A} a_x \delta_x$ ,  $\nu' = \sum_{y \in B} b_y \delta_y$  deux valuations simples ( $A$  partie finie de  $X$ ,  $B$  partie finie de  $Y$ ), alors  $\nu \otimes \nu'$  est la valuation simple  $\sum_{x \in A, y \in B} a_x b_y \delta_{(x,y)}$ .

*Démonstration.* Posons  $c_{xy} = a_x b_y$  pour tout  $x \in A$ ,  $y \in B$ , et  $\nu'' = \sum_{(x,y) \in A \times B} c_{xy} \delta_{(x,y)}$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , et tout ouvert  $V$  de  $Y$ ,

$$\nu''(U \times V) = \sum_{\substack{x \in A \cap U \\ y \in B \cap V}} c_{xy} = \sum_{x \in A \cap U} a_x \times \sum_{y \in B \cap V} b_y = \nu(U) \times \nu(V)$$

Par l'unicité de  $\nu \otimes \nu'$  telle que  $(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$  pour tous  $U, V$ , on en déduit  $\nu'' = \nu \otimes \nu'$ . □

### 3.9 Plongements

Un thème important de ce document est la notion de plongement. Certains sont bien connus et classiques. Par exemple, tout espace  $X$  se plonge dans l'espace  $\mathcal{Q}(X)$  des choix non déterministes démoniaques :

**Lemme 3.9.1** La fonction  $\eta_{\mathcal{Q}} : X \rightarrow \mathcal{Q}(X)$  qui à  $x$  associe  $\uparrow x$  est croissante, Scott-continue, et un plongement d'ordre si  $X$  est  $T_0$ .

Si  $X$  est bien filtrant et localement compact,  $\eta_{\mathcal{Q}}$  est un plongement d'espaces topologiques.

*Démonstration.* D'abord,  $\eta_Q$  est croissante, car si  $x \leq y$  alors  $\uparrow x \supseteq \uparrow y$ . De plus,  $\uparrow x \supseteq \uparrow y$  implique  $y \in \uparrow x$ , c'est-à-dire  $x \leq y$ . Lorsque  $X$  est  $T_0$ ,  $\leq$  est une relation d'ordre, donc  $\eta_Q$  est un plongement d'ordre.

Ensuite, si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée d'éléments de  $X$ , ayant  $x$  pour borne supérieure, alors  $(\uparrow x_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée de compacts saturés de  $\mathcal{Q}(X)$ , et  $\uparrow x$  est inclus dans chaque  $\uparrow x_i$ , donc un majorant des  $\uparrow x_i$ . D'autre part,  $\uparrow x$  est l'intersection des  $\uparrow x_i$ , donc la borne supérieure des  $\uparrow x_i$  dans  $\mathcal{Q}(X)$ . Donc  $\eta_Q$  est Scott-continue.

Lorsque  $X$  est bien filtrant et localement compact, la topologie de  $\mathcal{Q}(X)$  est engendrée par les ouverts  $\square U$ ,  $U$  ouvert de  $X$ , par le corollaire 3.3.6. Or  $\eta_Q^{-1}(\square U)$  est l'ensemble des points  $x$  tels que  $\uparrow x \subseteq U$ , c'est donc  $U$ . Donc  $\eta_Q$  est continue. L'image de  $U$  par  $\eta_Q$  est exactement l'intersection de l'image  $Z$  de  $\eta_Q$  avec  $\square U$ , donc l'inverse de  $\eta_Q$ , de  $Z$  vers  $X$ , est continue. Donc  $\eta_Q$  est un plongement d'espaces topologiques.  $\square$

En un sens, ceci exprime que toute sélection déterministe d'un élément  $x$  est un choix non déterministe (démoniaque) dégénéré, parmi les éléments de  $\uparrow x$ . Toute sélection déterministe est aussi un choix non déterministe angélique dégénéré :

**Lemme 3.9.2** *La fonction  $\eta_{\mathcal{H}} : X \rightarrow \mathcal{H}_u(X)$  qui à  $x$  associe  $cl(x) = \downarrow x$  est croissante, et un plongement d'ordre si  $X$  est  $T_0$ . Elle est aussi continue, et un plongement d'espaces topologiques si  $X$  est  $T_0$ .*

*Démonstration.* D'abord,  $\downarrow x$  est fermé, donc contient  $cl(x)$ . Réciproquement,  $cl(x)$  est clos par le bas, donc contient  $\uparrow x$ . Donc  $cl(x) = \downarrow x$ .

Ensuite,  $x \leq y$  si et seulement si  $\downarrow x \subseteq \downarrow y$ , donc  $\eta_{\mathcal{H}}$  est croissante, et un plongement d'ordre si  $X$  est  $T_0$ .

L'image réciproque de  $\diamond U$  par  $\eta_{\mathcal{H}}$  est l'ensemble des  $x$  tels que  $\downarrow x$  intersecte  $U$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Comme  $U$  est clos par le haut, ceci est équivalent à  $x \in U$ . Donc d'une part  $\eta_{\mathcal{H}}^{-1}(\diamond U) = U$  est ouvert, et  $\eta_{\mathcal{H}}$  est continue. D'autre part, l'image de  $U$  est l'intersection de l'image de  $\eta_{\mathcal{H}}$  et de  $\diamond U$ , donc  $\eta_{\mathcal{H}}$  est un plongement d'espaces topologiques.  $\square$

Finalement, toute sélection déterministe est aussi un choix non déterministe chaotique :

**Lemme 3.9.3** *La fonction  $\eta_{\mathcal{P}} : X \rightarrow \mathcal{P}_v(X)$  qui à  $x$  associe l' $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$  telle que  $\alpha(U) = 1$  si  $x \in U$ , 0 sinon, est croissante, et un plongement d'ordre si  $X$  est  $T_0$ . C'est aussi un plongement d'espaces topologiques si  $X$  est  $T_0$ .*

*Démonstration.* On observe que  $\eta_{\mathcal{P}}(x) \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \eta_{\mathcal{P}}(y)$  si et seulement si  $\eta_{\mathcal{P}}(x) = 1$  implique  $\eta_{\mathcal{P}}(y) = 1$  et  $\eta_{\mathcal{P}}(y) = 0$  implique  $\eta_{\mathcal{P}}(x) = 0$ . Ceci revient à demander que si  $x \in U$  alors  $y \in U$ , autrement dit que  $x \leq y$ . Donc  $\eta_{\mathcal{P}}$  est croissante, et un plongement d'ordre dès que  $X$  est  $T_0$ .

L'image réciproque de  $\square U$  par  $\eta_{\mathcal{P}}$  est l'ensemble des éléments  $x \in X$  tels que  $\eta_{\mathcal{P}}(x)(U) = 1$ , c'est-à-dire tels que  $x \in U$ , c'est donc  $U$ . De même, celle de  $\diamond U$  est l'ensemble des éléments  $x \in X$  tels que  $\eta_{\mathcal{P}}(x)(U) \neq 0$ , donc  $U$  de nouveau. Donc  $\eta_{\mathcal{P}}$  est continue.

L'image directe de l'ouvert  $U$  par  $\eta_{\mathcal{P}}$  est l'intersection de l'image de  $\eta_{\mathcal{P}}$  avec, au choix, l'ouvert  $\square U$ , ou l'ouvert  $\diamond U$ . Donc  $\eta_{\mathcal{P}}$  est un plongement d'espaces topologiques.  $\square$

Toute sélection déterministe est aussi un choix probabiliste dégénéré :

**Lemme 3.9.4** *La fonction  $\eta_{\mathbf{V}}$ , de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1\ wk}(X)$ , ou  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$ , qui à  $x$  associe  $\delta_x$ , est croissante, un plongement d'ordre si  $X$  est  $T_0$ , et un plongement d'espaces topologiques si  $X$  est  $T_0$ .*

*Démonstration.* D'abord,  $\delta_x \leq \delta_y$  si et seulement si  $\delta_x(U) \leq \delta_y(U)$ , si et seulement si  $y$  est dans tout ouvert qui contient  $x$ , c'est-à-dire si et seulement si  $x \leq y$ . La fonction  $\eta_{\mathbf{V}}$  est donc croissante, et un plongement d'ordre si  $X$  est  $T_0$ .

L'image réciproque de  $[U > r]$  par  $\eta_{\mathbf{V}}$  est vide si  $r \geq 1$ ,  $X$  tout entier si  $r < 0$ , et  $U$  sinon. Donc  $\eta_{\mathbf{V}}$  est continue. L'image directe de l'ouvert  $U$  est l'ensemble des  $\delta_x$  tels que  $\delta_x(U) = 1$ , autrement dit tels que  $\delta_x(U) > 1/2$  (par exemple). C'est donc l'intersection de l'image de  $\eta_{\mathbf{V}}$  avec  $[U > 1/2]$ . Donc  $\eta_{\mathbf{V}}$  est un plongement d'espaces topologiques.  $\square$

Le cinquième plongement que nous considérerons n'est pas lié à de quelconques considérations de choix non déterministes ou probabilistes. Rappelons que  $\mathcal{O}(X)$  est l'ensemble des ouverts de  $X$ .

**Proposition 3.9.5** *Considérons l'espace  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  muni de sa topologie produit. Son préordre de spécialisation est l'ordre point à point :  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)} \leq (b'_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  si et seulement si  $b_U \leq b'_U$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

*La fonction  $\eta_{\mathbb{S}} : X \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  qui à  $x$  associe la famille  $(\chi_U(x))_{U \in \mathcal{O}(X)}$ , est croissante, et est un plongement d'ordre si et seulement si  $X$  est  $T_0$ . Elle est aussi continue, et un plongement d'espaces topologiques si et seulement si  $X$  est  $T_0$ .*

*Démonstration.* D'abord, si  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)} \leq (b'_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ , c'est que tout ouvert qui contient la famille de gauche contient aussi celle de droite. Considérons l'ouvert  $[U]$  de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  formé des familles dont la composante  $U$  est dans l'ouvert  $\{1\}$  de  $\mathbb{S}$  : alors  $b_U = 1$  implique  $b'_U = 1$ . C'est donc que  $b_U \leq b'_U$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Réciproquement, si  $b_U \leq b'_U$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , alors  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)} \in [U]$  implique  $(b'_U)_{U \in \mathcal{O}(X)} \in [U]$ . Tout ouvert de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  étant une union d'intersections finies d'ouverts de la forme  $[U]$ , on en déduit que  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)} \leq (b'_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ .

On a alors  $(\chi_U(x))_{U \in \mathcal{O}(X)} \leq (\chi_U(y))_{U \in \mathcal{O}(X)}$  si et seulement si  $\chi_U(x) \leq \chi_U(y)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , si et seulement si  $x \in U$  implique  $y \in U$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , si et seulement si  $x \leq y$ . Donc  $\eta_{\mathbb{S}}$  est croissante, et un plongement d'ordre si  $X$  est  $T_0$ . Réciproquement, si  $\eta_{\mathbb{S}}$  est un plongement d'ordre, alors elle est injective, donc  $x \leq y$  et  $y \leq x$  impliquent  $x = y$ , c'est-à-dire que  $X$  est  $T_0$ .

L'image réciproque de  $[U]$  est l'ensemble des  $x$  tels que  $\chi_U(x) = 1$ , autrement dit c'est l'ouvert  $U$  lui-même. Donc  $\eta_{\mathbb{S}}$  est continue. L'image directe de l'ouvert  $V$  est l'ensemble des  $(\chi_U(x))_{U \in \mathcal{O}(X)}$  tels que  $\chi_V(x) = 1$ , c'est donc l'intersection de l'image de  $\eta_{\mathbb{S}}$  avec  $[V]$ . Donc  $\eta_{\mathbb{S}}$  est un plongement d'espaces topologiques.  $\square$

Ceci montre que l'on peut toujours plonger n'importe quel espace  $T_0$  dans un espace,  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$ , qui possède quantité de bonnes propriétés topologiques :

**Proposition 3.9.6**  *$\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  est stablement compact, d'espace de Nachbin associé l'espace  $\{0, 1\}^{\mathcal{O}(X)}$  (où  $\{0, 1\}$  est muni de la topologie discrète) muni de l'ordre point à point.*

*Démonstration.* Il est facile de vérifier que  $\mathbb{S}$  est stablement compact, d'espace de Nachbin associé  $\mathbb{S}' = \{0, 1\}$  avec l'ordre  $0 \leq 1$ . On rappelle que le produit des espaces de Nachbin est l'espace de Nachbin du produit (voir la section 2.3 ou Jung 2004, Proposition 2.15), d'où la proposition.  $\square$

**Proposition 3.9.7**  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  est un treillis complet et un cpo algébrique. Ses éléments finis sont les familles  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  telles que  $b_U = 0$  sauf pour un nombre fini d'ouverts  $U$ . La topologie de Scott coïncide avec la topologie produit.

*Démonstration.* Rappelons que l'ordre de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  est l'ordre point à point. C'est trivialement un treillis complet, donc un cpo.

Si  $b_U = 0$  sauf pour un nombre fini d'ouverts  $U$ , disons sauf pour  $U$  appartenant à l'ensemble fini  $E$ , alors pour toute famille dirigée  $((b_U^i)_{U \in \mathcal{O}(X)})_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  de borne supérieure supérieure ou égale à  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ , pour chaque  $U \in E$  il existe un indice  $i_U \in I$  tel que  $b_U^{i_U} = 1$ . Comme la famille est dirigée, et  $E$  est fini, il existe un indice  $i \in I$  tel que  $b_U^i = 1$  pour tout  $U \in E$ . Mais alors  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)} \leq (b_U^i)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ . Donc  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  est fini.

D'autre part, fixons un élément  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  quelconque de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$ . Soit  $E$  l'ensemble des ouverts  $U$  tels que  $b_U = 1$ . Considérons la famille dirigée des familles  $(b_U^F)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ ,  $F$  sous-ensemble fini de  $E$ , définies par  $b_U^F = 1$  si et seulement si  $U \in F$ . Cette famille admet  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  pour borne supérieure. Mais, si  $E$  est infini, pour aucun  $F$  fini on n'a  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)} \leq (b_U^F)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ . Ceci montre que les éléments finis sont exactement ceux pour lesquels  $E$  est fini. Ceci montre aussi que tout élément  $(b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  est borne supérieure d'une famille dirigée d'éléments finis.

La topologie de Scott est alors engendrée par les  $\uparrow (b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ , où  $b_U = 0$  sauf pour un nombre fini d'ouverts. Notons  $E$  l'ensemble fini des ouverts  $U$  tels que  $b_U = 1$  :  $\uparrow (b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  vaut alors l'intersection finie  $\bigcap_{U \in E} [U]$ , où  $[U]$  est, comme à la proposition 3.9.5, l'ouvert de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  formé des familles dont la composante  $U$  est dans l'ouvert  $\{1\}$  de  $\mathbb{S}$ . Réciproquement,  $[U]$  est clairement Scott-ouvert. Donc la topologie de Scott et la topologie de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  (la topologie produit) coïncident.  $\square$

On en déduit notamment que  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  est un cpo continu, cohérent et compact.

Un point remarquable de cette dernière construction est que l'on peut étendre n'importe quelle fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  en une fonction continue bornée de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  vers  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 3.9.8** Soit  $X$  un espace topologique. Pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , il existe une fonction continue bornée  $\widehat{f}$  de  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) &= f(x) \quad \text{pour tout } x \in X \text{ (extension)} \\ \sup_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}} \widehat{f}(\vec{b}) &\leq \sup_{x \in X} f(x) \\ \inf_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}} \widehat{f}(\vec{b}) &= \inf_{x \in X} f(x) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le résultat est évident si  $X$  est vide. Supposons donc  $X$  non vide.

Soit  $a = \sup_{x \in X} f(x)$ ,  $a' = \inf_{x \in X} f(x)$ . Définissons  $\widehat{f}((b_U)_{U \in \mathbb{S}^0(x)})$  comme la borne supérieure de la famille des réels  $t \geq a'$  tels que  $b_{f^{-1]t, +\infty[} = 1$  si  $b_\emptyset = 0$ , ou bien  $a$  sinon. Nous conviendrons qu'une borne supérieure d'une famille vide de  $t \geq a'$  vaut  $a'$ . Ceci est bien défini, car  $f$  est bornée : si  $b_\emptyset = 0$ , pour tout  $t \geq a'$  tel que  $b_{f^{-1]t, +\infty[} = 1$ , nécessairement  $f^{-1]t, +\infty[$  est non vide, donc  $t < a$ , d'où l'on déduit que  $\widehat{f}((b_U)_{U \in \mathbb{S}^0(x)}) \leq a$ .

La fonction  $\widehat{f}$  est, de plus, continue. En effet, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{f}^{-1]t, +\infty[$  est vide si  $t > a$ , et sinon vaut  $\{(b_U)_{U \in \mathbb{S}^0(x)} | b_\emptyset = 1 \text{ ou } \exists t' > t \cdot t' \geq a' \text{ et } b_{f^{-1]t', +\infty[} = 1\} = \{(b_U)_{U \in \mathbb{S}^0(x)} | b_\emptyset = 1\} \cup \bigcup_{t' > t, t' \geq a'} \{(b_U)_{U \in \mathbb{S}^0(x)} | b_{f^{-1]t', +\infty[} = 1\}$ , qui est ouvert aussi.

Vérifions maintenant que  $\widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) = f(x)$ . En effet, posons  $\eta_{\mathbb{S}}(x) = (b_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ . Comme  $b_\emptyset = 0$ ,  $\widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x))$  est la borne supérieure des réels  $t \geq a'$  tels que  $x \in f^{-1]t, +\infty[$ , c'est-à-dire tels que  $f(x) > t$ . Lorsque  $f(x) > a'$ , c'est donc  $f(x)$ . Lorsque  $f(x) = a'$ , c'est  $a'$ , c'est-à-dire de nouveau  $f(x)$ , par notre convention sur les bornes supérieures vides.

Clairement, la borne supérieure de  $\widehat{f}$  vaut  $a = \sup_{x \in X} f(x)$ . La borne inférieure de  $\widehat{f}_\epsilon$  vaut au moins  $a' = \inf_{x \in X} f(x)$  par définition, et lui est égale car  $X$  est non vide et  $\widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) = f(x)$  pour n'importe quel  $x \in X$ .  $\square$

### 3.10 Hémi-distances, espaces hémi-métriques

Alors que tout espace métrique est nécessairement  $T_2$ , on peut construire une notion un peu plus faible d'hémi-distance, qui fournira des espaces topologiques n'ayant aucun propriété spéciale de séparation. La notion est naturelle, et apparaît dans la littérature en 1973 chez Lawvere (2002) ; l'auteur l'appelle d'ailleurs simplement "distance".

**Définition 3.10.1 (Hémi-distance)** Soit  $X$  un ensemble. Une hémi-distance  $d$  sur  $X$  est une fonction de  $X \times X$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que :

- $d(x, x) = 0$  pour tout  $x \in X$  ;
- (Inégalité triangulaire)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  pour tous  $x, y, z \in X$ .

Un espace  $X$  muni d'une hémi-distance est appelé un espace hémi-métrique.

On dit que  $X$  est  $T_0$  si et seulement si, de plus,  $d(x, y) = d(y, x) = 0$  implique  $x = y$ . Il est  $T_1$  si et seulement si  $d(x, y) = 0$ , seul, implique déjà  $x = y$ .

On justifie l'intérêt de cette notion en reprenant certains arguments de Lawvere (2002). D'abord, nous ne demandons pas en général que  $d(x, y) = 0$  implique  $x = y$ . Ceci nous permettra d'obtenir des topologies associées (voir ci-dessous) qui ne sont pas  $T_0$ , ce qui sera utile dans notre étude des agglomérations. Ensuite, le fait qu'une hémi-distance puisse valoir  $+\infty$  permet essentiellement de simplifier un certain nombre d'arguments. Ce qui peut sembler le plus surprenant est l'absence de l'axiome de symétrie  $d(x, y) = d(y, x)$ . Comme le remarque Lawvere, l'asymétrie est nécessaire si l'on souhaite que  $d(x, y)$  mesure, par exemple, le travail requis pour aller de  $x$  à  $y$  dans une région montagneuse. De plus, de nombreuses constructions en analyse et en dynamique de systèmes passent par la constructions d'hémi-métriques  $d$ , qui sont ensuite symétrisées,

c'est-à-dire en construisant la fonction qui à  $x, y$  associe  $\max(d(x, y), d(y, x))$  ou en calculant  $d(x, y) + d(y, x)$ . Par exemple, la distance de Hausdorff entre deux parties  $A$  et  $B$  d'un espace métrique est définie comme la symétrisée de  $d(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$ . La distance de Levy-Prohorov entre deux mesures sur un espace métrique est la symétrisée de l'hémi-distance définie par :  $d(\nu, \nu')$  est la borne inférieure de tous les  $\epsilon > 0$  tels que  $\nu(U) \leq \nu'(U^{d, +(\epsilon)}) + \epsilon$  pour tout mesurable  $U$ , où  $U^{d, +(\epsilon)}$  est l'union des boules ouvertes de rayon  $\epsilon$  et de centre  $x \in U$ . (Non, cette distance n'est pas des plus intuitives.) Lawvere (2002, p.139) cite aussi le cas des algèbres booléennes munies d'une mesure extérieure, ou de quasi-distances définies sur des ensembles convexes, exemples que nous ne développerons pas.

Une hémi-distance  $T_1$  est appelée quasi-distance ("quasi-metric"). C'est une notion que nous n'utiliserons pas. Le terme "semi-distance" est usuellement réservé aux hémi-distances symétriques.

Toute hémi-distance définit une topologie, qui est définie comme dans le cas métrique.

**Définition 3.10.2 (Boule ouverte)** Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ . La boule ouverte  $B_{x, < \epsilon}^d$  de centre  $x$  et de rayon  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $\epsilon > 0$ , est l'ensemble des points  $y \in X$  tels que  $d(x, y) < \epsilon$ .

On appelle topologie de  $d$ , et on note  $\mathcal{O}^d$ , la topologie engendrée par les boules ouvertes  $B_{x, < \epsilon}^d$ .

**Lemme 3.10.3** Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ , et  $B_{x_i, < \epsilon_i}^d$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une famille finie de boules ouvertes. Pour tout  $x \in \bigcap_{i=1}^n B_{x_i, < \epsilon_i}^d$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{x, < \epsilon}^d$  soit inclus dans  $\bigcap_{i=1}^n B_{x_i, < \epsilon_i}^d$ .

*Démonstration.* Posons  $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq n} (\epsilon_i - d(x_i, x))$ . Par définition, pour tout  $i$  on a  $d(x_i, x) \leq \epsilon_i - \epsilon$ . Pour tout  $y \in B_{x, < \epsilon}^d$ , on a  $d(x, y) < \epsilon$ , donc par l'inégalité triangulaire  $d(x_i, y) < (\epsilon_i - \epsilon) + \epsilon = \epsilon_i$ . Donc  $B_{x, < \epsilon}^d \subseteq B_{x_i, < \epsilon_i}^d$ .  $\square$

**Corollaire 3.10.4** Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ . Tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}^d$  est une union de boules ouvertes  $B_{x, < \epsilon_x}^d$ ,  $x \in U$ .

*Démonstration.*  $U$  s'écrit par définition comme une union d'intersections finies  $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} B_{x_{ij}, < \epsilon_{ij}}^d$ . Pour tout  $x \in U$ ,  $x$  appartient à une des intersections, disons  $\bigcap_{j=1}^{n_i} B_{x_{ij}, < \epsilon_{ij}}^d$ . Par le lemme 3.10.3, il existe un réel  $\epsilon_x > 0$  tel que cette intersection contienne la boule ouverte  $B_{x, < \epsilon_x}^d$ . Alors  $U$  contient l'union des  $B_{x, < \epsilon_x}^d$ ,  $x \in U$ . L'inclusion réciproque est évidente, car  $x \in B_{x, < \epsilon_x}^d$  pour tout  $x \in U$ .  $\square$

**Corollaire 3.10.5** Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ . Pour que  $U$  soit ouvert dans  $\mathcal{O}^d$ , il faut et il suffit que pour tout  $x \in U$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{x, < \epsilon}^d \subseteq U$ .

*Démonstration.* Si pour tout  $x \in U$ , il existe  $\epsilon_x > 0$  tel que  $B_{x, < \epsilon_x}^d \subseteq U$ , alors  $U$  est l'union des  $B_{x, < \epsilon_x}^d$ , et est donc dans  $\mathcal{O}^d$ . La réciproque est par le corollaire 3.10.4.  $\square$

La proposition suivante énonce une propriété importante du préordre de spécialisation de  $\mathcal{O}^d$ , propriété non classique s'il en est.

**Proposition 3.10.6** Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ , et  $\leq^d$  le préordre de spécialisation de  $\mathcal{O}^d$ . Alors  $x \leq^d y$  si et seulement si  $d(x, y) = 0$ .

*Démonstration.* D'abord,  $x \leq^d y$  si et seulement si pour tout  $z \in X$ , pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $x \in B_{z, < \epsilon}^d$  implique  $y \in B_{z, < \epsilon}^d$ , si et seulement si pour tout  $z \in X$ , pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $d(z, x) < \epsilon$  implique  $d(z, y) < \epsilon$ , si et seulement si pour tout  $z \in X$ ,  $d(z, y) \leq d(z, x)$ . Cette dernière condition implique  $d(x, y) \leq d(x, x) = 0$ , donc  $d(x, y) = 0$ . Réciproquement, si  $d(x, y) = 0$  alors  $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) = d(z, x)$ .  $\square$

**Lemme 3.10.7** *Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ . Alors  $\mathcal{O}^d$  est  $T_0$  si et seulement si  $d$  est  $T_0$ .  $\mathcal{O}^d$  est  $T_1$  si et seulement si  $d$  est  $T_1$ . Si  $d$  est symétrique et  $T_1$ , alors  $\mathcal{O}^d$  est  $T_2$ .*

*Démonstration.*  $\mathcal{O}^d$  est  $T_0$  si et seulement si  $\leq^d$  est antisymétrique. Par la proposition 3.10.6, ceci est équivalent à demander que  $d(x, y) = 0$  et  $d(y, x) = 0$  impliquent  $x = y$ , c'est-à-dire que  $d$  soit  $T_0$ .  $\mathcal{O}^d$  est  $T_1$  si et seulement si  $\leq^d$  est la relation d'égalité. De nouveau par la proposition 3.10.6, ceci est équivalent à demander que  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ , c'est-à-dire que  $d$  soit  $T_1$ . Finalement, si  $d$  est symétrique et  $T_1$ , alors pour tous  $x \neq y$ , posons  $\epsilon = d(x, y)/2$ . Clairement,  $x \in B^d(x, < \epsilon)$  et  $y \in B^d(y, < \epsilon)$ . De plus, l'intersection de  $B^d(x, < \epsilon)$  et de  $B^d(y, < \epsilon)$  est vide : si  $z$  était dans cette intersection, on aurait  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(y, z) < 2\epsilon \leq d(x, y)$ .  $\square$

Une hémi-distance importante est  $d_{\mathbb{R}}$  :

**Définition 3.10.8** ( $d_{\mathbb{R}}$ ) *On définit l'hémi-distance  $d_{\mathbb{R}}$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $d_{\mathbb{R}}(s, t) = \max(s - t, 0)$ .*

Sa symétrisée  $\max(d_{\mathbb{R}}(s, t), d_{\mathbb{R}}(t, s)) = d_{\mathbb{R}}(s, t) + d_{\mathbb{R}}(t, s)$  est la distance usuelle  $|s - t|$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Lemme 3.10.9** *La topologie  $\mathcal{O}^{d_{\mathbb{R}}}$  de l'hémi-distance  $d_{\mathbb{R}}$  est la topologie de Scott de  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Notons que  $B^{d_{\mathbb{R}}}(s, \epsilon) = ]s - \epsilon, +\infty[$  est un ouvert de Scott de  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, tout ouvert de Scott non trivial  $]t, +\infty[$  est une boule ouverte  $B^{d_{\mathbb{R}}}(t + \epsilon, \epsilon)$ .  $\square$

De même que nous notons  $\leq$  le préordre de spécialisation de n'importe quel espace topologique sans distinction, nous noterons  $d$  l'hémi-distance de tout espace hémi-métrique. La notion de fonction continue entre deux espaces hémi-métriques se ramène à une caractérisation classique :

**Lemme 3.10.10** *Soit  $f$  une fonction de l'espace hémi-métrique  $X$  vers l'espace hémi-métrique  $Y$ . Alors  $f$  est continue de  $X$  vers  $Y$ , munis des topologies associées à leurs hémi-distances, si et seulement si pour tout  $x \in X$  :*

$$\text{pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } \eta > 0 \text{ tel que pour tout } x' \in X \text{ tel que } d(x, x') < \eta \text{ alors} \\ d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

*Si cette dernière condition est vérifiée, à  $x$  donné, on dira que  $f$  est continue en  $x$ .*

*Démonstration.* La condition énoncée est équivalente à : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $B_{x, < \eta}^d \subseteq f^{-1}(B_{f(x), < \epsilon}^d)$ . Si  $f$  est continue, cette condition est une conséquence du corollaire 3.10.5. Réciproquement, supposons la condition satisfaite. Pour tout  $x \in f^{-1}(V)$ , par le corollaire 3.10.5, il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{f(x), < \epsilon}^d$  soit inclus dans  $V$ . Donc il existe  $\eta > 0$  tel que  $B_{x, < \eta}^d$  soit inclus dans  $f^{-1}(B_{f(x), < \epsilon}^d) \subseteq f^{-1}(V)$ . Mais ceci implique que  $f^{-1}(V)$  est ouvert, en appliquant le corollaire 3.10.5 à  $U = f^{-1}(V)$ .  $\square$

**Définition 3.10.11 (Lipschitzienne)** Soit  $f$  une fonction de l'espace hémi-métrique  $X$  vers l'espace hémi-métrique  $Y$ . Pour tout  $c \in \mathbb{R}^+$ , on dit que  $f$  est  $c$ -lipschitzienne si et seulement si  $d(f(x), f(x')) \leq c.d(x, x')$  pour tous  $x, x' \in X$ . Une fonction est lipschitzienne si et seulement si elle est  $c$ -lipschitzienne pour un certain  $c \in \mathbb{R}^+$ .

Le fait suivant est évident par le lemme 3.10.10.

**Fait 3.10.12** Pour tout  $c \in \mathbb{R}^+$ , toute fonction  $c$ -lipschitzienne est continue.

**Définition 3.10.13 (Équivalence topologique)** Deux hémi-distances  $d$  et  $d'$  sur  $X$  sont topologiquement équivalentes si et seulement si leurs topologies sont identiques, c'est-à-dire si  $\mathcal{O}^d = \mathcal{O}^{d'}$ .

Tout hémi-distance est topologiquement équivalente à une hémi-distance bornée. On remarque en effet :

**Lemme 3.10.14** Une fonction  $\varphi$  de  $\overline{\mathbb{R}^+}$  vers  $\overline{\mathbb{R}^+}$  est stricte si et seulement si  $\varphi(0) = 0$ , sous-additive si et seulement si  $\varphi(s + t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$  pour tous  $s, t \in \overline{\mathbb{R}^+}$ .

Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ ,  $\varphi$  une fonction stricte, croissante, sous-additive de  $\overline{\mathbb{R}^+}$  vers  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , et supposons qu'il existe un intervalle  $[0, a]$ ,  $a > 0$ , tel que  $\varphi$  soit un homéomorphisme de  $[0, a]$  sur  $[0, \varphi(a)]$  (ces intervalles étant munis de  $d_{\mathbb{R}}$ ). La fonction  $\varphi \circ d$  est une hémi-distance sur  $X$ , topologiquement équivalente à  $d$ .

*Démonstration.* Posons  $d' = \varphi \circ d$ . Pour tout  $x \in X$ ,  $d'(x, x) = \varphi(d(x, x)) = \varphi(0) = 0$  car  $\varphi$  est stricte. Pour tous  $x, y, z$ ,  $d'(x, y) = \varphi(d(x, y)) \leq \varphi(d(x, z) + d(z, y))$  (puisque  $d$  satisfait l'inégalité triangulaire et  $\varphi$  est croissante)  $\leq \varphi(d(x, z)) + \varphi(d(z, y))$  (car  $\varphi$  est sous-additive)  $= d'(x, z) + d'(z, y)$ . Notons  $X$  l'espace  $X$  muni de l'hémi-distance  $d$ , et  $X'$  le même, muni de l'hémi-distance  $d'$ .

La fonction identité de  $X$  vers  $X'$  est continue. En effet, en utilisant le lemme 3.10.10, et sachant que  $\varphi$  est continue en 0, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $s \in [0, a]$ , si  $s < \eta$  alors  $\varphi(s) - \varphi(0) < \epsilon$ , donc  $\varphi(s) < \epsilon$ , puisque  $\varphi(0) = 0$ . En particulier, pour tout  $x \in X$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $y \in X$ , si  $d(x, y) < \eta$  alors  $d'(x, y) < \epsilon$ .

Réciproquement, en utilisant  $\varphi^{-1} : [0, \varphi(a)] \rightarrow [0, a]$ , la fonction identité de  $X'$  vers  $X$  est elle aussi continue. Donc  $X$  et  $X'$  sont homéomorphes, ce qui signifie que  $d$  et  $d'$  sont topologiquement équivalentes.  $\square$

**Corollaire 3.10.15** On dit qu'une hémi-distance  $d'$  est bornée sur  $X$  si et seulement s'il existe un réel  $a$  tel que  $d'(x, y) \leq a$  pour tous  $x, y \in X$ .

Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ . Pour tout  $a > 0$ , il existe une hémi-distance  $d'$  sur  $X$ , topologiquement équivalente à  $d$ , telle que  $d'(x, y) \leq a$  pour tous  $x, y \in X$ . En particulier,  $d'$  est bornée.

*Démonstration.* On pose  $\varphi(t) = \min(t, a)$ ,  $\varphi(t) = at/(1 + t)$ , ou  $\varphi(t) = 2a/\pi \arctan t$  par exemple.  $\square$

Tout espace métrique est hémi-métrique. Tout espace préordonné est aussi hémi-métrique. En effet, tout préordre  $\leq$  induit une hémi-distance  $d_{\leq}$  définie comme suit.

**Définition 3.10.16** *Tout ensemble  $X$  équipé d'un préordre  $\leq$  est muni d'une hémi-métrique canonique  $d_{\leq}$ , définie par :  $d_{\leq}(x, y) = 0$  si  $x \leq y$ , et  $d_{\leq}(x, y) = +\infty$  sinon.*

**Fait 3.10.17** *Le préordre de spécialisation de  $d_{\leq}$  est  $\leq$ .*

▷ **Exercice 3.3**

*Montrer que la topologie de  $d_{\leq}$  est la topologie d'Alexandroff de  $\leq$ .*

La construction de  $d_{\leq}$  permet de réaliser qu'il existe des espaces hémi-métriques exhibant un certain nombre de pathologies que n'ont pas les espaces métriques. Notamment, les limites d'un philtre ne sont pas nécessairement uniques : nous avons vu à la section 2.4 qu'une famille dirigée dans un cpo admet une unique plus grande limite, qui est la borne supérieure de la famille, mais tous les éléments inférieurs ou égaux à cette borne supérieure sont également des limites. La limite est donc très loin d'être unique. Une autre différence avec les espaces métriques est que l'on ne peut usuellement pas raisonner sur les suites pour parler de continuité, de fermés, de compacts ; on doit raisonner sur les philtres. Nous éviterons de faire appel à des raisonnements sur des suites (ou des philtres) pour établir des propriétés dans les espaces hémi-métriques.

L'exercice 3.3 montre que la topologie d'une hémi-distance  $d$  est analogue à la notion de topologie d'Alexandroff. Il existe une autre topologie, moins connue, qui est elle analogue à la notion de topologie haute.

**Définition 3.10.18** *Soit  $d$  une hémi-distance sur  $X$ . Le trou ouvert  $T_{x, > \epsilon}^d$  de centre  $x$  et de rayon  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $\epsilon > 0$ , est l'ensemble des points  $y \in X$  tels que  $d(y, x) > \epsilon$ .*

*On appelle topologie creuse de  $d$ , et on note  $\mathcal{O}_c^d$ , la topologie engendrée par les trous ouverts  $T_{x, > \epsilon}^d$ .*

La différence la plus visible entre boules ouvertes et trous ouverts est que ces derniers sont des ensembles de points  $y$  loin de  $x$  (à distance supérieure à  $\epsilon$ ), alors que les boules sont des ensembles de points  $y$  proches de  $x$  (à distance inférieure à  $\epsilon$ ). Une seconde différence est que l'on évalue la distance entre  $x$  et  $y$  en calculant  $d(x, y)$  dans le cas des boules,  $d(y, x)$  dans le cas des trous.

**Lemme 3.10.19** *Pour toute hémi-distance  $d$  sur  $X$ , la topologie de  $d$  est plus fine que la topologie creuse de  $d$ . Les deux topologies ont le même préordre de spécialisation,  $\leq^d$ .*

*Démonstration.* Le trou ouvert  $T_{x, > \epsilon}^d$  vaut  $f^{-1}]\epsilon, +\infty[$ , où  $f$  est la fonction qui à  $y \in X$  associe  $d(y, x) \in \overline{\mathbb{R}}^+$ . Notons  $d_{\overline{\mathbb{R}}^+}$  la variante de  $d_{\mathbb{R}}$  définie par :  $d_{\overline{\mathbb{R}}^+}(s, t) = 0$  si  $t = +\infty$ ,  $d_{\overline{\mathbb{R}}^+}(s, t) = +\infty$  si  $s = +\infty$ ,  $t \neq +\infty$ , et  $d_{\overline{\mathbb{R}}^+}(s, t) = d_{\mathbb{R}}(s, t)$  sinon. L'inégalité triangulaire entraîne que  $f$  est 1-lipschitzienne de  $X$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  muni de l'hémi-distance  $d_{\overline{\mathbb{R}}^+}$ , donc continue par le fait 3.10.12. Ceci implique que  $f^{-1}]\epsilon, +\infty[$  est un ouvert de la topologie de  $d$ . Le trou ouvert  $T_{x, > \epsilon}^d$  est donc un ouvert de  $\mathcal{O}^d$ . On en déduit que tout ouvert de  $\mathcal{O}_c^d$  en est aussi un de  $\mathcal{O}^d$ .

Il reste à montrer que le préordre de spécialisation de  $\mathcal{O}_c^d$  est  $\leq^d$ . Si  $y \in T_{x, > \epsilon}^d$  et  $y \leq^d z$ , par définition  $d(y, x) > \epsilon$  et  $d(y, z) = 0$ . Par l'inégalité triangulaire,  $d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) = d(z, x)$ , donc  $d(z, x) > \epsilon$ , d'où  $z \in T_{x, > \epsilon}^d$ . Tout trou ouvert est donc clos par le haut pour  $\leq^d$ ,

donc aussi tout ouvert de la topologie creuse. En notant  $\leq$  le préordre de spécialisation de  $\mathcal{O}_c^d$ , nous venons de montrer que  $y \leq^d z$  implique  $y \leq z$ . Réciproquement, supposons  $y \leq z$ . Posons  $\epsilon = d(y, z)$ . Si on avait  $\epsilon > 0$ , alors  $y$  serait dans le trou ouvert  $T_{z, > \epsilon/2}^d$ . Comme  $y \leq z$ ,  $z$  aussi : mais ceci signifierait  $d(z, z) > \epsilon/2$ , ce qui est absurde. Donc  $d(y, z) = 0$ , c'est-à-dire  $y \leq^d x$ , par la proposition 3.10.6.  $\square$

Il est donc censé de parler du préordre de spécialisation  $\leq^d$  de l'hémi-distance  $d$ , et non de la topologie  $\mathcal{O}^d$  ou  $\mathcal{O}_c^d$  : c'est le même.

Il est tentant de conjecturer que la topologie de  $d$  et la topologie creuse de  $d$  coïncident. C'est le cas de la distance  $d_{\mathbb{R}}$  sur les réels, comme le montre le lemme qui suit, mais ce n'est pas le cas en général.

**Lemme 3.10.20** *La topologie creuse  $\mathcal{O}_c^{d_{\mathbb{R}}}$  de l'hémi-distance  $d_{\mathbb{R}}$  coïncide, comme  $\mathcal{O}^{d_{\mathbb{R}}}$ , avec la topologie de Scott de  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Les trous ouverts  $T_{x, > \epsilon}^{d_{\mathbb{R}}}$  sont les intervalles  $]x + \epsilon, +\infty[$ . Réciproquement, tout ouvert de Scott non trivial  $]t, +\infty[$  est un trou ouvert  $T_{t-\epsilon, \epsilon}^{d_{\mathbb{R}}}$ . On conclut par le lemme 3.10.9.  $\square$

#### ▷ Exercice 3.4

On rappelle la définition de  $d_{\leq}$  (définition 3.10.16). Montrer que la topologie creuse de  $d_{\leq}$  est la topologie haute de  $\leq$ . En déduire que la topologie creuse d'une hémi-distance  $d$  est en général strictement plus fine que la topologie de  $d$ .

$\mathcal{O}^d$  et  $\mathcal{O}_c^d$  sont deux topologies construites à partir d'une hémi-distance  $d$ . Il est en fait facile de voir qu'il en existe au moins deux autres : celle engendrée par les  $B_{x, > \epsilon}^d = \{y \in X \mid d(x, y) > \epsilon\}$  (plutôt que  $B_{x, < \epsilon}^d$ ), et celle engendrée par les  $T_{x, < \epsilon}^d = \{y \in X \mid d(y, x) < \epsilon\}$  (plutôt que  $T_{x, > \epsilon}^d$ ). Plutôt que de multiplier les topologies, on peut se ramener aux deux topologies, creuse ou non, en changeant l'hémi-distance.

**Définition 3.10.21** ( $d^{op}$ ,  $d^{sym}$ ) *Pour toute hémi-distance  $d$  sur  $X$ , on définit l'hémi-distance opposée  $d^{op}$  par  $d^{op}(x, y) = d(y, x)$ , et l'hémi-distance symétrique  $d^{sym}$  par  $d^{sym}(x, y) = \max(d(x, y), d(y, x))$ .*

Il est facile de voir que ce que nous avons noté plus haut  $B_{x, > \epsilon}^d$  est juste le trou ouvert  $T_{x, > \epsilon}^{d^{op}}$ , que que  $T_{x, < \epsilon}^d$  est la boule ouverte  $B_{x, < \epsilon}^{d^{op}}$ .

**Lemme 3.10.22** *Le préordre de spécialisation de  $d^{op}$  est l'opposé  $\geq^d$  de  $\leq^d$ , défini par  $x \geq^d y$  si et seulement si  $y \leq^d x$ , si et seulement si  $d(y, x) = 0$ .*

*On notera  $X^{op}$  l'espace  $X$  muni de l'hémi-distance  $d^{op}$ , et  $X^{sym}$  l'espace  $X$  muni de l'hémi-distance symétrique  $d^{sym}$ .*

Il n'y aura donc pas de confusion possible avec la notation  $X^{op}$  utilisée lorsque  $X$  est un ensemble préordonné.

*Démonstration.* Par la proposition 3.10.6, ou le lemme 3.10.19, le préordre  $\leq$  de spécialisation de  $d^{op}$  est défini par  $x \leq y$  si et seulement si  $d^{op}(x, y) = 0$ , si et seulement si  $d(y, x) = 0$ .

$\square$

**Lemme 3.10.23** *Les topologies de  $X$  et de  $X^{op}$  sont moins fines que celle de  $X^{sym}$ .*

*Démonstration.* Montrons que la topologie de  $X$  est moins fine que celle de  $X^{sym}$ , le cas de  $X^{op}$  étant symétrique. Pour ceci, il suffit de montrer que toute boule ouverte  $B_{x, < \epsilon}^d$  est ouverte dans  $X^{sym}$ . Soit donc  $y \in B_{x, < \epsilon}^d$ , et posons  $a = d(x, y) < \epsilon$ . Pour tout  $z \in B_{y, < \epsilon - a}^{d^{sym}}$ , on a  $d(y, z) \leq d^{sym}(y, z) < \epsilon - a$ , donc  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon$ . Donc  $B_{y, < \epsilon - a}^{d^{sym}} \subseteq B_{x, < \epsilon}^d$ . On en conclut que  $B_{x, < \epsilon}^d$  est ouverte dans  $X^{sym}$  par le corollaire 3.10.5 appliqué à l'hémi-distance  $d^{sym}$ .  $\square$

Un argument classique énonce que, lorsque  $X$  est un espace métrique compact, alors pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut recouvrir  $X$  par un nombre fini de boules ouvertes de rayon  $\epsilon$  : il suffit d'extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert  $(B_{x, < \epsilon}^d)_{x \in X}$ . Le même argument fonctionne clairement dans tout espace hémi-métrique. On a donc :

**Lemme 3.10.24** *Disons qu'un espace hémi-métrique  $X$  est précompact si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un nombre fini d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  d'éléments de  $X$  tels que  $X = \bigcup_{i=1}^n B_{x_i, < \epsilon}^d$ .*

*Tout espace hémi-métrique compact est précompact.*

Mais, de même que la compacité dans les espaces topologiques non séparés, la précompacité est une notion très faible. Par exemple, tout espace hémi-métrique  $X$  avec un plus petit élément  $\perp$  (donc tel que  $d(\perp, x) = 0$  pour tout  $x \in X$ ) est compact, donc précompact. En fait, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $X$  égale la boule  $B_{\perp, < \epsilon}^d$ .

Une notion bien plus discriminante est la suivante.

**Définition 3.10.25 (Totalemment borné)** *Soit  $X$  un espace hémi-métrique.  $X$  est totalement borné si et seulement si  $X^{sym}$  est précompact, autrement dit si et seulement si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un nombre fini d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $X$  tels que pour tout  $x \in X$ , il existe  $i, 1 \leq i \leq n$ , tel que  $d(x_i, x) < \epsilon$  et  $d(x, x_i) < \epsilon$ .*

Clairement,

**Fait 3.10.26** *Si  $X^{sym}$  est compact, alors  $X$  est totalement borné.*

Comme  $X^{sym}$  est toujours  $T_2$  dès que  $X$  est  $T_0$ , cette propriété est, cette fois-ci, très forte. La propriété n'est pas des mieux nommées ; en particulier, une hémi-distance totalement bornée n'est pas nécessairement bornée, un contre-exemple étant donné par  $X = \{1, 2\}$ , avec 1 et 2 à distance  $+\infty$  l'un de l'autre.

▷ **Exercice 3.5**

*Soit  $X$  un ensemble ordonné, que l'on voit comme un espace hémi-métrique muni de l'hémi-distance  $d_{\leq}$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (1)  $X$  est totalement borné ; (2)  $X^{sym}$  est compact ; (3)  $X$  est fini.*

▷ **Exercice 3.6**

De façon analogue à la théorie de l'intégrale de Kurzweil-Henstock (section 2.10.2), appelons jauge sur  $X$  une fonction quelconque  $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Lorsque  $X$  est muni d'une hémi-distance  $d$ , disons que  $X$  est Kurzweil-Henstock-borné si et seulement si pour toute jauge  $\delta$  sur  $X$ , il existe un nombre fini d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $X$  tels que pour tout  $x \in X$ , il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $d^{\text{sym}}(x_i, x) < \delta(x_i)$ . Montrer que  $X^{\text{sym}}$  est compact si et seulement si  $X$  est Kurzweil-Henstock-borné; et que si  $X$  est Kurzweil-Henstock-borné alors  $X$  est totalement borné, mais que la réciproque est fautive. (Indication : considérer  $X = \{1/(n+1) | n \in \mathbb{N}\}$  muni de la distance usuelle sur  $\mathbb{R}$ .)

Tout produit fini d'espaces hémi-métriques est hémi-métrique, et tout coproduit, même infini, l'est aussi. Le coproduit  $\coprod_{i \in I} X_i$ , ou somme disjointe, d'une famille d'ensembles  $(X_i)_{i \in I}$  est l'ensemble des couples  $(i, x)$ , avec  $i \in I$  et  $x \in X_i$ . Lorsque chaque  $X_i$  est un espace topologique, les ouverts de  $\coprod_{i \in I} X_i$  sont les unions disjointes d'ouverts de chaque  $X_i$ , autrement dit les  $\bigcup_{i \in I} \{i\} \times U_i$ ,  $U_i$  ouvert de  $X_i$ .

**Lemme 3.10.27** Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces hémi-métriques,  $X_i$  étant équipé de l'hémi-distance  $d_i$ . Équipons le coproduit  $\coprod_{i \in I} X_i$  de l'hémi-distance  $d$  définie par :  $d((i, x), (i, y)) = d_i(x, y)$ ,  $d((i, x), (j, y)) = +\infty$  si  $i \neq j$ . Alors la topologie de  $d$  est exactement la topologie de l'espace topologie coproduit  $\coprod_{i \in I} X_i$ .

*Démonstration.* La boule ouverte  $B_{(i,x), < \epsilon}^d$  est par définition  $\bigcup_{j \in J} \{j\} \times U_j$ , où  $U_j$  est vide pour tout  $j \neq i$ , et  $U_i = B_{x, < \epsilon}^{d_i}$ , et est donc ouvert dans le coproduit. Réciproquement, la topologie coproduit est engendrée par les ensembles de la forme  $\{i\} \times B_{x, < \epsilon}^{d_i}$ , qui est exactement  $B_{(i,x), < \epsilon}^d$ . Les deux topologies coïncident donc.  $\square$

**Lemme 3.10.28** Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  espaces hémi-métriques,  $X_i$  étant équipé de l'hémi-distance  $d_i$ . Posons  $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n))$ . Alors la topologie de  $d$  est exactement la topologie de l'espace topologique produit  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

*Démonstration.* La boule ouverte  $B_{(x_1, \dots, x_n), < \epsilon}^d$  égale le produit  $B_{x_1, < \epsilon}^{d_1} \times \dots \times B_{x_n, < \epsilon}^{d_n}$ , et est donc un ouvert du produit topologique. Réciproquement, la topologie produit est engendrée par les produits d'ouverts de la forme  $U_1 \times \dots \times U_n$ , où pour un certain  $i$ ,  $U_i = B_{x_i, < \epsilon}^{d_i}$  et pour tout  $j \neq i$ ,  $U_j = X_j$ . Pour tout  $(y_1, \dots, y_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ , on a  $d(x_i, y_i) < \epsilon$ . La boule ouverte  $B_{(y_1, \dots, y_n), < \epsilon - d(x_i, y_i)}^d$  est alors incluse dans  $U_1 \times \dots \times U_n$ , donc  $U_1 \times \dots \times U_n$  est un ouvert de la topologie de  $d$  par le corollaire 3.10.5. Les deux topologies coïncident donc.  $\square$

On peut étendre ce dernier résultat au cas du produit d'une famille dénombrable d'espaces hémi-métriques :

**Lemme 3.10.29** Soient  $X_i$ ,  $i \in I$ , où  $I \subseteq \mathbb{N}$ , une famille dénombrable d'espaces hémi-métriques,  $X_i$  étant muni de l'hémi-métrique  $d_i$ . Pour tout élément  $\vec{x}$  de  $X = \prod_{i \in I} X_i$ , notons  $x_i$  sa  $i$ ème composante. Définissons :

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sup_{i \in I} \frac{1}{2^i} \min(d_i(x_i, y_i), 1)$$

Alors la topologie de  $d$  est exactement la topologie de l'espace topologique produit  $\prod_{i \in I} X_i$ .

*Démonstration.* À réindexation près, on peut supposer que  $I$  est de la forme  $\{0, 1, \dots, n\}$  ou  $\mathbb{N}$  tout entier.

Notons  $X'_i$  l'espace  $X_i$  muni de l'hémi-distance  $d'_i(x, y) = \min(d_i(x, y), 1)$ . Par le lemme 3.10.14,  $X'_i$  et  $X_i$  ont le même espace topologique sous-jacent. La fonction de projection  $\pi_i : X \rightarrow X'_i$  qui à  $\vec{x}$  associe  $x_i$  est  $2^i$ -lipschitzienne, donc continue pour la topologie de  $d$  sur  $X$  par le fait 3.10.12. Comme  $X'_i$  et  $X_i$  sont, topologiquement, le même espace,  $\pi_i$  est aussi continue de  $X$  vers  $X_i$ . Donc tout ouvert de la topologie produit est un ouvert de  $d$ .

Réciproquement, considérons la boule ouverte  $B_{\vec{x}, < \epsilon}^d$  de  $X$ . Soit  $i_0$  un entier tel que  $1/2^{i_0} < \epsilon$ , et  $\eta = 1/2^{i_0}$ . Considérons l'ouvert  $U_x = B_{x_0, < \eta}^{d_0} \times B_{x_1, < \eta}^{d_1} \times \dots \times B_{x_{i_0-1}, < \eta}^{d_{i_0-1}} \times X_{i_0} \times X_{i_0+1} \times \dots$ . Il est facile de voir que  $\vec{x} \in U_x$ , et que  $U_x \subseteq B_{\vec{x}, < \epsilon}^d$ . Pour ce dernier point, soit  $\vec{y} \in U_x$ . Alors  $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sup_{i \in I} 1/2^i \min(d_i(x_i, y_i), 1) \leq \max(\sup_{i=0}^{i_0-1} \eta/2^i, \sup_{i \in I, i \geq i_0} 1/2^i) \leq \max(\eta, 1/2^{i_0}) = 1/2^{i_0} < \epsilon$ . Comme tout ouvert  $V$  de  $d$  est une union de boules ouvertes  $B_{\vec{x}, < \epsilon}^d$  lorsque  $\vec{x}$  varie dans  $X$ ,  $V$  est aussi l'union des  $U_x$  que nous venons de construire, et est donc un ouvert de la topologie produit.  $\square$

De façon similaire à la construction de la proposition 3.9.5, on peut plonger un espace hémi-métrique dans un espace hémi-métrique ayant bien davantage de propriétés. Rappelons que  $[0, 1]$  est muni de la topologie de Scott, et  $[0, 1]^A$  de la topologie produit. La construction suivante sera particulièrement intéressante lorsque  $A$  sera dénombrable, au vu du lemme 3.10.29.

**Proposition 3.10.30** *Soit  $X$  un espace hémi-métrique, d'hémi-distance  $d$ , et soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$ . La fonction  $\eta_d^A : X \rightarrow [0, 1]^A$ , qui à  $x \in X$  associe la famille  $(\max(1 - d(y, x), 0))_{y \in A}$ , est continue. C'est un plongement d'espaces topologiques dès que  $X$  est  $T_0$  et  $A$  est partout dense dans  $X^{sym}$ .*

*Démonstration.* Pour montrer que  $\eta_d^A$  est continue, il suffit de démontrer que  $\pi_y \circ \eta_d^A$  est continue de  $X$  vers  $[0, 1]$  pour tout  $y \in A$ , où  $\pi_y$  est la projection sur la composante  $y \in A$ . Or  $\pi_y \circ \eta_d^A$  est la fonction qui à  $x$  associe  $\max(1 - d(y, x), 0)$ . Cette fonction est 1-lipschitzienne, par l'inégalité triangulaire :  $(1 - d(y, x)) \leq (1 - d(y, x')) + d(x, x')$ , donc  $(1 - d(y, x)) \leq \max(1 - d(y, x), 0) + d(x, x')$ , donc  $\max(1 - d(y, x), 0) \leq \max(1 - d(y, x), 0) + d(x, x')$ . Elle est donc continue, par le fait 3.10.12.

Considérons une boule ouverte  $B_{x, < \epsilon}^d$  de  $X$ , et montrons que l'image directe de  $B_{x, < \epsilon}^d$  par  $\eta_d^A$  est l'intersection de l'image  $\mathfrak{S}(\eta_d^A)$  de  $\eta_d^A$  et d'un ouvert de  $[0, 1]^A$ . Soit donc  $\vec{t} = (t_y)_{y \in Y}$  un élément de  $\eta_d^A(B_{x, < \epsilon}^d)$ , et soit  $x'$  un point de  $B_{x, < \epsilon}^d$  tel que  $t_y = \max(1 - d(y, x'), 0)$  pour tout  $y \in Y$  : nous cherchons à montrer qu'il existe un ouvert  $U_{\vec{t}}$  de  $[0, 1]^A$  tel que  $\vec{t} \in U_{\vec{t}} \cap \mathfrak{S}(\eta_d^A) \subseteq \eta_d^A(B_{x, < \epsilon}^d)$ . Lorsque nous l'aurons montré,  $\eta_d^A(B_{x, < \epsilon}^d)$  sera l'union des  $U_{\vec{t}} \cap \mathfrak{S}(\eta_d^A)$  lorsque  $\vec{t}$  varie dans  $\eta_d^A(B_{x, < \epsilon}^d)$ , et sera donc un ouvert de  $\mathfrak{S}(\eta_d^A)$ . Sans perdre de généralité, supposons  $\epsilon < 1$ . Puisque  $x' \in B_{x, < \epsilon}^d$ ,  $d(x, x') < \epsilon$ , donc  $t_x > 1 - \epsilon$ . Posons  $U_{\vec{t}}$  l'ensemble des familles  $\vec{s} = (s_y)_{y \in A}$  telles que  $s_x > 1 - \epsilon$ . C'est clairement un ouvert de  $[0, 1]^A$ , et  $\vec{t} \in U_{\vec{t}} \cap \mathfrak{S}(\eta_d^A)$ . Pour tout  $\vec{s} = (s_y)_{y \in A} \in U_{\vec{t}} \cap \mathfrak{S}(\eta_d^A)$ , de plus, il existe un point  $z$  de  $X$  tel que  $\eta_d^A(z) = \vec{s}$ , c'est-à-dire tel que  $d(y, z) = \max(1 - s_y, 0)$  pour tout  $y \in X$ , et  $s_x > 1 - \epsilon$ . En particulier,  $d(x, z) < \epsilon$ , donc  $z \in B_{x, < \epsilon}^d$ . Ceci implique  $\vec{s} \in \eta_d^A(B_{x, < \epsilon}^d)$ . Donc  $U_{\vec{t}} \cap \mathfrak{S}(\eta_d^A) \subseteq \eta_d^A(B_{x, < \epsilon}^d)$ .

Nous avons donc établi que l'image d'une boule ouverte de  $X$  par  $\eta_d^A$  était ouverte dans  $[0, 1]^A$ . Maintenant, supposons que  $A$  soit partout dense dans  $X$  et que  $X$  soit  $T_0$ , et montrons que  $\eta_d^A$  est injective. Soient deux éléments  $x$  et  $y$  de  $X$  tels que  $\eta_d^A(x) = \eta_d^A(y)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , avec  $\epsilon < 1$ , comme  $A$  est partout dense dans  $X^{sym}$ , il existe un élément  $x' \in A \cap B_{x, < \epsilon/2}^{d^{sym}}$ . En regardant la composante  $x'$  de  $\eta_d^A(x) = \eta_d^A(y)$ , on voit que  $\max(1 - d(x', x), 0) = \max(1 - d(x', y), 0)$ . Or  $d(x', x) < \epsilon/2$ , donc la quantité  $\max(1 - d(x', x), 0) = \max(1 - d(x', y), 0)$  est non nulle, et  $1 - d(x', y) > 1 - \epsilon/2$ , donc  $d(x', y) < \epsilon/2$ . Puisque  $d(x, x') < \epsilon/2$ ,  $d(x, y) < \epsilon$  par l'inégalité triangulaire. Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $d(x, y) = 0$ , c'est-à-dire  $x \leq^d y$ . Par symétrie, on démontre de même  $y \leq^d x$ . Comme  $X$  est  $T_0$ ,  $x = y$ .  $\square$

L'espace  $[0, 1]^A$  possède quantité de bonnes propriétés topologiques :

**Proposition 3.10.31** *Soit  $A$  un ensemble quelconque.  $[0, 1]^A$  est stablement compact, d'espace de Nachbin associé l'espace  $[0, 1]'^A$ , où  $[0, 1]'$  est l'intervalle  $[0, 1]$  muni de sa topologie métrique usuelle. Son ordre de spécialisation est l'ordre point à point.*

*Démonstration.*  $[0, 1]$  est stablement compact, d'espace de Nachbin associé  $[0, 1]'$ . On rappelle que le produit des espaces de Nachbin est l'espace de Nachbin du produit (voir la section 2.3 ou Jung 2004, Proposition 2.15), et le préordre de spécialisation le produit des préordres de spécialisation, d'où la proposition.  $\square$

**Proposition 3.10.32**  *$[0, 1]^A$  est un treillis complet et un cpo continu. La relation "bien en-dessous" sur  $[0, 1]^A$  est donnée par  $\vec{s} \ll \vec{t}$  si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini  $E$  de  $A$  tel que  $s_y < t_y$  pour tout  $y \in E$ , et  $s_y = 0$  pour tout  $y \notin E$ , où  $\vec{s} = (s_y)_{y \in X}$  et  $\vec{t} = (t_y)_{y \in X}$ . La topologie de Scott coïncide avec la topologie produit.*

*Démonstration.* Rappelons que l'ordre de  $[0, 1]^A$  est l'ordre point à point. C'est trivialement un treillis complet, donc un cpo.

Soient  $\vec{s} = (s_y)_{y \in X}$  et  $\vec{t} = (t_y)_{y \in X}$  deux éléments de  $[0, 1]^A$ . Pour tout sous-ensemble fini  $E$  de  $A$ , notons  $\vec{t}|_E$  la famille des réels  $(t|_E y)_{y \in A}$  définie par :  $t|_E y = t_y$  si  $y \in E$ ,  $t|_E y = 0$  sinon. Pour tout réel  $r \in ]0, 1[$ , posons  $r.\vec{t}$  la famille  $(rt_y)_{y \in A}$ . On note que  $\vec{t}$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $r.\vec{t}|_E$ , lorsque  $E$  parcourt les sous-ensembles finis de  $X$  et  $0 < r < 1$ . Si  $\vec{s} \ll \vec{t}$ , c'est donc qu'il existe un sous-ensemble fini  $E'$  de  $X$  et un réel  $r$ ,  $0 < r < 1$ , tels que  $\vec{s} \leq r.\vec{t}|_{E'}$ . Posons  $E$  l'ensemble fini des  $y$  de  $E'$  tel que  $t_y \neq 0$ . Alors  $s_y = 0$  pour tout  $y \notin E$ , et  $s_y = rt_y < t_y$  pour tout  $y \in E$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe un sous-ensemble fini  $E$  de  $A$  tel que  $s_y < t_y$  pour tout  $y \in E$ , et  $s_y = 0$  pour tout  $y \notin E$ . Pour toute famille dirigée  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$  de  $[0, 1]^A$ , telle que  $\vec{t} \leq \sup_{i \in I} \vec{u}_i$ . Pour chaque  $y \in E$ , on aura  $s_y \leq u_{i_y}$  pour  $i$  suffisamment grand. Comme  $E$  est fini, on aura  $s_y \leq u_{i_y}$  pour tout  $y \in E$ , pour  $i$  suffisamment grand. Mais alors  $s_y \leq u_{i_y}$  pour tout  $y$ , donc  $\vec{s} \leq \vec{u}_i$  : donc  $\vec{s} \ll \vec{t}$ . Ceci termine la caractérisation de  $\ll$ .

On a déjà vu que tout élément  $\vec{t}$  s'écrivait comme la borne supérieure de la famille des  $r.\vec{t}|_E$ , lorsque  $E$  parcourt les sous-ensembles finis de  $A$  et  $0 < r < 1$ . Or  $r.\vec{t}|_E \ll \vec{t}$ , par la caractérisation de  $\ll$  ci-dessus. Donc  $[0, 1]^A$  est un cpo continu.

Une base de  $[0, 1]^A$  en tant que cpo continu est alors donnée par les éléments de la forme  $\vec{s}$  avec un nombre fini de composantes non nulles. La topologie de Scott est alors engendrée par les ouverts  $\uparrow \vec{s}$ , où  $\vec{s}$  n'a qu'un nombre fini de composantes non nulles. Pour un tel  $\vec{s}$ , si l'on pose  $E$  l'ensemble fini des  $y \in Y$  tels que  $s_y \neq 0$ ,  $\uparrow \vec{s}$  est l'ensemble des  $\vec{t}$  tels que  $t_y > s_y$  pour tout  $y \in Y$ , et est donc un ouvert de la topologie produit. Réciproquement, la topologie produit est engendrée par les  $\{\vec{t} \mid t_y > b\}$ ,  $y \in A$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Lorsque  $b < 0$ , ceci vaut  $[0, 1]^A$  tout entier, qui est Scott-ouvert. Lorsque  $b \geq 0$ , cet ensemble vaut  $\uparrow \vec{s}$ , où  $\vec{s}$  est la famille dont toutes les composantes sont nulles, sauf éventuellement la composante  $y$ , qui vaut  $b$ .  $\square$

On en déduit notamment que  $[0, 1]^A$  est un domaine continu et compact. Lorsque  $A$  est de plus dénombrable,  $[0, 1]^A$  est un espace hémi-métrique par le lemme 3.10.29.

**Lemme 3.10.33** *Soit  $A$  un ensemble dénombrable. L'espace  $[0, 1]^A$  admet une hémi-distance  $d$  telle que la topologie produit de  $Y = [0, 1]^A$  coïncide avec  $\mathcal{O}^d$ , et telle que  $Y^{sym}$  soit compact. En particulier,  $Y = [0, 1]^A$  est totalement borné.*

*Démonstration.* La distance est celle donnée au lemme 3.10.29, les distances  $d_i$  étant toutes la distance  $d_{\mathbb{R}}$  sur  $[0, 1]$ . (Ceci suppose que l'on a numéroté les éléments de  $A$ .) On a en effet remarqué au lemme 3.10.9 que la topologie de  $d_{\mathbb{R}}$  (ici, sur  $[0, 1]$ ) était la topologie de Scott de  $[0, 1]$ . Posons  $Y = [0, 1]^A$ . La distance  $d^{sym}$  sur  $Y$  est donnée par :

$$\begin{aligned} d^{sym}(\vec{x}, \vec{y}) &= \sup_{i \in A} 1/2^i \max(\min(d_{\mathbb{R}}(x_i, y_i), 1), \min(d_{\mathbb{R}}(y_i, x_i), 1)) \\ &= \sup_{i \in A} 1/2^i \max(d_{\mathbb{R}}(x_i, y_i), d_{\mathbb{R}}(y_i, x_i)) = \sup_{i \in A} 1/2^i d_{\mathbb{R}}^{sym}(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Donc  $d^{sym}$  est l'hémi-distance donnée par le lemme 3.10.29, dont la topologie sous-jacente est celle du produit  $I^A$ , où  $I$  est l'intervalle  $[0, 1]$  muni de l'hémi-distance  $d_{\mathbb{R}}^{sym}$ . Or  $d_{\mathbb{R}}^{sym}(x, y) = \max(d_{\mathbb{R}}(x, y), d_{\mathbb{R}}(y, x)) = |x - y|$ , donc  $I$  est  $[0, 1]$  muni de sa topologie métrique usuelle. Celle-ci coïncide avec la topologie patch de celle (de Scott) de  $[0, 1]$ , donc  $I = [0, 1]'$ . On en déduit que la topologie de  $Y^{sym}$  est celle de  $[0, 1]^A$ , laquelle est par le théorème de Tychonoff compacte. On en déduit que  $Y$  est totalement borné par le fait 3.10.26.  $\square$

**Définition 3.10.34 (Séparable)** *Un espace hémi-métrique  $X$  est dit séparable si et seulement s'il est  $T_0$  et si  $X^{sym}$  contient un sous-ensemble dénombrable partout dense.*

En prenant  $Y = [0, 1]^A$ , où  $A$  est un sous-ensemble partout dense de  $X^{sym}$ , on déduit des résultats ci-dessus :

**Corollaire 3.10.35** *Tout espace hémi-métrique séparable se plonge, en tant qu'espace topologique, dans un espace hémi-métrique  $Y$  totalement borné. On peut de plus supposer que  $Y^{sym}$  est compact, et que  $Y$  est un domaine continu compact.*

Ceci est l'analogie du théorème classique établissant que tout espace polonais — l'espace topologique sous-jacent à un espace métrique complet et séparable — se plonge dans le cube de Hilbert  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ , et est en fait isomorphe à un sous-ensemble  $G^\delta$  du cube de Hilbert. (Un ensemble est  $G^\delta$  s'il s'exprime comme intersection dénombrable d'ouverts.)

On note au passage que la notion de séparabilité généralise bien celle d'être totalement borné, modulo l'hypothèse d'être  $T_0$ .

**Lemme 3.10.36** Soit  $X$  un espace hémi-métrique  $T_0$ . Si  $X$  est totalement borné, alors  $X$  est séparable.

*Démonstration.* Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $E_n$  un ensemble fini d'éléments de  $X$  tel que pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in E_n$  tel que  $d^{\text{sym}}(x, y) < 1/n$ . Posons  $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ .  $A$  est un ensemble dénombrable. Il reste à montrer que  $A$  est partout dense dans  $X$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in X$ , pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $A$  rencontre la boule ouverte  $B_{x, < \epsilon}^{d^{\text{sym}}}$ . Posons  $n$  suffisamment grand, de sorte que  $1/n \leq \epsilon$ . On sait que  $E_n$  rencontre  $B_{x, < 1/n}^{d^{\text{sym}}}$ . Donc  $A \supseteq E_n$  rencontre  $B_{x, < \epsilon}^{d^{\text{sym}}} \supseteq B_{x, < 1/n}^{d^{\text{sym}}}$ .  $\square$

Définissons quelques hémi-distances canoniques sur les espaces de Smyth, de Hoare, de Plotkin d'un espace hémi-métrique  $X$ . Ces hémi-distances seront des variantes de la notion de distance de Hausdorff. Le cas des espaces de Smyth sera le plus agréable : sous quelques hypothèses mineures, nous démontrerons à la proposition 3.10.47 que la topologie de  $\mathcal{Q}(X)$  est exactement celle d'une hémi-distance  $d_{\mathcal{Q}}$ , dite de Hausdorff-Smyth. Nous devons supposer  $X$  totalement borné pour obtenir des résultats similaires sur les espaces de Hoare et de Plotkin.

**Définition 3.10.37** ( $d_{\mathcal{Q}}$ ) Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . L'hémi-distance de Hausdorff-Smyth,  $d_{\mathcal{Q}}$ , sur  $\mathcal{Q}(X)$ , est définie par :

$$d_{\mathcal{Q}}(Q, Q') = \sup_{x' \in Q'} \inf_{x \in Q} d(x, x')$$

On peut montrer que les bornes sont atteintes, autrement dit que  $d_{\mathcal{Q}}(Q, Q') = \max_{x' \in Q'} \min_{x \in Q} d(x, x')$ . Ceci vient de la caractérisation suivante des compacts saturés de  $\mathbb{R}$ , que nous équipons, rappelons-le, de sa topologie de Scott.

**Lemme 3.10.38** Les compacts saturés de  $\mathbb{R}$  (resp.,  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ) muni de sa topologie de Scott, sont le vide et les intervalles de la forme  $[r, +\infty[$ ,  $r \in \mathbb{R}$  (resp.,  $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ ). Tout compact de  $\mathbb{R}$  (resp.,  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ) a un plus petit élément.

*Démonstration.* Traitons d'abord de  $\mathbb{R}$ . Soit  $Q$  un compact saturé non vide de  $\mathbb{R}$ . Clairement  $Q \neq \mathbb{R}$ , puisque  $\mathbb{R}$  n'est pas compact : par exemple,  $(] - n, +\infty[)_{n \in \mathbb{N}}$  en forme un recouvrement ouvert dont on ne peut extraire aucun sous-recouvrement fini. Comme  $Q$  est clos par le haut, il est de la forme  $]r, +\infty[$  ou  $[r, +\infty[$  pour un certain  $r$ . Mais  $]r, +\infty[$  n'est pas compact, car le recouvrement ouvert  $(]r + 1/n, +\infty[)_{n \in \mathbb{N}, n \neq 0}$  n'admet aucun sous-recouvrement fini. Donc  $Q = [r, +\infty[$ .

On observe ensuite que  $[r, +\infty[$  est bien compact saturé : c'est le compact finitaire  $\uparrow r$ .

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$ . Alors son saturé  $\uparrow K$  est un compact saturé de  $\mathbb{R}$ , donc de la forme  $[r, +\infty[$ . On en déduit que  $r$  est le plus petit élément de  $K$ .

Le raisonnement est similaire dans le cas de  $\overline{\mathbb{R}}^+$ .  $\square$

**Lemme 3.10.39** La fonction  $d_{\mathcal{Q}}$  est une hémi-distance, de préordre de spécialisation l'inclusion inverse  $\supseteq$ . Les bornes sont atteintes, autrement dit l'on a :

$$d_{\mathcal{Q}}(Q, Q') = \max_{x' \in Q'} \min_{x \in Q} d(x, x')$$

*Démonstration.* Montrons que les bornes sont atteintes. Pour tout  $x' \in Q'$ , la fonction  $d(\_, x')$  qui à  $x$  associe  $d(x, x')$  est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire, donc continue par le fait 3.10.12. L'image  $K$  de  $Q$  par  $d(\_, x')$  est donc compacte. Donc  $\uparrow K$  est compact. Par le lemme 3.10.38,  $\uparrow K$  a donc un plus petit élément  $r$ , qui est aussi le plus petit élément de  $K$ . On en déduit qu'il existe  $x_0 \in Q$  tel que  $r = d(x_0, x')$ , et  $r = \inf_{x \in Q} d(x, x')$ . Donc  $r$  est le minimum  $\min_{x \in Q} d(x, x')$ . La fonction qui à  $x'$  associe  $-\min_{x \in Q} d(x, x')$  est elle aussi 1-lipschitzienne : pour tous  $x', x''$ , et tout  $x \in Q$ , on a  $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$  par l'inégalité triangulaire, donc  $\min_{x \in Q} d(x, x'') \leq \min_{x \in Q} d(x, x') + d(x', x'')$ , d'où  $-\min_{x \in Q} d(x, x') - (-\min_{x \in Q} d(x, x'')) \leq d(x', x'')$ . Par le même argument que ci-dessus, la valeur minimum  $\min_{x' \in Q'} (-\min_{x \in Q} d(x, x'))$  est atteinte : c'est  $-\max_{x' \in Q'} \min_{x \in Q} d(x, x') = -d_Q(Q, Q')$ .

Montrons que  $d_Q$  est une hémi-distance. D'abord, si  $Q \supseteq Q'$ , pour tout  $x' \in Q'$  il existe  $x \in Q$ , à savoir  $x = x'$ , tel que  $d(x, x') = 0$ . Donc  $d_Q(Q, Q') = 0$ . En particulier,  $d_Q(Q, Q) = 0$ . Ensuite, considérons  $Q, Q', Q'' \in \mathcal{Q}(X)$ . Pour tous  $x \in Q, x' \in Q', x'' \in Q''$ , on a  $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ . En prenant les minima sur tous les  $x \in Q$ , on a  $\min_{x \in Q} d(x, x'') \leq \min_{x \in Q} d(x, x') + d(x', x'')$ . Comme ceci est vrai pour tout  $x' \in Q'$ , on a :

$$\begin{aligned} \min_{x \in Q} d(x, x'') &\leq \inf_{x' \in Q'} (\min_{x \in Q} d(x, x') + d(x', x'')) \\ &\leq \inf_{x' \in Q'} (\max_{x' \in Q'} \min_{x \in Q} d(x, x') + d(x', x'')) = \inf_{x' \in Q'} (d_Q(Q, Q') + d(x', x'')) \\ &= d_Q(Q, Q') + \min_{x' \in Q'} d(x', x'') \end{aligned}$$

En prenant les maxima sur tous les  $x'' \in Q''$ , on en déduit  $d_Q(Q, Q'') \leq d_Q(Q, Q') + d_Q(Q', Q'')$ . Donc  $d_Q$  est une hémi-distance.

On a vu plus haut que  $Q \supseteq Q'$  implique  $d_Q(Q, Q') = 0$ . Réciproquement, supposons  $d_Q(Q, Q') = 0$ . Pour tout  $x' \in Q'$ ,  $\min_{x \in Q} d(x, x') = 0$ , donc il existe  $x \in Q$  tel que  $d(x, x') = 0$ . Autrement dit, pour tout  $x' \in Q'$ , il existe  $x \in Q$  tel que  $x \leq^d x'$ , par la proposition 3.10.6. Comme  $Q$  est saturé,  $x'$  appartient à  $Q$ . Donc  $Q' \subseteq Q$ .  $\square$

**Définition 3.10.40 (Épaississement)** Soit  $X$  un espace, muni d'une hémi-distance  $d$ . Pour toute partie  $A$  de  $X$ , pour tout  $\epsilon \geq 0$ , l' $\epsilon$ -épaississement de  $A$ , noté  $A^{d,+(\epsilon)}$ , est l'ouvert :

$$A^{d,+(\epsilon)} = \bigcup_{x \in A} B_{x, < \epsilon}^d$$

Réciproquement, nous devons définir et étudier une notion symétrique d'amincissement. Commençons par définir la distance d'un point à une partie  $A$ .

**Définition 3.10.41** Soit  $X$  un espace, muni d'une hémi-distance  $d$ . Pour toute partie  $A$  de  $X$ , pour tout  $x \in X$ , on note  $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ .

**Lemme 3.10.42** Soit  $X$  un espace, muni d'une hémi-distance  $d$ . Fixons une partie  $A$  de  $X$ . La fonction qui à  $x$  associe  $d(x, A)$  est 1-lipschitzienne, et  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $x \in cl(A)$ .

*Démonstration.* Pour tout  $y \in A$ ,  $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$ . En prenant les bornes inférieures de part et d'autre,  $d(x, A) \leq d(x, x') + d(x', A)$ , d'où le caractère 1-lipschitzien. Si  $d(x, A) = 0$ , montrons que  $x \in cl(A)$ . Pour ceci, il suffit de montrer que tout ouvert  $U$  contenant  $x$  intersecte  $A$ . Par le corollaire 3.10.5, il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{x, < \epsilon}^d \subseteq U$ . Or, comme  $d(x, A) = 0$ , il existe un  $y \in A$  tel que  $d(x, y) < \epsilon$ . Mais alors  $y \in B_{x, < \epsilon}^d$ , donc  $y \in U$ . Réciproquement, si  $x \in cl(A)$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$ , la boule ouverte  $B_{x, < \epsilon}^d$  intersecte  $A$ , disons en  $y$ . Par construction,  $d(x, y) < \epsilon$ , donc  $d(x, A) < \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $d(x, A) = 0$ .  $\square$

**Définition 3.10.43 (Amincissement)** Soit  $X$  un espace, muni d'une hémi-distance  $d$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout  $\epsilon \geq 0$ , l' $\epsilon$ -amincissement de  $U$ , noté  $U^{d, -(\epsilon)}$ , est l'ensemble des points  $x \in X$  tels que  $d(x, X \setminus U) > \epsilon$ .

**Lemme 3.10.44** Soit  $X$  un espace, muni d'une hémi-distance  $d$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout  $\epsilon \geq 0$ ,  $U^{d, -(\epsilon)}$  est un ouvert inclus dans  $U$ , qui coïncide avec  $U$  si  $\epsilon = 0$ .

*Démonstration.* Par le lemme 3.10.42, la fonction qui à  $x$  associe  $d(x, X \setminus U)$  est 1-lipschitzienne, donc continue par le fait 3.10.12. Or  $U^{d, -(\epsilon)}$  est l'image réciproque de l'ouvert  $]\epsilon, +\infty[$  par cette fonction, et est donc ouvert. Pour tout  $x \in U^{d, -(\epsilon)}$ ,  $d(x, X \setminus U) > \epsilon$ . Si  $x$  n'était pas dans  $U$ , il serait dans  $X \setminus U$ , donc  $d(x, X \setminus U)$  serait nul ; donc  $x \in U$ . On en déduit que  $U^{d, -(\epsilon)}$  est inclus dans  $U$ . Si  $\epsilon = 0$ ,  $x \in U^{d, -(\epsilon)}$  si et seulement si  $d(x, X \setminus U) \neq 0$ , ce qui est équivalent à  $x \notin X \setminus U$ , par le lemme 3.10.42 et le fait que  $X \setminus U$  est fermé. Donc  $x \in U^{d, (0)}$  si et seulement si  $x \in U$ .  $\square$

**Lemme 3.10.45** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ ,  $U$  un ouvert de  $X$ . Si  $\epsilon \leq \epsilon'$ , alors  $U^{d, -(\epsilon)} \supseteq U^{d, -(\epsilon')}$ . De plus, pour toute famille de réels positifs ou nuls  $(\epsilon_i)_{i \in I}$ , de borne inférieure 0, la famille des  $U^{d, -(\epsilon_i)}$ ,  $i \in I$ , est dirigée, et d'union égale à  $U$ .

*Démonstration.* Si  $\epsilon \leq \epsilon'$ , pour tout  $x \in U^{d, -(\epsilon')}$ ,  $d(x, X \setminus U) > \epsilon'$ , donc  $d(x, X \setminus U) > \epsilon$ , donc  $x \in U^{d, -(\epsilon)}$ . Puisque la famille  $(\epsilon_i)_{i \in I}$  est totalement ordonnée, en particulier filtrante, la famille des  $U^{d, -(\epsilon_i)}$ ,  $i \in I$ , est dirigée. Son union est incluse dans  $U$  par le lemme 3.10.44. Réciproquement, si  $x \in U$ , par le corollaire 3.10.5, il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{x, < \epsilon}^d \subseteq U$ . On en déduit que  $d(x, X \setminus U) \geq \epsilon$  : sinon il existerait un  $y \notin U$  tel que  $d(x, y) < \epsilon$ , en particulier avec  $y \in B_{x, < \epsilon}^d$ . Puisque  $\inf_{i \in I} \epsilon_i = 0$ , il existe un  $i \in I$  tel que  $\epsilon_i < \epsilon$ . Donc  $d(x, X \setminus U) > \epsilon_i$ , c'est-à-dire  $x \in U^{d, -(\epsilon_i)}$ .  $\square$

**Lemme 3.10.46** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ ,  $U$  un ouvert de  $X$ , et  $\epsilon$  un réel strictement positif. Alors :

$$(U^{d, -(\epsilon)})^{d, +(\epsilon)} \subseteq U$$

*Démonstration.* Pour tout  $z \in (U^{d, -(\epsilon)})^{d, +(\epsilon)}$ , il existe  $y \in U^{d, -(\epsilon)}$  tel que  $d(y, z) < \epsilon$ . Si  $z$  n'était pas dans  $U$ ,  $z$  serait dans le complémentaire de  $U$ , donc  $d(y, X \setminus U) < \epsilon$ . Mais ceci contredit le fait que  $y \in U^{d, -(\epsilon)}$ . Donc  $z \in U$ .  $\square$

**Proposition 3.10.47** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ . La topologie de  $d_Q$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  coïncide avec la topologie engendrée par les ouverts de la forme  $\square Q^{d,+(\epsilon)}$ ,  $Q \in \mathcal{Q}(X)$ ,  $\epsilon > 0$ , ainsi qu'avec celle engendrée par les  $\square U$ ,  $U$  ouvert de  $X$ .*

*Lorsque  $X$  est bien filtrant et localement compact, la topologie de  $\mathcal{Q}(X)$  est donc exactement celle de l'hémi-distance  $d_Q$ .*

*Démonstration.* On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} B_{Q,<\epsilon}^{d_Q} &= \{Q' \in \mathcal{Q}(X) \mid d_Q(Q, Q') < \epsilon\} = \{Q' \in \mathcal{Q}(X) \mid \max_{x' \in Q'} \min_{x \in Q} d(x, x') < \epsilon\} \\ &= \{Q' \in \mathcal{Q}(X) \mid \forall x' \in Q' \cdot \exists x \in Q \cdot d(x, x') < \epsilon\} = \square Q^{d,+(\epsilon)} \end{aligned}$$

En notant  $\mathcal{O}$  la topologie engendrée par les ouverts de la forme  $\square Q^{d,+(\epsilon)}$ , la topologie de  $d_Q$  coïncide donc avec  $\mathcal{O}$ . Notons  $\mathcal{O}'$  la topologie engendrée par les ouverts de la forme  $\square U$ ,  $U$  ouvert de  $X$ .  $\mathcal{O}'$  est plus fine que  $\mathcal{O}$ . Réciproquement, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , montrons que  $\square U$  est un ouvert de  $\mathcal{O}$ . Pour ceci, soit  $Q \in \square U$ , c'est-à-dire  $Q \subseteq U$ . Par le lemme 3.10.45,  $U$  est l'union de la famille dirigée des  $U^{d,-(\epsilon)}$ ,  $\epsilon > 0$ . Puisque  $Q$  est compact et inclus dans  $U$ , il existe un réel  $\epsilon > 0$  tel que  $Q \subseteq U^{d,-(\epsilon)}$ . Mais alors  $Q^{d,+(\epsilon)} \subseteq (U^{d,-(\epsilon)})^{d,+(\epsilon)} \subseteq U$  par le lemme 3.10.46. Pour tout  $Q' \in B_{Q,<\epsilon}^{d_Q} = \square Q^{d,+(\epsilon)}$ , on a donc  $Q' \subseteq U$  : donc  $B_{Q,<\epsilon}^{d_Q} \subseteq \square U$ . En utilisant le corollaire 3.10.5, on en déduit que  $\square U$  est ouvert dans la topologie  $\mathcal{O}$  de l'hémi-distance  $d_Q$ . Ceci étant vrai pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{O}'$  est moins fine que  $\mathcal{O}$ . Donc  $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ .

Lorsque  $X$  est bien filtrant et localement compact, on conclut car  $\mathcal{O}'$  est exactement la topologie de  $\mathcal{Q}(X)$  par le corollaire 3.3.6. □

**Définition 3.10.48 (Plongement isométrique)** *Soient  $X, Y$  deux espaces hémi-métriques, et  $i : X \rightarrow Y$  une fonction. On dit que  $i$  est un plongement isométrique de  $X$  dans  $Y$  si et seulement si, pour tous  $x, x' \in X$ ,  $d(i(x), i(x')) = d(x, x')$ .*

Lorsque  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles ordonnés, vus comme des espaces hémi-métriques via l'hémi-distance  $d_{\leq}$ ,  $i : X \rightarrow Y$  est un plongement isométrique si et seulement si  $i$  est un plongement d'ordre. On a d'autre part :

**Lemme 3.10.49** *Soit  $X, Y$  deux espaces hémi-métriques,  $X$  étant  $T_0$ . Tout plongement isométrique de  $X$  dans  $Y$  est un plongement topologique.*

*Démonstration.* Soit  $i$  un plongement isométrique de  $X$  dans  $Y$ . D'abord,  $i$  est 1-lipschitzienne, donc continue par le fait 3.10.12. Ensuite, si  $i(x) = i(x')$  alors  $d(i(x), i(x')) = 0$ , donc  $d(x, x') = 0$  ; de même,  $d(x', x) = 0$ . Comme  $X$  est  $T_0$ , ceci implique  $x = x'$ , donc  $i$  est injective. L'inverse  $i^{-1} : \mathfrak{S}(i) \rightarrow X$  est elle aussi 1-lipschitzienne, donc continue de  $\mathfrak{S}(i)$  muni de la topologie de l'hémi-distance de  $Y$  vers  $X$ . Or la topologie de l'hémi-distance de  $Y$  sur  $\mathfrak{S}(i)$  est exactement la topologie induite de  $\mathfrak{S}(i)$  par  $Y$ , donc  $i$  est un plongement topologique. □

**Proposition 3.10.50** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$  qui est  $T_0$ . Alors la fonction  $\eta_Q : X \rightarrow \mathcal{Q}(X)$ ,  $\mathcal{Q}(X)$  étant équipé de l'hémi-distance  $d_Q$  de Hausdorff-Smyth, qui à  $x$  associe  $\uparrow x$ , est un plongement isométrique.*

*Démonstration.* On a  $d_{\Omega}(\eta_{\Omega}(x), \eta_{\Omega}(x')) = \max_{x'_1 \in \uparrow x'} \min_{x_1 \in \uparrow x} d(x_1, x'_1) = \max_{x'_1 \in \uparrow x'} d(x, x'_1)$  puisque la fonction qui à  $x_1$  associe  $d(x_1, x'_1)$  est croissante : si  $x_1 \leq^d x_2$ , c'est-à-dire  $d(x_1, x_2) = 0$ , alors  $d(x_1, x'_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x'_1) = d(x_2, x'_1)$ . De même, la fonction qui à  $x'_1$  associe  $d(x, x'_1)$  est décroissante : si  $x'_1 \leq^d x'_2$ , alors  $d(x, x'_2) \leq d(x, x'_1) + d(x'_1, x'_2) = d(x, x'_1)$ , donc  $\max_{x'_1 \in \uparrow x'} d(x, x'_1) = d(x, x')$ .  $\square$

Passons à l'espace de Hoare  $\mathcal{H}_u(X)$  de  $X$ . Nous aurons besoin ici, comme dit plus haut, de demander que  $X$  soit totalement borné pour dire des choses intelligentes. La définition ressemble beaucoup à celle de  $d_{\Omega}$ .

**Définition 3.10.51** ( $d_{\mathcal{H}}$ ) *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . L'hémi-distance de Hausdorff-Hoare,  $d_{\mathcal{H}}$ , sur  $\mathcal{H}(X)$ , est définie par :*

$$d_{\mathcal{H}}(F, F') = \sup_{x \in F} \inf_{x' \in F'} d(x, x')$$

Il n'y a aucune raison qu'aucune des deux bornes, inférieure ou supérieure, soit atteinte.

**Lemme 3.10.52** *La fonction  $d_{\mathcal{H}}$  est une hémi-distance, de préordre de spécialisation l'inclusion  $\subseteq$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $F \subseteq F'$ , alors  $d_{\mathcal{H}}(F, F') = 0$ . Pour tout  $x \in F$ , il existe un  $x' \in F'$  tel que  $d(x, x') = 0$ , à savoir  $x' = x$ . Donc  $\inf_{x' \in F'} d(x, x') = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in D$ ,  $d_{\mathcal{H}}(F, F') = 0$ .

En particulier,  $d_{\mathcal{H}}(F, F) = 0$ . Montrons l'inégalité triangulaire. Soient  $F, F', F'' \in \mathcal{H}(X)$ , posons  $a = d_{\mathcal{H}}(F, F')$ ,  $a' = d_{\mathcal{H}}(F', F'')$ . Fixons  $\epsilon > 0$  arbitraire. Par définition de  $a$ , pour tout  $x \in F$ , il existe  $x' \in F'$  tel que  $d(x, x') < a + \epsilon/2$ . De même, pour chacun de ces  $x' \in F'$ , il existe un  $x'' \in F''$  tel que  $d(x', x'') < a' + \epsilon/2$ . Donc pour tout  $x \in F$ , il existe  $x'' \in F''$  tel que  $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') < a + a' + \epsilon$ . Ceci implique  $d_{\mathcal{H}}(F, F'') \leq a + a' + \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $d_{\mathcal{H}}(F, F'') \leq a + a' = d_{\mathcal{H}}(F, F') + d_{\mathcal{H}}(F', F'')$ .

Montrons finalement que le préordre de spécialisation de  $d_{\mathcal{H}}$  est  $\subseteq$ . Nous avons déjà démontré que  $F \subseteq F'$  impliquait  $d_{\mathcal{H}}(F, F') = 0$ . Supposons, réciproquement, que  $d_{\mathcal{H}}(F, F') = 0$ . Pour tout  $x \in F$ ,  $\inf_{x' \in F'} d(x, x') = 0$ , c'est-à-dire  $d(x, F') = 0$ , au sens de la définition 3.10.41. Ceci implique  $x \in cl(F') = F'$  par le lemme 3.10.42. Donc  $F \subseteq F'$ .  $\square$

**Proposition 3.10.53** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ . La topologie de  $d_{\mathcal{H}}$  est plus fine que celle de  $\mathcal{H}_u(X)$ .*

*Si  $X$  est totalement borné, alors la topologie de  $d_{\mathcal{H}}$  est exactement celle de  $\mathcal{H}_u(X)$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 3.4.17, la topologie de  $\mathcal{H}_u(X)$  est engendrée par les ensembles  $\diamond U$ ,  $U$  ouvert de  $X$ . Fixons un ouvert  $U$  de  $X$ , un élément  $F$  de  $\diamond U$ , et montrons qu'il existe un réel  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}} \subseteq \diamond U$ . Puisque  $F \in \diamond U$ , il existe un élément  $x$  dans  $F \cap U$ . Comme  $U$  est ouvert, il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{x, < \epsilon}^d \subseteq U$  par le corollaire 3.10.5. Pour tout  $F' \in B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$ , on a  $d_{\mathcal{H}}(F, F') < \epsilon$ , en particulier  $\inf_{x' \in F'} d(x, x') \leq d_{\mathcal{H}}(F, F') < \epsilon$ . Donc il existe

$x' \in F'$  tel que  $d(x, x') < \epsilon$ . Ceci signifie que  $x' \in B_{x, < \epsilon}^d$ , donc  $x' \in U$  puisque  $B_{x, < \epsilon}^d \subseteq U$ . Puisque  $x' \in F'$ ,  $F'$  intersecte  $U$ , donc  $F' \in \diamond U$ .  $F'$  étant arbitraire,  $B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$   $\subseteq \diamond U$ . On en déduit que  $\diamond U$  est ouvert dans la topologie de  $d_{\mathcal{H}}$ , par le corollaire 3.10.5.

Pour la réciproque, supposons  $X$  totalement borné, fixons  $F' \in B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$ , et montrons qu'il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}_u(X)$  tel que  $F' \in \mathcal{U} \subseteq B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$ . Lorsque ceci sera fait, on pourra en déduire que  $B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$  sera l'union de ces ouverts  $\mathcal{U}$  lorsque  $F'$  varie, et sera donc un ouvert de  $\mathcal{H}_u(X)$ . On en conclura que la topologie de  $\mathcal{H}_u(X)$  est plus fine que celle de  $d_{\mathcal{H}}$ .

Posons  $a = d_{\mathcal{H}}(F, F') < \epsilon$ , et  $\eta = (\epsilon - a)/4$ . Puisque  $X$  est totalement borné, il existe un ensemble fini  $E$  tel que tout élément de  $X$  est à une distance  $d^{sym}$  strictement inférieure à  $\eta$  d'un élément de  $E$ . Posons  $\mathcal{U} = \bigcap_{x \in F^{d, +(\eta)} \cap E} \diamond B_{x, < a + 2\eta}^d$ . On note qu'il s'agit d'une intersection finie d'ouverts de la forme  $\diamond U$ , qui est donc ouvert dans  $\mathcal{H}_u(X)$ . C'est l'endroit où nous avons besoin du fait que  $X$  soit totalement borné.

Montrons d'abord que  $F' \in \mathcal{U}$ . Pour tout  $x \in F^{d, +(\eta)}$ , par définition il existe  $z \in F$  tel que  $d(x, z) \leq d^{sym}(x, z) < \eta$ . Comme  $a = d_{\mathcal{H}}(F, F')$ ,  $\inf_{y \in F'} d(z, y) \leq a$ , donc il existe  $y \in F'$  tel que  $d(z, y) < a + \eta$ . On en déduit  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < a + 2\eta$ , donc  $y \in B_{x, < a + 2\eta}^d$ . Comme  $y \in F'$ ,  $F' \in \diamond B_{x, < a + 2\eta}^d$ . Comme  $x$  est arbitraire,  $F' \in \mathcal{U}$ .

Montrons ensuite que  $\mathcal{U} \subseteq B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$ . Soit  $F'' \in \mathcal{U}$  quelconque. Pour tout  $x \in F$ , il existe un élément  $y$  de  $E$  tel que  $d^{sym}(x, y) < \eta$ . Puisque  $x \in F$ , on en déduit que  $y \in F^{d, +(\eta)}$ , donc  $y \in F^{d, +(\eta)} \cap E$ . Utilisons maintenant le fait que  $F'' \in \mathcal{U}$ , en particulier  $F'' \in \diamond B_{y, < a + 2\eta}^d$ . Donc il existe un élément  $z$  de  $F''$  tel que  $d(y, z) < a + 2\eta$ . Alors  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < a + 3\eta = \epsilon - \eta$ . En particulier,  $\inf_{z \in F''} d(x, z) \leq \epsilon - \eta$ . Comme  $x \in F$  est arbitraire,  $d_{\mathcal{H}}(F, F'') = \sup_{x \in F} \inf_{z \in F''} d(x, z) \leq \epsilon - \eta < \epsilon$ . Donc  $F'' \in B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$ . Comme  $F''$  est arbitraire,  $\mathcal{U} \subseteq B_{F, < \epsilon}^{d_{\mathcal{H}}}$ .  $\square$

**Proposition 3.10.54** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$  qui est  $T_0$ . Alors la fonction  $\eta_{\mathcal{H}} : X \rightarrow \mathcal{H}(X)$ ,  $\mathcal{H}(X)$  étant équipé de l'hémi-distance  $d_{\mathcal{H}}$  de Hausdorff-Hoare, qui à  $x$  associe  $\downarrow x$  est un plongement isométrique.*

*Démonstration.* Pour tout  $x_1$ , la fonction qui à  $x'$  associe  $d(x_1, x')$  est décroissante : si  $x'_1 \leq x'_2$ , on a  $d(x'_1, x'_2) = 0$ , donc  $d(x_1, x'_2) \leq d(x_1, x'_1) + d(x'_1, x'_2) = d(x_1, x'_1)$ . Donc  $\inf_{x'_1 \in \downarrow x'} d(x_1, x'_1) = d(x_1, x')$ . De même, la fonction qui à  $x_1$  associe  $d(x_1, x')$  est croissante, donc  $d_{\mathcal{H}}(\downarrow x, \downarrow x') = \sup_{x_1 \in \downarrow x} \inf_{x'_1 \in \downarrow x'} d(x_1, x'_1) = \sup_{x_1 \in \downarrow x} d(x_1, x') = d(x, x')$ .  $\square$

Passons aux espaces de lentilles et de  $\mathbf{A}$ -valuations continues. L'hémi-distance est ici celle de Hausdorff.

**Définition 3.10.55** ( $d_{\mathcal{P}\ell}$ ) *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . L'hémi-distance de Hausdorff,  $d_{\mathcal{P}\ell}$ , sur  $\mathcal{P}\ell(X)$ , est définie par :*

$$d_{\mathcal{P}\ell}(L, L') = \max\left(\sup_{x' \in L'} \inf_{x \in L} d(x, x'), \sup_{x \in L} \inf_{x' \in L'} d(x, x')\right)$$

**Lemme 3.10.56** *Pour toutes lentilles  $L$  et  $L'$ , on a :*

$$d_{\mathcal{P}\ell}(L, L') = \max(d_{\Omega}(\uparrow L, \uparrow L'), d_{\mathcal{H}}(cl(L), cl(L'))) \quad (3.5)$$

*La fonction  $d_{\mathcal{P}\ell}$  est une hémi-distance, de préordre de spécialisation  $\sqsubseteq_{EM}$ .*

*Démonstration.* Par l'inégalité triangulaire, la fonction qui à  $x$  associe  $d(x, x')$ , à  $x'$  fixé, est 1-lipschitzienne, donc continue par le fait 3.10.12, donc croissante. De même, la fonction qui à  $x'$  associe  $-d(x, x')$ , à  $x$  fixé, est 1-lipschitzienne, donc continue et croissante.

Pour tout  $x'$ , la fonction qui à  $x$  associe  $d(x, x')$  étant croissante, on obtient  $\inf_{x \in \uparrow L} d(x, x') = \inf_{x \in L} d(x, x')$ . De façon détaillée, l'inégalité  $\leq$  est claire, puisque  $\uparrow L \supseteq L$ . Réciproquement, pour tout  $x \in \uparrow L$ , il existe  $x_1 \in L$  tel que  $x_1 \leq x$ , et alors  $d(x_1, x') \leq d(x, x')$ ; donc  $\inf_{x_1 \in L} d(x_1, x') \leq \inf_{x \in \uparrow L} d(x, x')$ . La fonction qui à  $x'$  associe  $\inf_{x \in \uparrow L} d(x, x') = \inf_{x \in L} d(x, x')$  est, elle, décroissante, donc par un argument similaire  $\sup_{x' \in \uparrow L'} \inf_{x \in \uparrow L} d(x, x') = \sup_{x' \in L'} \inf_{x \in \uparrow L} d(x, x') = \sup_{x' \in L'} \inf_{x \in L} d(x, x')$ , c'est-à-dire  $\sup_{x' \in L'} \inf_{x \in L} d(x, x') = d_{\mathcal{Q}}(\uparrow L, \uparrow L')$ .

Pour tout  $x$ , montrons que  $\inf_{x' \in L'} d(x, x') = \inf_{x' \in cl(L')} d(x, x')$ . Pour tout réel  $a$ ,  $\sup_{x' \in cl(L')} -d(x, x') > a$  si et seulement s'il existe  $x' \in cl(L')$  tel que  $-d(x, x') > a$ , si et seulement si  $cl(L')$  intersecte l'image réciproque  $U_a$  de  $]a, +\infty[$  par la fonction qui à  $x'$  associe  $-d(x, x')$ . Or cette fonction est continue, donc  $U_a$  est ouvert. Il s'ensuit que  $U_a$  intersecte  $cl(L')$  si et seulement si  $U_a$  intersecte  $L'$ . Par un raisonnement identique,  $U_a$  intersecte  $L'$  si et seulement si  $\sup_{x' \in L'} -d(x, x') > a$ . Nous avons démontré que, pour tout  $a$ ,  $\sup_{x' \in L'} -d(x, x') > a$  si et seulement si  $\sup_{x' \in cl(L')} -d(x, x') > a$ . Donc  $\sup_{x' \in L'} -d(x, x') = \sup_{x' \in cl(L')} -d(x, x')$ , d'où  $\inf_{x' \in L'} d(x, x') = \inf_{x' \in cl(L')} d(x, x')$ . Soit  $f$  la fonction qui à  $x$  associe  $\inf_{x' \in L'} d(x, x')$ . La fonction  $f$  est 1-lipschitzienne de nouveau, donc continue. Pour tout réel  $b$ ,  $\sup_{x \in cl(L)} f(x) > b$  si et seulement si  $cl(L)$  intersecte l'ouvert  $f^{-1}]b, +\infty[$ , si et seulement si  $L$  intersecte  $f^{-1}]b, +\infty[$ , si et seulement si  $\sup_{x \in L} f(x) > b$ . Donc  $\sup_{x \in cl(L)} f(x) = \sup_{x \in L} f(x)$ , c'est-à-dire  $d_{\mathcal{H}}(cl(L), cl(L')) = \sup_{x \in L} \inf_{x' \in L'} d(x, x')$ .

On en déduit l'égalité (3.5). Comme  $d_{\mathcal{Q}}$  et  $d_{\mathcal{H}}$  sont des hémi-distances (lemmes 3.10.39 et 3.10.52), c'est aussi le cas de  $d_{\mathcal{P}\ell}$ . De plus,  $d_{\mathcal{P}\ell}(L, L') = 0$  si et seulement si  $d_{\mathcal{Q}}(\uparrow L, \uparrow L') = 0$  et  $d_{\mathcal{H}}(cl(L), cl(L')) = 0$  par (3.5), ce qui est équivalent à  $\uparrow L \supseteq \uparrow L'$  et  $cl(L) \subseteq cl(L')$  par les lemmes 3.10.39 et 3.10.52. Ceci est équivalent à  $L \sqsubseteq_{EM} L'$ .  $\square$

**Proposition 3.10.57** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ . La topologie de  $d_{\mathcal{P}\ell}$  est plus fine que la topologie de Vietoris de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ .*

*Si  $X$  est totalement borné, alors la topologie de Vietoris de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est exactement celle de l'hémi-distance  $d_{\mathcal{P}\ell}$ .*

*Démonstration.* Soit  $i$  la fonction qui à  $L \in \mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  associe  $(\uparrow L, cl(L)) \in \mathcal{Q}(X) \times \mathcal{H}_u(X)$ . Notons que par le lemme 3.5.2,  $i$  est une bijection de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  sur le sous-espace de  $\mathcal{Q}(X) \times \mathcal{H}_u(X)$  formé des couples  $(Q, F)$  tels que  $Q \cap F \neq \emptyset$ . Notons temporairement  $\mathcal{Q}'(X)$  l'espace  $\mathcal{Q}(X)$  muni de la topologie engendrée par les  $\square U$ ,  $U$  ouvert de  $X$ . On remarque d'abord que  $i$  est un plongement de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  dans  $\mathcal{Q}'(X) \times \mathcal{H}_u(X)$  :  $i$  est continue car l'image réciproque de l'ouvert  $\square U \times \diamond V$  de  $\mathcal{Q}'(X) \times \mathcal{H}_u(X)$  est l'ouvert  $\square U \cap \diamond V$  de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ ; comme l'image de l'ouvert  $\square U$  de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est l'intersection de l'image de  $i$  avec l'ouvert  $\square U \times \mathcal{H}_u(X)$  de  $\mathcal{Q}'(X) \times \mathcal{H}_u(X)$ , et l'image de l'ouvert  $\diamond V$  de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  est l'intersection de l'image de  $i$  avec l'ouvert  $\mathcal{Q}'(X) \times \diamond V$  de  $\mathcal{Q}'(X) \times \mathcal{H}_u(X)$ , donc  $i^{-1}$  est continue de  $\mathfrak{S}(i)$  vers  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ .

De même,  $i$  est un plongement isométrique de  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ , équipé de l'hémi-distance  $d_{\mathcal{P}\ell}$ , dans le produit de  $\mathcal{Q}'(X)$  (équipé de  $d_{\mathcal{Q}}$ ) et de  $\mathcal{H}_u(X)$  (équipé de  $d_{\mathcal{H}}$ ) : c'est le lemme 3.10.56, en utilisant la définition d'hémi-distance produit du lemme 3.10.28. Par le lemme 3.10.49,  $i$  est donc aussi un plongement topologique.

À homéomorphisme près, on peut donc voir  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$  comme un sous-espace topologique de  $\mathcal{Q}'(X) \times \mathcal{H}_u(X)$ , que ce soit pour leurs topologies naturelles ou pour leurs topologies hémi-métriques. Or, par la proposition 3.10.47 la topologie de  $\mathcal{Q}'(X)$  est celle de  $d_{\Omega}$ , et par la proposition 3.10.53 la topologie de  $\mathcal{H}_u(X)$  est moins fine que celle de  $d_{\mathcal{H}}$ , et coïncide avec elle si  $X$  est totalement borné. Par le lemme 3.10.28, la topologie de  $\mathcal{Q}'(X) \times \mathcal{H}_u(X)$  est donc plus fine que celle du produit des deux espaces vus comme espaces hémi-métriques, et coïncide avec elle si  $X$  est totalement bornée. Il en est donc de même du sous-espace (à homéomorphisme près)  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ .  $\square$

▷ **Exercice 3.7**

Au vu de la similarité entre  $\mathcal{P}\ell(X)$  et  $\mathcal{P}'(X)$ , définissons l'hémi-distance de Hausdorff  $d_{\mathcal{P}}$  sur  $\mathcal{P}'(X)$  par :

$$d_{\mathcal{P}}((Q, F), (Q', F')) = \max(d_{\Omega}(Q, Q'), d_{\mathcal{H}}(F, F'))$$

Montrer que la topologie de  $d_{\mathcal{P}}$  est plus fine que la topologie de  $\mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(X)$  (voir la proposition 3.6.3), et coïncide avec elle lorsque  $X$  est totalement borné.

On peut définir une notion de distance sur  $X \times X$  de sorte que la fonction distance  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  soit continue, et en fait 1-lipschitzienne. Disons cependant tout de suite que la topologie nécessaire sur  $X \times X$  ne sera pas la topologie produit (voir le lemme 3.10.60).

**Définition 3.10.58** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . La fonction  $d^2$  sur  $X \times X$  est définie par :

$$d^2((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y', y)$$

**Lemme 3.10.59** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . La fonction  $d^2$  définit une hémi-distance sur  $X \times X$ .

On notera  $X^{(2)}$  l'espace  $X \times X$  muni de l'hémi-distance  $d^2$ . La fonction  $d : X^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est alors 1-lipschitzienne.

*Démonstration.* D'abord, si  $(x, y) = (x', y')$ , c'est que  $x = x'$  et  $y = y'$ , donc  $d^2((x, y), (x', y')) = 0$ . Ensuite, on a  $d^2((x, y), (x'', y'')) = d(x, x'') + d(y'', y) \leq d(x, x') + d(x', x'') + d(y'', y') + d(y', y) = d^2((x, y), (x', y')) + d^2((x', y'), (x'', y''))$ , donc  $d^2$  est une hémi-distance. Pour vérifier que  $d$  est 1-lipschitzienne, on constate que  $d(x, y) - d(x', y') \leq d^2((x, y), (x', y'))$ , puisque  $d(x', y') + d^2((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(x', y') + d(x', y') \geq d(x', y')$ , en utilisant deux fois l'inégalité triangulaire.  $\square$

**Lemme 3.10.60** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . La topologie de  $X^{(2)}$  (muni de l'hémi-distance  $d^2$ ) est exactement la topologie du produit topologique  $X \times X^{op}$ . Son préordre de spécialisation  $\leq^{d^2}$  est  $\leq^d \times \geq^d$ .

*Démonstration.* La boule ouverte  $B^{d^2}((x, y), \epsilon)$  est l'ensemble des points  $(x', y')$  tels que  $d(x, x') + d(y', y) < \epsilon$ . Ceci est l'union, lorsque  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sont des réels positifs de somme  $\epsilon$ , des ensembles  $\{(x', y') \in X \times X \mid d(x, x') < \epsilon_1, d(y', y) < \epsilon_2\} = (B_{x, < \epsilon_1}^d \times X) \cap (X \times B_{y, < \epsilon_2}^{d^{op}})$ , lesquels sont des ouverts de  $X \times X^{op}$ . Donc  $B^{d^2}((x, y), \epsilon)$  est un ouvert de  $X \times X^{op}$ , ce qui implique que la topologie de  $d^2$  est moins fine que celle de  $X \times X^{op}$ .

Réciproquement, considérons la première projection  $\pi_1 : X^{(2)} \rightarrow X$ . Il est facile de voir que  $\pi_1$  est 1-lipschitzienne :  $d(x, x') \leq d^2((x, y), (x', y'))$ . De même, la seconde projection  $\pi_2 : X^{(2)} \rightarrow X^{op}$  est 1-lipschitzienne, car  $d^{op}(y, y') \leq d^2((x, y), (x', y'))$ . Les deux projections sont donc en particulier continues, par le fait 3.10.12, ce qui implique que la fonction identité  $\text{id}$  de  $X^{(2)}$  vers  $X \times X^{op}$ , qui à  $(x, y)$  associe  $(\pi_1(x, y), \pi_2(x, y))$ , est elle aussi continue. Pour tout ouvert  $U$  de  $X \times X^{op}$ ,  $\text{id}^{-1}(U)$  est donc un ouvert de  $X^{(2)}$ . Mais  $\text{id}^{-1}(U) = U$ . Donc la topologie de  $X^{(2)}$  est aussi plus fine que celle de  $X \times X^{op}$ .

On conclut que  $\leq^{d^2}$  est  $\leq^d \times \geq^d$ , en utilisant le lemme 3.10.22.  $\square$

### 3.11 Combinatoire

Voici quelques résultats classiques, que nous utiliserons plusieurs fois dans la suite.

**Lemme 3.11.1** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , et  $I_0 \subseteq \{1, \dots, n\}$ . On a

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } I_0 = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* Le résultat est clair si  $I_0 = \emptyset$ . Sinon, soit  $i_0 \in I_0$ . On peut découper la somme en une somme sur les  $I$  qui ne contiennent pas  $i_0$ , et une somme sur les  $I \cup \{i_0\}$ , où  $I$  ne contient pas  $i_0$  :

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset, I \subseteq I_0} (-1)^{|I|+1} = \sum_{\substack{I \subseteq I_0 \setminus \{i_0\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} + \sum_{I \subseteq I_0 \setminus \{i_0\}} (-1)^{|I|+2} = 1$$

puisque tous les termes s'annulent deux à deux, sauf le terme  $I = \emptyset$  de la deuxième somme.  $\square$

On en déduit :

**Lemme 3.11.2** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , et  $I_0 \subseteq \{1, \dots, n\}$ . On a

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \cap I_0 \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } I_0 = \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $J_0 = \{1, \dots, n\} \setminus I_0$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \cap I_0 \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \not\subseteq J_0}} (-1)^{|I|+1} \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} - \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \subseteq J_0}} (-1)^{|I|+1} \\ &= 1 - \begin{cases} 0 & \text{si } J_0 = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

par le lemme 3.11.1. D'où le résultat.  $\square$

Nous aurons besoin du résultat combinatoire suivant pour démontrer la proposition 5.4.7. Fixons deux entiers naturels  $n, m$ . Pour tout  $K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ , soit  $\pi_1 K = \{i \mid \exists j \cdot (i, j) \in K\}$ , et  $\pi_2 K = \{j \mid \exists i \cdot (i, j) \in K\}$ .

**Lemme 3.11.3** *Pour tous sous-ensembles non vides  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  et  $J$  de  $\{1, \dots, m\}$ ,*

$$\sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K = I, \pi_2 K = J}} (-1)^{|K|+1} = (-1)^{|I|+|J|} \quad (3.6)$$

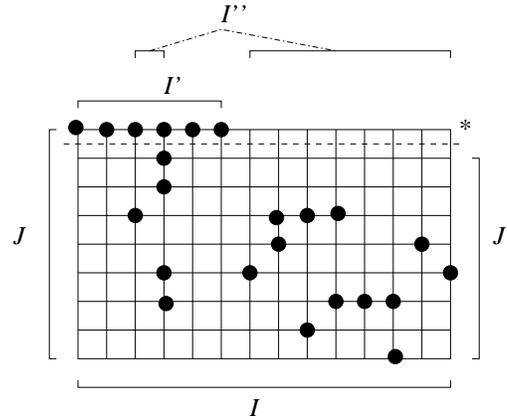
*Démonstration.* Nous montrons ceci par récurrence sur le cardinal  $|J| \geq 1$  de  $J$ . Si  $|J| = 1$ , il existe un unique  $K$  tel que  $\pi_1 K = I$  et  $\pi_2 K = J$ , à savoir  $I \times J$ . On a alors  $|K| = |I|$ , et le résultat est évident. Si  $|J| > 1$ , on peut écrire  $J$  sous forme de l'union disjointe d'un singleton  $\{*\}$  et de  $J' = J \setminus \{*\}$ . Se donner  $K$  tel que  $\pi_1 K = I$  et  $\pi_2 K = J$  est équivalent à se donner l'ensemble  $I'$  des indices  $i$  tels que  $(i, *)$  soit dans  $K$ , qui est n'importe quel sous-ensemble non vide  $\{1, \dots, n\}$ , l'ensemble  $I''$  des indices  $i$  tels qu'il existe  $j \in J'$  tel que  $(i, j) \in K$ , qui est n'importe quel sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $I' \cup I'' = I$ , et enfin un sous-ensemble  $K'$  de  $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$  tel que  $\pi_1 K' = I''$  et  $\pi_2 K' = J'$ , à savoir  $K' = \{(i, j) \in K \mid j \neq *\}$ . Voir la figure 3.2, où  $K$  est illustré sous forme de l'ensemble des points noirs,  $K'$  est l'ensemble des points noirs au-dessous de la ligne pointillée (juste au-dessous de la ligne  $j = *$ ).

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K = I, \pi_2 K = J}} (-1)^{|K|+1} &= \sum_{\substack{I' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I' \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I'' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I' \cup I'' = I}} \sum_{\substack{K' \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K' = I'', \pi_2 K' = J'}} (-1)^{|I'|+|K'|+1} \\ &= \sum_{\substack{I' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I' \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I'' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I' \cup I'' = I}} (-1)^{|I'|} \sum_{\substack{K' \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K' = I'', \pi_2 K' = J'}} (-1)^{|K'|+1} \end{aligned}$$

Si  $I'' = \emptyset$ , la somme  $\sum_{\substack{K' \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K' = I'', \pi_2 K' = J'}} (-1)^{|K'|+1}$  vaut 0. Sinon, elle vaut  $(-1)^{|I''|+|J'|}$ , par hypothèse de récurrence. Donc

$$\sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K = I, \pi_2 K = J}} (-1)^{|K|+1} = \sum_{\substack{I' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I' \neq \emptyset}} \sum_{\substack{I'' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I' \cup I'' = I}} (-1)^{|I'|+|I''|+|J'|}$$

FIG. 3.2 – Décomposition de  $K$  tel que  $\pi_1 K = I$ ,  $\pi_2 K = J$ 

Or, lorsque  $I' \neq \emptyset$ , on peut appairer les  $I''$  tels que  $I' \cup I'' = I$  deux par deux : fixons  $i' \in I'$ , et considérons les  $I''$  qui contiennent  $i'$  et ceux qui ne le contiennent pas. Donc la somme sur tous les  $I'' \subseteq \{1, \dots, n\}$  avec  $I' \cup I'' = I$  (y compris l'ensemble vide) de  $(-1)^{|I'|+|I''|+|J'|}$  est nulle. Si  $I' \neq I$ , l'ensemble vide ne peut pas être l'un de ces  $I''$ , donc  $\sum_{\substack{I'' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I'' \neq \emptyset, I' \cup I'' = I}} (-1)^{|I'|+|I''|+|J'|}$  est nulle elle aussi. Si  $I' = I$ ,  $\sum_{\substack{I'' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I'' \neq \emptyset, I' \cup I'' = I}} (-1)^{|I'|+|I''|+|J'|}$  vaut  $-(-1)^{|I'|+|J'|} = (-1)^{|I|+|J|+1}$ .  
 Donc  $\sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K = I, \pi_2 K = J}} (-1)^{|K|+1} = (-1)^{|I|+|J|+1} = (-1)^{|I|+|J|}$ .  $\square$

### 3.12 Convexité

Nous étudierons dans la suite divers cônes ordonnés ou topologiques. Outre  $\mathbb{R}^+$  et  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , nous considérerons notamment le cône  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  des fonctions continues d'un espace topologique  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , ou celui  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_L$  des fonctions lipschitziennes d'un espace héli-métrique  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , ou encore l'espace  $\mathbf{V}(X)$  des valuations continues sur  $X$ . L'espace  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1$  des fonctions 1-lipschitziennes de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , ou l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des probabilités continues sur  $X$ . En revanche, ce sont des sous-espaces convexes des cônes  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_L$  ou  $\mathbf{V}(X)$  respectivement.

**Définition 3.12.1 (Convexe)** Soit  $C$  un cône. Une partie  $Z$  de  $C$  est dite convexe si et seulement si, pour tous  $a, b \in Z$ , pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b$  est dans  $Z$ .

Nous établissons maintenant un certain nombre de résultats de séparation, fondés sur le théorème du sandwich de Roth. Ces résultats sont des variantes mineures de résultats de Tix et al. (2005). Par souci de complétude, nous commençons par en redonner la démonstration, telle que donnée par Tix et al. (2005, théorème 3.1).

**Théorème 3.12.2 (Sandwich de Roth)** Soit  $C$  un cône ordonné. Soit  $p : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  une fonction sous-linéaire,  $q : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  une fonction sur-linéaire, et supposons que pour tous  $a, b \in C$  tels

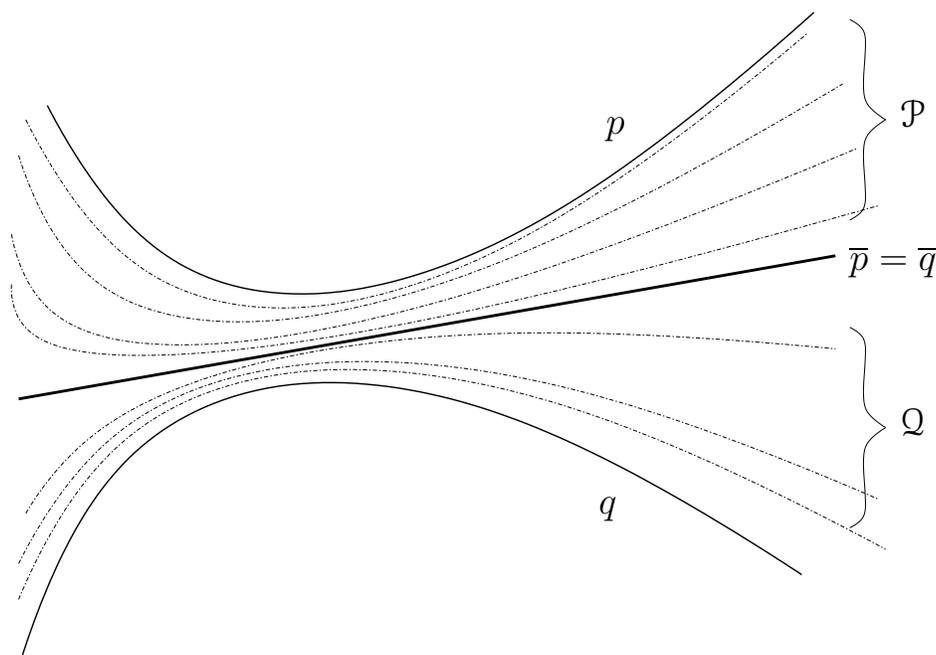


FIG. 3.3 – La construction du sandwich de Roth

que  $a \leq b$  on ait  $q(a) \leq p(b)$  (par exemple si  $q \leq p$  et  $q$  ou  $p$  est croissante). Alors il existe une fonction linéaire croissante  $f$  de  $C$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que  $q \leq f \leq p$ .

*Démonstration.* D’abord, on peut supposer que  $p$  et  $q$  sont en fait toutes les deux croissantes, et  $q \leq p$ , sinon on remplace  $p$  par la fonction qui à tout  $x$  associe  $\inf_{b/x \leq b} p(b)$ , et  $q$  par la fonction qui à tout  $x$  associe  $\sup_{a/a \leq x} q(a)$ . Soit  $P$  l’ensemble des fonctions sous-linéaires croissantes  $f$  de  $C$  dans  $\mathbb{R}^+$  telles que  $q \leq f \leq p$ .

Ordonnons  $P$  par l’ordre usuel :  $f \leq f'$  si et seulement si  $f(a) \leq f'(a)$  pour tout  $a \in C$ . Par le principe de maximalité de Hausdorff, il existe un ensemble totalement ordonné maximal  $\mathcal{P}$  de  $P$ . On pourra consulter la figure 3.3 :  $p$  y est représentée par une courbe convexe au dessus de la courbe concave représentant  $q$ , et  $\mathcal{P}$  est un ensemble maximal de courbes convexes en-dessous de  $p$ . L’idée de la démonstration va être de prendre la plus petite de ces courbes,  $\bar{p}$ , de prendre la plus grande des courbes concaves entre  $q$  et  $\bar{p}$ , et de montrer qu’elles sont égales ;  $\bar{p} = \bar{q}$  sera alors linéaire, et sera la fonction  $f$  désirée.

Posons  $\bar{p}(x) = \inf_{f \in \mathcal{P}} f(x)$ . On vérifie que  $\bar{p}$  est croissante, et sous-linéaire, en utilisant le fait que  $\mathcal{P}$  est totalement ordonné pour établir  $\bar{p}(a + b) \leq \bar{p}(a) + \bar{p}(b)$ . Comme  $\mathcal{P}$  est maximal,  $\bar{p}$  est nécessairement dans  $\mathcal{P}$ , donc en est l’élément le plus petit. En particulier,  $\bar{p}$  est minimale, au sens où non seulement  $q \leq \bar{p} \leq p$ , mais il n’y a aucune fonction croissante sous-linéaire  $p' \leq \bar{p}$  telle que  $q \leq p' \leq p$ , sauf à prendre  $p' = \bar{p}$ . De façon symétrique (mais en remplaçant  $p$  par  $\bar{p}$ , et en remplaçant  $\mathcal{P}$  par un ensemble totalement ordonné maximal  $\mathcal{Q}$  de fonctions sur-linéaires  $f$  telles que  $q \leq f \leq \bar{p}$ ), on fabrique une fonction croissante sur-linéaire (maximale)  $\bar{q} = \sup_{f \in \mathcal{Q}} f(x)$  telle que  $q \leq \bar{q} \leq \bar{p}$ , et telle que toute fonction croissante sur-linéaire  $q' \geq \bar{q}$  telle que  $q \leq q' \leq \bar{p}$  est telle que  $q' = \bar{q}$ .

Considérons  $C' = \{a \in C \mid \bar{p}(a) \neq +\infty\}$ .  $C'$  est encore un cône ordonné, puisque  $\bar{p}$  est sous-linéaire. De plus,  $C'$  est clos par le bas dans  $C$ , puisque  $\bar{p}$  est croissante. Montrons que  $\bar{q}$  et  $\bar{p}$  coïncident.

Posons, pour tout  $x \in C$ ,  $q'(x) = \sup_{\substack{b \in C', c \in C \\ c \leq x+b}} \bar{q}(c) - \bar{p}(b)$ . (Ceci a un sens car  $\bar{p}(b) \neq +\infty$ ,  $b$  étant dans  $C'$ .) Le cas  $c = x, b = 0$  montre que  $q' \geq \bar{q}$ . De plus,  $q'$  est encore sur-linéaire. Comme  $\bar{q} \geq q$ , on a aussi  $q \leq q'$ . De plus,  $q' \leq \bar{p}$ , car pour tous  $b \in C', c \in C$  tels que  $c \leq x+b$ ,  $\bar{q}(c) \leq \bar{p}(b) + \bar{p}(x)$ , en utilisant  $\bar{q} \leq \bar{p}$  et le fait que  $\bar{p}$  est sous-linéaire. Par la propriété de maximalité de  $\bar{q}$ ,  $q' = \bar{q}$ .

Soit maintenant  $a$  un élément quelconque de  $C$ . Posons  $p_a(x) = \inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^+, d \in C' \\ x \leq d+\lambda a}} \bar{p}(d) + \lambda q'(a)$ , pour tout  $x \in C$ . On a  $p_a \leq \bar{p}$  (si  $x \in C'$ , prendre  $d = x$  et  $\lambda = 0$ ; sinon,  $p_a(x) \leq +\infty = \bar{p}(x)$ ), et  $p_a$  est encore sous-linéaire. De plus,  $p_a \leq p$  puisque  $\bar{p} \leq p$ . D'autre part,  $q \leq p_a$ . (Ceci revient à établir que  $q(x) \leq \bar{p}(d) + \lambda q'(a)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^+, d \in C', x \leq d + \lambda a$ . C'est évident lorsque  $\lambda = 0$ , puisqu'alors  $x \leq d$ ,  $q$  est croissante et  $q \leq \bar{p}$ . Sinon, posons  $b = 1/\lambda \cdot d$ ,  $c = 1/\lambda \cdot x$ . On a  $c \leq a + b$ , donc par définition de  $q'$ ,  $q'(a) \geq \bar{q}(c) - \bar{p}(b)$ . On en déduit que  $\bar{p}(d) + \lambda q'(a) \geq \bar{p}(d) + \bar{q}(x) - \bar{p}(d) = \bar{q}(x) \geq q(x)$  — le fait que  $d \in C'$  est crucial ici pour pouvoir éliminer les deux termes  $\bar{p}(d)$  de la somme. Dans tous les cas,  $q(x) \leq \bar{p}(d) + \lambda q'(a)$ , donc  $q(x) \leq p_a(x)$ .) Donc  $q \leq p_a \leq p$ . Par la propriété de minimalité de  $\bar{p}$ ,  $p_a = \bar{p}$ .

Or en posant  $x = a, d = 0, \lambda = 1$  dans la définition de  $p_a$ , on obtient  $\bar{p}(a) = p_a(a) \leq q'(a) = \bar{q}(a)$ . Comme  $\bar{q} \leq \bar{p}$  par ailleurs,  $\bar{p}(a) = \bar{q}(a)$ . Comme  $a$  est un élément arbitraire de  $C$ ,  $\bar{p} = \bar{q}$  et est une fonction croissante, linéaire  $f$  telle que  $q \leq f \leq p$ .  $\square$

Une première conséquence de ce résultat, analogue du théorème de séparation dans les espaces vectoriels normés, est que l'on peut séparer les clos par le bas des clos par le haut dans n'importe quel cône  $C$ , et même dans n'importe quelle partie  $Z$  d'un cône  $C$ .

**Lemme 3.12.3** *Soit  $Z$  une partie quelconque d'un cône ordonné  $C$ ,  $U$  une partie convexe close par le haut de  $Z$ ,  $F$  une partie convexe de  $Z$ , et supposons  $U$  et  $F$  non vides et disjointes. Alors il existe une fonction linéaire croissante  $f : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $f(x) \leq 1$  pour tout  $x \in F$ , et  $f(y) \geq 1$  pour tout  $y \in U$ .*

*Démonstration.* Considérons la clôture par le bas  $\downarrow F$  de  $F$  dans  $C$ , et la clôture par le haut  $\uparrow U$  de  $U$  dans  $C$ . Alors  $\uparrow U$  et  $\downarrow F$  sont disjointes, sinon il existerait  $z \in C, x \in F, y \in U$  tels que  $y \leq z \leq x$ , ce qui impliquerait que  $x$  serait dans  $U$ .

Soit  $q(x) = \sup_{\lambda > 0 / \lambda \cdot x \in \uparrow U} 1/\lambda$ , la borne supérieure étant prise égale à 0 si aucun  $\lambda > 0$  n'existe tel que  $\lambda \cdot x \in \uparrow U$ . D'abord,  $q(0) = 0$ . En effet, il n'existe aucun  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda \cdot 0 \in \uparrow U$ , sinon 0 appartiendrait à  $\uparrow U$ , donc à  $U$ . Comme tout élément de  $Z$  est supérieur ou égal à 0, on aurait  $U = Z$ , ce qui contredit le fait que  $F$  soit non vide et disjoint de  $U$ . Ensuite, pour tout  $a > 0$ ,  $q(a \cdot x) = \sup_{\lambda > 0 / \lambda \cdot (a \cdot x) \in \uparrow U} 1/\lambda = \sup_{\lambda' > 0 / \lambda' \cdot x \in \uparrow U} 1/(\lambda'/a)$  (en prenant  $\lambda' = \lambda a$ ) =  $aq(x)$ . Donc  $q$  est positivement homogène. Montrons que  $q$  est sur-additive. On observe d'abord que  $\uparrow U$  est convexe : si  $a, b \in \uparrow U$ , alors il existe  $a', b' \in U$  tels que  $a' \leq a$  et  $b' \leq b$ ; pour tout  $r \in [0, 1]$ ,  $r \cdot a' + (1-r) \cdot b' \in U$  puisque  $U$  est convexe, et  $r \cdot a' + (1-r) \cdot b' \leq r \cdot a + (1-r) \cdot b$  puisque

l'addition et la multiplication scalaire sont croissantes. Soient  $x, x' \in C$ . Alors :

$$q(x) + q(x') = \sup_{\substack{\lambda, \lambda' > 0 \\ \lambda \cdot x \in \uparrow U \\ \lambda' \cdot x' \in \uparrow U}} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) \leq \sup_{\substack{\lambda, \lambda' > 0 \\ \lambda' / (\lambda + \lambda') \cdot (\lambda \cdot x) + \lambda / (\lambda + \lambda') \cdot (\lambda' \cdot x') \in \uparrow U}} \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda \lambda'}$$

puisque  $\uparrow U$  est convexe. Donc  $q(x) + q(x') \leq \sup_{\lambda \lambda' / (\lambda + \lambda') \cdot (x + x') \in \uparrow U} (\lambda + \lambda') / (\lambda \lambda') \leq q(x + x')$ .

Donc  $q$  est sur-linéaire.

Posons ensuite  $p(x) = \inf_{\lambda > 0 / \lambda \cdot x \in \downarrow F} 1/\lambda$ , ceci valant  $+\infty$  s'il n'existe aucun  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda \cdot x \in \downarrow F$ . Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \cdot 0 = 0$  est dans  $\downarrow F$ , puisque 0 est le plus petit élément de  $C$  et  $F$  est non vide. Donc  $p(0) = 0$ . Par un raisonnement similaire à ci-dessus,  $p$  est sous-linéaire.

De plus, pour tous  $a, b \in C$  tels que  $a \leq b$ , pour tous  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda \cdot a \in \uparrow U$  et  $\lambda' > 0$  tel que  $\lambda' \cdot b \in \downarrow F$ , on a nécessairement  $\lambda > \lambda'$ . Sinon,  $\lambda \leq \lambda'$ , donc  $\lambda \cdot a \leq \lambda' \cdot a \leq \lambda' \cdot b$ . Or comme  $\lambda \cdot a \in \uparrow U$ ,  $\lambda' \cdot b$  aussi serait dans  $\uparrow U$ . Comme il est déjà dans  $\downarrow F$ , ce qui contredirait le fait que  $\uparrow U$  et  $\downarrow F$  sont disjoints. On a donc bien  $\lambda > \lambda'$ . En particulier,  $1/\lambda < 1/\lambda'$ . En prenant les bornes supérieures sur les  $\lambda$ , et les bornes inférieures sur les  $\lambda'$ , on obtient  $q(a) \leq p(b)$ , et ce pour tous  $a, b \in C$ .

On peut donc appliquer le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, et conclure à l'existence d'une fonction linéaire croissante  $f$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $q \leq f \leq p$ . Pour tout  $x \in F$ ,  $p(x) \leq 1$  puisque  $\lambda = 1$  satisfait la condition  $\lambda \cdot x \in \downarrow F$ , donc  $f(x) \leq 1$ . Pour tout  $x \in U$ , de manière similaire,  $q(x) \geq 1$ , donc  $f(x) \geq 1$ .  $\square$

Le théorème suivant est un analogue dans le cadre des cônes ordonnés du théorème de Hahn-Banach. Il nous servira notamment pour établir des théorèmes du style du théorème de Kantorovich-Rubinstein, avec  $C$  le cône  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_L$  des fonctions lipschitziennes d'un espace héli-métrique  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et  $Z$  le sous-espace des fonctions 1-lipschitziennes.

**Théorème 3.12.4 (Extension)** *Soit  $C$  un cône ordonné,  $Z$  un sous-ensemble convexe de  $C$ . Soit  $f$  une fonction croissante de  $Z$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , préservant les barycentres au sens où  $f(r \cdot x + (1 - r) \cdot y) = rf(x) + (1 - r)f(y)$  pour tous  $r \in [0, 1]$ ,  $x, y \in Z$ . Soit finalement  $p$  une fonction sous-linéaire de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , et supposons que pour tous  $x, y \in Z$ ,  $c \in C$ , et  $\lambda > 0$  tels que  $x \leq \lambda \cdot y + c$ , alors  $f(x) \leq \lambda f(y) + p(c)$ .*

*Alors il existe une fonction linéaire croissante  $g$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in Z$ , et  $g \leq p$ .*

*Démonstration.* Si  $Z$  est vide, c'est évident : il suffit par exemple de poser  $g(x) = 0$  pour tout  $x \in C$ . Supposons donc  $Z$  non vide, et posons :

$$p'(x) = \inf_{\substack{y \in Z, c \in C \\ \lambda > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c}} \lambda f(y) + p(c) \quad q'(y) = \sup_{\substack{x \in Z, c \in C \\ \lambda > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c}} \frac{f(x) - p(c)}{\lambda}$$

où la borne inférieure vaut  $+\infty$  et la borne supérieure vaut 0 si elles portent sur un ensemble vide d'éléments. Notons d'abord que  $p'$  et  $q'$  sont à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ . Pour  $q'$ , ceci vient du fait que,

lorsqu'il existe  $x \in Z$ ,  $c \in C$ , et  $\lambda > 0$  tels que  $x \leq \lambda \cdot y + c$ , alors on a aussi  $x \leq \lambda' \cdot y + c$  pour tout  $\lambda' \geq \lambda$ , donc  $q'(y) \geq (f(x) - p(c))/\lambda'$ . Lorsque  $\lambda'$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que  $q'(y) \geq 0$ . Lorsqu'il n'existe pas de tels  $x, c$  et  $\lambda$ , alors par définition  $q'(y) = 0$ .

Montrons que  $p'$  est sous-linéaire. Elle est clairement croissante. Montrons que  $p'(0) = 0$ . Fixons  $y \in Z$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , en posant  $\lambda \leq \epsilon/f(y)$  si  $f(y) \neq 0$ ,  $\lambda > 0$  quelconque sinon, et pour  $c = 0$ , on a  $p'(0) \leq \lambda f(y) + p(c) \leq \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $p'(0) = 0$ . Pour tout  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned} p'(r \cdot x) &= \inf_{\substack{y \in Z, c \in C \\ \lambda > 0 \\ r \cdot x \leq \lambda \cdot y + c}} \lambda f(y) + p(c) = \inf_{\substack{y \in Z, c \in C \\ \lambda > 0 \\ x \leq \lambda/r \cdot y + 1/r \cdot c}} \lambda f(y) + p(c) \\ &= \inf_{\substack{y \in Z, c' \in C \\ \lambda' > 0 \\ x \leq \lambda' \cdot y + c'}} r \lambda' f(y) + p(r \cdot c') = r p'(x) \end{aligned}$$

Donc  $p'$  est positivement homogène. De plus,

$$\begin{aligned} p'(x) + p'(x') &= \inf_{\substack{y \in Z, c \in C \\ \lambda > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c}} (\lambda f(y) + p(c)) + \inf_{\substack{y' \in Z, c' \in C \\ \lambda' > 0 \\ x' \leq \lambda' \cdot y' + c'}} (\lambda' f(y') + p(c')) \\ &= \inf_{\substack{y, y' \in Z \\ \lambda, \lambda' > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c \quad x' \leq \lambda' \cdot y' + c'}} [\lambda f(y) + \lambda' f(y') + p(c) + p(c')] \\ &\geq \inf_{\substack{y, y' \in Z \\ \lambda, \lambda' > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c \quad x' \leq \lambda' \cdot y' + c'}} \left[ (\lambda + \lambda') f \left( \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'} \cdot y + \frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'} \cdot y' \right) + p(c + c') \right] \\ &\quad \text{puisque } f \text{ préserve les barycentres et } p \text{ est sous-linéaire} \\ &\geq \inf_{\substack{y'' \in Z \\ \lambda'' > 0 \\ x + x' \leq \lambda'' \cdot y'' + c''}} \lambda'' f(y'') + p(c'') = p'(x + x') \end{aligned}$$

puisque  $y'' = \lambda/(\lambda + \lambda') \cdot y + \lambda'/(\lambda + \lambda') \cdot y'$ ,  $\lambda'' = \lambda + \lambda'$ ,  $c'' = c + c'$  vérifient  $\lambda'' > 0$  et  $x + x' \leq \lambda'' \cdot y'' + c''$  dès que  $\lambda, \lambda' > 0$ , et  $x \leq \lambda \cdot y + c$ ,  $x' \leq \lambda' \cdot y' + c'$ .

D'autre part,  $q'$  est elle aussi croissante. Montrons qu'elle est sur-linéaire. D'abord, lorsque  $y = 0$ , pour tout  $x \in Z$ , tout  $c \in C$  et tout  $\lambda > 0$  tels que  $x \leq \lambda \cdot y + c$ , on a  $x \leq c$ , donc aussi  $x \leq \lambda' \cdot x + c$  pour n'importe quel  $\lambda' > 0$ . Par hypothèse, on a donc  $f(x) \leq \lambda' f(x) + p(c)$ . On en déduit que  $(f(x) - p(c))/\lambda \leq \lambda' f(x)/\lambda$ . En faisant tendre  $\lambda'$  vers 0,  $(f(x) - p(c))/\lambda \leq 0$ . En prenant les bornes supérieures lorsque  $x, \lambda$  et  $c$  varient,  $q'(0) \leq 0$ . Puisque  $q'$  est à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ,  $q'(0) = 0$ . Pour établir que  $q'$  est positivement homogène, il reste à montrer que  $q'(r \cdot y) = r q'(y)$  pour tout  $r > 0$ . Or :

$$q'(r \cdot y) = \sup_{\substack{x \in Z, c \in C \\ \lambda > 0 \\ x \leq \lambda r \cdot y + c}} \frac{f(x) - p(c)}{\lambda} = \sup_{\substack{x \in Z, c \in C \\ \lambda' > 0 \\ x \leq \lambda' \cdot y + c}} r \frac{f(x) - p(c)}{\lambda'} = r q'(y)$$

en prenant  $\lambda' = \lambda r$ . Montrons que  $q'$  est sur-additive :

$$\begin{aligned}
 q'(y) + q'(y') &= \sup_{\substack{x \in Z, c \in C \\ \lambda > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c}} \frac{f(x) - p(c)}{\lambda} + \sup_{\substack{x' \in Z, c' \in C \\ \lambda' > 0 \\ x' \leq \lambda' \cdot y' + c'}} \frac{f(x') - p(c')}{\lambda'} \\
 &= \sup_{\substack{x, x' \in Z \\ \lambda, \lambda' > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c \\ x' \leq \lambda' \cdot y' + c'}} \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda \lambda'} \left[ \frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'} (f(x) - p(c)) + \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'} (f(x') - p(c')) \right] \\
 &= \sup_{\substack{x, x' \in Z \\ \lambda, \lambda' > 0 \\ x \leq \lambda \cdot y + c \\ x' \leq \lambda' \cdot y' + c'}} \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda \lambda'} \left[ f \left( \frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'} \cdot x + \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'} \cdot x' \right) - p \left( \frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'} \cdot c + \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'} \cdot c' \right) \right] \\
 &\quad \text{puisque } f \text{ préserve les barycentres et } p \text{ est sous-linéaire} \\
 &\leq \sup_{\substack{x'' \in Z, c'' \in C \\ \lambda'' > 0 \\ x'' \leq \lambda'' \cdot (y + y') + c''}} \frac{f(x'') - p(c'')}{\lambda''} = q'(y + y')
 \end{aligned}$$

en prenant  $x'' = \lambda' / (\lambda + \lambda') \cdot x + \lambda / (\lambda + \lambda') \cdot x'$ ,  $c'' = \lambda' / (\lambda + \lambda') \cdot c + \lambda / (\lambda + \lambda') \cdot c'$ ,  $\lambda'' = \lambda \lambda' / (\lambda + \lambda')$ .

Montrons maintenant que  $q'(z) \leq p'(z)$  pour tout  $z \in C$ . Pour ceci, il suffit de montrer que  $(f(x) - p(c)) / \lambda \leq \lambda' f(y) + p(c')$  pour tous  $\lambda, \lambda' > 0$ ,  $x, y \in Z$ ,  $c, c' \in C$  tels que  $x \leq \lambda \cdot z + c$  et  $z \leq \lambda' \cdot y + c'$ . En effet, on a alors  $x \leq \lambda \lambda' \cdot y + (c + \lambda \cdot c')$ , donc par hypothèse  $f(x) \leq \lambda \lambda' f(y) + p(c + \lambda \cdot c') \leq \lambda \lambda' f(y) + p(c) + \lambda p(c')$  (car  $p$  est sous-linéaire), d'où l'inégalité souhaitée.

On peut dès lors appliquer le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, et conclure à l'existence d'une fonction linéaire croissante  $g$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $q' \leq g \leq p'$ .

Montrons que  $g \leq p$ . Pour tout  $x \in C$ , par définition  $p'(x) \leq \lambda f(y) + p(c)$  pour tout  $y \in Z$ , tout  $c \in C$  et tout  $\lambda > 0$  tels que  $x \leq \lambda \cdot y + c$ . Fixons un  $y \in Z$  arbitraire (puisque  $Z$  est non vide), et  $c = x$ . Alors  $p'(x) \leq \lambda f(y) + p(x)$ . Comme  $\lambda$  est arbitraire,  $p'(x) \leq p(x)$ . Donc  $g \leq p$ .

Finalement, pour tout  $x \in Z$ , on note que l'on peut prendre  $y = x$ ,  $\lambda = 1$  et  $c = 0$  dans la définition de  $p'$ , d'où  $p'(x) \leq f(x)$ ; de même, pour tout  $y \in Z$ , on peut prendre  $x = y$ ,  $c = 0$ , et  $\lambda = 1$  dans la définition de  $q'$ , d'où  $q'(y) \geq f(y)$ . Donc pour tout  $x \in Z$ ,  $q'(x) \geq f(x) \geq p'(x) \geq q'(x)$ , d'où  $q'(x) = f(x) = p'(x)$ . Comme  $q' \leq g \leq p'$ , on a aussi  $q'(x) = g(x) = p'(x)$ , donc  $g(x) = f(x)$ .  $\square$

On peut tenter de renforcer le lemme 3.12.3 et demander que  $f$  soit non seulement croissante mais continue. Ceci ne fonctionnera bien qu'à condition que  $C$  soit un d-cône continu (additif, voir plus bas) typiquement. C'est le théorème 3.4 de Tix et al. (2005). Nous en donnons une version légèrement plus générale. Rappelons qu'un d-cône continu  $C$  est un cône ordonné, qui est un cpo continu et où  $+$  et  $\cdot$  sont continues. Affaiblissons cette condition, en demandant juste que  $C$  soit un ensemble ordonné continu.

**Définition 3.12.5 (Cône continu)** Un cône continu  $C$  est un cône ordonné, qui est un ensemble ordonné continu pour son ordre  $\leq$ , et tel que  $+$  :  $C \times C \rightarrow C$  et  $\cdot$  :  $\mathbb{R}^+ \times C \rightarrow C$  soient Scott-continues.

On dit que  $C$  est additif si et seulement si, en notant  $\ll$  la relation “bien en-dessous” de  $C$ , pour tous  $x_1 \ll y_1$  et  $x_2 \ll y_2$ ,  $x_1 + x_2 \ll y_1 + y_2$ .

Notons que  $\mathbb{R}^+$  et  $\overline{\mathbb{R}}^+$  sont des cônes continus additifs. Ceci se vérifie aisément, en réalisant que sur ces deux espaces,  $x \ll y$  si et seulement si  $x = 0$  ou  $x < y$ .  $\mathbb{R}^+$  n’est pas un d-cône, car  $\mathbb{R}^+$  n’est pas un cpo. La seule différence entre un cône continu et un d-cône continu est donc que toutes les bornes supérieures de familles dirigées existent dans un d-cône continu, mais pas nécessairement dans un cône continu.

Une propriété symétrique de celle d’additivité dont nous aurons besoin est la suivante :

**Lemme 3.12.6** Dans tout cône continu  $C$ , si  $x \ll y_1 + y_2$ , alors il existe  $x_1, x_2 \in C$  tels que  $x \leq x_1 + x_2$ ,  $x_1 \ll y_1$  et  $x_2 \ll y_2$ .

*Démonstration.* Puisque  $C$  est continu,  $y_1$  s’écrit comme la borne supérieure de la famille dirigée des  $(y_{1i})_{i \in I}$ ,  $y_{1i} \ll y_1$ . De même,  $y_2$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $(y_{2j})_{j \in J}$ ,  $y_{2j} \ll y_2$ . Alors  $(y_1, y_2)$  est la borne supérieure de la famille dirigée des couples  $(y_{1i}, y_{2j})$  dans  $C \times C$ . Puisque  $+$  :  $C \times C \rightarrow C$  est continue,  $y_1 + y_2$  est donc la borne supérieure de la famille dirigée des  $y_{1i} + y_{2j}$ ,  $i \in I, j \in J$ . Comme  $x \ll y_1 + y_2$ , il existe donc un  $i \in I$  et un  $j \in J$  tels que  $x \leq y_{1i} + y_{2j}$ . Il suffit alors de prendre  $x_1 = y_{1i}$  et  $x_2 = y_{2j}$ .  $\square$

**Lemme 3.12.7** Dans tout cône continu  $C$ , si  $x \ll y$  alors pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$ , on a  $r \cdot x \ll r \cdot y$ .

*Démonstration.* Si  $r = 0$ , notons que  $0$  est le plus petit élément de  $C$  : c’est parce que, pour tout  $x \in C$ ,  $0 = 0 \cdot x \leq 1 \cdot x = x$ . On en déduit que  $0 \ll 0$ , donc  $r \cdot x \ll r \cdot y$  dès que  $r = 0$ . Supposons donc  $r > 0$ . Soit  $(z_i)_{i \in I}$  une famille dirigée quelconque, de borne supérieure  $z$  dans  $C$ , et supposons  $r \cdot y \leq z$ . Alors  $y \leq 1/r \cdot z$ . Puisque  $x \ll y$ , il existe  $i \in I$  tel que  $x \leq 1/r \cdot z_i$ , donc  $r \cdot x \leq z_i$ . Donc  $r \cdot x \ll r \cdot y$ .  $\square$

L’intérêt de la notion d’additivité est la suivante. Rappelons la formule de Scott (lemme 3.6.16), qui définit la plus grande fonction continue  $\tau(h)$  inférieure ou égale à  $h$  :  $C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ , pour peu que  $C$  soit un ensemble ordonné continu.

**Proposition 3.12.8** Soit  $C$  un cône continu additif. Pour toute fonction linéaire croissante  $h$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ,  $\tau(h)$  est une fonction linéaire continue de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ .

*Démonstration.* Qu’elle soit continue est dû au lemme 3.6.16. Posons  $f = \tau(h)$ , et démontrons que  $f$  est linéaire. Pour  $r = 0$ , on a  $f(r \cdot x) = \sup_{y \ll r \cdot x} h(y) = h(0) = 0$ , puisque  $0 \cdot x = 0$ , et  $y \ll 0$  si et seulement si  $y = 0$ . Lorsque  $r > 0$ ,  $f(r \cdot x) = \sup_{y \ll r \cdot x} h(y) \geq \sup_{y' \ll x} h(r \cdot y')$  puisque pour tout  $y' \ll x$ ,  $y = r \cdot y'$  est bien en-dessous de  $r \cdot x$  par le lemme 3.12.7. Comme  $h(r \cdot y') = rh(y')$ ,  $f(r \cdot x) \geq rf(x)$ . Ceci étant vrai pour tout  $r > 0$  et tout  $x \in C$ , on a aussi

$f(1/r \cdot (r \cdot x)) \geq 1/r f(r \cdot x)$ , c'est-à-dire  $f(r \cdot x) \leq r f(x)$ . Donc  $f(r \cdot x) = r f(x)$  :  $f$  est positivement homogène. Il reste à montrer que  $f$  est additive. Or :

$$\begin{aligned} f(y_1) + f(y_2) &= \sup_{x_1 \ll y_1} h(x_1) + \sup_{x_2 \ll y_2} h(x_2) \\ &= \sup_{\substack{x_1 \ll y_1 \\ x_2 \ll y_2}} h(x_1 + x_2) \quad \text{puisque } h \text{ est linéaire} \\ &\leq \sup_{x \ll y_1 + y_2} h(x) = f(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

puisque lorsque  $x_1 \ll y_1, x_2 \ll y_2$ , en prenant  $x = x_1 + x_2$ , on a  $x \ll y_1 + y_2$ ,  $C$  étant additif. Réciproquement,

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2) &= \sup_{x \ll y_1 + y_2} h(x) \\ &\leq \sup_{x_1, x_2 \in C / x_1 \ll y_1, x_2 \ll y_2} h(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

puisque par le lemme 3.12.6, pour tout  $x \ll y_1 + y_2$ , il existe  $x_1, x_2 \in C$  tels que  $x \leq x_1 + x_2$ ,  $x_1 \ll y_1$ , et  $x_2 \ll y_2$ , et alors  $h(x) \leq h(x_1 + x_2)$ ,  $h$  étant croissante. Mais la quantité ci-dessus vaut  $f(y_1) + f(y_2)$ . Donc  $f$  est additive, et en conséquence linéaire.  $\square$

On peut étendre le théorème du sandwich de Roth 3.12.2 au cas des cônes continus. Pour les d-cônes continus, c'est le théorème 3.2 de Tix et al. (2005).

**Théorème 3.12.9** *Soit  $C$  un cône continu additif,  $p$  une fonction sous-linéaire de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ,  $q$  une fonction Scott-continue et sur-linéaire de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , et supposons  $q \leq p$ . Alors il existe une fonction linéaire Scott-continue  $f$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $q \leq f \leq p$ .*

*Démonstration.* Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, il existe une fonction linéaire croissante  $h$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $q \leq h \leq p$ . Puisque  $C$  est un ensemble ordonné continu, on peut appliquer la formule de Scott (lemme 3.6.16) et poser  $f = \tau(h)$  :  $f$  est la plus grande fonction Scott-continue inférieure ou égale à  $h$ . Comme  $q$  est Scott-continue et  $q \leq h$ , on en déduit  $q \leq f$ . De plus,  $f \leq h \leq p$ , donc  $q \leq f \leq p$ . De plus,  $f$  est linéaire par la proposition 3.12.8.  $\square$

On peut aussi produire la variante suivante du lemme de séparation 3.12.3, correspondant au théorème 3.4 de Tix et al. (2005). Nous en aurons besoin typiquement lorsque  $C$  sera le cône  $\mathbf{V}(X)$  des valuations continues sur un cpo continu  $X$ , et  $Z$  sera le sous-espace convexe  $\mathbf{V}_1(X)$  des probabilités continues sur  $X$ .

**Proposition 3.12.10** *Soit  $Z$  un sous-espace quelconque d'un cône continu additif  $C$ ,  $U$  un ouvert convexe de  $Z$ ,  $F$  une partie convexe de  $Z$ , et supposons  $U$  et  $F$  non vides et disjoints. Alors il existe une fonction linéaire continue  $f : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $f(x) \leq 1$  pour tout  $x \in F$ , et  $f(y) > 1$  pour tout  $y \in U$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 3.12.3, il existe une fonction linéaire croissante  $h$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $h(x) \leq 1$  pour tout  $x \in F$  et  $h(x) \geq 1$  pour tout  $x \in U$ . Posons  $f = \tau(h)$ ,  $f$  est continue

et linéaire par la proposition 3.12.8. Par le lemme 3.6.16,  $f \leq h$ , donc en particulier pour tout  $x \in F$ ,  $f(x) \leq h(x) \leq 1$ . Pour tout  $y \in U$ ,  $f(y) = \sup_{x \ll y} h(x)$ . Puisque  $C$  est un ensemble ordonné continu,  $y$  est la borne supérieure de tous les  $x \ll y$ . Comme  $U$  est Scott-ouvert, et  $y \in U$ , l'un de ces  $x \ll y$  sera dans  $U$ . Or  $x$  est la borne supérieure des  $r \cdot x$ ,  $r < 1$ , puisque la multiplication est continue. Comme  $U$  est un ouvert de Scott de nouveau, il existe un  $r < 1$  tel que  $r \cdot x \in U$ . Alors  $h(r \cdot x) \geq 1$ , donc  $h(x) \geq 1/r > 1$ . Puisque  $f(y) \geq h(x)$ , on en déduit que  $f(y) > 1$ .  $\square$

Dans tout espace topologique, tout ensemble saturé  $A$  est l'intersection de la famille filtrante des ouverts  $U$  contenant  $A$ . Lorsque  $Z$  est un sous-espace convexe d'un cône topologique  $C$ , on peut imaginer que si  $A$  est non seulement saturé mais convexe,  $A$  soit l'intersection d'une famille filtrante d'ouverts convexes contenant  $A$ . Ce n'est pas toujours le cas. Nous verrons que c'est le cas si  $A$  est compact, et en supposant que  $Z$  soit un sous-espace convexe d'un cône continu additif. Déjà, demander que cette propriété soit vraie lorsque  $A$  est l'ensemble saturé  $\uparrow x$  revient à demander que  $Z$  soit localement convexe, comme le montre le lemme 3.12.12 ci-dessous.

**Définition 3.12.11 (Localement convexe)** *Soit  $Z$  un sous-espace d'un cône topologique  $C$ . On dit que  $Z$  est localement convexe si et seulement si pour tout  $x \in Z$ , et tout ouvert  $U$  de  $Z$  contenant  $x$ , il existe un ouvert convexe  $V$  de  $Z$  tel que  $x \in V \subseteq U$ .*

**Lemme 3.12.12** *Soit  $Z$  un sous-espace d'un cône topologique  $C$ . Si  $Z$  est localement convexe, alors pour tout  $z \in Z$ , l'intersection des ouverts convexes  $V$  contenant  $x$  est exactement  $\uparrow x$ .*

*Démonstration.* Supposons  $Z$  localement convexe. D'abord,  $\uparrow x$  égale l'intersection des ouverts  $U$  contenant  $x$ . Puisque  $Z$  est localement convexe, ceci contient l'intersection des ouverts convexes  $V$  contenant  $x$ . Comme cette dernière contient trivialement  $\uparrow x$ , elle lui est égale.  $\square$

Lorsque  $Z$  est convexe, on a la caractérisation suivante.

**Lemme 3.12.13** *Soit  $Z$  un sous-espace convexe d'un cône topologique  $C$ .  $Z$  est localement convexe si et seulement si la topologie de  $Z$  est engendrée par les ouverts convexes de  $Z$ .*

*Démonstration.* Si  $Z$  est localement convexe, tout ouvert  $U$  s'écrit comme l'union des ouverts convexes  $V$  tels que  $x \in V \subseteq U$ , où  $x$  parcourt  $U$ . Réciproquement, notons que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts convexes est encore un ouvert convexe. Lorsque l'intersection est vide, c'est parce que  $Z$  lui-même est convexe. Si la topologie de  $Z$  est engendrée par les ouverts convexes de  $Z$ , alors tout ouvert  $U$  de  $Z$  est une union d'ouverts convexes  $V_i$ ,  $i \in I$ . Pour tout  $x \in U$ , il existe un  $i \in I$  tel que  $x \in V_i$ , et clairement  $V_i \subseteq U$ . Donc  $Z$  est localement convexe.  $\square$

Le lemme suivant est une variante de la proposition 2.5 de Tix et al. (2005), due à Jimmie Lawson.

**Lemme 3.12.14** *Soit  $Z$  un sous-espace topologique convexe d'un cône continu  $C$ . Alors  $Z$  est localement convexe.*

*Démonstration.* Fixons  $x \in Z$ , et un ouvert  $U$  de  $Z$  contenant  $x$ . Notons que  $U$  s'écrit  $U' \cap Z$ , où  $U'$  est un ouvert de  $C$ . Pour tout  $z \in U'$ , on peut trouver un élément  $f(z) \in U$  tel que  $f(z) \ll z$ . En effet,  $C$  étant un ensemble ordonné continu,  $z$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $z' \ll z$ ; comme  $U'$  est Scott-ouvert, l'un des ces  $z'$  appartient à  $U$ , et l'on pose  $f(z) = z'$ . Posons  $V' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \uparrow f^n(x)$ .  $V'$  est un ouvert de Scott, comme union d'ouverts de Scott, et contient  $x$ . Donc  $V = V' \cap Z$  est un ouvert de  $Z$  contenant  $x$ . Or  $V' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \uparrow f^n(x)$  : l'inclusion  $\subseteq$  est due au fait que  $\uparrow f^n(x) \subseteq \uparrow f^{n+1}(x)$ , l'inclusion réciproque vient du fait que  $\uparrow f^n(x) \subseteq \uparrow f^{n+1}(x)$ . On en déduit que  $V$  est convexe : pour tous  $y, z \in V$  et  $\alpha \in [0, 1]$ , il existe un entier  $n$  tel que  $y, z \in \uparrow f^n(x)$ , c'est-à-dire  $f^n(x) \leq y, z$ , donc  $f^n(x) = \alpha \cdot f^n(x) + (1 - \alpha) \cdot f^n(x) \leq \alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z$ ; de plus,  $\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z$  est dans  $Z$  car  $Z$  est convexe, et est donc dans  $V$ .  $\square$

On peut généraliser le lemme 3.12.12 aux compacts finitaires. On commence par établir un théorème de séparation dans  $\overline{\mathbb{R}}^{+n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . C'est le lemme 3.7 de Tix et al. (2005). Rappelons que l'on équipe  $\overline{\mathbb{R}}^+$  de sa topologie de Scott. Comme  $\overline{\mathbb{R}}^+$  est un cpo continu,  $\overline{\mathbb{R}}^{+n}$  est aussi un cpo continu, et sa topologie produit coïncide avec sa topologie de Scott.

**Lemme 3.12.15** *Soit  $\vec{1}$  l'élément  $(1, \dots, 1)$  de  $\overline{\mathbb{R}}^{+n}$ . Soit  $K$  un sous-ensemble compact et convexe de  $\overline{\mathbb{R}}^{+n}$ , disjoint de  $\downarrow \vec{1}$ . Il existe une fonction linéaire continue  $h : \overline{\mathbb{R}}^{+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ , et un élément  $a \in \overline{\mathbb{R}}^+$  tels que  $a > 1$ ,  $h(\vec{1}) \leq 1$  et  $h(\vec{x}) > a$  pour tout  $\vec{x} \in K$ .*

*Démonstration.* Si  $K$  est vide, c'est évident, il suffit par exemple de prendre  $h(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ ,  $a > 1$  quelconque. Supposons donc  $K$  non vide.

Pour tout  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}}^{+n}$ , notons  $\|\vec{x}\|_\infty = \max(x_1, \dots, x_n)$ . La fonction qui à  $\vec{x}$  associe  $\|\vec{x}\|_\infty$  est Scott-continue, donc l'image de  $K$  par cette fonction est compacte dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ . Par le lemme 3.10.38, cette image a un plus petit élément  $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ . Si  $r = +\infty$ , le lemme est évident : il suffit par exemple de poser de nouveau  $h(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ ,  $a > 1$  quelconque. Nous supposons donc dans la suite  $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ . Par définition, il existe donc un élément  $\vec{z}$  de  $K$  tel que  $\|\vec{z}\|_\infty = r$ .

On note ensuite que  $r > 1$ , sinon, en écrivant  $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ , on aurait  $\max(z_1, \dots, z_n) \leq 1$ , donc  $\vec{z} \in \downarrow \vec{1}$ , contredisant le fait que  $K$  est disjoint de  $\downarrow \vec{1}$ .

Posons  $b = (1+r)/2$ ,  $F = \downarrow \vec{1}$ , et  $U = \{\vec{x} \in \overline{\mathbb{R}}^{+n} \mid b \cdot \vec{x} \in \uparrow K\}$ .  $F$  est convexe, clos par le bas, et non vide. De même,  $U$  est clos par le haut, et non vide car  $K$  est non vide. Montrons que  $U$  est convexe. Pour tous  $\vec{x}, \vec{y} \in U$ , il existe  $\vec{x}', \vec{y}' \in K$  tels que  $\vec{x}' \leq b\vec{x}$ ,  $\vec{y}' \leq b\vec{y}$ . Pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha\vec{x}' + (1 - \alpha)\vec{y}' \in K$  puisque  $K$  est convexe. Comme  $\alpha\vec{x}' + (1 - \alpha)\vec{y}' \leq b(\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y})$ , on en déduit que  $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in U$ . De plus,  $F$  et  $U$  sont disjoints, sinon il existerait  $\vec{x}$  et  $\vec{x}'$  tels que  $b \cdot \vec{x} \geq \vec{x}'$ ,  $\vec{x} \leq \vec{1}$ , et  $\vec{x}' \in K$ . Ceci impliquerait que  $\vec{x}' \leq b \cdot \vec{1}$ , donc  $\|\vec{x}'\|_\infty \leq b < r$ , ce qui contredit le fait que  $\|\vec{x}'\|_\infty \geq r$  pour tout  $\vec{x}' \in K$ . En appliquant le lemme 3.12.3 avec  $Z = C = \overline{\mathbb{R}}^{+n}$ , il existe donc une fonction linéaire  $f : \overline{\mathbb{R}}^{+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $f(\vec{x}) \leq 1$  pour tout  $\vec{x} \in \downarrow \vec{1}$ , et  $f(\vec{y}) \geq 1$  pour tout  $\vec{y} \in U$ .

En général,  $f$  n'est pas nécessairement continue. Posons donc  $h = \tau(f)$ . Par le lemme 3.6.16,  $h$  est Scott-continue. Notons que, dans  $\overline{\mathbb{R}}^{+n}$ , en posant  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$  et  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , on a  $\vec{y} \ll \vec{x}$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $y_i = 0$  ou  $y_i < x_i$ . On en déduit facilement que

$\overline{\mathbb{R}}^{+n}$  est un cône continu additif. Par la proposition 3.12.8,  $h$  est non seulement continue mais linéaire.

On a maintenant  $h(\vec{1}) \leq f(\vec{1}) \leq 1$ . Pour tout  $\vec{x} \in K$ , on a  $1/\sqrt{b} \cdot \vec{x} \ll \sqrt{b} \cdot \vec{x}$  puisque  $b > 1$ . Or  $f(1/\sqrt{b} \cdot \vec{x}) = \sqrt{b} f(1/b \cdot \vec{x}) \geq \sqrt{b}$  puisque par construction  $1/b \cdot \vec{x} \in U$ . Donc  $h(\vec{x}) \geq \sqrt{b}$ , et l'on conclut en posant  $a$  n'importe quel réel compris strictement entre 1 et  $\sqrt{b}$ .  $\square$

On en déduit le théorème suivant, qui est essentiellement le théorème 3.8 de séparation stricte de Tix et al. (2005).

**Théorème 3.12.16 (Séparation stricte)** *Soit  $Z$  un sous-espace topologique convexe d'un cône ordonné continu additif. Pour tout compact convexe  $K$  de  $Z$ , pour tout fermé convexe non vide  $F$  de  $Z$  disjoint de  $K$ , il existe un élément  $a \in \overline{\mathbb{R}}^+$ ,  $a > 1$ , et une fonction linéaire continue  $f$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  tels que  $f(x) > a$  pour tout  $x \in K$  et  $f(y) \leq 1$  pour tout  $y \in F$ .*

*Démonstration.* Fixons pour l'instant un élément  $x$  de  $K$ . Par le lemme 3.12.14,  $Z$  est localement convexe. Comme  $K$  est disjoint de  $F$ ,  $x$  est dans l'ouvert  $Z \setminus F$ , donc il existe un ouvert  $U$  convexe tel que  $x \in U \subseteq Z \setminus F$ . En particulier,  $U$  est un ouvert convexe non vide, disjoint de  $F$ . On peut donc appliquer la proposition 3.12.10, et en déduire qu'il existe une fonction linéaire continue  $g_x : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $g_x(z) \leq 1$  pour tout  $z \in F$ , et  $g_x(y) > 1$  pour tout  $y \in U$ . Posons alors  $U_x = g_x^{-1}]1, +\infty[$ , et  $V_x = U_x \cap Z$ . Comme  $g_x$  est continue,  $U_x$  est un ouvert de  $C$ , donc  $V_x$  est un ouvert de  $Z$ . De plus,  $U_x$  est convexe : si  $y, z \in U_x$ , alors  $g_x(y), g_x(z) > 1$ , donc pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $g_x(\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z) = \alpha g_x(y) + (1 - \alpha)g_x(z) > 1$ , puisque  $g_x$  est linéaire, donc  $\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z \in U_x$ . Comme  $Z$  est convexe,  $V_x$  l'est donc aussi. Enfin, puisque  $x \in U$ ,  $g_x(x) > 1$ , autrement dit  $x \in U_x$ . Et comme  $x \in K \subseteq Z$ ,  $x$  est un élément de  $V_x$ .

Pour tout  $x \in K$ ,  $x \in V_x$ , la famille  $(V_x)_{x \in K}$  forme un recouvrement ouvert de  $K$ . Puisque  $K$  est compact, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini, disons formé de  $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$ . Soit  $g$  la fonction de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^{+n}$  qui à  $z$  associe le  $n$ -uplet  $(g_{x_1}(z), \dots, g_{x_n}(z))$  : comme chaque  $g_x$  est continue et linéaire,  $g$  est aussi continue et linéaire. Puisque  $g_x(z) \leq 1$  pour tout  $z \in F$ , l'image de  $F$  par  $g$  est incluse dans  $\downarrow \vec{1}$ .

Soit  $K'$  l'image de  $K$  par  $g$ . Notons que  $K$ , qui est compact dans  $Z$ , l'est aussi dans  $C$  : pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $K$  dans  $C$ ,  $(U_i \cap Z)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $K$  dans  $Z$ , donc on extrait un sous-recouvrement fini  $(U_i \cap Z)_{i \in J}$  ( $J$  fini inclus dans  $I$ ) dans  $Z$ ; mais alors  $(U_i)_{i \in J}$  est un sous-recouvrement fini de  $K$  dans  $C$ . Comme  $g$  est continue de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^{+n}$ ,  $K'$  est compact. Comme  $g$  est linéaire et  $K$  est convexe,  $K'$  est aussi convexe : pour tout couple d'éléments  $g(y), g(z)$  d'éléments de  $K'$  (avec  $y, z \in K$ ), pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z \in K$ , donc  $\alpha g(y) + (1 - \alpha)g(z) = g(\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z)$  est dans  $K'$ . Finalement,  $K'$  est disjoint de  $\downarrow \vec{1}$ , sinon il existerait un  $z \in K$  tel que  $g(z) \leq \vec{1}$ . Or  $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$  est un recouvrement de  $K$ , donc il existe un  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $z \in V_{x_i}$ , c'est-à-dire  $g_{x_i}(z) > 1$  : contradiction.

Par le lemme 3.12.15, il existe donc une fonction linéaire continue  $h : \overline{\mathbb{R}}^{+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ , et un élément  $a \in \mathbb{R}^+$  tels que  $a > 1$ ,  $h(\vec{1}) \leq 1$  et  $h(\vec{x}) > a$  pour tout  $\vec{x} \in K'$ . On pose finalement  $f = h \circ g$ .  $\square$

On en déduit la propriété suivante de convexité locale forte, due à Achim Jung (Tix et al., 2005, corollaire 3.13).

**Corollaire 3.12.17** *Soit  $Z$  un sous-espace topologique convexe d'un cône continu additif. Pour toute partie  $A$  de  $Z$ , la famille des ouverts convexes contenant  $A$  est filtrante : disons que  $A$  est linéairement saturée si et seulement si  $A$  est l'intersection de cette famille.*

*Alors tout compact saturé convexe  $Q$  de  $Z$  est linéairement saturé.*

*Démonstration.* La famille des ouverts convexes contenant  $A$  est non vide car  $Z$  est convexe et ouvert. Elle est filtrante, puisque l'intersection de deux ouverts convexes est encore ouverte et convexe.

Passons maintenant au cas d'un compact saturé convexe  $Q$ . L'intersection de la famille des ouverts convexes contenant  $Q$  contient clairement  $Q$ . Pour montrer qu'elle coïncide avec  $Q$ , il suffit de montrer que pour tout  $x \in Z \setminus Q$ , il existe un ouvert convexe  $V$  contenant  $Q$  mais pas  $x$ . Étant donné un tel  $x \in Z \setminus Q$ , le fermé  $\downarrow_Z x = \{z \in Z \mid z \leq x\}$  est non vide et convexe. Il est aussi disjoint de  $Q$ , sinon il existerait un  $z \in Q$  tel que  $z \leq x$ , ce qui impliquerait que  $x \in Q$ , puisque  $Q$  est saturé. Par le théorème 3.12.16, il existe un élément  $a \in \overline{\mathbb{R}}^+$ ,  $a > 1$ , et une fonction linéaire continue  $f$  de  $C$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  tels que  $f(x) > a$  pour tout  $x \in Q$  et  $f(y) \leq 1$  pour tout  $y \in \downarrow_Z x$ . L'ouvert  $V = f^{-1}[a, +\infty[ \cap Z$  contient donc  $Q$ , et ne contient pas  $x$ . De plus, comme  $f$  est linéaire,  $V$  est convexe : pour tous  $y, z \in V$ ,  $f(y) > a$  et  $f(z) > a$ , donc pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $f(\alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z) = \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(z) > a$ .  $\square$

Nous aurons besoin de considérer des extensions de la notion de convexité. Nous commençons par caractériser les enveloppes convexes en termes de barycentres.

**Définition 3.12.18 (Enveloppe convexe)** *Soit  $C$  un cône. Pour toute partie  $E$  de  $C$ , on note  $\text{conv}(E)$  l'enveloppe convexe de  $E$  dans  $C$ , c'est-à-dire la plus petite partie convexe de  $C$  contenant  $E$ .*

$E$  est alors convexe si et seulement si  $E = \text{conv}(E)$ .

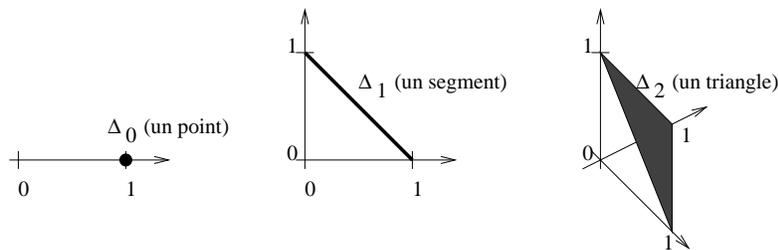


FIG. 3.4 – Simplexes standard en faible dimension

**Définition 3.12.19 ( $\Delta_n$ )** *le simplexe standard de dimension  $n$  est défini par  $\Delta_n = \{(s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{+^{n+1}} \mid \sum_{i=0}^n s_i = 1\}$ .*

On se reportera à la figure 3.4 pour une illustration.

**Lemme 3.12.20** Soit  $C$  un cône,  $E$  une partie de  $C$ . Alors

$$\text{conv}(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i \mid (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \Delta_n, x_0, x_1, \dots, x_n \in E \right\}$$

On appellera la somme  $\sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  un barycentre des points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . En particulier,  $E$  est convexe si et seulement si tout barycentre d'une famille finie d'éléments de  $E$  est dans  $E$ .

*Démonstration.* Posons  $E_n = \{ \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i \mid (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \Delta_n, x_0, x_1, \dots, x_n \in E \}$ ,  $E_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . On vérifie d'abord que  $E_\infty$  est convexe. Pour ceci, on prend un élément quelconque  $\sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  de  $E_n$  et un  $\sum_{i=n+1}^{n+m} s_i \cdot x_i$  de  $E_m$ , et on vérifie que  $r \cdot \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i + (1-r) \cdot \sum_{i=n+1}^{n+m} s_i \cdot x_i$  est dans  $E_{n+m}$ . Donc  $\text{conv}(E) \subseteq E_\infty$ .

Réciproquement, on démontre par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $E_n \subseteq \text{conv}(E)$ . Lorsque  $n = 0$ ,  $E_n = E$ . Ensuite, tout élément  $z$  de  $E_{n+1}$  s'écrit  $\sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot x_i$ , avec  $(s_0, s_1, \dots, s_n, s_{n+1}) \in \Delta_{n+1}$  et tous les  $x_i$  dans  $E$ . Si  $s_{n+1} = 0$ , alors  $z$  est un élément de  $E_n$ , qui est donc dans  $\text{conv}(E)$  par hypothèse de récurrence. Si  $s_{n+1} = 1$ , alors tous les  $s_i$ ,  $i \leq n$ , sont nuls, donc  $z$  vaut  $x_{n+1} \in E \subseteq \text{conv}(E)$ . Sinon,  $z$  s'écrit  $(1 - s_{n+1}) \cdot \sum_{i=0}^n s_i / (1 - s_{n+1}) \cdot x_i + s_{n+1} \cdot x_{n+1}$ . Par hypothèse de récurrence, vu que  $\sum_{i=0}^n s_i / (1 - s_{n+1}) = 1$ ,  $\sum_{i=0}^n s_i / (1 - s_{n+1}) \cdot x_i$  et  $x_{n+1}$  sont dans  $\text{conv}(E)$ . Comme  $\text{conv}(E)$  est convexe,  $z$  est dans  $\text{conv}(E)$ . Donc  $E_\infty \subseteq \text{conv}(E)$ .  $\square$

Notons que, pour tout  $(s_0, s_1, \dots, s_n) \in \Delta_n$ ,  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  est une valuation simple normalisée sur  $C$ . La notion de barycentre  $\sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  d'un nombre fini de points se généralise à celle d'une valuation normalisée continue quelconque, sous quelques conditions. La condition la plus simple est que  $C$  soit un d-cône continu (proposition 3.12.23 plus pas). Nous étendrons ensuite légèrement ce résultat.

Soit  $C$  un cône ordonné. Comme dans tout cône ordonné,  $0$  est le plus petit élément de  $C$  : pour tout  $x \in C$ ,  $0 = 0 \cdot x \leq 1 \cdot x = x$ , puisque  $\cdot$  est croissante. On en déduit :

**Lemme 3.12.21** Dans tout cône ordonné  $C$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \cdot 0 = 0$ .

*Démonstration.* Si  $a \leq 1$ ,  $a \cdot 0 \leq 1 \cdot 0 = 0$ , donc  $a \cdot 0 = 0$  puisque  $0$  est le plus petit élément. Sinon, écrivons  $a$  sous la forme  $nb$ , où  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 2$ ) et  $b \leq 1$ . Alors  $a \cdot 0 = n \cdot (b \cdot 0) = n \cdot 0 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} \cdot 0$  égale la somme de  $n$  termes égaux à  $1 \cdot 0 = 0$ , qui vaut donc  $0$ .  $\square$

**Lemme 3.12.22** Soit  $C$  un cône ordonné, de préordre de spécialisation  $\leq$ . La fonction  $\text{conv}$  qui à toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  associe le barycentre  $\text{bary}(\nu) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  est bien définie, et croissante.

*Démonstration.* Soient  $\nu = \sum_{i=0}^m a_i \delta_{x_i}$  et  $\nu' = \sum_{j=0}^n b_j \delta_{y_j}$  deux valuations simples normalisées telles que  $\nu \leq \nu'$ . Par le lemme 3.7.9, et en utilisant le fait que  $0$  est l'élément le plus petit de  $C$ , il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq m, x_i \neq 0 \\ 0 \leq j \leq n, y_j \neq 0}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq n, y_j \neq 0} t_{ij} &= a_i \quad \text{pour tout } i, 0 \leq i \leq m, x_i \neq 0 \\ \sum_{0 \leq i \leq m, x_i \neq 0} t_{ij} &\leq b_j \quad \text{pour tout } j, 0 \leq j \leq n, y_j \neq 0 \end{aligned}$$

et telle que les seules entrées  $t_{ij}$  non nulles de la matrice sont telles que  $x_i \leq y_j$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^m a_i \cdot x_i &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ x_i \neq 0}} a_i \cdot x_i && \text{par le lemme 3.12.21} \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ x_i \neq 0}} \left( \sum_{0 \leq j \leq n, y_j \neq 0} t_{ij} \right) \cdot x_i = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ x_i \neq 0, y_j \neq 0}} t_{ij} \cdot x_i = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ x_i \neq 0, y_j \neq 0 \\ t_{ij} \neq 0}} t_{ij} \cdot x_i \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ x_i \neq 0, y_j \neq 0 \\ t_{ij} \neq 0}} t_{ij} \cdot y_j && \text{puisque si } t_{ij} \neq 0 \text{ alors } x_i \leq y_j \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ x_i \neq 0, y_j \neq 0 \\ t_{ij} \neq 0}} t_{ij} \cdot y_j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ x_i \neq 0, y_j \neq 0}} t_{ij} \cdot y_j = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ y_j \neq 0}} \left( \sum_{0 \leq i \leq m, x_i \neq 0} t_{ij} \right) \cdot y_j \\
 &\leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ y_j \neq 0}} b_j \cdot y_j = \sum_{j=0}^n b_j \cdot y_j
 \end{aligned}$$

de nouveau par le lemme 3.12.21. On en déduit en particulier que, si  $\nu = \nu'$ , c'est-à-dire si  $\nu \leq \nu'$  et  $\nu' \leq \nu$ , alors  $\sum_{i=0}^m a_i \cdot x_i = \sum_{j=0}^n b_j \cdot y_j : \text{conv}(\nu)$  est donc bien défini. De plus, on en déduit aussi que  $\text{conv}$  est croissante.  $\square$

**Proposition 3.12.23** *Soit  $Z$  un sous-ensemble convexe d'un cône ordonné  $C$ , et supposons que  $Z$  est aussi un cpo continu pour l'ordre  $\leq$  de  $C$ .*

*Il existe une unique fonction Scott-continue  $\text{bary}_Z : \mathbf{V}_1(Z) \rightarrow Z$  telle que  $\text{bary}_Z(\nu)$  soit égal à  $\sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  pour toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $Z$ .*

*Pour toute probabilité continue  $\nu$  sur  $Z$ , on appelle  $\text{bary}_Z(\nu)$  le barycentre de  $\nu$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 3.7.10, toute probabilité continue  $\nu$  sur  $Z$  est borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$  de probabilités simples sur  $Z$  bien en-dessous de  $\nu$ . Si  $\text{bary}_Z(\nu)$  est bien définie, nécessairement  $\text{bary}_Z(\nu)$  est la borne supérieure des éléments  $\text{bary}_Z(\nu_i)$ , d'où l'unicité.

Passons à l'existence. Pour tout  $\nu \in A$ , écrivons  $\nu$  comme la borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$  de probabilités simples bien en-dessous de  $\nu$ . Montrons d'abord que l'on peut définir  $\text{bary}_Z(\nu)$  comme  $\sup_{i \in I} \text{bary}_Z(\nu_i)$ . D'abord,  $\text{bary}_Z(\nu)$  existe et est dans  $Z$  car  $Z$  est convexe, par le lemme 3.12.20.

Ensuite, par le lemme 3.12.22,  $(\text{bary}_Z(\nu_i))_{i \in I}$  est une famille dirigée d'éléments de  $Z$ , notons temporairement  $x$  sa borne supérieure. Si  $(\nu'_j)_{j \in J}$  est une autre famille dirigée de probabilités simples sur  $Z$ , de borne supérieure  $\nu'$ , si  $x'$  est la borne supérieure de la famille dirigée  $(\text{bary}_Z(\nu'_j))_{j \in J}$ , et si  $\nu \leq \nu'$ , on note que puisque  $\nu'_j \ll_1 \nu'$ , il existe  $j \in J$  tel que  $\nu \leq \nu'_j$ ,

donc  $\nu_i \leq \nu'_j$  pour tout  $i \in I$ . Par le lemme 3.12.22,  $\text{bary}_Z(\nu_i) \leq \text{bary}_Z(\nu'_j)$  pour tout  $i \in I$ , donc  $x \leq \text{bary}_Z(\nu'_j) \leq x'$ . On en déduit d'abord que si  $\nu = \nu'$  alors  $x \in A$  si et seulement si  $x' \in A$ , et qu'alors  $x = x'$ ; donc que  $x$  ne dépend que de  $\nu$  et pas de la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$ ; notons  $\text{bary}_Z(\nu) = x = \sup_{i \in I} \text{bary}_Z(\nu_i)$ . Ensuite, on en déduit que  $\text{bary}_Z$  est croissante.

Montrons que  $\text{bary}_Z$  est Scott-continue. Supposons  $\nu = \sup_{i \in I} \nu_i$ , où  $(\nu_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée de probabilités continues sur  $C$ . Pour tout  $i \in I$ , écrivons  $\nu_i$  comme la borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_{ij})_{j \in J_i}$  de probabilités simples bien en-dessous de  $\nu_i$ . La famille  $(\nu_{ij})_{i \in I, j \in J_i}$  est alors dirigée : considérons  $\nu_{i_1 j_1}$  et  $\nu_{i_2 j_2}$ , on a  $\nu_{i_1 j_1} \leq \nu_{i_1}$  et  $\nu_{i_2 j_2} \leq \nu_{i_2}$ , et comme  $(\nu_i)_{i \in I}$  est dirigée, il existe  $i \in I$  tel que  $\nu_{i_1}, \nu_{i_2} \leq \nu_i$ ; puisque  $\nu_{i_1 j_1} \ll_1 \nu_{i_1} \leq \nu_i = \sup_{j \in J_i} \nu_{ij}$ , il existe  $j'_1 \in J_i$  tel que  $\nu_{i_1 j_1} \leq \nu_{i j'_1}$ , et de même il existe  $j'_2 \in J_i$  tel que  $\nu_{i_2 j_2} \leq \nu_{i j'_2}$ ; puisque  $(\nu_{ij})_{j \in J_i}$  est dirigée, il existe donc  $j \in J_i$  tel que  $\nu_{i j'_1}, \nu_{i j'_2} \leq \nu_{ij}$ ; donc  $\nu_{i_1 j_1}, \nu_{i_2 j_2} \leq \nu_{ij}$ . Il est de plus clair que  $\sup_{i \in I, j \in J_i} \nu_{ij} = \sup_{i \in I} \nu_i = \nu$ , donc  $\text{bary}_Z(\nu) = \sup_{i \in I, j \in J_i} \text{bary}_Z(\nu_{ij}) = \sup_{i \in I} \sup_{j \in J_i} \text{bary}_Z(\nu_{ij}) = \sup_{i \in I} \text{bary}_Z(\nu_i)$ .  $\square$

Une question naturelle, à laquelle nous allons répondre plus bas, est de savoir si l'on peut étendre le lemme 3.12.20 et montrer que, si  $E$  est une partie convexe de  $Z$ , alors le barycentre de toute probabilité continue  $\nu$  à support dans  $E$ , s'il existe, est encore dans  $E$ . C'est déjà le cas pour les probabilités simples  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  à support dans  $E$  (c'est-à-dire telles que  $x_0, \dots, x_n$  soient dans  $E$ ), par le lemme 3.12.20. Nous devons pour ceci d'abord définir une notion raisonnable de support d'une probabilité continue. Nous devons ensuite imposer de nouvelles conditions sur  $E$  et sur le cône  $C$ .

**Définition 3.12.24 (Support)** On dit qu'un jeu  $\nu$  sur  $X$  est à support dans une partie  $A$  de  $X$  si et seulement si, pour tout ouvert  $U \supseteq A$ ,  $\nu(U) = \nu(X)$ .

On notera  $\mathbf{V}_1(X; A)$  l'ensemble des probabilités continues sur  $X$  à support dans  $A$ .

Attention, ceci définit juste la relation "est à support dans", et pas la notion de support elle-même. Le support d'un jeu n'est pas nécessairement une notion bien définie, au sens où il n'existe pas nécessairement un plus petit ensemble  $A$  tel que  $\nu$  soit à support dans  $A$ . Par exemple, sur  $X = \{1, 2\}$ , posons  $\nu(U) = 1$  si  $U$  contient 1 ou 2,  $\nu(U) = 0$  sinon. Alors  $\nu$  est à support dans  $\{1\}$ , aussi à support dans  $\{2\}$ , mais pas dans leur intersection, qui est vide. Le lemme suivant, en revanche, suggère que le support d'une valuation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$ , où tous les  $a_i$  sont non nuls, soit bien l'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , comme nous l'avons suggéré plus haut — ou plutôt  $\uparrow \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Lemme 3.12.25** Soit  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  une valuation simple sur  $X$ , où tous les  $a_i$  sont non nuls. Soit  $A$  une partie close par le haut de  $X$ . Alors  $\nu$  est à support dans  $A$  si et seulement si  $x_i \in A$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Démonstration.* Si  $x_i \in A$  pour tout  $i$ , alors pour tout ouvert  $U \supseteq A$ ,  $U$  contient tous les  $x_i$ , donc  $\nu(U) = \sum_{i=1}^n a_i = \nu(X)$ . Réciproquement, supposons qu'il existe un  $x_i$  hors de  $A$ . Comme  $A$  est saturé, il est l'intersection des ouverts contenant  $A$ . Il existe donc un ouvert  $U$  contenant  $A$  et ne contenant pas  $x_i$ . Alors  $\nu(U) \leq \nu(X) - a_i \neq \nu(X)$ , puisque  $a_i \neq 0$ .  $\square$

Il est aussi possible de définir une notion de co-support. Ces deux notions seraient équivalentes dans le cas de mesures.

**Définition 3.12.26 (Co-support)** *On dit qu'un jeu  $\nu$  sur  $X$  est à co-support dans une partie  $A$  de  $X$  si et seulement si  $\nu(X \setminus cl(A)) = 0$ .*

Dans le cadre des jeux, et même des valuations continues, alors qu'il est naturel de considérer des supports qui soient clos par le haut (voir par exemple le lemme 3.12.25), il est en revanche naturel de considérer des co-supports qui soient clos par le bas. On a par exemple :

**Lemme 3.12.27** *Soit  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  une valuation simple sur  $X$ , où tous les  $a_i$  sont non nuls. Soit  $F$  un fermé de  $X$ . Alors  $\nu$  est à co-support dans  $F$  si et seulement si  $x_i \in F$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

*Démonstration.* Si  $x_i \in F$  pour tout  $i$ , alors  $\nu(X \setminus cl(F)) = 0$ , puisque qu'aucun  $x_i$  ne peut être dans  $cl(F)$ . Réciproquement, si  $\nu(X \setminus cl(F)) = 0$ , c'est-à-dire  $\nu(X \setminus F) = 0$ , alors tous les  $x_i$  doivent être en-dehors de  $X \setminus F$ , donc dans  $F$ , puisque chaque  $a_i$  est non nul.  $\square$

Nous nous intéresserons ici en priorité à la notion de support. Nous verrons à la section 11.7.2 que, dans des cas intéressants, il existe une relation très forte entre supports et co-supports, mais que nous ne pouvons pas encore décrire à ce stade.

Il est naturel de penser que les jeux à support dans  $A \subseteq X$  sont, à un certain isomorphisme près, la même chose que les jeux *sur*  $A$ . Ceci ne fonctionnera effectivement que pour des valuations, et non des jeux généraux, et à condition que  $A$  soit ouvert. Une des directions de l'isomorphisme souhaité est facile :

**Lemme 3.12.28** *Soit  $X$  un espace topologique,  $A$  un sous-espace de  $X$  (avec la topologie induite),  $i$  l'injection canonique de  $A$  dans  $X$ . Pour tout jeu  $\nu$  sur  $A$ , posons  $i[\nu]$  la fonction qui à tout ouvert  $U$  de  $X$  associe  $\nu(U \cap A)$ .*

*Alors  $i[\nu]$  est un jeu sur  $X$ , à support dans  $A$ . C'est une valuation, resp. il est continu, resp. normalisé, dès que  $\nu$  l'est.*

*Démonstration.* Le lemme est, hormis l'assertion portant sur le support de  $i[\nu]$ , un cas particulier du lemme 4.2.9 à venir, en notant que  $i[\nu](U) = \nu(i^{-1}(U))$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Vérifier que  $i[\nu]$  est un jeu, resp. continu, resp. une valuation, resp. est normalisé directement est néanmoins facile. Finalement, pour tout ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $A$ ,  $i[\nu](U) = \nu(U \cap A) = \nu(A) = \nu(X \cap A) = i[\nu](X)$ , donc  $i[\nu]$  est à support dans  $A$ .  $\square$

La direction opposée est plus difficile. Lorsque le sous-espace  $A$  est ouvert dans  $X$ , la réponse est facile :

**Lemme 3.12.29 (Restriction)** *Soit  $X$  un espace topologique,  $U_0$  un sous-espace ouvert de  $X$ . Pour tout jeu  $\nu$  sur  $X$ , posons  $\nu|_{U_0}(U) = \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $U_0$ . Ceci est bien défini, la fonction  $\nu|_{U_0}$  est alors un jeu sur  $U_0$ , qui est une valuation, resp. un jeu continu, dès que  $\nu$  l'est. Lorsque  $\nu$  est normalisé et à support dans  $U_0$ , alors  $\nu|_{U_0}$  est normalisé.*

*Démonstration.* Pour démontrer que  $\nu|_{U_0}$  est bien définie, nous devons établir que  $\nu(U)$  a un sens. C'est le cas dès que  $U$  est un ouvert de  $X$ . Or par définition de la topologie induite,  $U$  s'écrit  $V \cap U_0$ , où  $V$  est un ouvert de  $X$ . Comme  $U_0$  est ouvert dans  $X$ ,  $U$  aussi. Le fait que  $\nu|_{U_0}$  soit une valuation, resp. un jeu continu, dès que  $\nu$  l'est, est évident. Si  $\nu$  est normalisé et à support dans  $U_0$ , alors  $\nu(U_0) = 1$ , donc  $\nu|_{U_0}(U_0) = 1$ , donc  $\nu|_{U_0}$  est normalisé.  $\square$

**Lemme 3.12.30** Soit  $X$  un espace topologique,  $U_0$  un sous-espace ouvert de  $X$ . Pour toute valuation simple  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  sur  $X$  à support dans  $U_0$  (avec  $a_i \neq 0$  pour tout  $i$ ), la restriction  $\nu|_{U_0}$  est la valuation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  sur  $U_0$ . En notant  $i$  l'injection canonique de  $U_0$  dans  $X$ , pour toute valuation simple  $\nu' = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  sur  $U_0$ ,  $i[\nu']$  est la valuation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  sur  $X$ .

*Démonstration.* Puisque  $\nu$  est à support dans  $U_0$ , par le lemme 3.12.25 tous les  $x_i$  sont dans  $U_0$ , donc  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  est bien une valuation simple sur  $U_0$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $U_0$ ,  $\nu|_{U_0}(U) = \nu(U) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \in U}} a_i = (\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i})(U)$ , donc  $\nu|_{U_0} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$ . Ensuite, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $i[\nu'](U) = \nu'(U \cap U_0) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \in U \cap U_0}} a_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \in U}} a_i$  (puisque tous les  $x_i$  sont dans  $U_0$ )  $= (\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i})(U)$ , donc  $i[\nu'] = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$ .  $\square$

**Lemme 3.12.31** Soit  $X$  un espace topologique,  $U_0$  un sous-espace ouvert de  $X$ ,  $i$  l'injection canonique de  $U_0$  dans  $X$ . Les opérations  $\nu \mapsto i[\nu] : \mathbf{V}_1(U_0) \rightarrow \mathbf{V}_1(X; U_0)$  et  $\nu \mapsto \nu|_{U_0} : \mathbf{V}_1(X; U_0) \rightarrow \mathbf{V}_1(U_0)$  sont inverses l'une de l'autre, et définissent un isomorphisme d'ordre entre  $\mathbf{V}_1(U_0)$  et  $\mathbf{V}_1(X; U_0)$ .

On équipe bien entendu de nouveau  $\mathbf{V}_1(X; U_0)$  de l'ordre  $\leq$  défini par  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu(U) \leq \nu'(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .

*Démonstration.* Le fait que les deux opérations indiquées aillent bien de  $\mathbf{V}_1(U_0)$  vers  $\mathbf{V}_1(X; U_0)$  et réciproquement est une conséquence du lemme 3.12.28 et du lemme 3.12.29.

Pour tout  $\nu \in \mathbf{V}_1(U_0)$ , pour tout ouvert  $U$  de  $U_0$ ,  $(i[\nu])|_{U_0}(U) = i[\nu](U) = \nu(U \cap U_0) = \nu(U)$ . Réciproquement, pour toute probabilité continue  $\nu$  sur  $X$  à support dans  $U_0$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $i[\nu|_{U_0}](U) = \nu|_{U_0}(U \cap U_0) = \nu(U \cap U_0)$ . Or, puisque  $\nu$  est une valuation,  $\nu(U \cap U_0) = \nu(U) + \nu(U_0) - \nu(U \cup U_0)$ . Puisque  $\nu$  est à support dans  $U_0$ , ceci vaut  $\nu(U) + 1 - 1 = \nu(U)$ . Donc  $i[\nu|_{U_0}] = \nu$ .

Pour montrer que ces deux fonctions définissent un isomorphisme d'ordre, il suffit de montrer qu'elles sont croissantes, puisqu'elles sont inverses l'une de l'autre. Pour tous  $\nu, \nu' \in \mathbf{V}_1(X; U_0)$ , si  $\nu \leq \nu'$  alors pour tout ouvert  $U$  de  $U_0$ ,  $U$  est un ouvert de  $X$  donc  $\nu(U) \leq \nu'(U)$ , c'est-à-dire  $\nu|_{U_0}(U) \leq \nu'|_{U_0}(U)$ . D'autre part, pour tous  $\nu, \nu' \in \mathbf{V}_1(U_0)$  avec  $\nu \leq \nu'$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $i[\nu](U) = \nu(U \cap U_0) \leq \nu'(U \cap U_0) = i[\nu'](U)$ .  $\square$

On en déduit immédiatement le résultat suivant, qui est une modification légère de la proposition 3.12.23.

**Proposition 3.12.32 (Barycentre)** Soit  $U_0$  un ouvert convexe d'un sous-espace  $Z$  d'un cône ordonné  $C$ , et supposons que  $U_0$ , en tant que sous-espace topologique de  $Z$ , soit un cpo continu pour l'ordre  $\leq$  de spécialisation de  $Z$  — autrement dit que sa topologie de Scott coïncide avec la topologie induite par  $Z$ .

Il existe une unique fonction Scott-continue  $\text{bary}^{U_0} : \mathbf{V}_1(Z; U_0) \rightarrow U_0$  telle que  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  pour toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $Z$  avec  $x_0, x_1, \dots, x_n \in U_0$ . On a  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \text{bary}_{U_0}(\nu|_{U_0})$ , où  $i$  est l'injection canonique de  $U_0$  dans  $Z$ .

Pour toute probabilité continue  $\nu$  à support dans  $U_0$ , on appelle  $\text{bary}^{U_0}(\nu)$  le barycentre de  $\nu$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\text{bary}^{U_0}$  existe. Notons que la fonction  $\text{bary}^{U_0}(i[\_])$ , qui à  $\nu$  associe  $\text{bary}^{U_0}(i[\nu])$  est Scott-continue :  $\text{bary}^{U_0}$  l'est par hypothèse, et la fonction qui à  $\nu$  associe  $i[\nu]$  est clairement Scott-continue elle aussi. Pour toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $U_0$ ,  $i[\nu]$  est la valuation simple normalisée  $\sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $Z$  par le lemme 3.12.30, et est à support dans  $U_0$  par le lemme 3.12.25. Donc  $\text{bary}^{U_0}(i[\nu]) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i = \text{bary}_{U_0}^{U_0}(\nu) : \text{bary}^{U_0}(i[\_])$  coïncide avec  $\text{bary}_{U_0}^{U_0}$  sur les valuations simples normalisées sur  $U_0$ . Par l'unicité établie à la proposition 3.12.23,  $\text{bary}^{U_0}(i[\_]) = \text{bary}_{U_0}^{U_0}$ . Autrement dit,  $\text{bary}^{U_0}(i[\nu]) = \text{bary}_{U_0}^{U_0}(\nu)$  pour toute probabilité continue  $\nu$  sur  $U_0$ . Par le lemme 3.12.31, ceci implique que  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \text{bary}_{U_0}(\nu|_{U_0})$  pour toute probabilité continue  $\nu$  à support dans  $U_0$ . L'existence est évidente : il suffit de poser  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \text{bary}_{U_0}(\nu|_{U_0})$ .  $\square$

Les hypothèses de la proposition 3.12.32 sont notamment satisfaites lorsque  $Z$  est un cpo continu, et  $U_0$  un ouvert convexe de  $Z$  :

**Lemme 3.12.33** *Soit  $Z$  un sous-espace d'un cône ordonné  $C$ , et supposons que  $Z$  soit un cpo continu pour le préordre  $\leq$  de  $C$ . Alors  $\leq$  est l'ordre de spécialisation de  $Z$ . De plus, pour tout ouvert  $U_0$  de  $Z$ ,  $U_0$  muni de l'ordre  $\leq$  est un cpo continu, et sa topologie de Scott coïncide avec la topologie induite par  $Z$ .*

*Démonstration.* Que  $\leq$  soit l'ordre de spécialisation de  $Z$  est évident. Notons  $\ll$  la relation "bien en-dessous" de  $Z$ , et  $\ll_0$  celle de  $U_0$  muni de  $\leq$ . De même, notons  $\hat{\uparrow}z = \{z' \in Z \mid z \ll z'\}$ ,  $\hat{\uparrow}_0x = \{x' \in U_0 \mid x \ll_0 x'\}$ .

La topologie de  $U_0$ , induite par celle de  $Z$ , est engendrée par les ouverts  $\hat{\uparrow}z \cap U_0$ . Pour tous  $x, y \in U_0$ , si  $x \leq y$ , et si  $x \in \hat{\uparrow}z \cap U_0$ , alors clairement  $y \in \hat{\uparrow}z \cap U_0$ , puisque  $U_0$  est clos par le haut dans  $Z$ . Réciproquement, si  $y \in \hat{\uparrow}z \cap U_0$  pour tout  $z \in Z$  tel que  $x \in \hat{\uparrow}z \cap U_0$ , alors  $x \leq y$  : en effet, comme  $Z$  est un cpo continu,  $x$  est la borne supérieure d'une famille dirigée d'éléments  $z_i \ll x$  de  $Z$ ,  $i \in I$  ; pour chaque  $i \in I$ ,  $x \in \hat{\uparrow}z_i \cap U_0$ , donc  $y \in \hat{\uparrow}z_i \cap U_0$ , c'est-à-dire  $z_i \ll y$  ; en prenant les bornes supérieures,  $i \in I$ , on obtient  $x \leq y$ . On en conclut que le préordre de spécialisation de  $U_0$  est  $\leq$ .

Pour tous  $x, y \in U_0$ , si  $x \ll y$  alors  $x \ll_0 y$ , car  $U_0 \subseteq Z$ . Réciproquement, supposons  $x \ll_0 y$ . Soit  $(z_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'éléments de  $Z$ , avec  $y \leq \sup_{i \in I} z_i$ . Voyons cette famille comme un philtre, avec comme préordre sur  $I$  celui défini par  $i \sqsubseteq j$  si et seulement si  $z_i \leq z_j$ . Puisque  $U_0$  est un ouvert de Scott de  $Z$ , et  $y \in U_0$ , il existe  $j \in I$  tel que  $z_i \in U_0$  pour tout  $i$  tel que  $j \sqsubseteq i$ . Comme  $x \ll_0 y$ , et  $y \leq \sup_{i \in I} z_i = \sup_{i \in I / j \sqsubseteq i} z_i$ , il existe un  $i \in I$  avec  $j \sqsubseteq i$  tel que  $y \leq z_i$ . Donc  $x \ll y$ . Les relations  $\ll$  et  $\ll_0$  sont donc identiques.

Montrons que  $U_0$  muni de l'ordre  $\leq$  est un cpo continu. C'est un cpo, car pour toute famille dirigée  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $U_0$ ,  $\sup_{i \in I} x_i$  existe dans  $Z$ , est supérieur ou égal à n'importe quel  $x_i \in U_0$ , et est donc dans  $U_0$  car  $U_0$  est clos par le haut dans  $Z$ . Ensuite, tout élément  $x$  de  $U_0$ , en tant qu'élément du cpo continu  $Z$ , est la borne supérieure d'une famille  $(z_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $Z$  tels que  $z_i \ll x$ . Comme  $U_0$  est un ouvert (de Scott) de  $Z$ , il existe  $i \in I$  tel que  $z_i \in U_0$ . La famille des  $z_j$  tels que  $j \in I$  et  $z_i \leq z_j$  est alors clairement dirigée, est incluse dans  $U_0$ , et a  $x$  pour borne supérieure. Donc  $U_0$ , en tant qu'ensemble ordonné par  $\leq$ , est un cpo continu.

La topologie de Scott de  $U_0$  est alors engendrée par les ouverts de la forme  $\hat{\uparrow}_0x$ ,  $x \in U_0$ . Comme  $\ll_0$  est égal à  $\ll$ , et comme  $U_0$  est clos par le haut dans  $Z$ ,  $\hat{\uparrow}_0x = \hat{\uparrow}x = \hat{\uparrow}x \cap U_0$ , ce

dernier étant par construction un ouvert de la topologie induite par  $Z$ . Donc la topologie de Scott de  $U_0$  est moins fine que la topologie induite.

Réciproquement, pour tout  $z \in Z$ , montrons que l'ouvert  $\hat{\uparrow}z \cap U_0$  de  $U_0$  (avec la topologie induite) est un ouvert de Scott de  $U_0$ . D'abord,  $\hat{\uparrow}z \cap U_0$  est clos par le haut dans  $U_0$ . Ensuite, pour toute famille dirigée  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $U_0$  telle que  $\sup_{i \in I} x_i \in \hat{\uparrow}z \cap U_0$ , il existe un  $i \in I$  tel que  $x_i \in \hat{\uparrow}z \cap U_0$ , puisque  $\hat{\uparrow}z \cap U_0$  est un ouvert (de Scott) de  $Z$ . Donc la topologie de  $U_0$  est moins finie que sa topologie de Scott, et coïncide donc avec elle.  $\square$

La proposition 3.12.32 requiert que  $U_0$  soit un ouvert convexe. Nous pouvons généraliser cette proposition au cas de toute partie linéairement saturée (voir le corollaire 3.12.17). On y perdra cependant l'unicité.

**Lemme 3.12.34** *Soit  $Z$  un sous-espace d'un cône ordonné  $C$ , et supposons que  $Z$  soit un cpo continu pour le préordre  $\leq$  de  $C$ . Soit  $A$  une partie quelconque de  $Z$ , et  $U_0$  et  $U_1$  deux ouverts convexes de  $Z$  tels que  $A \subseteq U_0 \subseteq U_1$ . Pour toute probabilité continue  $\nu$  sur  $Z$  à support dans  $A$ ,  $\nu$  est à la fois dans  $\mathbf{V}_1(Z; U_0)$  et dans  $\mathbf{V}_1(Z; U_1)$ , et  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \text{bary}^{U_1}(\nu)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\nu$  est à support dans  $A$ , par définition  $\nu(U_0) = \nu(U_1) = \nu(Z)$ . Pour tout ouvert  $U$  contenant  $U_0$  ou  $U_1$ , on a donc aussi  $\nu(Z) = \nu(U_0) \leq \nu(U) \leq \nu(Z)$ , d'où  $\nu(U) = \nu(Z)$  :  $\nu$  est aussi à support dans  $U_0$  et à support dans  $U_1$ , c'est-à-dire  $\nu \in \mathbf{V}_1(Z; U_0)$  et  $\nu \in \mathbf{V}_1(Z; U_1)$ .

Par le lemme 3.12.33,  $U_0$  et  $U_1$  sont des ouverts convexes de  $Z$ , et  $U_0$  et  $U_1$  sont, en tant que sous-espaces topologiques de  $Z$ , des cpos continus pour l'ordre  $\leq$ . Par la proposition 3.12.32,  $\text{bary}^{U_0}$  est l'unique fonction Scott-continue de  $\mathbf{V}_1(Z; U_0)$  vers  $U_0$  telle que  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  pour toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $Z$  avec  $x_0, x_1, \dots, x_n \in U_0$ . Or, de nouveau par la proposition 3.12.32, la fonction qui à tout  $\nu \in \mathbf{V}_1(Z; U_0)$  associe  $\text{bary}^{U_1}(\nu)$  a la propriété que  $\text{bary}^{U_1}(\nu) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  pour toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $Z$  avec  $x_0, x_1, \dots, x_n \in U_1$  — donc en particulier lorsque  $x_0, x_1, \dots, x_n \in U_0$ . Par unicité de  $\text{bary}^{U_0}$ , on a  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \text{bary}^{U_1}(\nu)$  pour tout  $\nu \in \mathbf{V}_1(Z; U_0)$ , en particulier pour toute probabilité continue  $\nu$  sur  $Z$  à support dans  $A$ .  $\square$

**Proposition 3.12.35** *Soit  $Z$  un sous-espace d'un cône ordonné  $C$ , et supposons que  $Z$  soit un cpo continu pour le préordre  $\leq$  de  $C$ . Soit  $A$  une partie linéairement saturée de  $Z$ .*

*Pour toute probabilité continue  $\nu$  à support dans  $A$ , pour tout ouvert convexe  $U_0$  contenant  $A$ ,  $\text{bary}^{U_0}(\nu)$  est indépendant de  $U_0$ . La fonction  $\text{bary}^A$  qui à  $\nu$  associe  $\text{bary}^{U_0}(\nu)$  est une fonction Scott-continue de  $\mathbf{V}_1(Z; A)$  dans  $A$ , et  $\text{bary}^A(\nu) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$  pour toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $Z$  avec  $x_0, x_1, \dots, x_n \in A$ .*

*Pour toute probabilité continue  $\nu$  à support dans  $A$ , on appelle  $\text{bary}^A(\nu)$  le barycentre de  $\nu$ .*

Par unicité, les notions de barycentres de cette proposition et de la proposition 3.12.32 coïncident. Il n'y aura donc aucune ambiguïté quant à la définition des barycentres.

*Démonstration.* Pour toute probabilité continue  $\nu$  sur  $Z$  à support dans  $A$ , pour tout ouvert convexe  $U_0$  contenant  $A$ ,  $\nu$  est aussi à support dans  $U_0$ , et alors  $\text{bary}^{U_0}(\nu)$  est un élément de  $U_0$ . Par le lemme 3.12.34, de plus, cet élément ne dépend pas du choix de  $U_0$ . En effet, si  $U_0$  et  $U_1$

sont deux ouverts convexes contenant  $A$ , alors  $\text{bary}^{U_0}(\nu) = \text{bary}^{U_0 \cap U_1}(\nu) = \text{bary}^{U_1}(\nu)$ . Notons  $\text{bary}^A(\nu)$  cet élément. Par définition,  $\text{bary}^A(\nu)$  appartient à tout ouvert convexe  $U_0$  qui contient  $A$ . Comme  $A$  est linéairement saturé,  $\text{bary}^A(\nu)$  appartient à  $A$ .

Fixons un ouvert convexe  $U_0$  quelconque contenant  $A$ . Puisque  $\text{bary}^{U_0}$  est Scott-continue, il en est de même de  $\text{bary}^A$ . De plus, pour toute valuation simple normalisée  $\nu = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{x_i}$  sur  $Z$  avec  $x_0, x_1, \dots, x_n \in A$ , on a  $x_0, x_1, \dots, x_n \in U_0$ , donc  $\text{bary}^A(\nu) = \text{bary}^{U_0}(\nu) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot x_i$ .  
□

Ceci s'applique notamment lorsque  $A$  est un compact saturé convexe  $Q$  de  $Z$ , et que  $C$  est un cône continu additif. Dans ce cas en effet,  $Q$  est linéairement saturé par le corollaire 3.12.17.

La construction  $\text{bary}^A$  ( $A$  une partie linéairement saturée) fournit une généralisation de la notion de barycentre (lemme 3.12.20). L'exercice suivant montre que l'hypothèse selon laquelle  $A$  est linéairement saturée, et pas juste convexe est nécessaire. Autrement dit, on peut trouver des parties convexe (non linéairement saturées) telle que toute notion raisonnable de barycentre d'une probabilité continue à support dans  $A$  doit produire au moins un barycentre hors de  $A$ .

▷ **Exercice 3.8**

Soit  $X$  le cpo continu  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , avec l'ordre évident. Soit  $C$  le cône ordonné des probabilités continues sur  $X$ , et  $Z = C$ . Montrer que  $C$  est un cône continu additif. Soit  $A$  l'enveloppe convexe des éléments de la forme  $\delta_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\delta_{\delta_\omega}$  est une probabilité continue à support dans  $A$ , mais que son barycentre  $\text{bary}(\delta_{\delta_\omega})$  (au sens du lemme 3.12.22) n'est pas dans  $A$ .



# Chapitre 4

## L'intégrale de Choquet

L'outil fondamental dans l'étude des mesures et des probabilités est l'intégration. Il existe plusieurs notions d'intégrale. Une qui est naturelle dans le cadre des capacités est l'*intégrale de Choquet*, que nous définissons et dont nous développons les principales propriétés dans ce chapitre.

### 4.1 Définition de l'intégrale de Choquet

Rappelons qu'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est *bornée* si et seulement si l'image de  $f$  est incluse dans un intervalle  $[a, b]$ .

**Définition 4.1.1 (Intégrale de Choquet)** Soit  $X$  un espace topologique,  $\nu$  un jeu sur  $X$ , et  $f$  une fonction continue bornée de l'espace topologique  $X$  vers  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie de Scott. L'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\nu$  est définie par

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \quad (4.1)$$

où les deux intégrales du côté droit sont des intégrales impropres de Riemann.

Nous pouvons naturellement voir aussi les intégrales du côté droit comme des intégrales de Kurzweil-Henstock, mais il se trouve que la notion d'intégrale de Riemann suffit ici.

Ceci est bien défini. D'abord,  $]t, +\infty[$  est un ouvert de Scott de  $\mathbb{R}$  (et ils sont tous de cette forme, à part  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}$ ). Comme  $f$  est continue,  $f^{-1}]t, +\infty[$  est un ouvert de  $X$ , et donc  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[)$  est bien défini. De plus, la fonction qui à  $t \in \mathbb{R}$  associe  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[)$  est décroissante, donc Riemann-intégrable. Finalement, comme  $f$  est bornée, l'image de  $f$  est incluse dans un intervalle  $[a, b]$ . Supposons sans perte de généralité que  $a < 0$  et  $b > 0$ . Alors (4.1) se réécrit comme la somme d'intégrales :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_0^b \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_a^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt$$

Il sera intéressant de réaliser que lorsque  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , la formule (4.1) se simplifie en :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt$$

puisque pour tout  $t \leq 0$ ,  $f^{-1}]t, +\infty[ = X$  dans ce cas.

On observe tout de suite :

**Lemme 4.1.2** *L'intégrale de Choquet est croissante en la fonction intégrée : si  $f \leq g$  alors*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu \leq \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

pour tout jeu  $\nu$ .

*Démonstration.* Comme  $f \leq g$ ,  $f^{-1}]t, +\infty[ \subseteq g^{-1}]t, +\infty[$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\nu$  est monotone,  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[) \leq \nu(g^{-1}]t, +\infty[)$ , d'où la croissance.  $\square$

Soit  $\chi_U$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $U$  :  $\chi_U(x) = 1$  si  $x \in U$ ,  $\chi_U(x) = 0$  sinon. La fonction  $\chi_U$  est continue si et seulement  $U$  est ouvert. (On rappelle que  $\chi_U : X \rightarrow \mathbb{R}$  est vue en considérant  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie de Scott, pas sa topologie usuelle.)

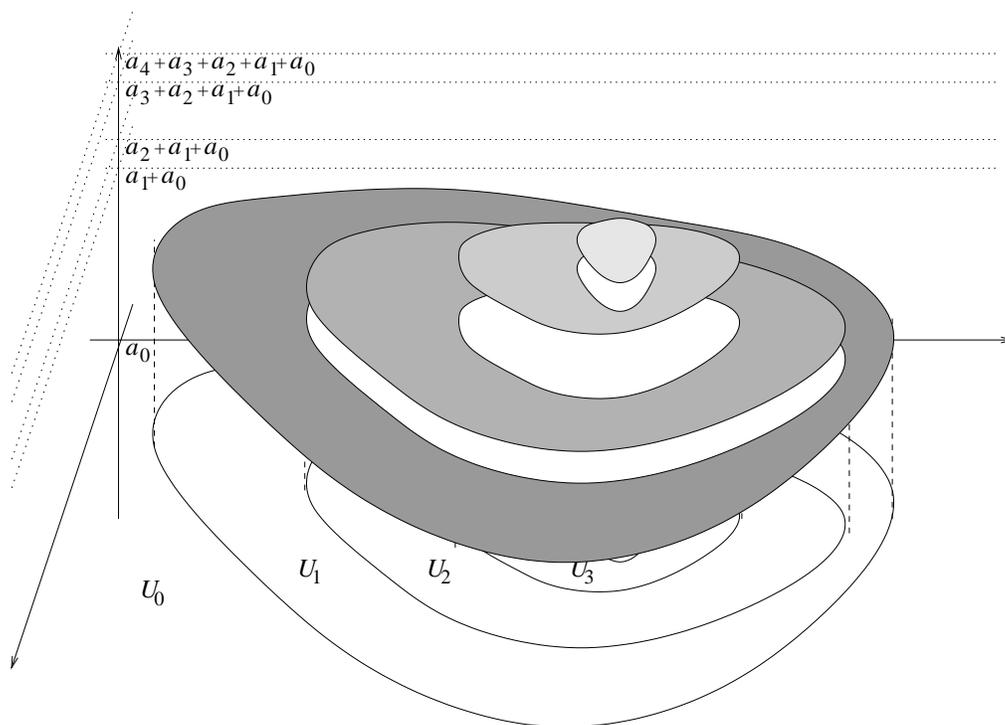


FIG. 4.1 – Une fonction étagée

**Définition 4.1.3** Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite étagée si et seulement si est de la forme  $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ , où  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  est une suite décroissante d'ouverts, et  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ .

Toute fonction étagée est continue et bornée. On pourra se reporter à la figure 4.1 pour une illustration, où la famille  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  est représentée sous forme de patatoïdes concentriques dans le plan horizontal.

**Proposition 4.1.4** Pour toute fonction étagée  $f = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ ,

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \sum_{i=0}^n a_i \nu(U_i)$$

*Démonstration.* Supposons sans perte de généralité que  $a_1, \dots, a_n > 0$ . Il existe un indice maximal  $j$  tel que  $a_0 + a_1 + \dots + a_{j-1} \leq 0$ . Si  $j \leq n$ , alors  $a_0 + a_1 + \dots + a_j > 0$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\nu(f^{-1}t, +\infty[)$  vaut  $\nu(X) = \nu(U_0)$  pour  $t \in ]-\infty, a_0[$ ,  $\nu(U_1)$  pour  $t \in [a_0, a_0 + a_1[$ ,  $\nu(U_2)$  pour  $t \in [a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2[$ ,  $\dots$ ,  $\nu(U_{j-1})$  pour  $t \in [a_0 + a_1 + \dots + a_{j-2}, a_0 + a_1 + \dots + a_{j-1}[$ ,  $\nu(U_j)$  pour  $t \in [a_0 + a_1 + \dots + a_{j-1}, a_0 + a_1 + \dots + a_j[$ ,  $\nu(U_{j+1})$  pour  $t \in [a_0 + a_1 + \dots + a_j, a_0 + a_1 + \dots + a_{j+1}[$ ,  $\dots$ ,  $\nu(U_n)$  pour  $t \in [a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}, a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n[$ , et 0 pour  $t \in [a_0 + a_1 + \dots + a_n, +\infty[$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu &= (a_0 + a_1 + \dots + a_j) \nu(U_j) + a_{j+1} \nu(U_{j+1}) + \dots + a_n \nu(U_n) \\ &\quad + a_1 (\nu(U_1) - \nu(X)) + a_2 (\nu(U_2) - \nu(X)) + \dots + \\ &\quad \quad a_{j-1} (\nu(U_{j-1}) - \nu(X)) + (0 - a_0 - a_1 - \dots - a_{j-1}) (\nu(U_j) - \nu(X)) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \nu(U_i) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} - a_0 - a_1 - \dots - a_{j-1}) \nu(X) \end{aligned}$$

D'où le résultat, puisque  $X = U_0$ . □

Nous allons utiliser ce résultat souvent, en compagnie du lemme 4.1.6 ci-dessous. Nous commençons par démontrer un lemme servant à simplifier un peu l'argument. Ce lemme sera généralisé à la proposition 4.4.3.

**Lemme 4.1.5** Pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , pour toute constante  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{x \in X} (c + f(x)) d\nu = c\nu(X) + \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

*Démonstration.* 1. Supposons d'abord  $c \geq 0$ . Notons  $f + c$  la fonction qui à  $x$  associe  $f(x) + c$ , alors :

$$\begin{aligned}
 \int_{x \in X} (c + f(x)) d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu((f + c)^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu((f + c)^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t - c, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t - c, +\infty[) - \nu(X)] dt \\
 &= \int_{-c}^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^{-c} [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \\
 &\quad \text{par changement de variable } t \mapsto t + c \\
 &= \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{-c}^0 \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt - \int_{-c}^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \\
 &\quad \text{en utilisant la relation de Chasles} \\
 &= \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{-c}^0 \nu(X) dt = \int_{x \in X} f(x) d\nu + c\nu(X)
 \end{aligned}$$

puisque l'intégrale de Riemann est linéaire en la fonction intégrée.

2. Lorsque  $c < 0$ , on a :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{x \in X} (-c + c + f(x)) d\nu = -c\nu(X) + \int_{x \in X} (c + f(x)) d\nu$$

par le point 1., et l'on conclut. □

**Lemme 4.1.6** *Toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est la borne supérieure d'une famille dirigée de fonctions étagées. Plus précisément, soit  $a = \inf_{x \in X} f(x)$ ,  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ , alors la famille*

$$f_K(x) = a + \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^{\lfloor (b-a)2^K \rfloor} \chi_{f^{-1}]a + \frac{k}{2^K}, +\infty[}(x)$$

*pour  $K \in \mathbb{N}$  forme une suite croissante de fonctions de borne supérieure  $f$ . Plus précisément,  $f_K$  tend uniformément vers  $f$ , au sens où*

$$f(x) - \frac{1}{2^K} \leq f_K(x) \leq f(x)$$

*pour tout  $x$ . De plus,*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{x \in X} f_K(x) d\nu$$

*Démonstration.* D'abord, si l'on a démontré le lemme lorsque  $a = 0$ , on en déduit le lemme dans le cas général en utilisant le lemme 4.1.5. On peut donc supposer  $a = 0$ .

Pour tout  $c > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , soit

$$f_{\epsilon,c}(x) = \epsilon \sum_{k=1}^{\lfloor c/\epsilon \rfloor} \chi_{f^{-1}]k\epsilon, +\infty[}(x)$$

Clairement,  $f_{\epsilon,c}$  est étagée. De plus,  $f_K = f_{1/2^K, b}$ .

Pour tout  $x \in X$ , soit  $j = \lceil f(x)/\epsilon \rceil$ . Alors  $\chi_{f^{-1}]k\epsilon, +\infty[}(x) = 1$  si et seulement si  $f(x) > k\epsilon$ , si et seulement si  $j > k$ . Donc  $f_{\epsilon,c}(x) = \epsilon \min(\lfloor c/\epsilon \rfloor, j - 1)$ . En particulier,  $f_{\epsilon,c}(x) \leq \epsilon(j - 1) \leq f(x)$ , car  $j \leq f(x)/\epsilon + 1$ .

Pour  $\epsilon = 1/2^K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , on note que pour tout réel  $z$ ,  $\lceil 2z \rceil \geq 2\lceil z \rceil - 1$ . En effet, soit  $k = \lceil 2z \rceil$ , alors  $\lceil z \rceil = \lceil k/2 \rceil$ , et il suffit de montrer que  $k \geq 2\lceil k/2 \rceil - 1$ , ce qui est évident. On en déduit que :

$$\begin{aligned} f_{1/2^{K+1}, c}(x) &= \frac{1}{2^{K+1}} \min(c2^{K+1}, \lceil f(x)2^{K+1} \rceil - 1) \\ &= \frac{1}{2^K} \min\left(c2^K, \frac{\lceil f(x)2^{K+1} \rceil - 1}{2}\right) \\ &\geq \frac{1}{2^K} \min(c2^K, \lceil f(x)2^K \rceil - 1) = f_{1/2^K, c}(x) \end{aligned}$$

Pour  $c$  fixé, disons égal à  $b$ ,  $f_{1/2^K, c}$  est donc une suite croissante, donc  $f_K$  est une suite croissante de fonctions.

Ensuite, pour tout  $x \in X$ ,  $f_{1/2^K, c}(x)$  s'approche arbitrairement près de  $f(x)$ . Si  $c \geq f(x)$  (par exemple  $c = b$ ),

$$\begin{aligned} f(x) - f_{1/2^K, c}(x) &= f(x) - \frac{1}{2^K} \min(c2^K, \lceil f(x)2^K \rceil - 1) \\ &\leq f(x) - \frac{1}{2^K} \min(c2^K, f(x)2^K - 1) \\ &\leq f(x) - \frac{1}{2^K} (f(x)2^K - 1) \quad \text{puisque } c \geq f(x) \\ &\leq \frac{1}{2^K} \end{aligned}$$

Donc  $f$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $f_{1/2^K, c}$ ,  $K \in \mathbb{N}$ ,  $c > 0$ .

De plus, par la proposition 4.1.4,

$$\int_{x \in X} f_{\epsilon,c}(x) d\nu = \sum_{k=1}^{\lfloor c/\epsilon \rfloor} \epsilon \nu(f^{-1}]k\epsilon, +\infty[)$$

Par le lemme 4.1.2, l'intégrale de Choquet de  $f_{\epsilon,c}$  est inférieure ou égal à l'intégrale de Choquet de  $f$ . D'autre part, la fonction qui à  $t$  associe  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[)$  étant décroissante, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\epsilon \nu(f^{-1}]k\epsilon, +\infty[) \geq \int_{k\epsilon}^{(k+1)\epsilon} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt$ . Posons  $c = b$ , de sorte que lorsque  $k = \lfloor c/\epsilon \rfloor$ , la

quantité  $b' = (k + 1)\epsilon$  soit supérieure à  $b$ . Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f_{\epsilon, c}(x) d\nu &\geq \int_{\epsilon}^{b'} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &= \int_{\epsilon}^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \quad \text{puisque } f^{-1}]t, +\infty[ = \emptyset \text{ dès que } t \geq b \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_0^{\epsilon} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &\geq \int_{x \in X} f(x) d\nu - \epsilon \nu(X) \end{aligned}$$

puisque  $f^{-1}]t, +\infty[ \subseteq X$  et  $\nu$  est monotone. □

▷ **Exercice 4.1**

En utilisant l'intégrale de Riemann-Stieltjes, on peut définir une intégrale de Choquet-Stieltjes, comme suit. Pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , pour toute fonction croissante patch-continue  $G$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , posons

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu_G = \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dG(t) + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dG(t)$$

Montrer que l'intégrale de Choquet-Stieltjes n'est rien d'autre qu'une intégrale de Choquet ordinaire :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu_G = \int_{x \in X} G(f(x)) d\nu$$

Indication : on pourra observer que  $(G \circ f)^{-1}]G(t), +\infty[$  coïncide avec  $f^{-1}]t, +\infty[$  sauf sur un ensemble qui contribue une somme nulle aux diverses intégrales de Riemann-Stieltjes impliquées, puis appliquer la formule de changement de variables des intégrales de Riemann-Stieltjes.

▷ **Exercice 4.2**

En utilisant l'intégrale de Riemann-Stieltjes, montrer que l'on peut aussi exprimer l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\nu$  comme :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = - \int_0^{+\infty} t d\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \int_0^{+\infty} t d[\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)]$$

▷ **Exercice 4.3**

On rappelle que pour toute fonction croissante  $G$  de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , la valuation  $\tilde{G}$  sur  $[a, b]$  muni de sa topologie d'Alexandrov est définie par :  $\tilde{G}[t, b] = \tilde{G}[t, b] = G(b) - G(t)$ . Supposons  $G$  patch-continue. Montrer alors que, pour toute fonction Scott-continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  est  $G$ -intégrable et :

$$\int_{x \in [a, b]} f(x) d\tilde{G} = \int_a^b f(t) dG(t)$$

## 4.2 Propriétés de l'intégrale de Choquet

Nous allons maintenant montrer que l'intégrale de Choquet a essentiellement les mêmes propriétés que l'intégrale usuelle de Riemann, de Lebesgue, ou de Kurzweil-Henstock, à part une : l'intégrale de Choquet n'est en général pas additive.

**Proposition 4.2.1** *Soit  $\nu$  un jeu continu sur  $X$ . L'intégrale de Choquet est Scott-continue en la fonction intégrée : pour toute famille dirigée  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions continues bornées de borne supérieure  $f$ ,*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \sup_{i \in I} \int_{x \in X} f_i(x) d\nu$$

Nous avons montré un résultat proche dans le lemme 4.1.6, qui s'applique au cas où les  $f_i$  sont certaines fonctions étagées, mais où  $\nu$  n'est pas nécessairement continue.

*Démonstration.* Soit  $g_i$  la fonction qui à  $t$  associe  $\nu(f_i^{-1}]t, +\infty[)$ . Si  $f_i \leq f_j$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_i^{-1}]t, +\infty[ \subseteq f_j^{-1}]t, +\infty[$ , donc comme  $\nu$  est monotone,  $g_i(t) \leq g_j(t)$ . En particulier, la famille  $(g_i)_{i \in I}$  est dirigée. Comme  $\nu$  est continue,  $\sup_{i \in I} g_i(t) = \nu(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}]t, +\infty[)$ . Or  $x \in \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}]t, +\infty[$  si et seulement s'il existe un  $i \in I$  tel que  $f_i(x) > t$ . Or ceci est équivalent à  $f(x) > t$ . Donc  $\sup_{i \in I} g_i(t) = \nu(f^{-1}]t, +\infty[)$ . De par la définition 4.1.1,

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \sup_{i \in I} g_i(t) dt + \int_{-\infty}^0 [\sup_{i \in I} g_i(t) - \nu(X)] dt \\ &= \sup_{i \in I} \int_0^{+\infty} g_i(t) dt + \sup_{i \in I} \int_{-\infty}^0 [g_i(t) - \nu(X)] dt \end{aligned}$$

par le théorème de Scott-continuité pour les intégrales de Riemann de fonctions décroissantes. L'addition étant Scott-continue, la somme des deux bornes supérieures ci-dessus se réécrit

$$\sup_{i \in I} \left( \int_0^{+\infty} g_i(t) dt + \int_{-\infty}^0 [g_i(t) - \nu(X)] dt \right)$$

Mais ceci n'est rien d'autre que la borne supérieure des intégrales de Choquet des  $f_i$ ,  $i \in I$ .  $\square$

**Proposition 4.2.2** *Intégrer par rapport à un jeu d'unanimité revient à calculer une borne inférieure :*

$$\int_{x \in X} f(x) d\mathbf{u}_A = \inf_{x \in A} f(x)$$

*En particulier,*

$$\int_{x \in X} f(x) d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

*Démonstration.* En utilisant la définition,

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x) d\mathbf{u}_A &= \int_0^{+\infty} \mathbf{u}_A(f^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\mathbf{u}_A(f^{-1}]t, +\infty[) - \mathbf{u}(X)] dt \\ &= \int_{t \geq 0 / A \subseteq f^{-1}]t, +\infty[} dt + \int_{t < 0 / A \not\subseteq f^{-1}]t, +\infty[} -dt \end{aligned}$$

Or  $A \subseteq f^{-1}]t, +\infty[$  si et seulement si pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) > t$ . Ceci est équivalent à  $\inf_{x \in A} f(x) > t$  ou  $\inf_{x \in A} f(x) \geq t$ . Si  $\inf_{x \in A} f(x) \geq 0$ , alors l'intégrale de droite est nulle et l'intégrale de gauche est  $\int_0^{\inf_{x \in A} f(x)} dt = \inf_{x \in A} f(x)$ . Si  $\inf_{x \in A} f(x) < 0$ , alors c'est l'intégrale de gauche qui est nulle, et l'intégrale de droite vaut  $\int_{\inf_{x \in A} f(x)}^0 -dt = \inf_{x \in A} f(x)$ .  $\square$

Nous verrons au lemme 6.1.6 qu'il existe un autre jeu, le jeu d'exemple  $\epsilon_A$ , par rapport auquel l'intégration revient cette fois à calculer une borne supérieure.

**Proposition 4.2.3** *L'intégrale de Choquet sur les fonctions positives est croissante en le jeu : si  $\nu \leq \nu'$ , c'est-à-dire si  $\nu(U) \leq \nu'(U)$  pour tout ouvert  $U$ , alors pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu \leq \oint_{x \in X} f(x) d\nu'$$

*Démonstration.* Comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , la définition de l'intégrale de Choquet se simplifie en

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu = \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt$$

Maintenant, si  $\nu \leq \nu'$ , alors  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[) \leq \nu'(f^{-1}]t, +\infty[)$  pour tout  $t$ , d'où le résultat.  $\square$

La proposition n'est pas vraie pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  en général. Par exemple, considérons  $\nu = \frac{1}{2}\mathbf{u}_A$  et  $\nu' = \mathbf{u}_A$ . On a bien  $\nu \leq \nu'$ , mais si l'on prend pour  $f$  la fonction constante égale à  $-1$ ,

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x) d\nu &= \frac{1}{2} \sup_{x \in A} f(x) = -\frac{1}{2} \\ \oint_{x \in X} f(x) d\nu' &= \sup_{x \in A} f(x) = -1 \end{aligned}$$

en utilisant la proposition 4.2.2. Un autre cas où l'intégrale de Choquet est croissante est celui des jeux normalisés :

**Proposition 4.2.4** *L'intégrale de Choquet est croissante en le jeu normalisé : si  $\nu$  et  $\nu'$  sont normalisés, et  $\nu \leq \nu'$ , alors pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,*

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu \leq \oint_{x \in X} f(x) d\nu'$$

*Démonstration.* Si  $\nu \leq \nu'$ , alors d'une part  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[) \leq \nu'(f^{-1}]t, +\infty[)$  pour tout  $t \geq 0$ . D'autre part, on a  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X) = \nu(f^{-1}]t, +\infty[) - 1 \leq \nu'(f^{-1}]t, +\infty[) - 1 = \nu'(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu'(X)$  pour tout  $t \leq 0$ , puisque  $\nu$  et  $\nu'$  sont normalisées.  $\square$

En fait, on a même plus :

**Proposition 4.2.5** *L'intégrale de Choquet sur les fonctions positives est Scott-continue en le jeu : pour toute famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$  de jeux ayant une borne supérieure, pour toute fonction  $f$  continue bornée à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , alors*

$$\int_{x \in X} f(x) d \sup_{i \in I} \nu_i = \sup_{i \in I} \int_{x \in X} f(x) d\nu_i$$

*De plus, l'intégrale de Choquet est Scott-continue en le jeu normalisé : l'égalité ci-dessus reste vraie pour toute fonction continue bornée à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , du moment que tous les jeux  $\nu_i$  sont normalisés.*

*Démonstration.* Pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\nu_i(f^{-1}]t, +\infty[))_{i \in I}$  est une famille dirigée ayant une borne supérieure. On conclut par le théorème de Scott-continuité pour les intégrales de Riemann de fonctions décroissantes.  $\square$

Nous verrons en proposition 6.3.15 que l'intégrale de Choquet est aussi Scott-cocontinue, au sens où elle permute non seulement aux bornes supérieures dirigées, mais aussi aux bornes inférieures filtrantes, dans les mêmes conditions.

**Proposition 4.2.6** *L'intégrale de Choquet est linéaire en le jeu :*

$$\int_{x \in X} f(x) d(a\nu + a'\nu') = a \int_{x \in X} f(x) d\nu + a' \int_{x \in X} f(x) d\nu'$$

*pour tous jeux  $\nu$  et  $\nu'$ .*

*Démonstration.* Évident, car l'intégrale de Riemann est elle-même linéaire en la fonction intégrée.  $\square$

En particulier, on peut s'intéresser aux jeux de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{A_i}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Noter que l'on autorise les coefficients  $a_i$  à être négatifs : par exemple, le jeu convexe non totalement convexe de la section 2.8 s'écrit  $\frac{1}{2} \mathbf{u}_{\{1,2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\{1,3\}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\{2,3\}} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\{1,2,3\}}$ . Mais  $-\frac{1}{2} \mathbf{u}_{\{1,2,3\}}$ , n'étant pas à valeurs positives, n'est pas une capacité.

On déduit immédiatement de la proposition 4.2.2 et de la proposition 4.2.6 :

**Corollaire 4.2.7** *Si  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{A_i}$ , alors*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \inf_{x \in A_i} f(x)$$

**Définition 4.2.8** *Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ , et  $\nu$  une capacité sur  $X$ . L'image directe  $f[\nu]$  de  $\nu$  par  $f$  est la capacité qui à tout ouvert  $U$  de  $Y$  associe  $\nu(f^{-1}(U))$ .*

**Lemme 4.2.9** Si  $\nu$  est monotone, resp. modulaire, resp. continue, resp. convexe, resp. concave, resp. totalement convexe, resp. totalement concave, resp. sous-normalisé, resp. normalisé, alors il en est de même de  $f[\nu]$ .

*Démonstration.* Évident, car l'image réciproque par  $f$  de toute union est l'union des images réciproques respectives, et de même pour les intersections.  $\square$

De plus,

**Lemme 4.2.10** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ . La fonction qui à  $\nu$  associe  $f[\nu]$  est Scott-continue.

*Démonstration.* Si  $\nu$  est la borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$ , alors pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ ,  $f[\nu](U) = \nu(f^{-1}(U)) = \sup_{i \in I} \nu_i(f^{-1}(U)) = \sup_{i \in I} f[\nu_i](U)$ , donc  $f[\nu] = \sup_{i \in I} f[\nu_i]$ .  $\square$

**Proposition 4.2.11 (Changement de variables)** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ ,  $g$  une fonction continue bornée de  $Y$  vers  $\mathbb{R}$ , alors

$$\oint_{x \in X} g(f(x)) d\nu = \oint_{y \in Y} g(y) df[\nu]$$

*Démonstration.* Par la définition 4.1.1,

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} g(f(x)) d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu((g \circ f)^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu((g \circ f)^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \\ &= \int_0^{+\infty} f[\nu](g^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [f[\nu](g^{-1}]t, +\infty[) - f[\nu](Y)] dt \\ &= \oint_{y \in Y} g(y) df[\nu] \end{aligned}$$

car  $(g \circ f)^{-1}]t, +\infty[ = f^{-1}(g^{-1}]t, +\infty[)$ , et  $f[\nu](Y) = \nu(f^{-1}(Y)) = \nu(X)$ .  $\square$

En général, l'intégrale de Choquet n'est pas linéaire en la fonction intégrée, sauf si le jeu  $\nu$  est une valuation. Ceci est manifeste dans la formule ci-dessus, où l'utilisation de bornes inférieures détruit la linéarité : comme  $\inf_{x \in A} f(x) + g(x) \geq \inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x)$ , le mieux que l'on puisse espérer, c'est que l'intégrale de Choquet d'une somme soit supérieure ou égale à la somme des intégrales. Ce sera effectivement le cas. Les résultats suivants sont bien connus dans le cas d'un espace  $X$  fini, voir par exemple Schmeidler (1989).

**Proposition 4.2.12** L'intégrale de Choquet est positivement homogène :

$$\oint_{x \in X} \alpha f(x) d\nu = \alpha \oint_{x \in X} f(x) d\nu$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , et tout jeu  $\nu$ .

*Démonstration.* Si  $\alpha = 0$ , le résultat est évident. Si  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} \alpha f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu((\alpha f)^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu((\alpha f)^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t/\alpha, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t/\alpha, +\infty[) - \nu(X)] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t', +\infty[) \alpha dt' + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t', +\infty[) - \nu(X)] \alpha dt' \\
&= \alpha \int_{x \in X} f(x) d\nu
\end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable  $t' = t/\alpha$ .  $\square$

On peut se demander ce qui se passerait si  $\alpha$  était négatif. Le problème se résume à examiner la valeur de

$$- \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

c'est-à-dire à examiner le cas  $\alpha = -1$ . Nous verrons la réponse à cette question en proposition 6.2.14. Cette réponse est, au passage, relativement complexe.

### 4.3 Convexité, concavité

**Proposition 4.3.1** *Soit  $\nu$  un jeu convexe. L'intégrale de Choquet par rapport à  $\nu$  est sur-additive :*

$$\int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu \geq \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

*En conséquence, l'intégrale de Choquet est concave : pour tous  $\alpha, \beta \geq 0$  avec  $\alpha + \beta = 1$ ,*

$$\int_{x \in X} \alpha f(x) + \beta g(x) d\nu \geq \alpha \int_{x \in X} f(x) d\nu + \beta \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

*Démonstration.* 1. On démontre d'abord la proposition dans le cas où  $f$  est de la forme  $a + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ , et où  $g$  est une fonction constante égale à  $b \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, on a en fait clairement l'égalité.

2. On démontre ensuite la proposition dans le cas où  $f$  est de la forme  $a + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ , et où  $g = \epsilon \chi_V$ .

Pour ce faire, posons  $W_1 = V \cup U_1$ ,  $W_k = (U_{k-1} \cap V) \cup U_k$  pour  $2 \leq k \leq m$ , et  $W_{m+1} = U_m \cap V$ . Posons  $h = a + \epsilon \sum_{k=1}^{m+1} \chi_{W_k}$ . On peut en réalité simplifier cette définition en étendant la notation  $U_i$  de sorte que  $U_i = X$  pour tout  $i \leq 0$ , et  $U_i = \emptyset$  pour tout  $i \geq m+1$ . Alors on peut poser  $W_k = (U_{k-1} \cap V) \cup U_k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , ce qui étend la définition ci-dessus.

On note d'abord que  $W_k$  forme une suite décroissante, car  $U_k$  en forme déjà une,  $k \in \mathbb{Z}$ ; en particulier  $W_1 \supseteq \dots \supseteq W_{m+1}$ .

Pour tout  $x \in X$ , soit  $k$  le plus grand indice tel que  $x \in W_k$ . Ceci existe parce que  $x \in W_0$ , et que pour  $k$  assez grand,  $W_k = \emptyset$ . Alors  $x \in W_k$  et  $x \notin W_{k+1}$ , donc soit  $x \in V$  et  $x \in U_{k-1}$  et  $x \notin U_k$ , soit  $x \notin V$  et  $x \in U_k$  et  $x \notin U_{k+1}$ . Si  $x \in V$ ,  $f(x) = a + (k-1)\epsilon$  et  $g(x) = \epsilon$ ; si  $x \notin V$ ,  $f(x) = a + k\epsilon$  et  $g(x) = 0$ . Dans les deux cas,  $f(x) + g(x) = a + k\epsilon = h(x)$ . Donc  $h = f + g$ .

En exploitant cette identité et la proposition 4.1.4, on obtient

$$\int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu = a\nu(X) + \epsilon \sum_{k=1}^{m+1} \nu(W_k)$$

Comme  $\nu$  est convexe,  $\nu(W_k) \geq \nu(U_{k-1} \cap V) + \nu(U_k) - \nu(U_{k-1} \cap V \cap U_k) = \nu(U_{k-1} \cap V) + \nu(U_k) - \nu(U_k \cap V)$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu &\geq a\nu(X) + \epsilon \sum_{k=1}^{m+1} [\nu(U_{k-1} \cap V) + \nu(U_k) - \nu(U_k \cap V)] \\ &= a\nu(X) + \epsilon\nu(U_0 \cap V) - \epsilon\nu(U_{m+1} \cap V) + \epsilon \sum_{k=1}^{m+1} \nu(U_k) \\ &= \epsilon\nu(V) + a\nu(X) + \epsilon \sum_{k=1}^{m+1} \nu(U_k) = \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu \end{aligned}$$

puisque  $U_0 = X$ , et  $U_{m+1} = \emptyset$ .

3. On peut maintenant en déduire la proposition dans le cas où  $f$  est de la forme  $a + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i}$  et  $g$  de la forme  $b + \epsilon \sum_{j=1}^n \chi_{V_j}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ ,  $V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n$ . C'est par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , c'est par le point 1. ci-dessus. Sinon,

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu &= \int_{x \in X} (a + b + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i} + \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} \chi_{V_j})(x) + \epsilon \chi_{V_n}(x) d\nu \\ &\geq \int_{x \in X} (a + b + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i} + \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} \chi_{V_j})(x) d\nu + \epsilon\nu(V_n) \quad \text{par 2.} \\ &\geq \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} \chi_{V_j}(x) d\nu + \epsilon\nu(V_n) \quad \text{par récurrence} \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu + \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} \nu(V_j) + \epsilon\nu(V_n) \quad \text{par proposition 4.1.4} \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu \quad \text{par proposition 4.1.4} \end{aligned}$$

4. Dans le cas général, par le lemme 4.1.6,  $f$  est la borne supérieure de la suite des  $f_K$ , et  $g$  celle de la suite des  $g_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ . De plus,  $f_K$  et  $g_K$  sont de la forme utilisée au point 3. ci-dessus.

Donc

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu &\geq \int_{x \in X} f_K(x) + g_K(x) d\nu \quad \text{par le lemme 4.1.2} \\ &\geq \int_{x \in X} f_K(x) d\nu + \int_{x \in X} g_K(x) d\nu \quad \text{par le point 3.} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $K$ , et comme par le lemme 4.1.6,

$$\sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{x \in X} f_K(x) d\nu + \int_{x \in X} g_K(x) d\nu = \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

on déduit la sur-additivité. La concavité s'en déduit par la proposition 4.2.12.  $\square$

On a le résultat symétrique pour les jeux concaves. La démonstration est similaire, jusqu'à la fin où une petite différence se fait jour.

**Proposition 4.3.2** *Soit  $\nu$  un jeu concave. L'intégrale de Choquet par rapport à  $\nu$  est sous-additive :*

$$\int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu \leq \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

En conséquence, l'intégrale de Choquet est convexe : pour tous  $\alpha, \beta \geq 0$  avec  $\alpha + \beta = 1$ ,

$$\int_{x \in X} \alpha f(x) + \beta g(x) d\nu \leq \alpha \int_{x \in X} f(x) d\nu + \beta \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

*Démonstration.* Comme pour la proposition 4.3.1.

1. On a égalité si  $f = a + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ , et où  $g$  est une fonction constante égale à  $b \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $f$  est de la forme  $a + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ , et  $g = \epsilon \chi_V$ , on a l'inégalité souhaitée. La démonstration est similaire, à la différence que maintenant  $\nu(W_k) \leq \nu(U_{k-1} \cap V) + \nu(U_k) - \nu(U_{k-1} \cap V \cap U_k) = \nu(U_{k-1} \cap V) + \nu(U_k) - \nu(U_k \cap V)$  car  $\nu$  est concave.

3. On en déduit la proposition dans le cas où  $f$  est de la forme  $a + \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{U_i}$  et  $g$  de la forme  $b + \epsilon \sum_{j=1}^n \chi_{V_j}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ ,  $V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n$ . C'est encore une fois par récurrence sur  $n$ , en utilisant 1. si  $n = 0$ , sinon 2., l'hypothèse de récurrence et la proposition 4.1.4.

4. Dans le cas général, par le lemme 4.1.6,  $f$  est la borne supérieure de la suite des  $f_K$ , et  $g$  celle de la suite des  $g_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ . De plus,  $f_K$  et  $g_K$  sont de la forme utilisée au point 3. ci-dessus.

Donc

$$\begin{aligned} &\int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu \\ &= \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{x \in X} f_K(x) d\nu + \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{x \in X} g_K(x) d\nu \quad \text{par le lemme 4.1.6} \\ &= \sup_{K \in \mathbb{N}} \left[ \int_{x \in X} f_K(x) d\nu + \int_{x \in X} g_K(x) d\nu \right] \quad \text{car } + \text{ est Scott-continue} \\ &\geq \sup_{K \in \mathbb{N}} \left[ \int_{x \in X} f_K(x) + g_K(x) d\nu \right] \quad \text{par 3.} \end{aligned}$$

Par le lemme 4.1.6,  $f_K$  tend uniformément vers  $f$ , et  $g_K$  tend uniformément vers  $g$ , en particulier  $f_K(x) \geq f(x) - 1/2^K$  et  $g_K(x) \geq g(x) - 1/2^K$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu &\geq \sup_{K \in \mathbb{N}} \left[ \int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu - \frac{2}{2^K} \nu(X) \right] \\ &= \int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. □

On en déduit :

**Corollaire 4.3.3** *Soit  $\nu$  une valuation. L'intégrale de Choquet par rapport à  $\nu$  est linéaire : pour tous  $\alpha, \beta \geq 0$ ,*

$$\int_{x \in X} \alpha f(x) + \beta g(x) d\nu = \alpha \int_{x \in X} f(x) d\nu + \beta \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

*Démonstration.* C'est le cas lorsque  $\alpha + \beta = 1$  par la proposition 4.3.1 et la proposition 4.3.2. Le cas général se réduit à ce cas particulier car l'intégrale de Choquet est positivement homogène (proposition 4.2.12). □

## 4.4 Comonotonie

En fait, il existe un cas important où l'intégrale de Choquet est linéaire. Définissons d'abord :

**Définition 4.4.1** *Deux fonctions  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sont comonotones si et seulement s'il n'existe aucun couple de points  $x, x' \in X$  tels que  $f(x) < f(x')$  et  $g(x) > g(x')$ .*

Regardons le cas particulier de l'intégration par rapport à un jeu d'unanimité  $u_A$ , et le cas où  $X$  est fini. L'intégrale de  $f$  vaut  $\inf_{x \in A} f(x)$ , et la borne inférieure est atteinte : soit  $x_0$  un point  $x \in A$  où  $f(x)$  est minimal. Si  $f$  et  $g$  sont comonotones, alors  $x_0$  est nécessairement aussi un point  $x \in A$  où  $g(x)$  est minimal. Alors  $f(x_0) + g(x_0)$  est aussi la valeur minimale de  $f(x) + g(x)$ , donc

$$\int_{x \in X} f(x) du_A + \int_{x \in X} g(x) du_A = \int_{x \in X} f(x) + g(x) du_A$$

Ceci est vrai non seulement pour  $u_A$ , mais pour tout jeu  $\nu$ . Pour le montrer, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.4.2** *Deux fonctions continues bornées  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sont comonotones si et seulement s'il existe une fonction continue  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  et deux fonctions croissantes  $f', g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f = f' \circ h$  et  $g = g' \circ h$ . De plus, on peut demander que  $h$  soit bornée — en fait même que  $h = f + g$  —, et que  $f'$  et  $g'$  soient Scott-continues et bornées.*

*Démonstration.* Si : montrons que  $f' \circ h$  et  $g' \circ h$  sont comonotones. Supposons qu'il existe  $x, x' \in X$  tels que  $f' \circ h(x) < f' \circ h(x')$  et  $g' \circ h(x) > g' \circ h(x')$ . Posons  $y = h(x)$ ,  $y' = h(x')$ , donc  $f'(y) < f'(y')$  et  $g'(y) > g'(y')$ . Or  $y$  et  $y'$  étant réels, on a soit  $y \leq y'$  soit  $y > y'$ . Mais  $y \leq y'$  contredit le fait que  $g'(y) > g'(y')$ , puisque  $g'$  est croissante, et  $y > y'$  contredit le fait que  $f'(y) < f'(y')$ , puisque  $f'$  est croissante.

Seulement si : posons  $h(x) = f(x) + g(x)$ . Clairement,  $h$  est continue et bornée. Soit  $R$  la relation entre réels définie comme  $\{(f(x) + g(x), f(x)) | x \in X\}$ . Montrons que  $R$  est une relation fonctionnelle : si  $(f(x) + g(x), f(x))$  et  $(f(x') + g(x'), f(x'))$  sont dans  $R$ , avec  $f(x) + g(x) = f(x') + g(x')$ , montrons que  $f(x) = f(x')$ . En effet, sans perte de généralité, supposons a contrario que  $f(x) < f(x')$ . Comme  $f(x) + g(x) = f(x') + g(x')$ ,  $g(x) > g(x')$ , ce qui contredit la comonotonie de  $f$  et de  $g$ .

$R$  définit donc une fonction partielle de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ; nous noterons  $R(x)$  l'unique  $y$  tel que  $(x, y) \in R$  s'il existe. Montrons que  $R$  est croissante : si  $f(x) + g(x) \leq f(x') + g(x')$ , alors  $f(x) \leq f(x')$ . En effet, sinon,  $f(x) > f(x')$  et alors  $f(x) + g(x) \leq f(x') + g(x')$  implique  $g(x) < g(x')$ , ce qui contredirait la comonotonie de  $f$  et  $g$ .

On définit  $f'$  comme une fonction croissante étendant la fonction partielle  $R$  à tout  $\mathbb{R}$ . On peut la construire comme suit. Soit  $D$  le domaine de  $R$ , et soit  $a = \inf_{x \in X} f(x)$ ,  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ . Pour tout  $y$  qui minore  $D$ , posons  $f'(y) = a$ . Sinon, soit  $f'(y) = \sup_{x \in D, x < y} R(x)$ . Ceci est bien défini, car  $f(x)$  est majoré par  $b$ . Clairement,  $f'$  est croissante, et si  $y \in D$ ,  $f'(y)$  est l'image  $R(y)$  de  $y$  par la fonction partielle  $R$ . Finalement, par construction,  $f' \circ h = f$ . On construit de même  $g'$  comme une fonction croissante similaire de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  qui envoie  $f(x) + g(x)$  vers  $g(x)$ .

Clairement,  $f'$  et  $g'$  sont bornées. Montrons finalement que  $f'$  est Scott-continue (le cas de  $g'$  étant similaire). Soit  $(y_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de réels, de borne supérieure  $y$ . Si  $y$  minore  $D$ , alors  $f'(y) = a = \sup_{i \in I} f'(y_i)$ . Sinon, soit  $I'$  l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $y_i$  ne minore pas  $D$ .  $I'$  est non vide, et  $(y_i)_{i \in I'}$  est clairement une famille dirigée de borne supérieure  $y$ . Alors  $f'(y) = f'(\sup_{i \in I'} y_i) = \sup_{x \in D, x < \sup_{i \in I'} y_i} f(x) = \sup_{x \in D, \exists i \in I', x < y_i} f(x) = \sup_{i \in I'} \sup_{x \in D, x < y_i} f(x) = \sup_{i \in I'} f'(y_i) = \sup_{i \in I} f'(y_i)$  puisque pour tout  $i \in I \setminus I'$ ,  $f'(y_i) = a$  qui est plus petit que n'importe quel  $y_i$  avec  $i \in I'$ .  $\square$

On en déduit immédiatement :

**Proposition 4.4.3** *L'intégrale de Choquet est additive sur les fonctions comonotones. Si  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , sont deux fonctions continues bornées et comonotones,*

$$\int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu = \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu$$

*Démonstration.* 1. Montrons d'abord que, si  $f' = \epsilon \sum_{i=1}^m \chi_{]s_i, +\infty[}$  et  $g' = \epsilon \sum_{j=1}^n \chi_{]t_j, +\infty[}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$ ,  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ , alors

$$\int_{y \in \mathbb{R}} f'(y) + g'(y) d\nu' = \int_{y \in \mathbb{R}} f'(y) d\nu' + \int_{y \in \mathbb{R}} g'(y) d\nu'$$

Soit  $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_{m+n}$  la liste triée de tous les  $s_i$  et de tous les  $t_j$ . Autrement dit, c'est la liste obtenue comme suit. Initialiser  $i$  et  $j$  à 1. Tant que  $i \leq m$  et  $j \leq n$ , poser  $u_{i+j-1}$  celui de  $s_i$

et de  $t_j$  qui est le plus grand, et si l'on a choisi  $s_i$ , ajouter un à  $i$ , sinon ajouter un à  $j$ . Au sortir de la boucle, si  $i > m$ , poser  $u_{i+j-1} = t_j$  et incrémenter  $j$  tant que  $j \leq n$ . Sinon, poser  $u_{i+j-1} = s_i$  et incrémenter  $i$  tant que  $i \leq m$ .

Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f'(y) + g'(y) = \epsilon \sum_{k=1}^{m+n} \chi_{]u_k, +\infty[}(y)$ . En effet, on réalise que la somme  $\sum_{k=1}^{m+n} \chi_{]u_k, +\infty[}(y)$  vaut  $\sum_{i=1}^m \chi_{]s_i, +\infty[} + \sum_{j=1}^n \chi_{]t_j, +\infty[}$ , puisque  $m$  des  $u_k$  sont formés par les  $s_i$ , et les  $n$  autres sont les  $t_j$ . En utilisant la proposition 4.1.4,

$$\begin{aligned} \oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) + g'(y) d\nu' &= \epsilon \sum_{k=1}^{m+n} \nu' (]u_k, +\infty[) \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^m \nu' (]s_i, +\infty[) + \epsilon \sum_{j=1}^n \nu' (]t_j, +\infty[) \\ &= \oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) d\nu' + \oint_{y \in \mathbb{R}} g'(y) d\nu' \end{aligned}$$

2. Montrons ensuite que si  $f'$  et  $g'$  sont Scott-continues et bornées de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , alors

$$\oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) + g'(y) d\nu' = \oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) d\nu' + \oint_{y \in \mathbb{R}} g'(y) d\nu'$$

En utilisant le lemme 4.1.6, le côté droit est la somme des bornes supérieures des intégrales de  $f'_K$  et de  $g'_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ . Or  $(f'_K + g'_K)_{K \in \mathbb{N}}$  est une famille dirigée de fonctions étagées dont la borne supérieure est  $f' + g'$ . On ne peut pas directement conclure l'égalité souhaitée : pour utiliser la proposition 4.2.1, il faudrait supposer que  $\nu'$  est continue, ce que nous préférons éviter, par souci de généralité. Mais le lemme 4.1.6 nous garantit que  $f'(y) - 1/2^K \leq f'_K(y) \leq f'(y)$  et  $g'(y) - 1/2^K \leq g'_K(y) \leq g'(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , donc  $f'(y) + g'(y) - 2/2^K \leq f'_K(y) + g'_K(y) \leq f'(y) + g'(y)$ , et grâce au lemme 4.1.2 et au lemme 4.1.5 :

$$\oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) + g'(y) d\nu' - \frac{2}{2^K} \nu'(\mathbb{R}) \leq \oint_{y \in \mathbb{R}} f'_K(y) + g'_K(y) d\nu' \leq \oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) + g'(y) d\nu'$$

Nous en concluons que l'intégrale de Choquet de  $f'_K + g'_K$  converge vers celle de  $f' + g'$  lorsque  $K$  tend vers  $+\infty$ . Comme celle de  $f'_K$  converge vers celle de  $f'$  et celle de  $g'_K$  converge vers celle de  $g'$ , en utilisant 1., le point 2. s'en déduit.

3. Écrivons  $f = f' \circ h$ ,  $g = g' \circ h$ , avec  $h$  continue bornée, et  $f'$  et  $g'$  Scott-continues et bornées. On a :

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu &= \oint_{x \in X} (f' + g')(h(x)) d\nu \\ &= \oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) + g'(y) dh[\nu] \quad \text{par la proposition 4.2.11} \\ &= \oint_{y \in \mathbb{R}} f'(y) dh[\nu] + \oint_{y \in \mathbb{R}} g'(y) dh[\nu] \quad \text{par 2.} \\ &= \oint_{x \in X} f(x) d\nu + \oint_{x \in X} g(x) d\nu \end{aligned}$$

par la proposition 4.2.11. □

Le lemme 4.4.2 suggère une extension de la notion de comonotonie :

**Définition 4.4.4** Soit  $(f_i)_{i=1}^n$  une famille finie de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que la famille  $(f_i)_{i=1}^n$  est globalement comonotone si et seulement s'il existe une fonction continue  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une famille  $(f'_i)_{i=1}^n$  de fonctions croissantes telle que  $f_i = f'_i \circ h$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Disons a contrario que la famille  $(f_i)_{i=1}^n$  est comonotone deux à deux si et seulement si  $f_i$  et  $f_j$  sont comonotones pour tous  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Clairement, toute famille globalement comonotone est comonotone deux à deux. Il se trouve qu'en fait toute famille deux à deux comonotone est globalement comonotone. La notion de comonotonie globale n'est donc pas une notion nouvelle :

**Proposition 4.4.5** La famille  $(f_i)_{i=1}^n$  est comonotone deux à deux si et seulement si elle est globalement comonotone. Si c'est le cas, la fonction continue  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  égale à  $f_1 + \dots + f_n$  est telle qu'il existe une famille  $(f'_i)_{i=1}^n$  de fonctions croissantes, Scott-continues, et bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f_i = f'_i \circ h$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , c'est évident. Si  $n = 1$ , soit  $a = \inf_{x \in X} f_1(x)$ ,  $b = \sup_{x \in X} f_1(x)$ , et prendre  $f'_1$  la fonction qui à tout  $y \in ]a - \epsilon, b]$  associe  $y$  (pour un  $\epsilon > 0$  fixé) à tout  $y \leq a - \epsilon$  associe  $a - \epsilon$ , et à tout  $y > b$  associe  $b$ . Si  $n \geq 2$ , supposons la propriété vraie pour  $n - 1$  : il existe une famille  $(g'_i)_{i=1}^{n-1}$  de fonctions croissantes, Scott-continues, et bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f_i = g'_i \circ h'$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , où  $h' = f_1 + \dots + f_{n-1}$ .

On observe que  $h'$  et  $f_n$  sont comonotones. Sinon, il existerait  $x, x' \in X$  tels que  $h'(x) < h'(x')$  et  $f_n(x) > f_n(x')$ . Mais si  $h'(x) < h'(x')$ , c'est qu'il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , tel que  $f_i(x) < f_i(x')$  : sinon on aurait  $f_i(x) \geq f_i(x')$  pour tout  $i$ , donc  $h(x) \geq h'(x')$ . Mais le fait que  $f_i(x) < f_i(x')$ , combiné avec  $f_n(x) > f_n(x')$ , contredit le fait que  $f_i$  et  $f_n$  sont comonotones.

Comme  $h'$  et  $f_n$  sont comonotones, par le lemme 4.4.2, il existe deux fonctions  $f'$  et  $g'$ , croissantes, Scott-continues, et bornées, telles que  $h' = f' \circ h$  et  $f_n = g' \circ h$ , où  $h = h' + f_n = f_1 + \dots + f_{n-1} + f_n$ . Posons donc  $f'_i = g'_i \circ f'$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , et  $f'_n = g'$ . Clairement les  $f'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont croissantes, Scott-continues, et bornées. De plus  $f_i = f'_i \circ h$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . □

**Corollaire 4.4.6** L'intégrale de Choquet est additive sur les familles de fonctions comonotones : si  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , sont  $n$  fonctions continues bornées et comonotones deux à deux,

$$\int_{x \in X} \sum_{i=1}^n f_i(x) d\nu = \sum_{i=1}^n \int_{x \in X} f_i(x) d\nu$$

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , les deux côtés sont nuls. Si  $n = 1$ , l'égalité est évidente. Sinon, utilisons la proposition 4.4.5 et écrivons  $f_i = f'_i \circ h$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , avec  $f'_i$  croissante, Scott-continue et bornée, et  $h$  continue. Puisque  $f_1 + \dots + f_{n-1} = (f'_1 + \dots + f'_n) \circ h$ ,

$f_1 + \dots + f_{n-1}$  et  $f_n$  sont comonotones. Donc :

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} \sum_{i=1}^n f_i(x) d\nu &= \oint_{x \in X} (f_1 + \dots + f_{n-1})(x) d\nu + \oint_{x \in X} f_n(x) d\nu \quad \text{par la proposition 4.4.3} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \oint_{x \in X} f_i(x) d\nu + \oint_{x \in X} f_n(x) d\nu \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence, et l'on conclut.  $\square$

## 4.5 La topologie faible

Nous nous intéresserons dans la suite à des espaces de jeux continus, et possiblement des sous-espaces. Donnons un nom à l'espace des jeux continus sur  $X$ .

**Définition 4.5.1** Soit  $\mathbf{J}(X)$  l'espace des jeux continus sur l'espace topologique  $X$ , muni de l'ordre point à point :  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu(U) \leq \nu'(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . On verra  $\mathbf{J}(X)$  comme un espace topologique, muni de la topologie de Scott.

On définit de même  $\mathbf{J}_1(X)$ , l'espace des jeux continus normalisés sur  $X$ , et  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ , l'espace des jeux continus  $\nu$  sur  $X$  sous-normalisés, c'est-à-dire tels que  $\nu(X) \leq 1$ .

Comme en section 3.7, le choix de la topologie de Scott n'est pas nécessairement le plus pertinent. On définit donc, de façon entièrement analogue à la définition 3.7.1 :

**Définition 4.5.2 (Topologie faible)** Soit  $Y$  un espace quelconque de fonctions des ouverts de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , par exemple l'espace  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  des fonctions Scott-continues de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$ , ou  $\mathbf{J}(X)$ , ou  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ , ou  $\mathbf{J}_1(X)$ . La topologie faible sur  $Y$  est la topologie engendrée par les ouverts  $[U > r] = \{\nu \in Y \mid \nu(U) > r\}$ , lorsque  $U$  parcourt les ouverts de  $X$ , et  $r \in \mathbb{R}$ .

On notera  $\mathbf{J}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{J}_{\leq 1 \ wk}(X)$ ,  $\mathbf{J}_1 \ wk(X)$  les espaces  $\mathbf{J}(X)$ , resp.  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{J}_1(X)$ , munis de la topologie faible.

Notons qu'alors  $\mathbf{V}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \ wk}(X)$ , et  $\mathbf{V}_1 \ wk(X)$  sont des sous-espaces topologiques des espaces  $\mathbf{J}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{J}_{\leq 1 \ wk}(X)$ , et  $\mathbf{J}_1 \ wk(X)$  respectivement. Autrement, la topologie faible sur  $\mathbf{V}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \ wk}(X)$ , et  $\mathbf{V}_1 \ wk(X)$  est la topologie induite par la topologie faible sur  $\mathbf{J}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{J}_{\leq 1 \ wk}(X)$ , et  $\mathbf{J}_1 \ wk(X)$  respectivement.

On a, par le même raisonnement qu'au lemme 3.7.2 et au lemme 3.7.3, qui avaient abouti à la proposition 3.7.4 et au corollaire 3.7.5 :

**Proposition 4.5.3** Soit  $P$  n'importe quelle propriété de fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$ . L'espace des fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  vérifiant  $P$  muni de la topologie de la convergence simple est correctement ordonné : cette topologie est plus fine que la topologie haute, et moins fine que la topologie de Scott.

En particulier, les espaces  $\mathbf{J}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{J}_{\leq 1 \ wk}(X)$ ,  $\mathbf{J}_1 \ wk(X)$  sont correctement ordonnés : la topologie faible est plus fine que la topologie haute, et moins fine que la topologie de Scott.

L'ordre de spécialisation sur ces espaces est l'ordre  $\leq$  point à point.

Nous avons vu à la proposition 3.7.12 que la topologie faible coïncidait en fait avec la topologie de Scott lorsque  $X$  était un cpo continu, avec un plus petit élément  $\perp$  dans le cas de l'espace  $\mathbf{V}_{1\text{wk}}(X)$ . Nous verrons en section 5.6 que cette coïncidence de topologies n'est pas le cas général. Cependant, nous démontrerons plus loin que, de nouveau, ces deux topologies coïncident sur  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ , lorsque  $X$  est localement relativement compact (corollaire 4.5.21).

La topologie faible n'est pas usuellement définie comme en définition 4.5.2, mais comme la topologie la moins fine qui rend toutes les fonctions

$$\nu \mapsto \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

continues, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

Ces deux topologies sont identiques :

**Proposition 4.5.4** *La topologie faible sur  $\mathbf{J}(X)$ , resp.  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{J}_1(X)$ , resp.  $\mathbf{V}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{V}_1(X)$ , est la topologie la moins fine qui rend toutes les fonctions*

$$\nu \mapsto \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

continues, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

*Démonstration.* Fixons  $f$  continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et posons  $F_f$  la fonction qui à  $\nu$  associe

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu$$

Montrons que  $F_f$  est continue depuis l'espace des jeux munis de la topologie faible vers  $\mathbb{R}$ . C'est clair lorsque  $f$  est de la forme  $\chi_U$ , pour  $U$  ouvert de  $X$  : tout ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^+$  est de la forme  $]r, +\infty[$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , et  $F_f^{-1}]r, +\infty[ = [U > r]$ . Lorsque  $f$  est étagée, disons de la forme  $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ , avec  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  une suite décroissante d'ouverts, et  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , alors par la proposition 4.1.4,  $F_f = \sum_{i=0}^n a_i F_{\chi_{U_i}} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i F_{\chi_{U_i}}$ , donc  $F_f$  est continue comme combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de fonctions (Scott) continues. Lorsque  $f$  est une fonction continue bornée quelconque, utilisons le lemme 4.1.6 :  $f = \sup_{K \in \mathbb{N}} f_K$  et  $F_f = \sup_{K \in \mathbb{N}} F_{f_K}$ , donc  $F_f^{-1}]r, +\infty[ = \{\nu \mid \sup_{K \in \mathbb{N}} F_{f_K}(\nu) > r\} = \{\nu \mid \exists K \in \mathbb{N} \cdot F_{f_K}(\nu) > r\} = \bigcup_{K \in \mathbb{N}} F_{f_K}^{-1}]r, +\infty[$  est un ouvert faible.

Soit  $\mathcal{O}$  la topologie la moins fine rendant tous les  $F_f$  continues.  $\mathcal{O}$  est engendrée par les  $F_f^{-1}]r, +\infty[$ , qui sont des ouverts faibles. Donc  $\mathcal{O}$  est moins fine que la topologie faible.

Réciproquement, par définition  $F_f$  est continue depuis l'espace des jeux muni de la topologie  $\mathcal{O}$ , pour toute fonction  $f$  continue bornée. En particulier, pour  $f = \chi_U$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Donc pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $F_{\chi_U}^{-1}]r, +\infty[$  est dans  $\mathcal{O}$ . Mais  $F_{\chi_U}^{-1}]r, +\infty[ = [U > r]$ . Donc  $\mathcal{O}$  est plus fine que la topologie faible.  $\square$

Une autre façon de dire la même chose est la suivante.

**Corollaire 4.5.5** Soit  $Y$  l'un quelconque des espaces  $\mathbf{J}(X)$ ,  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{J}_1(X)$ ,  $\mathbf{V}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{V}_1(X)$ .

La topologie faible sur  $Y$  est la topologie engendrée par les ensembles

$$[f > r] = \{\nu \in Y \mid \int_{x \in X} f(x) d\nu > r\}$$

où  $f$  parcourt l'ensemble des fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et  $r \in \mathbb{R}$ .

On peut montrer, en réutilisant pratiquement textuellement l'argument de Jung (2004, Section 3.2), que tous les espaces de capacités considérés dans cet ouvrage sont stablement compacts, à partir du moment où ils sont munis de la topologie faible.

**Lemme 4.5.6** Soit  $X$  un espace topologique. L'espace  $Y = \prod_U [0, 1]$ , où  $U$  varie parmi les ouverts de  $X$ , et chaque copie de l'intervalle  $[0, 1]$  est muni de la topologie de Scott, est stablement compact.

*Démonstration.* Par le lemme 3.6.11, avec  $A = [0, 1]$ . En effet,  $[0, 1]$  est un cpo continu, donc sobre et localement compact. Les compacts saturés de  $[0, 1]$  sont les  $[a, 1]$ ,  $0 \leq a \leq 1$ , donc  $[0, 1]$  est cohérent et compact ; donc stablement compact.  $\square$

Tout élément  $f$  de  $Y$  est une fonction qui à chaque ouvert  $U$  de  $X$  associe un réel dans  $[0, 1]$ . La topologie produit sur  $Y$  est alors, par définition, engendrée par les ensembles  $[U > r]_* = \{f \in Y \mid f(U) > r\}$ , lorsque  $U$  parcourt les ouverts de  $X$  et  $r \in \mathbb{R}$ . Tous les sous-ensembles de jeux, munis de leur topologie faible, par exemple  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\mathbf{J}_1 \text{ wk}(X)$ , sont donc des sous-espaces topologiques de  $Y$ .

La topologie patch de  $[0, 1]$  est la topologie métrique usuelle. Les fonctions  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\max$  sont en particulier patch-continues de  $[0, 1]^2$  vers  $[0, 1]$ .

**Proposition 4.5.7** Soit  $X$  un espace topologique, et  $Y = \prod_U [0, 1]$ , où le produit est indexé par les ouverts  $U$  de  $X$ . Soit  $P$  n'importe quelle conjonction de propriétés parmi "stricte", "monotone", "convexe", "concave", "totalement convexe", "totalement concave", "modulaire", "normalisé".

L'espace des fonctions  $\nu$  de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$ , en particulier celui des capacités ou des jeux  $\nu$  sur  $X$  tels que  $\nu(X) \leq 1$ , vérifiant la propriété  $P$ , muni de la topologie faible, est un patch-fermé de  $Y$ , et un espace stablement compact.

*Démonstration.* Par le théorème 3.6.14, avec  $T = \mathcal{O}(X)$ ,  $A = [0, 1]$ . Notons  $x \leq y$  pour l'équation  $\max(x, y) = y$ . Les sous-espaces indiquées sont de la forme  $[\Sigma]$ , où les équations patch-continues de  $\Sigma$  sont à prendre parmi :

- $\_(\emptyset) = 0$  (caractère strict) ;
- $\_(U) \leq \_(V)$  pour chaque couple  $(U, V)$  d'ouverts de  $X$  tels que  $U \subseteq V$  (monotonie) ;
- $\_(U) + \_(V) \leq \_(U \cup V) + \_(U \cap V)$  pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$  (convexité) ;
- $\_(U \cup V) + \_(U \cap V) \leq \_(U) + \_(V)$  pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$  (concavité) ;
- $\_(U \cup V) + \_(U \cap V) = \_(U) + \_(V)$  pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$  (modularité) ;

- $\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} - (\bigcap_{i \in I} U_i) \leq - (\bigcup_{i=1}^n U_i)$  pour toute famille finie d'ouverts  $(U_i)_{i=1}^n$  (convexité totale);
- $- (\bigcap_{i=1}^n U_i) \leq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} - (\bigcup_{i \in I} U_i)$  pour toute famille finie d'ouverts  $(U_i)_{i=1}^n$  (concavité totale);
- $- (X) = 1$  (normalisation). □

Ce qui nous intéresse au premier plan est le cas des jeux *continus*, qui se traite à l'aide de la rétraction  $\tau$  du lemme 3.6.16.

Rappelons la fonction  $\tau$  du lemme 3.6.16, appliquée aux valuations  $\nu$  vues comme fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Puisque  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu avec  $\subseteq$  comme relation "bien en-dessous", dès que  $X$  est localement relativement compact (lemme 3.4.10), on aura  $\tau(\nu)(U) = \sup_{V \in U} \nu(V)$ .

**Lemme 4.5.8** *Soit  $X$  un espace localement relativement compact. Pour toute capacité  $\nu$  sur  $X$ ,  $\tau(\nu)$  est un jeu continu. De plus,  $\tau(\nu)$  est le plus grand jeu continu inférieur ou égal à  $\nu$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 3.6.16, il suffit de vérifier que  $\tau(\nu)$  est une capacité. Or  $\tau(\nu)(\emptyset) = 0$ , car le seul ouvert  $V \in \emptyset$  est le vide lui-même. □

**Lemme 4.5.9** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Si  $\nu$  est convexe, resp. concave, resp. modulaire, resp. totalement convexe, resp. totalement concave, alors il en est de même de  $\tau(\nu)$ .*

*Si de plus  $X$  est compact, alors si  $\nu$  est normalisée il en est de même de  $\tau(\nu)$ .*

*Démonstration.* Si  $\nu$  est convexe,

$$\begin{aligned}
\tau(\nu)(U_1 \cup U_2) + \tau(\nu)(U_1 \cap U_2) &= \sup_{V \in U_1 \cup U_2} \nu(V) + \sup_{V \in U_1 \cap U_2} \nu(V) \\
&= \sup_{\substack{V_1 \in U_1 \\ V_2 \in U_2}} \nu(V_1 \cup V_2) + \sup_{\substack{V_1 \in U_1 \\ V_2 \in U_2}} \nu(V_1 \cap V_2) \\
&\quad \text{par le lemme 3.4.12 et le lemme 3.6.19} \\
&= \sup_{\substack{V_1 \in U_1 \\ V_2 \in U_2}} (\nu(V_1 \cup V_2) + \nu(V_1 \cap V_2))
\end{aligned}$$

car la famille des  $(V_1, V_2)$  tels que  $V_1 \in U_1, V_2 \in U_2$  est dirigée, puisque  $\mathcal{O}(X)$ , donc  $\mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(X)$ , est un cpo continu par le lemme 3.4.10. Puisque  $\nu$  est convexe, ceci est supérieur ou égal à :

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{V_1 \in U_1 \\ V_2 \in U_2}} (\nu(V_1) + \nu(V_2)) &= \sup_{\substack{V_1 \in U_1 \\ V_2 \in U_2}} \nu(V_1) + \sup_{\substack{V_1 \in U_1 \\ V_2 \in U_2}} \nu(V_2) \\
&= \sup_{V_1 \in U_1} \nu(V_1) + \sup_{V_2 \in U_2} \nu(V_2) = \tau(\nu)(U_1) + \tau(\nu)(U_2)
\end{aligned}$$

Donc  $\tau(\nu)$  est convexe. La préservation de la concavité et de la modularité se montre de manière similaire.

On démontre la préservation de la convexité totale comme la préservation de la convexité ci-dessus, mais en montrant à la place que :

$$\tau(\nu) \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) + \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset, |I| \text{ pair}} \tau(\nu) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \geq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset, |I| \text{ impair}} \tau(\nu) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right)$$

Ceci est laissé en exercice (utiliser de nouveau les lemmes 3.6.19 et 3.4.12), ainsi que la préservation de la concavité totale, pour laquelle l'argumentation est similaire.

Finalement, si  $\nu$  est normalisée et  $X$  est compact, alors  $\tau(\nu)(X) \leq 1$  est évident, et réciproquement  $\tau(\nu)(X) = \sup_{V \in X} \nu(V) \geq 1$  car  $X \in X$ , puisque  $X$  est compact.  $\square$

**Proposition 4.5.10** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Soit  $P$  n'importe quelle conjonction de propriétés parmi "stricte", "convexe", "concave", "totalement convexe", "totalement concave", "modulaire", et "normalisé" si  $X$  est compact. La fonction  $\tau$  définie au lemme 3.6.16 et l'injection canonique  $\mathfrak{s}$  des fonctions continues dans les fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$  définissent une rétraction et une section, respectivement, entre l'espace des fonctions continues de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$  — en particulier des jeux continus — vérifiant  $P$  sur  $X$ , avec la topologie faible (c'est-à-dire de la convergence simple), et l'espace des fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  — en particulier des jeux — vérifiant  $P$  sur  $X$  avec la topologie faible (de la convergence simple).*

*Démonstration.* On a clairement  $\tau(\mathfrak{s}(\nu)) = \nu$  pour tout  $\nu$ . De plus,  $\mathfrak{s}$  est clairement continue. Il ne reste donc qu'à montrer que  $\tau$  est continue. L'image réciproque par  $\tau$  de l'ensemble des fonctions continues  $\nu$  tels que  $\nu(U) > r$  est l'ensemble des fonctions  $\nu$  telles que  $\tau(\nu)(U) > r$ , c'est-à-dire tels que  $\sup_{V \in U} \nu(V) > r$ , c'est-à-dire tels qu'il existe  $V \in U$  avec  $\nu(V) > r$ . C'est donc l'union des ouverts faibles  $[V > r]$  lorsque  $V \in U$ , qui est donc un ouvert faible.  $\square$

**Théorème 4.5.11** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Soit  $P$  n'importe quelle conjonction de propriétés parmi "stricte", "convexe", "concave", "totalement convexe", "totalement concave", "modulaire". L'espace des fonctions continues  $\nu$  de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$  — en particulier des jeux continus sous-normalisés — vérifiant  $P$  sur  $X$ , muni de la topologie faible (c'est-à-dire de la convergence simple), est stablement compact. En particulier,  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  sont stablement compacts.*

*Si de plus  $X$  est compact, l'espace des jeux continus normalisés vérifiant  $P$  sur  $X$ , muni de la topologie faible, est stablement compact. En particulier,  $\mathbf{J}_{1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\mathbf{V}_{1 \text{ wk}}$  sont stablement compacts.*

*Démonstration.* Par la proposition 4.5.10, ces espaces apparaissent comme rétracts d'espaces qui sont stablement compacts par la proposition 4.5.7. On conclut par le lemme de Lawson 3.2.2.  $\square$

Au vu de la proposition 3.7.12, on peut aussi en conclure le théorème suivant.

**Théorème 4.5.12** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent. L'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  des valuations continues sous-normalisées sur  $X$  est un cpo continu cohérent et compact.*

*Démonstration.*  $X$  est un cpo continu, donc est sobre et localement compact. Étant cohérent, il est stablement localement compact. Par le théorème 4.5.11,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  est donc stablement compact. Par la proposition 3.7.12,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X) = \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ . Par le théorème de Jones,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  est aussi un cpo continu.  $\square$

En particulier, si  $X$  est un domaine,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  est un cpo continu cohérent. Mais, malgré la propriété de cohérence,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  n'est pas en général un domaine. Un contre-exemple, dû à Jones (1990, section 4.5), est donné par  $X = \{a, b, \top\}$ , avec  $a, b \leq \top$  et  $a$  et  $b$  incomparables. Alors les valuations continues sous-normalisées  $1/2\delta_a$  et  $1/2\delta_b$  ont deux majorants minimaux,  $1/2\delta_a + 1/2\delta_b$  et  $1/2\delta_\top$ , comme on peut le vérifier par l'utilisation du lemme de découpage.

On peut adapter le théorème 4.5.12 au cas des probabilités continues sur  $X$ . Rappelons qu'une probabilité est une valuation normalisée  $\nu$ , c'est-à-dire telle que  $\nu(X) = 1$ . L'analogue du théorème de Jones est dû à Edalat (1995, corollaire 3.3) : si  $X$  est un cpo continu ayant un plus petit élément  $\perp$ , alors l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des probabilités continues sur  $X$  est un cpo continu, ayant une base de probabilités simples.

**Théorème 4.5.13** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent, avec un plus petit élément  $\perp$ . L'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des probabilités continues sur  $X$  est un cpo continu cohérent et compact.  $\mathbf{V}_1(X)$  a un plus petit élément, à savoir  $\delta_\perp$ .*

*Démonstration.* Par le théorème d'Edalat, c'est un cpo continu.  $X$  est un cpo continu, donc est sobre et localement compact. Il est aussi cohérent par hypothèse, et compact car il a un plus petit élément. Par le théorème 4.5.11,  $\mathbf{V}_1 \text{ wk}(X)$  est donc stablement compact. Par la proposition 3.7.12,  $\mathbf{V}_1(X) = \mathbf{V}_1 \text{ wk}(X)$ . Finalement, pour toute probabilité continue  $\nu$ ,  $\delta_\perp \leq \nu$  : pour tout ouvert  $U$ , si  $U \neq X$  alors  $\delta_\perp(U) = 0 \leq \nu(U)$ , sinon  $\delta_\perp(U) = 1 = \nu(X) = \nu(U)$ .  $\square$

$\square$

Nous allons maintenant démontrer que, lorsque  $X$  est stablement compact, la topologie de Scott et la topologie faible coïncident sur  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ . (Nous démontrerons en fait un résultat plus général au corollaire 4.5.21.) On observe que  $\mathcal{O}(X)$  est un treillis, et un cpo continu puisque  $X$  est localement compact, donc localement relativement compact (lemme 3.4.10). Un tel treillis est appelé un *treillis continu*, et est automatiquement cohérent, et a un plus petit élément, donc est stablement compact.  $[0, 1]$  est lui aussi un treillis continu.

Un des résultats fondamentaux de la théorie des domaines de Scott (Gierz et al., 2003) est que, si  $X$  et  $Y$  sont deux treillis continus, alors l'espace  $[X \rightarrow Y]$  des fonctions Scott-continues de  $X$  vers  $Y$ , muni de l'ordre  $\leq$  défini par  $f \leq g$  si et seulement si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in X$ , est encore un treillis continu. Une base en est formée des bornes supérieures de familles finies de fonctions de la forme  $x_i \searrow y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , où  $x_i \searrow y_i$  est la fonction qui à tout  $x$  associe  $y_i$  si  $x_i \ll x$ ,  $\perp$  sinon. (Abramsky and Jung, 1994, section 4). Nous appellerons de telles bornes supérieures finies des *fonctions en escalier*, et les  $x_i \searrow y_i$  des *marches*.

**Lemme 4.5.14** *Toute marche  $x_i \searrow y_i$  d'un ensemble ordonné continu  $X$  vers un ensemble ordonné  $Y$  avec un plus petit élément  $\perp$  est Scott-continue. Toute fonction en escalier est Scott-continue.*

*Démonstration.* L'image réciproque d'un ouvert  $V$  de  $Y$  est soit  $\uparrow x_i$  si  $\perp \notin V$ , soit  $X$  tout entier. Or  $\uparrow x_i$  est ouvert puisque  $X$  est continu. Toute borne supérieure d'une famille finie de fonction continues étant continues, on en déduit que toute fonction en escalier est Scott-continue.  $\square$

**Lemme 4.5.15** *Soit  $X$  un ensemble ordonné,  $Y$  un cpo avec un plus petit élément  $\perp$ . Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ . Si  $y \ll f(x)$  alors  $x \searrow y \ll f$  dans  $[X \rightarrow Y]$ . En conséquence,  $\sup_{i=1}^n (x_i \searrow y_i) \ll f$  dès que  $y_i \ll f(x_i)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

*Démonstration.* Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de fonctions continues de  $X$  dans  $Y$ , telle que  $f \leq \sup_{i \in I} f_i$ . En particulier,  $y \ll f(x) \leq \sup_{i \in I} f_i(x)$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $y \leq f_i(x)$ . Il ne reste qu'à montrer que  $x \searrow y \leq f_i$ . Pour tout  $x' \in X$ , soit  $x \ll x'$  et en particulier  $x \leq x'$ , donc  $(x \searrow y)(x') = y \leq f_i(x) \leq f_i(x')$ ; soit ce n'est pas le cas, et  $(x \searrow y)(x') = \perp \leq f_i(x')$ .

Pour la deuxième partie, il suffit de vérifier que  $\sup_{i=1}^n (x_i \searrow y_i) \ll f$  si et seulement si  $x_i \searrow y_i \ll f$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . La direction seulement si est évidente. Pour la direction si, toute famille dirigée de fonctions de borne supérieure au-dessus de  $f$  a un élément  $f_i$  qui dépasse  $x_i \searrow y_i$  pour chaque  $i$ . Comme la famille est dirigée et  $n$  est fini, il existe un élément de la famille qui dépasse tous les  $x_i \searrow y_i$ , donc aussi  $\sup_{i=1}^n (x_i \searrow y_i)$ .  $\square$

**Lemme 4.5.16** *Soit  $X$  un ensemble ordonné continu,  $Y$  un cpo continu avec un plus petit élément  $\perp$ . Toute fonction continue  $f$  de  $X$  vers  $Y$  est borne supérieure d'une famille de marches bien en-dessous de  $f$ .*

$[X \rightarrow Y]$  est un cpo continu avec un plus petit élément, dont une base est formée des fonctions en escalier.

Si de plus  $Y$  est un domaine,  $[X \rightarrow Y]$  aussi.

*Démonstration.* Considérons la famille de toutes les marches  $x \searrow y$  telles que  $y \ll f(x)$ . Par le lemme 4.5.15, elles sont toutes bien en-dessous de  $f$ . Pour tout  $x \in X$ , puisque  $X$  est continu,  $x$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $x' \ll x$ . Puisque  $Y$  est continu,  $f(x')$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $y' \ll f(x')$ . Chacune des fonctions  $x' \searrow y'$  ainsi obtenu est bien en-dessous de  $f$ . De plus,  $\sup_{x' \ll x, y' \ll f(x')} (x' \searrow y')(x) = \sup_{x' \ll x, y' \ll f(x')} y' = \sup_{x' \ll x} f(x') = f(x)$  puisque  $f$  est Scott-continue.

Toute fonction continue est donc aussi borne supérieure dirigée des bornes supérieures finies de marches. Donc  $[X \rightarrow Y]$  est un cpo continu, avec une base formée de fonctions en escalier. D'autre part,  $[X \rightarrow Y]$  a un plus petit élément, à savoir la fonction qui à tout  $x \in X$  associe  $\perp$ .

Finalement, si  $Y$  est un domaine, alors  $[X \rightarrow Y]$  est un domaine, car si  $f$  et  $g$  sont continues, alors la fonction  $\sup(f, g)$ , qui à  $x$  associe  $\sup(f(x), g(x))$ , est Scott-continue.  $\square$

**Définition 4.5.17 (Convergence simple)** *Pour tous espaces topologiques  $X$  et  $Y$ , notons  $[X \rightarrow Y]_p$  l'espace des fonctions continues de  $X$  vers  $Y$ , muni de la topologie de la convergence simple. C'est la topologie engendrée par les ensembles  $[x \mapsto V] = \{f \text{ continue de } X \text{ vers } Y \mid f(x) \in V\}$ , pour tout  $x \in X$  et tout ouvert  $V$  de  $Y$ .*

Une définition équivalente est : la topologie de la convergence simple est la topologie la moins fine qui rende toutes les fonctionnelles d'application  $f \mapsto f(x)$  continues, pour tout  $x \in X$ . Ce

n'est rien d'autre que la topologie induite par l'inclusion de  $[X \rightarrow Y]$  dans l'espace produit  $Y^X$ , de toutes les fonctions de  $X$  vers  $Y$ .

On remarquera en particulier le fait important suivant, qui est notre troisième caractérisation de la topologie faible.

**Fait 4.5.18** *La topologie de la convergence simple sur  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  est exactement la topologie faible.*

La topologie de la convergence simple y est en effet engendrée par les ensembles  $[U \mapsto t, +\infty[$  et  $[U > t]$ .

**Lemme 4.5.19** *Le préordre de spécialisation de  $[X \rightarrow Y]_p$  est le préordre point à point, défini par  $f \leq g$  si et seulement si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in X$ . Lorsque  $Y$  est un ensemble ordonné muni de sa topologie de Scott, l'espace  $[X \rightarrow Y]_p$  est correctement ordonné.*

*Démonstration.* Si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in X$  et  $f$  est dans l'ouvert  $[x \mapsto V]$ , alors  $g$  aussi, puisque  $V$  est clos par le haut. On en déduit que  $g$  est dans tout ouvert contenant  $f$ . Réciproquement, si tout ouvert qui contient  $f$  contient aussi  $g$ , alors à  $x$  fixé, tout ouvert  $V$  tel que  $f \in [x \mapsto V]$  est tel que  $g \in [x \mapsto V]$ , c'est-à-dire tout ouvert  $V$  qui contient  $f(x)$  contient aussi  $g(x)$ , autrement dit  $f(x) \leq g(x)$ .

On en déduit que la topologie de la convergence simple est plus fine que la topologie haute. Montrons qu'elle est moins fine que la topologie de Scott. Pour ceci, il suffit de montrer que  $[x \mapsto V]$  est un ouvert de Scott pour tout  $x \in X$  et tout ouvert  $V$  de  $Y$ . On suppose pour ceci que  $Y$  est un ensemble ordonné muni de sa topologie de Scott. D'abord,  $[x \mapsto V]$  est clos par le haut : si  $f(x) \in V$  et  $f \leq g$ , alors  $g(x)$  est encore dans  $V$ , qui est clos par le haut. Ensuite, si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée de fonctions continues de  $X$  dans  $Y$  telles que  $\sup_{i \in I} f_i \in [x \mapsto V]$ , c'est que  $\sup_{i \in I} f_i(x) \in V$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $f_i(x) \in V$ , c'est-à-dire  $f_i \in [x \mapsto V]$ . Donc  $[X \rightarrow Y]_p$  est correctement ordonné.  $\square$

▷ **Exercice 4.4**

Rappelons que  $\mathbf{A}$  est l'ensemble des trois éléments  $0 \sqsubseteq M \sqsubseteq 1$  (définition 3.6.1). Montrer que la topologie de  $\mathcal{P}_V(X)$  est celle induite par l'inclusion  $\mathcal{P}_V(X) \subseteq [\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbf{A}]_p$ ,  $\mathbf{A}$  étant muni de la topologie de Scott de son ordre  $\sqsubseteq$ .

▷ **Exercice 4.5**

Soit  $Z$  un espace topologique,  $A$  une partie de  $Z$  dont l'adhérence est irréductible, et  $g$  une fonction continue de  $Z$  vers un espace topologique  $Z'$ . Montrer que l'adhérence de  $g(A)$  dans  $Z'$  est irréductible. Cet exercice est censé préparer l'exercice 4.6

▷ **Exercice 4.6**

Montrer que, si  $Y$  est un espace sobre, alors  $[X \rightarrow Y]_p$  est sobre, pour tout espace topologique  $X$ . On recommande d'utiliser l'exercice 4.5.

▷ **Exercice 4.7**

Soit  $X$  un espace sobre,  $Y$  un espace  $T_0$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $X$  vers  $Y$ . Montrer que le sous-espace  $[f = g] = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  de  $X$  est sobre. Cet exercice est censé préparer l'exercice 4.8.

▷ **Exercice 4.8**

En utilisant l'exercice 4.6 et l'exercice 4.7, montrer que, pour tout espace topologique  $X$ ,  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est sobre. (Voir la définition 3.6.1.)

**Proposition 4.5.20** Soit  $X$  un ensemble ordonné continu,  $Y$  un cpo continu avec un plus petit élément  $\perp$ . Alors la topologie de la convergence simple et la topologie de Scott coïncident sur  $[X \rightarrow Y] : [X \rightarrow Y] = [X \rightarrow Y]_p$ .

*Démonstration.* Le lemme 4.5.19 établit que la topologie de Scott est plus fine que la topologie de la convergence simple. Montrons la réciproque. Par le lemme 4.5.16,  $[X \rightarrow Y]$  est un cpo continu. Considérons l'ouvert de Scott  $\hat{\uparrow}f$ , où  $f$  est la fonction en escalier  $\sup_{i=1}^n(x_i \searrow y_i)$ . Pour toute fonction continue  $g$ , par le lemme 4.5.15,  $\sup_{i=1}^n(x_i \searrow y_i) \ll g$  si et seulement si  $y_i \ll g(x_i)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Autrement dit,  $\hat{\uparrow}f = \bigcap_{i=1}^n[x_i \mapsto \hat{\uparrow}y_i]$ , qui est donc un ouvert de la topologie de la convergence simple. Puisque  $[X \rightarrow Y]$  est un cpo continu, la topologie de Scott de  $[X \rightarrow Y]$  est engendrée par les  $\hat{\uparrow}f$ , et est donc moins fine que la topologie de la convergence simple.  $\square$

**Corollaire 4.5.21** Soit  $X$  un espace localement relativement compact. Alors la topologie faible et la topologie de Scott coïncident sur  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ .

*Démonstration.* Appliquer la proposition 4.5.20.  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu car  $X$  est localement relativement compact, en vertu du lemme 3.4.10.  $Y = [0, 1]$  est un cpo continu avec plus petit élément. On a remarqué plus haut, d'autre part, que la topologie de la convergence simple sur  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  était exactement la topologie faible.  $\square$

**Proposition 4.5.22** Soit  $X$  un espace localement relativement compact. L'espace  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  est un domaine stablement compact.

*Démonstration.* D'abord,  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  vient du corollaire 4.5.21. Puisque  $X$  est localement relativement compact,  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu par le lemme 3.4.10.  $Y = [0, 1]$  est un domaine avec plus petit élément, donc  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  est un domaine avec un plus petit élément par le lemme 4.5.16. Par le corollaire 3.1.8, il est stablement compact.  $\square$

## 4.6 Produits de jeux

Il existe un analogue du théorème de Fubini pour les valuations continues, voir par exemple Jones (1990, théorème 3.17). Rappelons (section 3.8) que, si  $\nu$  est une valuation continue sur  $X$  et  $\nu'$  une valuation continue sur  $Y$ , on peut définir une unique valuation continue  $\nu \otimes \nu'$  sur  $X \times Y$  telle que :

$$(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V) \quad (4.2)$$

pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ . Le théorème de Jones-Fubini énonce qu'intégrer une fonction  $f$  de deux variables  $x$  et  $y$  le long de  $\nu \otimes \nu'$  donne le même résultat qu'intégrer en  $x$  le long de  $\nu$ , puis d'intégrer le résultat en  $y$  le long de  $\nu'$ . Pour que ceci ait un sens, nous devons d'abord vérifier le résultat suivant.

**Lemme 4.6.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Soit  $\nu$  un jeu continu sur  $X$ ,  $\nu'$  un jeu continu sur  $Y$ . Pour toute fonction  $f$  continue bornée du produit topologique  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ , les fonctions :

$$g(y) = \int_{x \in X} f(x, y) d\nu$$

$$h(x) = \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu'$$

sont bien définies, continues et bornées de  $Y$ , resp.  $X$ , vers  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On traite le cas de  $g$ , celui de  $h$  étant similaire. À  $y$  fixé, la fonction qui à  $x$  associe  $f(x, y)$  est continue et bornée, donc l'intégrale définissant  $g$  est bien définie. Lorsque  $a$  majore les valeurs de  $f$ , on a  $g(y) \leq a\nu(X)$ , donc  $g$  est bornée. Il ne reste qu'à montrer que  $g$  est continue.

Examinons d'abord le cas où  $f$  est une fonction de la forme  $\chi_W$ ,  $W$  ouvert de  $X \times Y$ . Pour tout  $y \in Y$ , posons  $W_y = \{x \in X \mid (x, y) \in W\}$ . Puisque  $W$  est une union de rectangles ouverts  $\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ , où les  $U_i$  sont des ouverts de  $X$  et les  $V_i$  sont des ouverts de  $Y$ ,  $W_y$  est l'union des  $U_i$  tels que  $V_i$  contient  $y$ , et est donc ouvert. Alors  $g(y) = \nu(W_y)$ . Fixons un réel  $t$ , et supposons que  $g(y) > t$ . Comme  $W_y = \bigcup_{i \in I/y \in V_i} U_i$ ,  $W_y$  est aussi l'union dirigée des ouverts  $W_{y,J} = \bigcup_{i \in J/y \in V_i} U_i$  lorsque  $J$  parcourt l'ensemble des parties finies de  $I$ . Puisque  $\nu$  est continu, il existe une telle partie finie  $J$  telle que  $\nu(W_{y,J}) > t$ . Considérons maintenant l'ouvert  $V = \bigcap_{i \in J/y \in V_i} V_i$ , ceci dénotant  $Y$  tout entier s'il n'existe aucun  $i \in J$  tel que  $y \in V_i$ . Clairement  $y \in V$ . De plus, pour tout  $z \in V$ ,  $W_{z,J}$  contient  $W_{y,J}$  : pour tout  $x \in W_{y,J}$ ,  $x \in U_i$  pour un  $i \in J$  tel que  $y \in V_i$ , et alors  $z$ , qui est dans  $V$ , est dans  $V_i$ , d'où l'on déduit que  $x$  est dans l'union des  $U_i$  tels que  $i \in J$  et  $z \in V_i$ . Comme  $W_{z,J}$  contient  $W_{y,J}$ ,  $\nu(W_z) \geq \nu(W_{z,J}) \geq \nu(W_{y,J}) > t$ . Récapitulons : nous venons d'établir que pour tout réel  $t$ , pour tout  $y$  tel que  $g^{-1}(y) > t$ , il existe un ouvert  $V$  contenant  $y$  tel que pour tout  $z \in V$ ,  $g^{-1}(z) > t$ . Autrement dit, pour tout  $y \in g^{-1}t, +\infty[$ , il existe un ouvert  $V$  contenant  $y$  inclus dans  $g^{-1}t, +\infty[$ . Donc  $g^{-1}t, +\infty[$  est l'union de tels ouverts  $V$ , lorsque  $y$  varie parmi les éléments de  $g^{-1}t, +\infty[$ . Donc  $g^{-1}t, +\infty[$  est ouvert, d'où l'on conclut que  $g$  est continue.

Lorsque  $f$  est une fonction étagée de la forme  $\epsilon \sum_{i=0}^n \chi_{W_i}$ , avec  $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_n$ ,  $g(y)$  vaut  $\epsilon \sum_{i=0}^n g_i(y)$ , où  $g_i(y) = \nu((W_i)_y)$ . Ceci est par la proposition 4.1.4. Puisque  $g_i$  est continue, et que l'addition est Scott-continue,  $g$  est continue de même.

Dans le cas général, par le lemme 4.1.6,  $f$  est la borne supérieure d'une famille dirigée de fonctions étagées  $f_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , avec  $f(x, y) - 1/2^K \leq f_K(x, y) \leq f(x, y)$  pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ . Posons  $g^K(y)$  l'intégrale de la fonction qui à  $x \in X$  associe  $f_K(x, y)$  le long de  $\nu$ . Alors  $g^K$  croît lorsque  $K$  augmente, et  $g(y) - 1/2^K \nu(X) \leq g^K(y) \leq g(y)$ , donc  $g(y)$  est la borne supérieure des  $g^K(y)$ ,  $K \in \mathbb{N}$ . L'ensemble  $g^{-1}t, +\infty[$  est alors l'union des  $g^{K^{-1}}t, +\infty[$ ,  $K \in \mathbb{N}$ . Ces derniers étant ouverts par le paragraphe ci-dessus,  $g^{-1}t, +\infty[$  aussi. Donc  $g$  est continue.  $\square$

Ceci nous permet de donner un sens aux constructions utilisées dans le théorème qui nous occupe :

**Théorème 4.6.2 (Jones-Fubini)** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Soit  $\nu$  une valuation continue sur  $X$ ,  $\nu'$  une valuation continue sur  $Y$ . Pour toute fonction  $f$  continue bornée du produit topologique  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ ,

$$\int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu = \int_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \otimes \nu') = \int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu d\nu' \quad (4.3)$$

*Démonstration.* Nous reprenons l'argument de Jones. Pour tout ouvert  $W$  de  $X \times Y$ , posons

$$\begin{aligned} \nu_1(W) &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_W(x, y) d\nu' d\nu \\ \nu_2(W) &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_W(x, y) d\nu d\nu' \end{aligned}$$

Ceci a un sens, de même en général que les côtés gauche et droit de (4.3), par le lemme 4.6.1.

Clairement,  $\nu_1(\emptyset) = \nu_2(\emptyset) = 0$ ,  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont monotones et continues par le lemme 4.1.2 et la proposition 4.2.1. Il est facile de vérifier que  $\chi_{W_1 \cup W_2} + \chi_{W_1 \cap W_2} = \chi_{W_1} + \chi_{W_2}$ , puisque les deux côtés définissent la fonction qui à tout élément de  $W_1 \cap W_2$  associe 2, à tout élément de  $W_1$  mais pas de  $W_2$  ou réciproquement associe 1, et à tout autre élément associe 0. Comme l'intégrale de Choquet est linéaire en la fonction intégrée lorsque l'on intègre par rapport à une valuation (corollaire 4.3.3),  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont des valuations, donc des valuations continues. Or, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , et tout ouvert  $V$  de  $Y$ ,  $\nu_1(U \times V) = \nu_2(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$ , donc  $\nu_1 = \nu_2 = \nu \otimes \nu'$  par l'unicité de la valuation produit (section 3.8).

Soit maintenant  $f$  une fonction continue bornée arbitraire de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ . Écrivons  $f$  sous la forme de la borne supérieure de la famille  $(f_K)_{K \in \mathbb{N}}$  du lemme 4.1.6. Posons  $f_K = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{W_i}$ , avec  $X \times Y = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_n$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f_K(x, y) d\nu' d\nu &= \sum_{i=0}^n a_i \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_{W_i}(x, y) d\nu' d\nu \\ &\quad \text{par le corollaire 4.3.3} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \nu_1(W_i) = \int_{(x, y) \in X \times Y} f_K(x, y) d\nu_1 \end{aligned}$$

Par le lemme 4.1.6, dernière partie,

$$\int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu = \int_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y) d\nu_1$$

De même, on déduit

$$\int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu d\nu' = \int_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y) d\nu_2$$

On conclut car  $\nu_1 = \nu_2 = \nu \otimes \nu'$ . □

La construction ne se généralise pas aux jeux quelconques, même continus. Lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont des jeux continus, nous verrons ci-dessous qu'il existe toujours un jeu continu  $\nu \otimes \nu'$  qui vérifie l'équation (4.2), mais il ne sera pas en général unique. En fait, on peut déjà en définir deux, que nous noterons  $\nu \times \nu'$  et  $\nu \rtimes \nu'$ , par imitation des côtés gauche et droit de la formule (4.3). Ce sont exactement ceux qui sont utilisés dans la démonstration ci-dessus.

**Définition 4.6.3** Soient  $\nu$  un jeu sur l'espace  $X$ ,  $\nu'$  un jeu sur l'espace  $Y$ . Le produit à gauche  $\nu \times \nu'$  et le produit à droite  $\nu \rtimes \nu'$  sont définis par les formules suivantes, pour tout ouvert  $W$  de  $X \times Y$  :

$$\begin{aligned}(\nu \times \nu')(W) &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_W(x, y) d\nu' d\nu \\(\nu \rtimes \nu')(W) &= \int_{y \in Y} \int_{x \in X} \chi_W(x, y) d\nu d\nu'\end{aligned}$$

Le théorème de Jones-Fubini énonce que ces deux notions coïncident dans le cas de valuations continues :

**Fait 4.6.4** Lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont des valuations continues,  $\nu \times \nu' = \nu \otimes \nu' = \nu \rtimes \nu'$ .

Dans le cas plus général des jeux continus, on vérifie facilement que  $\nu \times \nu'$  et  $\nu \rtimes \nu'$  sont tous les deux des solutions de l'équation (4.3) :

**Fait 4.6.5** Pour tous jeux  $\nu$  sur  $X$  et  $\nu'$  sur  $Y$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout ouvert  $V$  de  $Y$ , on a :

$$\begin{aligned}(\nu \times \nu')(U \times V) &= \nu(U) \cdot \nu'(V) \\(\nu \rtimes \nu')(U \times V) &= \nu(U) \cdot \nu'(V)\end{aligned}$$

Mais en général,  $\nu \times \nu'$  et  $\nu \rtimes \nu'$  ne coïncident pas :

▷ **Exercice 4.9**

Soit  $X = Y$  l'espace  $\{1, 2\}$  muni de la topologie discrète,  $\nu = u_X$  le jeu tel que  $\nu(U) = 1$  si  $U = X$ ,  $\nu(U) = 0$  sinon, et  $\nu' = 1/2\delta_1 + 1/2\delta_2$ . Montrer que l'intégrale d'une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  le long de  $\nu$  vaut  $\min(g(1), g(2))$ . Exhiber un sous-ensemble  $W$  de  $X \times Y$  tel que  $(\nu \times \nu')(W) \neq (\nu \rtimes \nu')(W)$ .

**Lemme 4.6.6** Soient  $\nu$  et  $\nu'$  deux jeux, respectivement sur  $X$  et sur  $Y$ . Les produits  $\nu \times \nu'$  et  $\nu \rtimes \nu'$  sont des jeux, qui sont continus dès que  $\nu$  et  $\nu'$  le sont.

*Démonstration.* Que  $\nu \times \nu'$  et  $\nu' \times \nu$  soient des jeux découlent du fait que l'intégrale de Choquet de la fonction nulle vaut toujours 0 (le cas particulier  $\alpha = 0$  de la proposition 4.2.12), ce qui implique que  $(\nu \times \nu')(\emptyset) = (\nu \rtimes \nu')(\emptyset) = 0$ ; et du fait que l'intégrale de Choquet par rapport à  $\nu$  et à  $\nu'$  est croissante en la fonction intégrée (proposition 4.1.2).

Supposons  $\nu$  et  $\nu'$  continus, et soit  $W$  l'union d'une famille dirigée  $(W_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X \times Y$ . Alors on remarque d'abord que  $\chi_W = \sup_{i \in I} \chi_{W_i}$ , donc :

$$\begin{aligned} (\nu \times \nu')(W) &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \sup_{i \in I} \chi_{W_i}(x, y) d\nu' d\nu \\ &= \int_{x \in X} \sup_{i \in I} \int_{y \in Y} \chi_{W_i}(x, y) d\nu' d\nu \quad \text{par la proposition 4.2.1} \\ &= \sup_{i \in I} \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_{W_i}(x, y) d\nu' d\nu \quad \text{idem} \\ &= \sup_{i \in I} (\nu \times \nu')(W_i) \end{aligned}$$

Donc  $\nu \times \nu'$  est continu. De même pour  $\nu \rtimes \nu'$ . □

Les définitions de  $\nu \times \nu'$  et de  $\nu \rtimes \nu'$  semblent faites pour obtenir au moins une moitié du théorème de Fubini pour chacun des produits. Nous nous attendrions donc à ce que, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ , on ait :

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \times \nu') = \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu \tag{4.4}$$

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \rtimes \nu') = \int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu d\nu' \tag{4.5}$$

Ce n'est en fait pas le cas en général, voir l'exercice 4.10 ci-dessous. Cependant, ce sont les seuls candidats que nous ayons, au sens où, si  $\nu''$  est un jeu sur  $X \times Y$  tel que :

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d\nu'' = \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu$$

alors nécessairement  $\nu'' = \nu \times \nu'$  (prendre  $f = \chi_W$ ), et similairement pour  $\nu \rtimes \nu'$ . De plus, nous verrons que les équations (4.4) et (4.5) sont en fait vérifiées dans deux cas particuliers importants, données respectivement à la proposition 4.6.7 et à la proposition 4.6.10.

▷ **Exercice 4.10**

Posons  $X = Y = \{1, 2\}$ ,  $\nu = u_X$  et  $\nu' = 1/2\delta_1 + 1/2\delta_2$  comme à l'exercice 4.9. Prenons  $f(1, 1) = 2$ ,  $f(1, 2) = 0$ ,  $f(2, 1) = f(2, 2) = 1$ . Montrer que l'équation (4.4) n'est pas vérifiée. En s'inspirant de ce contre-exemple, trouver un autre contre-exemple à l'équation (4.5).

Le premier cas que nous traitons est celui où l'un des deux jeux est une valuation :

**Proposition 4.6.7** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $\nu$  un jeu sur  $X$ ,  $\nu'$  un jeu sur  $Y$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \times \nu') &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu \quad \text{si } \nu \text{ est une valuation} \\ \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \rtimes \nu') &= \int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu d\nu' \quad \text{si } \nu' \text{ est une valuation} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour toute fonction étagée  $f$  de la forme  $\epsilon \sum_{i=0}^n \chi_{W_i}$  sur  $X \times Y$ , avec  $\epsilon > 0$ ,  $X \times Y = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_n$ , on a :

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \times \nu') = \epsilon \sum_{i=0}^n (\nu \times \nu')(W_i)$$

par la proposition 4.1.4. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu &= \int_{x \in X} \epsilon \sum_{i=0}^n \nu' \{y \in Y \mid (x,y) \in W_i\} d\nu && \text{par la proposition 4.1.4} \\ &= \int_{x \in X} \epsilon \sum_{i=0}^n \int_{y \in Y} \chi_{W_i}(x,y) d\nu' d\nu \\ &= \epsilon \sum_{i=0}^n \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_{W_i}(x,y) d\nu' d\nu && \text{par le corollaire 4.3.3,} \\ &&& \text{puisque } \nu \text{ est une valuation} \\ &= \epsilon \sum_{i=0}^n (\nu \times \nu')(W_i) = \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \times \nu') \end{aligned}$$

Dans le cas général,  $f$  est borne supérieure de la famille croissante des  $f_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , par le lemme 4.1.6, et l'intégrale de  $f$  selon  $\nu \times \nu'$  est la borne supérieure de celle des  $f_K$ . De plus, on a  $f - 1/2^K \leq f_K \leq f$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu - 1/2^K \nu(X) \nu'(Y) &\leq \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f_K(x,y) d\nu' d\nu \\ &\leq \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu &= \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f_K(x,y) d\nu' d\nu \\ &= \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{(x,y) \in X \times Y} f_K(x,y) d(\nu \times \nu') \\ &= \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \times \nu') \end{aligned}$$

L'argument est identique pour  $\nu \times \nu'$ , lorsque  $\nu'$  est une valuation.  $\square$

Le second cas où nous disposons d'un analogue du théorème de Fubini, dans le cadre des jeux, est celui où la fonction  $f(x,y)$  à intégrer est comonotone en l'un ou l'autre de ses arguments.

**Définition 4.6.8 (Comonotone)** Soit  $f$  une fonction continue bornée de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est comonotone en son premier argument si et seulement si, pour tous  $y, y' \in Y$ , les fonctions  $x \mapsto f(x, y)$  et  $x \mapsto f(x, y')$  sont comonotones.

On dit que  $f$  est comonotone en son second argument si et seulement si, pour tous  $x, x' \in X$ , les fonctions  $y \mapsto f(x, y)$  et  $y \mapsto f(x', y)$  sont comonotones.

On dit que  $f$  est comonotone si et seulement si elle est comonotone en son premier argument et en son second argument.

Bauer remarque que, dans un cadre légèrement différent (le cas où  $X$  et  $Y$  sont deux espaces réels de dimension finie, munis de la tribu borélienne construite sur la topologie métrique usuelle) on peut toujours définir une unique crédibilité produit de deux crédibilités, qui de plus vérifie le théorème de Fubini (4.3) pour toutes les fonctions  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont comonotones (Bauer, 2003, théorème 17). La proposition 4.6.10 est une adaptation de ce résultat à notre cadre, et une généralisation au cas où  $\nu$  et  $\nu'$  sont des jeux quelconques. En revanche, nous n'établirons pas que  $\nu \times \nu'$  et  $\nu \times \nu'$  sont des crédibilités continues dès que  $\nu$  et  $\nu'$  le sont : elles ne le seront pas (exercice 4.11), et il nous faudra attendre jusqu'en section 5.7 pour définir le produit de deux crédibilités qui aura cette propriété.

▷ **Exercice 4.11**

Reprenons, comme aux exercices 4.9 et 4.10,  $X = Y = \{1, 2\}$ ,  $\nu = u_X$  et  $\nu' = 1/2\delta_1 + 1/2\delta_2$ . Rappelons que  $\nu$  est une crédibilité, et que  $\nu'$ , en tant que valuation, est aussi une crédibilité. Elles sont continues car  $X$  et  $Y$  sont finis. Montrer en revanche que  $\nu \times \nu'$  n'est pas une crédibilité, et n'est en fait même pas convexe. Procéder de même pour établir que le produit à droite  $\nu \times \nu'$  de deux crédibilités n'est pas nécessairement une crédibilité, et n'est même pas convexe en général.

Notons que Bauer (2003, définition 15) énonce (pour des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ) que toute fonction comonotone en son premier argument l'est en son second argument. Ceci est faux. Par exemple, la fonction qui à  $x, y \in \mathbb{R}$  associe  $e^x \arctan y$  (voir figure 4.2) est comonotone en son premier argument, mais pas en son second argument.

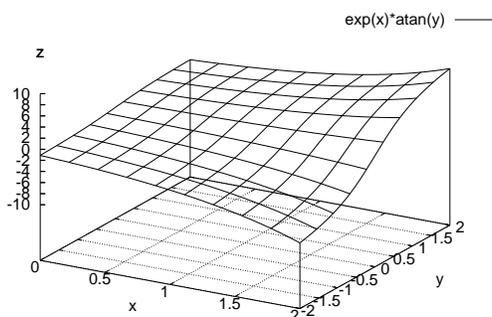


FIG. 4.2 – Une fonction comonotone en son premier argument mais pas en son second

**Lemme 4.6.9** Soit  $f$  une fonction continue bornée de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ , comonotone en son premier argument. Soit  $\nu'$  un jeu sur  $Y$ . Les fonctions :

$$g_t(x) = \nu' \{y \in Y \mid f(x, y) > t\}$$

sont comonotones deux à deux lorsque  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$ .

De même, si  $f$  est comonotone en son second argument, et  $\nu$  est un jeu sur  $X$ , alors les fonctions :

$$h_t(y) = \nu \{x \in X \mid f(x, y) > t\}$$

sont comonotones deux à deux,  $t \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Montrons la première affirmation, la seconde étant symétrique.

Supposons par contradiction que  $g_t(x) < g_t(x')$  et  $g_{t'}(x) > g_{t'}(x')$ . Il n'est pas possible que  $\{y \in Y \mid f(x', y) > t\}$  soit inclus dans  $\{y \in Y \mid f(x, y) > t\}$ , sinon on aurait  $g_t(x') \leq g_t(x)$ . Donc il existe un  $y_1 \in Y$  tel que  $f(x', y_1) > t$  et  $f(x, y_1) \leq t$ . De même, il n'est pas possible que  $\{y \in Y \mid f(x, y) > t'\}$  soit inclus dans  $\{y \in Y \mid f(x', y) > t'\}$ , sinon  $g_{t'}(x) \leq g_{t'}(x')$ . Donc il existe un  $y_2 \in Y$  tel que  $f(x, y_2) > t'$  et  $f(x', y_2) \leq t'$ . On en déduit que  $f(x, y_1) < f(x', y_1)$  et  $f(x, y_2) > f(x', y_2)$ , ce qui contredit le fait que  $f$  soit comonotone en son premier argument.  $\square$

**Proposition 4.6.10** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $\nu$  un jeu sur  $X$ ,  $\nu'$  un jeu sur  $Y$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \times \nu') &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu \\ &\text{si } f \text{ est comonotone en son premier argument} \\ \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \times \nu') &= \int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu d\nu' \\ &\text{si } f \text{ est comonotone en son second argument} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Traitons uniquement de la première égalité, sous l'hypothèse que  $f$  est comonotone en son premier argument. Considérons la fonction étagée  $f_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , définie au lemme 4.1.6, et écrivons  $f_K$  sous la forme  $a + \epsilon \sum_{k=1}^n \chi_{W_k}$ , où  $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots \supseteq W_n$ . Par construction, chaque  $W_k$  est un ouvert de la forme  $f^{-1}[a + k/2^K, +\infty[$ . On a alors :

$$\int_{y \in Y} f_K(x, y) d\nu' = a\nu'(Y) + \epsilon \sum_{k=1}^n \nu' \{y \in Y \mid (x, y) \in W_k\}$$

en utilisant la proposition 4.1.4. Par construction, la fonction  $g'_k(x) = \epsilon \nu' \{y \in Y \mid (x, y) \in W_k\}$  s'écrit encore  $g'_k(x) = \epsilon \nu' \{y \in Y \mid f(x, y) > a + k/2^K\}$ . Puisque  $f$  est comonotone en son premier argument, les fonctions  $g'_k$  sont toutes comonotones, en utilisant le lemme 4.6.9 et le fait que la multiplication par  $\epsilon$  préserve la comonotonie. En notant  $g'_0(x)$  la fonction constante  $a\nu'(Y)$ ,

on voit que les  $g'_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sont aussi toutes comonotones avec  $g'_0$ , puisque toute fonction constante est comonotone avec n'importe quelle fonction continue bornée. Par le corollaire 4.4.6,

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} \int_{y \in Y} f_K(x, y) d\nu' d\nu &= \int_{x \in X} \sum_{k=0}^n g'_k(x) d\nu = \sum_{k=0}^n \int_{x \in X} g'_k(x) d\nu \\
&= a\nu'(Y)\nu(X) + \epsilon \sum_{k=1}^n \int_{x \in X} \nu' \{y \in Y | (x, y) \in W_k\} d\nu \\
&= a\nu'(Y)\nu(X) + \epsilon \sum_{k=1}^n \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_{W_k}(x, y) d\nu' d\nu \\
&= a(\nu \times \nu')(X \times Y) + \epsilon \sum_{k=1}^n (\nu \times \nu')(W_k) \\
&= \int_{(x, y) \in X \times Y} f_K(x, y) d(\nu \times \nu')
\end{aligned}$$

Par le lemme 4.1.6, on a d'une part :

$$\int_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \times \nu') = \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{(x, y) \in X \times Y} f_K(x, y) d(\nu \times \nu')$$

et d'autre part  $f - 1/2^K \leq f_K \leq f$ , donc, en utilisant le lemme 4.1.5 et le lemme 4.1.2,

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu - \frac{\nu(X)\nu'(Y)}{2^K} &\leq \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f_K(x, y) d\nu' d\nu \\
&\leq \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu &= \sup_{k \in K} \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f_K(x, y) d\nu' d\nu \\
&= \sup_{k \in K} \int_{(x, y) \in X \times Y} f_K(x, y) d(\nu \times \nu') \\
&= \int_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \times \nu')
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. □

## 4.7 Hémi-distances entre jeux

Lorsque  $X$  est un espace hémi-métrique, il est possible de comparer deux jeux  $\nu$  et  $\nu'$  sur  $X$  finement, en évaluant à quel point ils sont proches à l'aide d'une hémi-distance. Il existe de

nombreux candidats. Un exemple simple est l'hémi-distance de *variation totale*  $d_{TV}(\nu, \nu') = \sup_{U \in \mathcal{O}(X)} d_{\mathbb{R}}(\nu(U), \nu'(U))$ . Cette hémi-distance particulière n'a que peu d'intérêt. Nous lui préférons quelques autres hémi-distances, définies plus bas, et dont nous montrerons que leurs topologies coïncident avec la topologie faible. Ceci est une adaptation d'un théorème de Prohorov, qui énonce que, lorsque  $X$  est un espace métrique complet séparable, l'espace des mesures  $\nu$  sur  $X$  telles que  $\nu(X) = 1$ , muni d'une topologie dite faible (ou de la convergence étroite), est lui-même métrique, complet et séparable.

### 4.7.1 L'hémi-distance de Levy-Prohorov

La première hémi-métrique que nous examinons est inspirée de la distance de Levy-Prohorov. L'idée est de considérer  $\nu$  comme proche de  $\nu'$ , à  $\epsilon$  près, si pour tout ouvert  $U$ , on peut épaissir  $U$ , en ajoutant tous les points à distances inférieures à  $\epsilon$ , et réaliser que l'on obtient ainsi un ouvert de  $\nu$ -mesure proche de la  $\nu'$ -mesure de  $U$ , à  $\epsilon$  près. Rappelons (définition 3.10.40) que l' $\epsilon$ -épaississement  $U^{d,+(\epsilon)}$  de  $U$  est l'ouvert  $\bigcup_{x \in U} B_{x, < \epsilon}^d$ .

**Définition 4.7.1 (Levy-Prohorov,  $d_{LP}$ )** Soit  $X$  un espace, d'hémi-distance  $d$ . L'hémi-distance  $d_{LP}$ , dite de Levy-Prohorov, sur l'espace  $\mathbf{J}(X)$  est définie par :

$$d_{LP}(\nu, \nu') = \inf\{\epsilon > 0 \mid \forall U \in \mathcal{O}(X) \cdot \nu(U) \leq \nu'(U^{d,+(\epsilon)}) + \epsilon\}$$

Notons que  $\epsilon = \nu(X)$  est une solution de  $\nu(U) \leq \nu'(U^{d,+(\epsilon)}) + \epsilon$  pour tout ouvert  $U$ , donc  $d_{LP}(\nu, \nu') \leq \nu(X)$ . L'hémi-distance  $d_{LP}$  est donc à valeurs réelles, et en fait bornée sur le sous-espace  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$  des jeux sous-normalisés.

Nous démontrerons à la proposition 4.7.3 que  $d_{LP}$  est bien une hémi-distance. Nous avons besoin pour cela de faire une remarque préliminaire.

**Lemme 4.7.2** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ ,  $U$  un ouvert de  $X$ . Pour tous  $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}^+$ ,  $(U^{d,+(\epsilon)})^{d,+(\epsilon')} \subseteq U^{d,+(\epsilon+\epsilon')}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $z \in (U^{d,+(\epsilon)})^{d,+(\epsilon')}$ , par définition il existe un  $y \in U^{d,+(\epsilon)}$  tel que  $d(y, z) < \epsilon'$ . Par définition de  $U^{d,+(\epsilon)}$ , il existe un  $x \in U$  tel que  $d(x, y) < \epsilon$ . Donc  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon + \epsilon'$ , autrement dit  $z \in B_{x, < \epsilon + \epsilon'}^d$ . Puisque  $x \in U$ ,  $z \in U^{d,+(\epsilon+\epsilon')}$ .  $\square$

**Proposition 4.7.3** La fonction  $d_{LP}$  est une hémi-distance. Si  $\nu \leq \nu'$  alors  $d_{LP}(\nu, \nu') = 0$ .

*Démonstration.* D'abord, pour tous jeux  $\nu$  et  $\nu'$  tels que  $\nu \leq \nu'$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $\nu(U) \leq \nu'(U) \leq \nu'(U^{d,+(\epsilon)}) + \epsilon$  pour tout ouvert  $U$ , puisque  $U \subseteq U^{d,+(\epsilon)}$ . Donc  $d_{LP}(\nu, \nu') \leq \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $d_{LP}(\nu, \nu') = 0$ . Ceci implique en particulier  $d_{LP}(\nu, \nu) = 0$ .

Fixons maintenant trois jeux  $\nu, \nu',$  et  $\nu''$ . Posons  $a = d_{LP}(\nu, \nu'')$ ,  $a' = d_{LP}(\nu'', \nu')$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver un  $\eta \in \mathbb{R}^+$ , tel que  $a \leq \eta \leq a + \epsilon/2$ , et  $\nu(U) \leq \nu''(U^{d,+(\eta)}) + \eta$  pour tout ouvert  $U$ ; on peut de même trouver un  $\eta' \in \mathbb{R}^+$ , tel que  $a' \leq \eta' \leq a' + \epsilon/2$ , et

$\nu''(V) \leq \nu'(V^{d,+(\eta')}) + \eta'$  pour tout ouvert  $V$ . En posant  $V = U^{d,+(\eta)}$ , on obtient  $\nu(U) \leq \nu'((U^{d,+(\eta)})^{d,+(\eta')}) + \eta + \eta' \leq \nu'(U^{d,+(\eta+\eta')}) + \eta + \eta'$  par le lemme 4.7.2. Comme  $U$  est arbitraire,  $d_{\text{LP}}(\nu, \nu') \leq \eta + \eta' \leq a + a' + \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $d_{\text{LP}}(\nu, \nu') \leq a + a' = d_{\text{LP}}(\nu, \nu'') + d_{\text{LP}}(\nu'', \nu')$ . Donc  $d_{\text{LP}}$  est une hémi-distance.  $\square$

Nous allons maintenant montrer que le préordre de spécialisation de  $d_{\text{LP}}$  est exactement l'ordre  $\leq$  usuel sur les jeux, fournissant une réciproque à la deuxième partie de la proposition 4.7.3. Ceci nécessite l'étude des rapports entre épaissement et amincissement.

▷ **Exercice 4.12**

Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ ,  $U$  un ouvert de  $X$ . Montrer que pour tous  $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}^+$ ,  $U^{d,-(\epsilon+\epsilon')} \subseteq (U^{d,-(\epsilon)})^{d,-(\epsilon')}$ . Ceci est le pendant pour les amincissements du lemme 4.7.2.

**Lemme 4.7.4** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ ,  $\nu$  et  $\nu'$  deux jeux sur  $X$ ,  $U$  un ouvert de  $X$ , et  $\epsilon$  un réel strictement positif. Si  $\nu(U) \leq \nu'(U^{d,+(\epsilon)}) + \epsilon$  pour tout ouvert  $U$  alors  $\nu(U^{d,-(\epsilon)}) \leq \nu'(U) + \epsilon$  pour tout ouvert  $U$ .

*Démonstration.* Si  $\nu(U) \leq \nu'(U^{d,+(\epsilon)}) + \epsilon$  pour tout ouvert  $U$ , en particulier pour  $U$  de la forme  $V^{d,-(\epsilon)}$ , on aura  $\nu(V^{d,-(\epsilon)}) \leq \nu'((V^{d,-(\epsilon)})^{d,+(\epsilon)}) + \epsilon \leq \nu'(V) + \epsilon$ , en utilisant le lemme 3.10.46 et la monotonie de  $\nu'$ .  $\square$

**Proposition 4.7.5** Le préordre de spécialisation de  $d_{\text{LP}}$  sur  $\mathbf{J}(X)$  est  $\leq$  : pour tous jeux continus  $\nu$  et  $\nu'$ ,  $d_{\text{LP}}(\nu, \nu') = 0$  si et seulement si  $\nu \leq \nu'$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà vu à la proposition 4.7.3 que  $d_{\text{LP}}(\nu, \nu') = 0$  si  $\nu \leq \nu'$ . Pour montrer que  $\leq$  est le préordre de spécialisation de  $d_{\text{LP}}$  sur  $\mathbf{J}(X)$ , fixons deux jeux continus  $\nu$  et  $\nu'$ , et supposons  $d_{\text{LP}}(\nu, \nu') = 0$  : nous devons démontrer que  $\nu \leq \nu'$ . Par définition, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un réel  $\eta_\epsilon$  avec  $0 \leq \eta_\epsilon \leq \epsilon$  tel que pour tout ouvert  $U$ ,  $\nu(U) \leq \nu'(U^{d,+(\eta_\epsilon)}) + \eta_\epsilon$ . Par le lemme 4.7.4, pour tout ouvert  $U$ ,  $\nu(U^{d,-(\eta_\epsilon)}) \leq \nu'(U) + \eta_\epsilon$ . La famille des réels  $(\eta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  a 0 pour borne inférieure. La famille des  $U^{d,-(\eta_\epsilon)}$ ,  $\epsilon > 0$ , est donc dirigée et d'union égale à  $U$  par le lemme 3.10.45. Comme  $\nu$  est continu, la borne supérieure des  $\nu(U^{d,-(\eta_\epsilon)})$ ,  $\epsilon > 0$ , est exactement  $\nu(U)$ . Pour tout  $\epsilon' > 0$ , il existe donc un  $\epsilon > 0$  assez petit tel que  $\nu(U^{d,-(\eta_\epsilon)}) \geq \nu(U) - \epsilon'/2$ . Comme la borne inférieure des  $\eta_\epsilon$  est 0, on peut aussi demander que  $\epsilon$  soit suffisamment petit, de sorte que  $\eta_\epsilon \leq \epsilon'/2$ . Alors  $\nu(U) \leq \nu(U^{d,-(\eta_\epsilon)}) + \epsilon'/2 \leq \nu'(U) + \eta_\epsilon + \epsilon'_2 \leq \nu'(U) + \epsilon'$ . Comme  $\epsilon'$  est arbitraire,  $\nu(U) \leq \nu'(U)$ . Comme  $U$  est arbitraire,  $\nu \leq \nu'$ .  $\square$

Il existe de nombreuses topologies ayant  $\leq$  pour préordre de spécialisation. Celle de  $d_{\text{LP}}$  est plus fine que la topologie faible :

**Lemme 4.7.6** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . La topologie  $\mathcal{O}^{d_{\text{LP}}}$  de  $d_{\text{LP}}$  est plus fine que la topologie faible sur  $\mathbf{J}(X)$ .

*Démonstration.* En utilisant le corollaire 3.10.5, il suffit de montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\nu \in [U > r]$ , il existe un réel  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{\text{LP}}} \subseteq [U > r]$ . Par le lemme 3.10.45, la famille des  $U^{d,-(\epsilon)}$ ,  $\epsilon > 0$ , est dirigée, et d'union égale à  $U$ . Posons

$a = \nu(U)$ . Comme  $\nu(U) > r$ , on a aussi  $\nu(U) > (a + r)/2$ . Puisque  $\nu$  est continu, il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $\nu(U^{d,-(\epsilon)}) > (a + r)/2$ . Quitte à remplacer  $\epsilon$  par  $\min(\epsilon, (a - r)/2)$ , on peut supposer que  $\epsilon \leq (a - r)/2$ . Pour tout  $\nu' \in B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ , par définition  $d_{LP}(\nu, \nu') < \epsilon$ , donc il existe  $\eta \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\eta < \epsilon$  et pour tout ouvert  $V$ ,  $\nu(V) \leq \nu'(V^{d,+(\eta)}) + \eta$ . Par le lemme 4.7.4, on en déduit  $\nu(U^{d,-(\eta)}) \leq \nu'(U) + \eta$ . Puisque  $\eta < \epsilon$ , par le lemme 3.10.45,  $U^{d,-(\epsilon)} \subseteq U^{d,-(\eta)}$ . Comme  $\nu$  est monotone,  $\nu(U^{d,-(\epsilon)}) \leq \nu(U^{d,-(\eta)})$ , donc  $\nu(U^{d,-(\epsilon)}) \leq \nu'(U) + \eta < \nu'(U) + (a - r)/2$ . Or  $\nu(U^{d,-(\epsilon)}) > (a + r)/2$ , donc  $\nu'(U) > (a + r)/2 - (a - r)/2 = r$ . Autrement dit,  $\nu' \in [U > r]$ . On conclut en remarquant que  $\nu'$  est un élément arbitraire de  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ .  $\square$

On peut se demander si la réciproque est vraie. Ceci revient à savoir si toute boule ouverte  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$  est un ouvert faible. Or la forme de la définition de  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$  ne laisse pas augurer du fait que ce puisse être le cas. Nous aurons besoin pour établir ce résultat que  $X$  soit totalement borné, condition que nous pouvons caractériser sous la forme suivante — caractérisation peu parlante, mais qui sera exactement celle dont nous aurons besoin dans la démonstration du théorème 4.7.8.

**Lemme 4.7.7**  *$X$  est totalement borné si et seulement si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une partie finie  $E$  de  $X$  telle que, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $U$  soit inclus dans  $(U^{d,+(\epsilon)} \cap E)^{d,+(\epsilon)}$ .*

*Démonstration.* Supposons  $X$  totalement borné, et soit  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , fixons  $x \in U$ . Par hypothèse, il existe  $i$  tel que  $d^{sym}(x_i, x) < \epsilon$ , donc tel que  $d(x_i, x) < \epsilon$  et  $d(x, x_i) < \epsilon$ . Puisque  $d(x, x_i) < \epsilon$ ,  $x_i$  appartient à  $U^{d,+(\epsilon)}$ , donc à  $U^{d,+(\epsilon)} \cap E$ . Comme  $d(x_i, x) < \epsilon$ , on en déduit que  $x \in (U^{d,+(\epsilon)} \cap E)^{d,+(\epsilon)}$ . Comme  $x$  est arbitraire,  $U \subseteq (U^{d,+(\epsilon)} \cap E)^{d,+(\epsilon)}$ .

Réciproquement, fixons  $\epsilon > 0$  arbitraire, et supposons qu'il existe une partie finie  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  de  $X$  telle que  $U \subseteq (U^{d,+(\epsilon/2)} \cap E)^{d,+(\epsilon/2)}$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Pour tout  $x \in X$ , considérons l'ouvert  $U = B_{x, < \epsilon/2}^d$ . On peut trouver un élément  $x_i$  de  $U^{d,+(\epsilon/2)} \cap E$  tel que  $d(x_i, x) < \epsilon/2 < \epsilon$ . D'autre part, comme  $x_i \in U^{d,+(\epsilon/2)}$ , il existe  $y \in U$  tel que  $d(y, x_i) < \epsilon/2$ , donc  $d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) < \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $X$  est totalement borné.  $\square$

**Théorème 4.7.8** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ , et supposons  $X$  totalement borné. Alors la topologie de  $d_{LP}$  sur  $\mathbf{J}(X)$  coïncide avec la topologie faible.*

*Démonstration.* Fixons  $\nu \in \mathbf{J}(X)$ ,  $\epsilon > 0$ , et considérons un élément arbitraire  $\nu'$  de  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ . Par définition, il existe  $\eta > 0$  tel que  $\eta < \epsilon$  et  $\nu(U) \leq \nu'(U^{d,+(\eta)}) + \eta$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Posons  $\epsilon' = \epsilon - \eta$ . Puisque  $X$  est totalement borné, par le lemme 4.7.7 il existe une partie finie  $E$  de  $X$  telle que : (\*)  $U \subseteq (U^{d,+(\epsilon'/3)} \cap E)^{d,+(\epsilon'/3)}$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .

Pour chaque partie (finie)  $A$  de  $E$ , notons :

$$r_A = \sup_{\substack{U \text{ ouvert de } X \\ U^{d,+(\eta+\epsilon'/3)} \cap E \subseteq A}} \nu(U) - \eta - \epsilon'/3$$

$$\mathcal{U} = \bigcap_{A \subseteq E} [A^{d,+(\epsilon'/3)} > r_A]$$

Notons que  $A^{d,+(\epsilon'/3)}$  est un ouvert de  $X$ , comme union de boules ouvertes, donc que  $[A^{d,+(\epsilon'/3)} > r_A]$  est un ouvert faible.  $\mathcal{U}$  est alors un ouvert faible, comme intersection finie d'ouverts faibles. (C'est l'endroit où le fait que  $X$  soit totalement borné, donc que  $E$  soit fini, est nécessaire.)

Commençons par montrer que  $\mathcal{U} \subseteq B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ . Pour tout jeu  $\nu'' \in \mathcal{U}$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , en notant  $A = U^{d,+(\eta+\epsilon'/3)} \cap E$ , on a  $r_A \geq \nu(U) - \eta - \epsilon'/3$  par définition de  $r_A$ , donc :

$$\begin{aligned} \nu(U) &\leq r_A + \eta + \epsilon'/3 \\ &< \nu''(A^{d,+(\epsilon'/3)}) + \eta + \epsilon'/3 \quad \text{puisque } \nu'' \in \mathcal{U} \subseteq [A^{d,+(\eta+\epsilon'/3)} > r_A] \\ &\leq \nu''((U^{d,+(\eta+\epsilon'/3)})^{d,+(\epsilon'/3)}) + \eta + \epsilon'/3 \quad \text{puisque } A \subseteq U^{d,+(\epsilon'/3)} \\ &\leq \nu''(U^{d,+(\eta+2\epsilon'/3)}) + \eta + \epsilon'/3 \quad \text{par le lemme 4.7.2, } \nu'' \text{ étant monotone} \\ &\leq \nu''(U^{d,+(\eta+2\epsilon'/3)}) + \eta + 2\epsilon'/3 \end{aligned}$$

Donc  $d_{LP}(\nu, \nu'') \leq \eta + 2\epsilon'/3 < \epsilon$ , autrement dit  $\nu'' \in B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ .

Montrons ensuite que  $\nu' \in \mathcal{U}$ . Fixons  $A \subseteq E$  arbitraire, et  $U$  un ouvert de  $X$  quelconque tel que  $U^{d,+(\eta+\epsilon'/3)} \cap E \subseteq A$ . Alors :

$$\begin{aligned} \nu'(A^{d,+(\epsilon'/3)}) &\geq \nu'((U^{d,+(\eta+\epsilon'/3)} \cap E)^{d,+(\epsilon'/3)}) \quad \text{puisque } \nu' \text{ est monotone} \\ &\geq \nu'(((U^{d,+(\eta)})^{d,+(\epsilon'/3)} \cap E)^{d,+(\epsilon'/3)}) \quad \text{par le lemme 4.7.2} \\ &\geq \nu'(U^{d,+(\eta)}) \quad \text{par (*)} \\ &\geq \nu(U) - \eta \quad \text{par définition de } \eta \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure lorsque  $U$  varie parmi les ouverts tels que  $U^{d,+(\eta+\epsilon'/3)} \cap E \subseteq A$ , on en déduit que  $\nu'(A^{d,+(\epsilon'/3)}) \geq r_A + \epsilon'/3$ . En particulier,  $\nu'(A^{d,+(\epsilon'/3)}) > r_A$ , donc  $\nu' \in [A^{d,+(\epsilon'/3)} > r_A]$ . Comme  $A$  est arbitraire,  $\nu' \in \mathcal{U}$ .

Nous avons donc établi que pour tout  $\nu' \in B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ , il existe un ouvert faible  $\mathcal{U}$  de  $\mathbf{J}(X)$  tel que  $\nu' \in \mathcal{U} \subseteq B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ . Ceci implique que  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$  est l'union des tels ouverts faibles  $\mathcal{U}$  lorsque  $\nu'$  varie dans  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$ . Donc  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{LP}}$  est un ouvert faible. Ceci entraîne que  $\mathcal{O}^{d_{LP}}$  est moins fine que la topologie faible, donc coïncide avec elle par le lemme 4.7.6.  $\square$

## 4.7.2 L'hémi-distance de Hutchinson

La seconde hémi-distance que nous considérons sur  $\mathbf{J}(X)$  est une adaptation au cadre des hémi-distances de la distance de Hutchinson. Rappelons que  $\mathbb{R}$  est muni d'une hémi-distance  $d_{\mathbb{R}}$  (définition 3.10.8) définie par  $d_{\mathbb{R}}(s, t) = \max(s - t, 0)$ . La distance de Hutchinson entre deux mesures  $\nu$  et  $\nu'$  est usuellement définie comme la borne supérieure des quantités  $\left| \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{x \in X} f(x) d\nu' \right|$ , lorsque  $f$  parcourt l'espace des fonctions 1-lipschitziennes de  $X$  (un espace métrique) vers  $\mathbb{R}$ , muni de sa topologie métrique usuelle (avec distance entre deux réels  $s$  et  $t$  égale à  $|s - t|$ ). Remplaçons la distance  $|s - t|$  par  $d_{\mathbb{R}}(s, t)$ , et nous obtenons ce que nous appellerons l'hémi-distance de Hutchinson.

**Définition 4.7.9 (Hutchinson,  $d_H$ )** Soit  $X$  un espace, d'hémi-distance  $d$ . Notons  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1$  l'espace de toutes les fonctions 1-lipschitziennes bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

L'hémi-distance de Hutchinson,  $d_H$ , sur l'espace  $\mathbf{J}(X)$  est définie par :

$$d_H(\nu, \nu') = \sup_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1} d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{x \in X} f(x) d\nu' \right)$$

Notons qu'intégrer une fonction 1-lipschitzienne  $f$  bornée quelconque a un sens, puisque toute fonction 1-lipschitzienne est continue (fait 3.10.12).

L'étude de  $d_H$  passe par l'étude d'une famille de fonctions 1-lipschitziennes, censées approchées les fonctions  $\chi_U$ .

**Lemme 4.7.10** Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , posons  $\chi_U^\epsilon(x) = \min(\epsilon, d(x, X \setminus U))$ . La fonction  $\chi_U^\epsilon$  est bornée, 1-lipschitzienne. La fonction  $1/\epsilon\chi_U^\epsilon$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ , vaut 0 sur  $X \setminus U$ , 1 sur  $U^{d, -(\epsilon)}$ , et décroît en fonction de  $\epsilon$ . La famille  $(1/\epsilon\chi_U^\epsilon)_{\epsilon > 0}$  est dirigée, et de borne supérieure égale à  $\chi_U$ . Plus précisément, on a :

$$\chi_{U^{d, -(\epsilon)}} \leq \frac{1}{\epsilon} \chi_U^\epsilon \leq \chi_U$$

*Démonstration.* D'abord,  $\chi_U^\epsilon$  est clairement bornée. Par le lemme 3.10.42,  $\chi_U^\epsilon(x) \leq \min(\epsilon, d(x, x') + d(x', X \setminus U)) \leq \min(d(x, x') + \epsilon, d(x, x') + d(x', X \setminus U)) = d(x, x') + \chi_U^\epsilon(x')$ , donc  $\chi_U^\epsilon$  est 1-lipschitzienne. Il est clair que  $1/\epsilon\chi_U^\epsilon(x)$  vaut 0 pour tout  $x \in X \setminus U$ , et que  $1/\epsilon\chi_U^\epsilon(x)$  est un réel compris entre 0 et 1. On en déduit  $1/\epsilon\chi_U^\epsilon \leq \chi_U$ . Remarquons aussi que  $1/\epsilon\chi_U^\epsilon(x)$  vaut 1 dès que  $d(x, X \setminus U) \geq \epsilon$ , ce qui arrive notamment dès que  $x \in U^{d, -(\epsilon)}$ . En particulier,  $\chi_{U^{d, -(\epsilon)}} \leq 1/\epsilon\chi_U^\epsilon$ .

Pour montrer que  $\chi_U^\epsilon$  décroît en fonction de  $\epsilon$ , supposons  $\epsilon \leq \epsilon'$ , alors :

$$1/\epsilon\chi_U^\epsilon(x) = \min(1, \frac{1}{\epsilon}d(x, X \setminus U)) \leq \min(1, \frac{1}{\epsilon'}d(x, X \setminus U)) = \frac{1}{\epsilon'}\chi_U^{\epsilon'}(x)$$

La famille  $(1/\epsilon\chi_U^\epsilon)_{\epsilon > 0}$  est donc dirigée. Pour tout  $x \in U$ , par le lemme 3.10.45,  $x \in U^{d, -(\epsilon)}$  pour  $\epsilon > 0$  assez petit : alors  $1/\epsilon\chi_U^\epsilon(x) = 1$ . Donc  $\sup_{\epsilon > 0} 1/\epsilon\chi_U^\epsilon(x) = 1$  pour tout  $x \in U$ . Puisque d'autre part  $1/\epsilon\chi_U^\epsilon(x) = 0$  pour tout  $x \notin U$ , on en déduit que  $\sup_{\epsilon > 0} 1/\epsilon\chi_U^\epsilon = \chi_U$ .  $\square$

**Lemme 4.7.11** La fonction  $d_H$  est une hémi-distance, de préordre de spécialisation l'ordre  $\leq$  sur  $\mathbf{J}(X)$ .

*Démonstration.* D'abord, si  $\nu \leq \nu'$ , on a :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{x \in X} f(x) d\nu' \leq 0$$

pour toute fonction 1-lipschitzienne bornée  $f$ , par la proposition 4.2.3. Donc  $d_H(\nu, \nu') = 0$ . En particulier,  $d_H(\nu, \nu) = 0$  pour tout jeu  $\nu$ . L'inégalité triangulaire est évidente. En effet, pour tout

$f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1$ ,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{x \in X} f(x) d\nu'' \right) &\leq d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{x \in X} f(x) d\nu' \right) \\ &\quad + d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu', \int_{x \in X} f(x) d\nu'' \right) \\ &\quad \text{par l'inégalité triangulaire de } d_{\mathbb{R}} \\ &\leq d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') + d_{\mathbb{H}}(\nu', \nu'') \end{aligned}$$

et l'on conclut en prenant la borne supérieure sur tous les  $f$ .

Montrons finalement que, si  $d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') = 0$ , alors  $\nu \leq \nu'$ . Fixons un ouvert  $U$  quelconque de  $X$ , et montrons que  $\nu(U) \leq \nu'(U)$ . Puisque  $d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') = 0$ , c'est que :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu \leq \int_{x \in X} f(x) d\nu'$$

pour toute fonction 1-lipschitzienne bornée  $f$ . Par le lemme 4.7.10, on peut choisir  $f = \chi_U^\epsilon$ , pour  $\epsilon > 0$  arbitraire. En multipliant par  $1/\epsilon$ , et en utilisant le fait que l'intégrale de Choquet est positivement homogène (proposition 4.2.12),

$$\int_{x \in X} \frac{1}{\epsilon} \chi_U^\epsilon(x) d\nu \leq \int_{x \in X} \frac{1}{\epsilon} \chi_U^\epsilon(x) d\nu' \quad (4.6)$$

La borne supérieure de la famille dirigée des  $1/\epsilon \chi_U^\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , vaut  $\chi_U$ . Lorsque  $\nu$  est un jeu continu, on peut appliquer la proposition 4.2.1, et en conclure que  $\chi_U$  a une intégrale par rapport à  $\nu$  inférieure ou égale à celle calculée par rapport à  $\nu'$ . En appliquant la proposition 4.1.4,  $\nu(U) \leq \nu'(U)$ .  $\square$

**Lemme 4.7.12** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ . La topologie  $\mathcal{O}^{d_{\mathbb{H}}}$  de  $d_{\mathbb{H}}$  est plus fine que la topologie faible sur  $\mathbf{J}(X)$ .*

*Démonstration.* En utilisant le corollaire 3.10.5, il suffit de montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\nu \in [U > r]$ , il existe un réel  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{\nu, < \epsilon}^{d_{\mathbb{H}}} \subseteq [U > r]$ . Posons  $a = \nu(U)$ . Par le lemme 4.7.10, le fait que  $\nu$  soit continu et la proposition 4.2.1, la borne supérieure des intégrales de  $1/\eta \chi_U^\eta$  par rapport à  $\nu$ ,  $\eta > 0$ , vaut celle de  $\chi_U$ , c'est-à-dire  $a$ . Comme  $a > r$ , on a aussi  $a > (a + r)/2$ . Pour  $\eta$  assez petit, on aura donc :

$$\int_{x \in X} \frac{1}{\eta} \chi_U^\eta(x) d\nu \geq (a + r)/2$$

Fixons  $\epsilon > 0$  quelconque tel que  $\epsilon < \eta(a - r)/2$ . Pour tout  $\nu' \in B_{\nu, < \epsilon}^{d_{\mathbb{H}}}$ , pour toute fonction 1-lipschitzienne bornée  $f$ ,

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu \leq \int_{x \in X} f(x) d\nu' + \epsilon \quad (4.7)$$

En prenant  $f = \chi_U^\eta$ , on en déduit :

$$\begin{aligned}
\nu'(U) &= \int_{x \in X} \chi_U(x) d\nu' \\
&\geq \int_{x \in X} \frac{1}{\eta} \chi_U^\eta(x) d\nu' \quad \text{par le lemme 4.7.10 et le lemme 4.1.2} \\
&\geq \int_{x \in X} \frac{1}{\eta} \chi_U^\eta(x) d\nu - \frac{\epsilon}{\eta} \quad \text{par (4.7) et la proposition 4.2.12} \\
&\geq \frac{a+r}{2} - \frac{\epsilon}{\eta} \\
&> r
\end{aligned}$$

puisque  $\epsilon < \eta(a-r)/2$ . Donc  $\nu' \in [U > r]$ .  $\square$

La topologie de  $d_H$  est plus fine que la topologie faible, de même que  $d_{LP}$ . Nous observons ensuite que, de  $d_H$  et  $d_{LP}$ , c'est la topologie de  $d_{LP}$  qui est plus fine que celle de  $d_H$ , du moins lorsque  $d$  est une hémi-distance bornée et à condition de ne considérer que des jeux normalisés.

**Lemme 4.7.13** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ , et supposons  $d$  bornée :  $d(x, y) \leq a$  pour tous  $x, y \in X$ . Pour toute fonction 1-lipschitzienne  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , il existe  $b \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f$  soit à valeurs dans  $[b, b+a]$ .*

*Démonstration.* Soit  $b = \inf_{x \in X} f(x)$ . Si le lemme était faux, il existerait un élément  $y \in X$  tel que  $f(y) > b+a$ . Soit  $c$  un réel tel que  $f(y) > c > b+a$ . Fixons un réel  $\epsilon > 0$  tel que  $\epsilon < c - b - a$ . Puisque  $b = \inf_{x \in X} f(x)$ , il existe un élément  $x \in X$  tel que  $f(x) < b + \epsilon$ . Alors  $f(y) - f(x) > c - b - \epsilon > a$ , puisque  $\epsilon < c - b - a$ . Or  $a \geq d(y, x)$ , ce qui contredit le fait que  $f$  soit 1-lipschitzienne.  $\square$

On peut dans ce cas demander que  $f$  soit majorée par  $a$  dans la définition de l'hémi-distance de Hutchinson :

**Corollaire 4.7.14** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$ , et supposons  $d$  bornée :  $d(x, y) \leq a$  pour tous  $x, y \in X$ . Alors, pour tous jeux normalisés  $\nu, \nu'$  sur  $X$ ,  $d_H$  est définie par :*

$$d_H(\nu, \nu') = \sup_{\substack{f \in (X \rightarrow \mathbb{R}^+)_1 \\ \sup_{x \in X} f(x) \leq a}} d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{x \in X} f(x) d\nu' \right)$$

*Démonstration.* Clairement le côté droit est inférieur ou égal à  $d_H(\nu, \nu')$ . Réciproquement, pour toute fonction  $f$  bornée et 1-lipschitzienne,  $f$  est à valeurs dans  $[b, b+a]$  pour un certain réel

$b \in \mathbb{R}^+$ , par le lemme 4.7.13, mais alors  $f - b$  est bornée, 1-lipschitzienne, majorée par  $a$ , et :

$$\begin{aligned}
& d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} (f(x) - b) d\nu, \int_{x \in X} (f(x) - b) d\nu' \right) \\
&= \max \left( \int_{x \in X} (f(x) - b) d\nu - \int_{x \in X} (f(x) - b) d\nu', 0 \right) \\
&= \max \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu - b\nu(X) - \int_{x \in X} f(x) d\nu' + b\nu'(X), 0 \right) \quad \text{par le lemme 4.1.5} \\
&= d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{x \in X} f(x) d\nu' \right)
\end{aligned}$$

puisque  $\nu(X) = \nu'(X) = 1$ . En prenant les bornes supérieures sur tous les  $f$ , on en déduit l'inégalité inverse.  $\square$

**Lemme 4.7.15** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ . Pour toute fonction 1-lipschitzienne  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $(f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[^{d, +(\epsilon)} \subseteq f^{-1}]t, +\infty[$ .

*Démonstration.* Pour tout  $x \in (f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[^{d, +(\epsilon)}$ , par définition il existe  $y \in f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[$  tel que  $d(y, x) < \epsilon$ . Si l'on avait  $f(x) \leq t$ , puisque  $f$  est 1-lipschitzienne, on aurait  $f(y) \leq f(x) + d(y, x) < t + \epsilon$ , ce qui contredit le fait que  $y \in f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[$ . Donc  $f(x) > t$ , autrement dit  $x \in f^{-1}]t, +\infty[$ .  $\square$

▷ **Exercice 4.13**

Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$ . Montrer que pour toute fonction 1-lipschitzienne  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[ \subseteq (f^{-1}]t, +\infty[^{d, -(\epsilon)}$ .

**Proposition 4.7.16** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrique  $d$  bornée :  $d(x, y) \leq a$  pour tous  $x, y \in X$ . Pour tous jeux normalisés  $\nu, \nu'$  sur  $X$ ,  $d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \leq (a + 1)d_{\text{LP}}(\nu, \nu')$ .

La topologie de  $d_{\text{LP}}$  sur  $\mathbf{J}_1(X)$  est plus fine que celle de  $d_{\mathbb{H}}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  soit tel que  $\nu(U) \leq \nu'(U^{d, +(\epsilon)}) + \epsilon$  pour tout ouvert  $U$ . Fixons une fonction  $f$  1-lipschitzienne bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , majorée par  $a \geq \epsilon, \nu(X)$ .

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} f(x) d\nu &= \int_0^a \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\
&\leq \int_0^a [\nu'(f^{-1}]t, +\infty[^{d, +(\epsilon)} + \epsilon] dt \quad \text{en prenant } U = f^{-1}]t, +\infty[ \\
&\leq \int_0^\epsilon \nu'(f^{-1}]t, +\infty[^{d, +(\epsilon)} dt + \int_\epsilon^a \nu'(f^{-1}]t, +\infty[^{d, +(\epsilon)} dt + a\epsilon \\
&\leq \epsilon\nu'(X) + a\epsilon + \int_0^{a-\epsilon} \nu'(f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[^{d, +(\epsilon)} dt \\
&\leq \epsilon\nu'(X) + a\epsilon + \int_0^{a-\epsilon} \nu'(f^{-1}]t, +\infty[) dt \quad \text{par le lemme 4.7.15} \\
&\leq \epsilon\nu'(X) + a\epsilon + \int_{x \in X} f(x) d\nu'
\end{aligned}$$

Par le corollaire 4.7.14, et en utilisant le fait que  $\nu'(X) = 1$ , on obtient donc  $d_H(\nu, \nu') \leq (a+1)\epsilon$ . Donc  $d_H(\nu, \nu') \leq (a+1)d_{LP}(\nu, \nu')$ .

La fonction identité de  $\mathbf{J}_1(X)$ , muni de l'hémi-distance  $d_{LP}$ , vers  $\mathbf{J}_1(X)$ , muni de  $d_H$ , est donc  $(a+1)$ -lipschitzienne. Elle est donc continue par le fait 3.10.12. Tout ouvert de  $\mathcal{O}^{d_H}$  est donc aussi un ouvert de  $\mathcal{O}^{d_{LP}}$ , d'où le résultat.  $\square$

**Théorème 4.7.17** *Soit  $d$  une hémi-distance bornée sur  $X$ , rendant  $X$  totalement borné. Alors la topologie  $\mathcal{O}^{d_H}$  de l'hémi-distance de Hutchinson sur  $\mathbf{J}_1(X)$  coïncide avec la topologie faible sur  $\mathbf{J}_1(X)$ .*

*Démonstration.* Tout ouvert faible  $V$  de  $\mathbf{J}_1(X)$  est l'intersection d'un ouvert faible  $U$  de  $\mathbf{J}(X)$  avec  $\mathbf{J}_1(X)$ . Par le lemme 4.7.12,  $U$  est un ouvert de Hutchinson de  $\mathbf{J}(X)$ , donc  $V$  est un ouvert de Hutchinson de  $\mathbf{J}_1(X)$  : la topologie de Hutchinson est plus fine que la topologie faible. Par la proposition 4.7.16, la topologie de Levy-Prohorov est encore plus fine, et est elle-même moins fine que la topologie faible sur  $\mathbf{J}_1(X)$  par le théorème 4.7.8. Toutes ces topologies sont donc identiques.  $\square$

Le théorème 4.7.17 ne s'applique qu'au cas des jeux normalisés, ainsi qu'aux distances bornées rendant l'espace totalement borné. Rappelons (corollaire 3.10.15) que toute distance est équivalente à une distance bornée. Les deux autres conditions sont bien entendu plus restrictives. En revanche, le résultat ci-dessus s'applique à des espaces de jeux continus généraux, alors que les théorèmes analogues en théorie de la mesure, qui s'appliquent dans des espaces métriques séparables complets, n'établissent la coïncidence des topologies de la distance de Hutchinson, de la distance de Levy-Prohorov, et de la topologie faible (définie de nouveau un peu différemment), que pour des espaces de probabilités.

Nous verrons plus loin que l'hémi-distance de Hutchinson est la bonne notion de distance, qui généralisera la notion d'hémi-distance de Hausdorff-Smyth (lemme 5.1.4) et celle de Hausdorff-Hoare (lemme 6.1.9). En attendant, on peut déjà observer :

**Lemme 4.7.18** *La fonction  $\eta_V : X \rightarrow \mathbf{J}(X)$  qui à  $x$  associe  $\delta_x$  est un plongement isométrique de  $X$  dans  $\mathbf{J}(X)$ , équipé de l'hémi-distance de Hutchinson  $d_H$ .*

*Démonstration.* On a :

$$d_H(\delta_x, \delta_{x'}) = \sup_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1} d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x'))$$

par la proposition 4.2.2, deuxième partie. Puisque  $f$  est 1-lipschitzienne, on a donc  $d_H(\delta_x, \delta_{x'}) \leq d(x, x')$ . Réciproquement, posons  $f(y) = d(y, x')$ . Par l'inégalité triangulaire,  $f$  est 1-lipschitzienne, donc  $d_H(\delta_x, \delta_{x'}) \geq f(x) - f(x') = d(x, x')$ . Donc  $d_H(\delta_x, \delta_{x'}) = d(x, x')$ .  $\square$

### 4.7.3 Le théorème de Kantorovich-Rubinstein

Dans le cadre des mesures sur des espaces métriques, la distance de Hutchinson sur les espaces de mesures de masse totale 1 a une propriété remarquable : elle donne la solution

du problème de transport optimal de Monge-Kantorovich. C'est le théorème de Kantorovich-Rubinstein. Expliquons ce dont il s'agit. Soit  $X$  un espace muni d'une distance  $d$ , et  $\nu$  et  $\nu'$  deux mesures de masse totale 1. On peut voir  $\nu$  et  $\nu'$  comme deux répartitions de masses sur  $X$ . Par exemple, la mesure  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$  peut être interprétée comme un placement de  $a_i$  kilogrammes de sable au point  $x_i$ . Le problème de Monge-Kantorovich consiste à trouver une façon de transporter du sable, en partant d'une répartition de masse décrite par  $\nu$ , pour arriver à une répartition décrite par  $\nu'$ , de sorte à minimiser le travail. On considère que le travail nécessaire pour transporter une masse  $a$  du point  $x$  au point  $y$  est  $a d(x, y)$ . On décrit un transport par une mesure de probabilité  $\nu^2$  sur  $X^2$  : lorsque  $\nu^2$  est simple, la probabilité du couple  $(x, y)$  représente la masse que l'on décidera de transporter du point  $x$  au point  $y$ . Le travail lié à ce transport est alors  $\int_{(x,y) \in X^2} d(x, y) d\nu^2$ . Notons  $\pi_1, \pi_2 : X^2 \rightarrow X$  les deux projections canoniques. On demande que  $\nu^2$  soit un transport de  $\nu$  vers  $\nu'$ , et il est facile de voir que ceci revient à demander que les lois marginales  $\pi_1[\nu^2]$  et  $\pi_2[\nu^2]$  coïncident avec  $\nu$  et  $\nu'$  respectivement. Le théorème de Kantorovich-Rubinstein énonce que, si  $X$  est complet et séparable (c'est-à-dire ayant un sous-espace dénombrable partout dense), alors il existe un transport optimal, c'est-à-dire réalisant le minimum des travaux possibles, et que ce travail minimal est égal à la distance de Hutchinson entre  $\nu$  et  $\nu'$ .

Nous allons démontrer que l'hémi-distance de Hutchinson admet une propriété similaire sur les espaces de valuations normalisées, dans le cadre hémi-métrique. La difficulté principale est que, lorsque  $d$  est une hémi-distance sur  $X$ , la fonction  $d : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  n'est pas nécessairement continue, donc son intégrale par rapport à une valuation  $\nu^2$  sur  $X \times X$  n'est pas nécessairement définie. À la lumière du lemme 3.10.59 et du lemme 3.10.60, cependant,  $d$  est continue de  $X^{(2)}$ , c'est-à-dire de  $X \times X^{op}$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ . Ce sont donc des probabilités  $\nu^2$  sur  $X^{(2)}$  et non sur  $X \times X$  que nous devons considérer. Mais, si  $\pi_1[\nu^2]$  est bien alors une probabilité sur  $X$ ,  $\pi_2[\nu^2]$  sera une probabilité sur  $X^{op}$ , qu'il nous sera donc difficile de comparer à  $\nu'$ , qui est une probabilité sur  $X$ . Rappelons notamment que le préordre de spécialisation de  $X^{op}$  est  $\geq^d$ , l'opposé du préordre de spécialisation  $\leq^d$  de  $X$ .

Nous corrigeons ce problème en passant aux fonctionnelles d'intégration correspondantes. La fonctionnelle d'intégration de  $\nu$  est la fonction qui à toute fonction continue  $f$  (en particulier, pour toute fonction 1-lipschitzienne  $f$ ) de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  associe :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu$$

En revanche, pour traiter de  $\nu'$ , nous demanderons à considérer à la place la fonctionnelle d'intégration de l'opposé de toute fonction 1-lipschitzienne  $g'$  de  $X^{op}$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire celle qui à  $g'$  associe :

$$-\int_{y \in X} -g'(y) d\nu'$$

Notons que ceci a un sens, puisque lorsque  $g'$  est 1-lipschitzienne de  $X^{op}$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $-g'$  est 1-lipschitzienne de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . En fait, toute fonction 1-lipschitzienne  $g'$  de  $X^{op}$  vers  $\mathbb{R}$  est obtenue comme étant de la forme  $-g$  pour une certaine fonction 1-lipschitzienne  $g$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  (à savoir  $g = -g'$ ). Ceci mène notamment au point 6 de la définition incluse dans le lemme 4.7.19

ci-dessous. Ceci suggère aussi de chercher non pas une mesure ou une valuation  $\nu^2$  sur  $X^{(2)}$  comme suggéré ci-dessus, mais directement une fonctionnelle  $\mathbf{k}$ . Il se pourra que  $\mathbf{k}$  soit elle-même la fonctionnelle d'intégration d'une certaine probabilité  $\nu^2$  ayant  $\nu$  et (une variante de)  $\nu'$  comme marginales, mais ce ne sera pas une conséquence des résultats de cette section.

On commence par observer la direction facile :  $d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu')$  est inférieur ou égal au travail nécessaire à n'importe quel transport  $\mathbf{k}$  de  $\nu$  vers  $\nu'$ .

**Lemme 4.7.19** *Pour toutes fonctions continues bornées  $f$  et  $g$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , notons  $f \ominus g$  la fonction qui à  $(x, y) \in X \times X^{op}$  associe  $f(x) - g(y)$ .*

*Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$  bornée, et  $\nu$  et  $\nu'$  deux valuations normalisées sur  $X$ . Soit  $\mathbf{K}(\nu, \nu')$  l'espace des fonctionnelles  $\mathbf{k}$  de l'espace  $\langle X^{(2)} \rightarrow \mathbb{R} \rangle_L$  des fonctions lipschitziennes de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que :*

1.  $\mathbf{k}$  est linéaire, c'est-à-dire additive et positivement homogène ;
2.  $\mathbf{k}$  est croissante ;
3.  $\mathbf{k}$  est positive : si  $\varphi : X^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , alors  $\mathbf{k}(\varphi) \geq 0$  ;
4.  $\mathbf{k}$  est normalisée, au sens où  $\mathbf{k}(\chi_{X^{(2)}}) = 1$  ;
5. La première loi marginale de  $\mathbf{k}$  est  $\nu$ , au sens où :

$$\mathbf{k}(f \ominus 0) = \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

pour toute fonction 1-lipschitzienne bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  ;

6. La seconde loi marginale de  $\mathbf{k}$  est  $\nu'$ , au sens où :

$$\mathbf{k}(0 \ominus g) = - \int_{y \in X} g(y) d\nu'$$

pour toute fonction 1-lipschitzienne bornée  $g$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

Alors, pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbf{K}(\nu, \nu')$ , on a  $d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \leq \mathbf{k}(d)$ , où  $d$  est la fonction distance de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

Pour tous  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1$ , la fonction  $f \ominus g$  est 1-lipschitzienne de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}$  :  $(f(x) - g(y)) - (f(x') - g(y')) = (f(x) - f(x')) + (g(y') - g(y)) \leq d(x, x') + d(y', y) = d^2(x, y), (x', y')$ . L'écriture  $\mathbf{k}(f \ominus g)$  a donc un sens. On note aussi que  $d : X^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est 1-lipschitzienne, par le lemme 3.10.59. Comme  $d$  est bornée par hypothèse, l'expression  $\mathbf{k}(d)$  a un sens.

*Démonstration.* Pour toute fonction  $f$  bornée 1-lipschitzienne de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{y \in X} f(y) d\nu' &= \mathbf{k}(f \ominus 0) + \mathbf{k}(0 \ominus f) \quad \text{par les points 5 et 6} \quad (4.8) \\ &= \mathbf{k}(f \ominus f) \quad \text{par le point 1} \end{aligned}$$

Or  $f \ominus f$  est la fonction qui à  $(x, y) \in X^{(2)}$  associe  $f(x) - f(y)$ . Ceci est inférieur ou égal à  $d(x, y)$ , puisque  $f$  est 1-lipschitzienne, donc la quantité (4.8) est inférieure ou égale à  $\mathbf{k}(d)$  par le point 2. On conclut en prenant la borne supérieure sur tous les  $f$ .  $\square$

Pour établir la réciproque, nous aurons besoin de réaliser que l'on peut écrire l'hémi-distance de Hutchinson sous une forme légèrement différente.

**Lemme 4.7.20** Pour tous jeux  $\nu$  et  $\nu'$  sur  $X$ ,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') &= \sup_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall x, y \in X \cdot f(x) - g(y) \leq d(x, y)}} d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{y \in X} g(y) d\nu' \right) \\ &= \sup_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1 \\ \forall x, y \in X \cdot f(x) - g(y) \leq d(x, y)}} d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{y \in X} g(y) d\nu' \right) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Notons pour l'instant :

$$\begin{aligned} d'_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') &= \sup_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall x, y \in X \cdot f(x) - g(y) \leq d(x, y)}} d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{y \in X} g(y) d\nu' \right) \\ d''_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') &= \sup_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1 \\ \forall x, y \in X \cdot f(x) - g(y) \leq d(x, y)}} d_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in X} f(x) d\nu, \int_{y \in X} g(y) d\nu' \right) \end{aligned}$$

Observons que la différence tient au fait que  $f$  et  $g$  parcourent toutes les fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  dans la définition de  $d'_{\mathbb{H}}$ , et seulement les fonctions bornées 1-lipschitziennes dans la définition de  $d''_{\mathbb{H}}$ . En particulier,  $d''_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \leq d'_{\mathbb{H}}(\nu, \nu')$ .

Pour toute fonction  $f$  bornée et 1-lipschitzienne de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , posons  $g(y) = f(y) : g$  est alors elle aussi bornée et 1-lipschitzienne. De plus,  $f(x) - g(y) \leq d(x, y)$ , puisque  $f$  est 1-lipschitzienne. On a alors :

$$\begin{aligned} d''_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') &\geq \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{y \in X} g(y) d\nu' \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{x \in X} f(x) d\nu' \end{aligned}$$

En prenant les bornes supérieures lorsque  $f$  varie,  $d''_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \geq d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu')$ .

Démontrons maintenant  $d'_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \leq d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu')$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues bornées telles que  $f(x) - g(y) \leq d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$ . Posons  $h(x) = \inf_{y \in Y} (d(x, y) + g(y))$ . On remarque d'abord que  $h$  est bornée, car  $h(x) \leq d(x, x) + g(x) = g(x)$  en prenant  $y = x$ , et parce que  $g$  est bornée. On remarque ensuite que  $h$  est 1-lipschitzienne. Pour le démontrer, on commence par noter que pour tous  $x, x', y \in X$ ,  $[d(x, y) + g(y)] \leq d(x, x') + [d(x', y) + g(y)]$  par l'inégalité triangulaire. En prenant les bornes inférieures lorsque  $y$  varie, on en déduit  $h(x) \leq d(x, x') + h(x')$ , ce qui établit le caractère 1-lipschitzien de  $h$ . On a déjà vu que  $h \leq g$ , d'autre part  $f \leq h$  puisque  $f(x) \leq g(y) + d(x, y)$  pour tout  $y$ . Donc :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{y \in X} g(y) d\nu' &\leq \int_{x \in X} h(x) d\nu - \int_{y \in X} h(y) d\nu' \\ &\leq d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 4.1.2. En prenant les bornes supérieures lorsque  $f$  et  $g$  varient,  $d'_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \leq d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu')$ .

Puisque  $d'_H(\nu, \nu') \leq d_H(\nu, \nu') \leq d''_H(\nu, \nu') \leq d'_H(\nu, \nu')$ , c'est que toutes ces quantités sont égales.  $\square$

**Proposition 4.7.21** *Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-distance  $d$  bornée. Soient  $\nu$  et  $\nu'$  deux valuations normalisées sur  $X$ . Il existe une fonctionnelle  $\mathbf{k} \in \mathbf{K}(\nu, \nu')$  telle que  $\mathbf{k}(d) = d_H(\nu, \nu')$ , où  $d$  est la fonction distance de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}^+$ .*

*Démonstration.* Commençons par éliminer un cas dégénéré : celui où  $d(x, y) = 0$  pour tous  $x, y \in X$ , autrement dit  $x \leq^d y$  pour tous  $x, y \in X$ . La seule fonction lipschitzienne est alors la fonction identiquement nulle,  $d_H(\nu, \nu') = 0$ , alors on peut poser :

$$\mathbf{k}(\varphi) = \int_{(x,y) \in X^{(2)}} \varphi(x, y) d\nu^2$$

où  $\nu^2$  est n'importe quelle probabilité sur  $X^{(2)}$ , par exemple  $\nu \otimes \nu'$ .

Dans le cas non dégénéré, la stratégie de démonstration consiste à appliquer le théorème d'extension 3.12.4. Soit  $C$  le cône ordonné des fonctions lipschitziennes de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et  $Z$  le sous-espace des fonctions de la forme  $f \ominus g$ , pour deux fonctions 1-lipschitziennes bornées  $f$  et  $g$  telles que  $f(x) \geq g(y)$  pour tous  $x, y \in X$ . Notons que  $Z$  est convexe.

Soient  $f, f', g, g'$  quatre fonctions 1-lipschitziennes bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et supposons que  $f(x) - g(y) \leq f'(x) - g'(y)$  pour tous  $x, y \in X$ . Alors  $f(x) - f'(x) \leq g(y) - g'(y)$  pour tous  $x, y \in X$ , donc en posant  $a = \sup_{x \in X} (f(x) - f'(x))$ ,  $b = \inf_{y \in X} (g(y) - g'(y))$ , les quantités  $a$  et  $b$  sont bien définies, et pour tous  $x, y \in X$ , on a  $f(x) - f'(x) \leq a \leq b \leq g(y) - g'(y)$ . En particulier,  $f(x) \leq f'(x) + a$ , et  $g(y) \geq g'(y) + b$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{y \in X} g(y) d\nu' &\leq \int_{x \in X} [f'(x) + a] d\nu - \int_{y \in X} [g'(y) + b] d\nu' \\ &= \int_{x \in X} f'(x) d\nu - \int_{y \in X} g'(y) d\nu' + a - b \\ &\quad \text{par le lemme 4.1.5, } \nu \text{ et } \nu' \text{ étant normalisées} \\ &\leq \int_{x \in X} f'(x) d\nu - \int_{y \in X} g'(y) d\nu' \end{aligned}$$

puisque  $a \leq b$ . La fonction :

$$\mathbf{f}(f \ominus g) = \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{y \in X} g(y) d\nu'$$

est donc bien définie et croissante de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$ . De plus, elle est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  : pour tout élément  $f \ominus g$  de  $Z$ ,  $f(x) \geq g(y)$ , donc  $f \ominus g \geq 0$ . Comme  $\mathbf{f}$  est croissante,  $\mathbf{f}(f \ominus g) \geq \mathbf{f}(0) = 0$ .

On remarque ensuite que  $\mathbf{f}$  préserve les barycentres : pour tout  $r \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{f}(r \cdot (f \ominus g) + (1 - r) \cdot (f' \ominus g')) \\
&= \oint_{x \in X} [rf(x) + (1 - r)f'(x)]d\nu - \oint_{y \in X} [rg(y) + (1 - r)g'(y)]d\nu' \\
&= r \oint_{x \in X} f(x)d\nu + (1 - r) \oint_{x \in X} f'(x)d\nu - r \oint_{y \in X} g(y)d\nu - (1 - r) \oint_{x \in X} g'(y)d\nu' \\
&= r\mathbf{f}(f \ominus g) + (1 - r)\mathbf{f}(f' \ominus g')
\end{aligned}$$

puisque l'intégrale de Choquet est linéaire en la fonction intégrée par le corollaire 4.3.3,  $\nu$  et  $\nu'$  étant des valuations.

Posons maintenant, pour toute fonction  $\varphi$  lipschitzienne de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,

$$\mathbf{p}_1(\varphi) = \inf_{\substack{\lambda > 0 \\ \forall x, y \in X \cdot \lambda\varphi(x, y) \leq d(x, y)}} \frac{1}{\lambda}$$

où  $d$  est l'hémi-distance de  $X$ , vue comme fonction de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}^+$ . On observe d'abord que  $\mathbf{p}_1$  est à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , la valeur  $+\infty$  étant atteinte lorsqu'il n'existe aucun  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda\varphi(x, y) \leq d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$ . Comme pour tout  $\lambda > 0$  on a  $\lambda \cdot 0 \leq d(x, y)$ , on a donc  $\mathbf{p}_1(0) = 0$ . Pour tout  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1(r \cdot \varphi) &= \inf_{\substack{\lambda > 0 \\ \forall x, y \in X \cdot \lambda r\varphi(x, y) \leq d(x, y)}} \frac{1}{\lambda} \\
&= \inf_{\substack{\lambda' > 0 \\ \forall x, y \in X \cdot \lambda'\varphi(x, y) \leq d(x, y)}} \frac{r}{\lambda'} = r\mathbf{p}_1(\varphi)
\end{aligned}$$

en posant  $\lambda' = \lambda r$ . Donc  $\mathbf{p}_1$  est positivement homogène. On observe que  $\mathbf{p}_1$  est sous-additive :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1(\varphi) + \mathbf{p}_1(\varphi') &= \inf_{\substack{\lambda > 0 \\ \forall x, y \in X \cdot \lambda\varphi(x, y) \leq d(x, y)}} \frac{1}{\lambda} + \inf_{\substack{\lambda' > 0 \\ \forall x, y \in X \cdot \lambda'\varphi'(x, y) \leq d(x, y)}} \frac{1}{\lambda'} \\
&= \inf_{\substack{\lambda, \lambda' > 0 \\ \forall x, y \cdot \lambda\varphi(x, y) \leq d(x, y), \lambda'\varphi'(x, y) \leq d(x, y)}} \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda\lambda'}
\end{aligned}$$

Puisque  $\lambda\varphi(x, y) \leq d(x, y)$  et  $\lambda'\varphi'(x, y) \leq d(x, y)$  impliquent  $\lambda\lambda'/(\lambda + \lambda')(\varphi(x, y) + \varphi'(x, y)) \leq d(x, y)$ , en posant  $\lambda'' = \lambda\lambda'/(\lambda + \lambda')$  :

$$\mathbf{p}_1(\varphi) + \mathbf{p}_1(\varphi') \leq \inf_{\substack{\lambda'' > 0 \\ \forall x, y \cdot \lambda''(\varphi(x, y) + \varphi'(x, y)) \leq d(x, y)}} \frac{1}{\lambda''} = \mathbf{p}_1(\varphi + \varphi')$$

Donc  $\mathbf{p}_1$  est sous-linéaire. De plus,  $\mathbf{p}_1$  est clairement croissante. La fonction  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{p}(\varphi) = d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu')\mathbf{p}_1(\varphi)$$

est donc elle aussi sous-linéaire et croissante de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ .

Montrons maintenant que si  $f \ominus g \in Z$ ,  $f' \ominus g' \in Z$ ,  $\lambda > 0$ , et  $f \ominus g \leq \lambda(f' \ominus g') + \varphi$ , alors  $f(f \ominus g) \leq \lambda f(f' \ominus g') + \mathbf{p}(\varphi)$ . C'est la dernière condition dont nous avons besoin pour pouvoir appliquer le théorème 3.12.4, et sans doute la moins triviale. Lorsque  $\mathbf{p}(\varphi) = +\infty$ , elle est évidente, sinon fixons un réel  $\epsilon > 0$  arbitraire. Il existe alors  $\lambda' > 0$  tel que  $\lambda'\varphi(x, y) \leq d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$  et  $\mathbf{p}(\varphi) \geq d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu')/\lambda' - \epsilon$ . Fixons  $c$  tel que  $\varphi$  soit  $c$ -lipschitzienne. On construit deux fonctions  $f''$ ,  $g''$ , lipschitziennes et bornées de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , comme suit :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sup_{y \in X} (f(y) - \lambda f'(y) - c d(y, x)) \\ g''(y) &= \inf_{x \in X} (g(x) - \lambda g'(x) + c d(y, x)) \end{aligned}$$

Ces deux quantités sont bien définies, et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Notamment, aucune ne vaut ni  $-\infty$  ni  $+\infty$ . Puisque  $f$ ,  $f'$ ,  $g$ ,  $g'$ , et  $d$  sont bornées, on peut même affirmer que  $f''$  et  $g''$  sont elles-mêmes des fonctions bornées. Elles sont de plus  $c$ -lipschitziennes. Dans le cas de  $f''$ , c'est parce que l'inégalité triangulaire implique :

$$(f(y) - \lambda f'(y) - c d(y, x)) \leq (f(y) - \lambda f'(y) - c d(y, x')) + c d(x, x')$$

En prenant ensuite la borne supérieure sur tous les  $y \in X$ ,  $f''(x) \leq f''(x') + c d(x, x')$ , donc  $f''$  est  $c$ -lipschitzienne ; l'argument est similaire pour  $g''$ . On observe ensuite que : (a)  $f''(x) \geq f(x) - \lambda f'(x)$  pour tout  $x \in X$  (prendre  $y = x$  dans la définition de  $f''$ ) ; (b)  $g''(y) \leq g(y) - \lambda g'(y)$  pour tout  $y \in X$  (prendre  $x = y$  dans la définition de  $g''$ ). Pour tous  $x, x', y, y' \in X$ , on utilise maintenant le fait que  $f \ominus g \leq \lambda(f' \ominus g') + \varphi$  et le fait que  $\varphi$  est  $c$ -lipschitzienne de  $X^{(2)}$  vers  $\mathbb{R}$  pour déduire que :

$$\begin{aligned} f(y') - \lambda f'(y') &\leq g(x') - \lambda g'(x') + \varphi(y', x') \\ \varphi(y', x') &\leq \varphi(x, y) + c d(y', x) + c d(y, x') \end{aligned}$$

Donc :

$$f(y') - \lambda f'(y') - c d(y', x) \leq [g(x') - \lambda g'(x') + c d(y, x')] + \varphi(x, y)$$

En prenant les bornes supérieures sur  $y' \in X$  d'une part, les bornes inférieures sur  $x' \in X$  d'autre part,  $f''(x) \leq g''(y) + \varphi(x, y)$ , c'est-à-dire : (c)  $f'' \ominus g'' \leq \varphi$ . Soit  $a$  un réel tel que  $a \leq \inf_{x \in X} f''(x)$  et  $a \leq \inf_{y \in X} g''(y)$ . Posons  $f_1 = \lambda'(f'' - a)$ ,  $g_1 = \lambda'(g'' - a)$ . Par le choix de  $a$ ,  $f_1$  et  $g_1$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Par (c) et le fait que  $\lambda'\varphi(x, y) \leq d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$ , on a  $f_1(x) - g_1(y) = \lambda'(f''(x) - g''(y)) \leq \lambda'\varphi(x, y) \leq d(x, y)$ . De plus,  $f_1$  et  $g_1$  sont lipschitziennes, donc continues. En utilisant la première égalité du lemme 4.7.20, on en déduit :

$$d_{\mathbb{H}}(\nu, \nu') \geq \max \left( \oint_{x \in X} f_1(x) d\nu - \oint_{y \in X} g_1(y) d\nu', 0 \right)$$

Puisque  $\mathbf{p}(\varphi) \geq d_H(\nu, \nu')/\lambda' - \epsilon$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\varphi) &\geq \max \left( \int_{x \in X} f_1(x)/\lambda' d\nu - \int_{y \in X} g_1(y)/\lambda' d\nu', 0 \right) - \epsilon \\ &= \max \left( \int_{x \in X} f''(x) d\nu - \int_{y \in X} g''(y) d\nu', 0 \right) - \epsilon \\ &\geq \int_{x \in X} f''(x) d\nu - \int_{y \in X} g''(y) d\nu' - \epsilon \end{aligned}$$

par la proposition 4.2.12 et le lemme 4.1.5. Donc :

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{f}(f' \ominus g') + \mathbf{p}(\varphi) &\geq \int_{x \in X} \lambda f'(x) d\nu - \int_{y \in X} \lambda g'(y) d\nu' + \int_{x \in X} f''(x) d\nu - \int_{y \in X} g''(y) d\nu' - \epsilon \\ &= \int_{x \in X} [\lambda f'(x) + f''(x)] d\nu - \int_{y \in X} [\lambda g'(y) + g''(y)] d\nu' - \epsilon \\ &\quad \text{puisque } \nu \text{ et } \nu' \text{ sont des valuations, en utilisant le corollaire 4.3.3} \\ &\geq \int_{x \in X} f(x) d\nu - \int_{y \in X} g(y) d\nu' - \epsilon = \mathbf{f}(f \ominus g) - \epsilon \end{aligned}$$

par la croissance de l'intégrale de Choquet (lemme 4.1.2), et les remarques (a) et (b) ci-dessus. Puisque  $\epsilon$  est arbitraire, on a donc, comme annoncé,  $\mathbf{f}(f \ominus g) \leq \mathbf{f}(f' \ominus g') + \mathbf{p}(\varphi)$ .

On peut donc appliquer le théorème 3.12.4 : il existe une fonctionnelle  $\mathbf{k}_0$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  qui coïncide avec  $\mathbf{f}$  sur  $Z$ , et telle que  $\mathbf{k}_0 \leq \mathbf{p}$ .

On note que : (\*)  $\mathbf{k}_0(\chi_{X^{(2)}}) = 1$ . En effet,  $\mathbf{k}_0(\chi_{X^{(2)}}) = \mathbf{k}_0(\chi_X \ominus 0) = \mathbf{f}(\chi_X \ominus 0) = \nu(X) - 0 = 1$ .

Pour tout  $\varphi \in \langle X^{(2)} \rightarrow \mathbb{R} \rangle_L$ , posons  $\mathbf{k}(\varphi) = \mathbf{k}_0(\varphi + b) - b$ , où  $b$  est n'importe quel réel tel que  $-b \leq \varphi(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in X^{(2)}$ . Cette définition est indépendante de la valeur de  $b$  : si  $b$  et  $b'$  sont deux valeurs telles que  $-b, -b' \leq \varphi(x, y)$  pour tous  $x, y$ , supposons par symétrie  $b \geq b'$ , alors  $\mathbf{k}_0(\varphi + b) - b = \mathbf{k}_0(\varphi + (b - b') + b') - b = \mathbf{k}_0(\varphi + b') + \mathbf{k}_0((b - b')\chi_{X^{(2)}}) - b$  (puisque  $\mathbf{k}_0$  est linéaire) =  $\mathbf{k}_0(\varphi + b') - b'$  (par (\*)).

Il est clair que  $\mathbf{k}$  est normalisée, par (\*). Ceci établit le point 4 de la définition de  $\mathbf{K}(\nu, \nu')$ . La fonctionnelle  $\mathbf{k}$  est additive, car  $\mathbf{k}_0$  l'est. Pour tout  $\varphi \in \langle X^{(2)} \rightarrow \mathbb{R} \rangle_L$ , et  $r \geq 0$ , en posant  $b$  tel que  $-b \leq \varphi(x, y)$  pour tous  $x, y$ , on a :

$$\mathbf{k}(r \cdot \varphi) = \mathbf{k}_0(r \cdot \varphi + rb) - rb = r\mathbf{k}_0(\varphi + b) - rb = r\mathbf{k}(\varphi)$$

puisque  $\mathbf{k}_0$  est positivement homogène. On en déduit que  $\mathbf{k}$  est positivement homogène, donc linéaire. Ceci établit le point 1.

Lorsque  $\varphi \leq \varphi'$ , posons  $b$  tel que  $-b \leq \varphi(x, y)$  pour tous  $x, y$ , alors :

$$\mathbf{k}(\varphi) = \mathbf{k}_0(\varphi + b) - b \leq \mathbf{k}_0(\varphi' + b) - b = \mathbf{k}(\varphi')$$

Donc  $\mathbf{k}$  est croissante, ce qui établit le point 2. On en déduit le point 3 : si  $\varphi \geq 0$ , alors  $\mathbf{k}(\varphi) \geq \mathbf{k}(0) = 0$ .

Pour le point 5, on observe que lorsque  $f$  est 1-lipschitzienne et bornée :

$$\mathbf{k}(f \ominus 0) = \mathbf{k}_0(f \ominus 0) = \mathbf{f}(f \ominus 0) = \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

la première égalité étant obtenue en choisissant  $b = 0$ , puisque  $f \ominus 0 \geq 0$ , et la deuxième égalité venant du fait que  $\mathbf{k}_0$  coïncide avec  $\mathbf{f}$  sur  $Z$ .

On démontre le point 6 de façon similaire. Pour toute fonction  $g$  bornée 1-lipschitzienne, soit  $b$  un réel tel que  $g(y) \leq b$  pour tout  $y \in X$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(0 \ominus g) &= \mathbf{k}_0((0 \ominus g) + b) - b = \mathbf{k}_0(b\chi_X \ominus g) = \mathbf{f}(b\chi_X \ominus g) - b \\ &= \int_{x \in X} b d\nu - \int_{y \in Y} g(y) d\nu' - b = - \int_{y \in Y} g(y) d\nu' \end{aligned}$$

puisque  $\nu$  est normalisée.

Montrons finalement que  $\mathbf{k}(d) = d_H(\nu, \nu')$ . On sait que  $\mathbf{k}(d) \geq d_H(\nu, \nu')$  par le lemme 4.7.19. Pour l'inégalité inverse, on utilise enfin que  $\mathbf{k}(\varphi) \leq \mathbf{p}(\varphi)$  pour toute fonction  $\varphi$  lipschitzienne et bornée. Pour  $\varphi = d$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(d) &= \mathbf{k}_0(d) \\ &\leq \mathbf{p}(d) = d_H(\nu, \nu') \mathbf{p}_1(d) \end{aligned}$$

Or, dès qu'il existe deux éléments  $x, y \in X$  tels que  $d(x, y) \neq 0$  (ce que nous pouvons assurer, ayant éliminé le cas dégénéré  $d = 0$  au début de la démonstration),

$$\mathbf{p}_1(d) = \inf_{\lambda > 0, \forall x, y \in X \cdot \lambda d(x, y) \leq d(x, y)} 1/\lambda = 1$$

Donc  $\mathbf{k}(d) \leq d_H(\nu, \nu')$ . □

**Corollaire 4.7.22 (Kantorovich-Rubinstein)** Soit  $X$  un espace muni d'une hémi-métrie  $d$  bornée. Pour toutes valuations normalisées  $\nu$  et  $\nu'$  sur  $X$ ,

$$d_H(\nu, \nu') = \min_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}(\nu, \nu')} \mathbf{k}(d)$$



# **Deuxième partie**

## **Crédibilités, plausibilités, estimations**



# Chapitre 5

## Crédibilités : P joue, puis C contre

Intéressons-nous à l'une des formes de capacités les plus contraintes : les lois de crédibilité continues, qui, rappelons-le, sont les capacités monotones (les jeux) et totalement convexes. On verra à la proposition 5.5.6 que, sous des hypothèses raisonnables, l'espace  $\text{Cd}(X)$  des crédibilités continues sur un espace  $X$  est le plus petit espace de capacités qui contient les jeux d'unanimité  $u_Q$  qui sont continus (représentant les choix non déterministes démoniaques), et qui est stable par combinaisons linéaires finies (représentant les tirages probabilistes finis) et les bornes supérieures dirigées (représentant la stabilité par approximations successives). Les crédibilités continues forment donc l'espace minimal permettant d'interpréter une notion de calcul (continuité) en présence de choix non déterministe démoniaque et de tirage probabiliste.

Une autre façon de l'exprimer sera fournie par le corollaire 5.5.10, qui énonce que, sous certaines hypothèses relativement inoffensives, une crédibilité continue sur  $X$  est la même chose qu'une valuation continue  $\nu^*$  sur l'espace  $\mathcal{Q}(X)$  des compacts saturés non vides de  $X$ . Autrement dit, tirer  $x \in X$  via une crédibilité continue est exactement la même chose que tirer un compact saturé  $Q$  non vide au hasard via  $\nu^*$ , puis choisir  $x \in Q$  de façon démoniaquement non déterministe. (On rappelle que  $\mathcal{Q}(X)$  est l'espace naturel modélisant le choix démoniaque.)

Ceci justifie le titre de ce chapitre : tirer  $x$  via  $\nu$ , c'est faire jouer le joueur probabiliste P de l'introduction, puis laisser l'adversaire démoniaque C essayer de le contrer. Mais attention :  $\nu$  ne modélise qu'un coup de P suivi d'un coup de C. Modéliser une partie complète sort du cadre des crédibilités. Nous nous occuperons de ce problème bien plus tard, au chapitre 12.

Une note en passant. Nous nous focaliserons dans la suite sur les capacités continues. Celles-ci ont non seulement une théorie plus riche, mais il est naturel, dans le prolongement de l'analogie de Scott entre calculabilité et continuité, d'admettre que les capacités qui nous intéressent peuvent être évaluées en les calculant sur des ouverts simples, puis de plus en plus raffinés, et que ce processus d'approximation doit converger vers la valeur finale de la capacité.

### 5.1 Crédibilités simples

Dans quel cas les capacités qui sont combinaisons linéaires finies de jeux d'unanimité sont-elles continues ? Examinons déjà le cas des jeux d'unanimité eux-mêmes. La réponse est instruc-

tive :

**Proposition 5.1.1** *Le jeu d'unanimité  $u_A$  est continu si et seulement si  $A$  est compact.*

*Démonstration.* Le jeu  $u_A$  est continu si et seulement si, pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts,  $u_A(\bigcup_{i \in I} U_i) = \sup_{i \in I} u_A(U_i)$ . Le côté gauche vaut 1 si et seulement si  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $A$ , et le côté droit vaut 1 si et seulement si  $A \subseteq U_i$  pour un  $i \in I$ . Donc  $u_A$  est continu si et seulement si de tout recouvrement ouvert dirigé  $(U_i)_{i \in I}$  de  $A$ , on peut extraire un  $U_i$  contenant  $A$ . On a vu que c'était une caractérisation de la compacité de  $A$ .  $\square$

Si  $K$  est compact, alors  $u_K = u_{\uparrow K}$ , puisque tout ouvert est clos par le haut. En conséquence, on peut considérer sans perte de généralité que  $K$  est saturé.

Si  $X$  est un espace topologique discret, alors  $K \subseteq X$  est compact si et seulement si  $K$  est une partie finie de  $X$  :  $u_K$  représente alors un choix non déterministe parmi un nombre fini de possibilités. En général,  $u_Q$  nous permet de représenter un choix (démoniaquement) non déterministe d'un élément  $x$  à l'intérieur d'un compact saturé  $Q$ .

On peut généraliser la proposition 5.1.1 :

**Proposition 5.1.2** *Le jeu  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i u_{A_i}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est continu si et seulement si tous les  $A_i$  sont compacts.*

*Démonstration.* S'ils sont compacts,  $\nu$  est continue par la proposition 5.1.1 et le fait que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de jeu continus est continue.

Réciproquement, soit  $(U_j)_{j \in J}$  une famille dirigée d'ouverts telle que  $A_i \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ . Nous pouvons sans perte de généralité supposer que les  $A_i$  sont clos par le haut, puisque  $u_{\uparrow A_i} = u_{A_i}$ ; et qu'ils sont distincts deux à deux. Comme  $A_i$  est clos par le haut, il est l'intersection de tous les ouverts contenant  $A_i$ . Pour tout  $i'$  tel que  $A_{i'} \not\subseteq A_i$ , on peut trouver un ouvert  $V_{ii'}$  parmi les ouverts contenant  $A_i$  qui ne contient pas  $A_{i'}$  : sinon, l'intersection de tous les ouverts contenant  $A_i$ , qui est égale à  $A_i$ , contiendrait  $A_{i'}$ . Soit  $V_i = \bigcap_{i'/A_{i'} \not\subseteq A_i} V_{ii'}$ .  $V_i$  est un ouvert, contient  $A_i$ , et ne contient que les  $A_{i'}$  tels que  $A_{i'} \subseteq A_i$ . La famille  $(U_j \cap V_i)_{j \in J}$  est alors une famille dirigée d'ouverts dont l'union contient  $A_i$ , mais ne contient aucun  $A_{i'}$  avec  $A_{i'} \not\subseteq A_i$ . Donc  $\nu\left(\bigcup_{j \in J} (U_j \cap V_i)\right) = \sum_{i'/A_{i'} \subseteq A_i} a_{i'}$ . Comme  $\nu$  est continue, cette quantité est la borne supérieure des  $\nu(U_j \cap V_i)$ ,  $j \in J$ . Comme  $\nu$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il existe  $j \in J$  tel que  $\nu(U_j \cap V_i) = \sum_{i'/A_{i'} \subseteq A_i} a_{i'}$ . Or, de nouveau  $U_j \cap V_i$  ne peut contenir que les  $A_{i'}$  qui sont inclus dans  $A_i$ , puisque c'est le cas de  $V_i$ . Comme  $\nu(U_j \cap V_i) = \sum_{i'/A_{i'} \subseteq A_i} a_{i'}$  et que tous les  $a_{i'}$  sont strictement positifs, nécessairement  $U_j \cap V_i$  les contient tous, donc contient  $A_i$ . Ceci implique que  $U_j$  contient  $A_i$ , donc  $A_i$  est compact.  $\square$

Ceci mène à la définition suivante.

**Définition 5.1.3 (Crédibilité simple)** *Une loi de crédibilité est dite simple si et seulement si elle s'écrit  $\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}^+$ , et  $Q_i$  est un compact saturé non vide pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

Rappelons que  $\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i}$  est toujours une loi de crédibilité, comme combinaison linéaire à coefficients positifs de jeux d'unanimité, qui sont des lois de crédibilité. Par la proposition 5.1.1, toute crédibilité simple est aussi continue.

Une crédibilité simple représente assez clairement la spécification d'un coup du joueur probabiliste  $P$  suivi d'un coup de l'adversaire  $C$  :  $P$  choisit un compact saturé  $Q_i$  avec probabilité  $a_i$ , puis  $C$  opère un choix non déterministe parmi  $Q_i$ .

On note finalement, avant de poursuivre l'étude des crédibilités simples, que l'hémi-distance de Hutchinson, sur les jeux, correspond à celle de Hausdorff-Smyth sur  $\mathcal{Q}(X)$ .

**Lemme 5.1.4** *Pour tous  $Q, Q' \in \mathcal{Q}(X)$ ,  $d_H(u_Q, u_{Q'}) = d_Q(Q, Q')$ .*

*Démonstration.* On a d'abord :

$$\begin{aligned}
d_H(u_Q, u_{Q'}) &= \sup_{f \in (X \rightarrow \mathbb{R}^+)_1} d_{\mathbb{R}}(\min_{x \in Q} f(x), \min_{x' \in Q'} f(x')) \quad \text{par la proposition 4.2.2} \\
&= \sup_{f \in (X \rightarrow \mathbb{R}^+)_1} \max(\min_{x \in Q} f(x) + \max_{x' \in Q'} -f(x'), 0) \\
&= \sup_{f \in (X \rightarrow \mathbb{R}^+)_1} \max(\max_{x' \in Q'} (\min_{x \in Q} f(x) - f(x')), 0) \\
&= \sup_{f \in (X \rightarrow \mathbb{R}^+)_1} \max(\max_{x' \in Q'} \min_{x \in Q} (f(x) - f(x')), 0) \\
&\leq \max_{x' \in Q'} \min_{x \in Q} d(x, x') \quad \text{puisque } f \text{ est 1-lipschitzienne} \\
&= d_Q(Q, Q')
\end{aligned}$$

Réciproquement, par le lemme 3.10.39, il existe un point  $x_0 \in Q$  et un point  $x'_0 \in Q'$  tels que  $d_Q(Q, Q') = \min_{x \in Q} d(x, x'_0) = d(x_0, x'_0)$ . Posons  $f(x) = d(x, x'_0)$  :  $f$  est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire,  $\min_{x \in Q} f(x) = d_Q(Q, Q')$ , et  $\min_{x' \in Q'} f(x') \leq f(x'_0) = 0$ , donc  $d_H(u_Q, u_{Q'}) \geq d_{\mathbb{R}}(\min_{x \in Q} f(x), \min_{x' \in Q'} f(x')) = d_Q(Q, Q')$ .  $\square$

## 5.2 L'ordre $\leq$ sur les crédibilités simples

Nous allons maintenant chercher à caractériser l'ordre  $\leq$  sur les crédibilités, lorsqu'il est spécialisé aux crédibilités simples. Nous suivons pas à pas le raisonnement de Jones (1990, section 4.4). Rappelons que l'ordre sur les compacts saturés est  $\supseteq$ . Si  $J$  est une partie de  $\mathcal{Q}(X)$ , on note donc  $\uparrow J$  l'ensemble des  $Q$  tels qu'il existe  $Q' \in J$  avec  $Q \supseteq Q'$ . On dit que  $J$  est *clos par le haut dans  $A$*  si et seulement si  $J = A \cap \uparrow J$ , c'est-à-dire si et seulement si  $J \subseteq A$ , et dès que  $Q \in J, Q' \in A$ , et  $Q \supseteq Q'$ , alors  $Q' \in J$ .

On note que si  $A$  est une famille finie de compacts, pour tout ouvert  $U$ ,  $\{Q \in A \mid Q \subseteq U\}$  est clos par le haut dans  $A$ . Réciproquement, on a le résultat technique suivant.

**Lemme 5.2.1** *Soit  $A$  une partie finie de  $\mathcal{Q}(X)$ . Il existe une famille d'ouverts  $(U_Q)_{Q \in A}$  telle que, pour toute partie  $J$  close par le haut dans  $A$ ,  $J = \{Q' \in A \mid Q' \subseteq \bigcup_{Q \in J} U_Q\}$ .*

*Démonstration.* Pour chaque paire de compacts saturés  $Q, Q' \in A$  tels que  $Q \not\supseteq Q'$ , il existe un ouvert  $U_{Q, Q'}$  qui contient  $Q$  mais pas  $Q'$ . En effet, a contrario si tout ouvert contenant  $Q$  contient  $Q'$ ,  $\bigcap_{U \mid Q \subseteq U} U$  contient  $Q'$ . Or comme  $Q$  est saturé,  $\bigcap_{U \mid Q \subseteq U} U$  est exactement  $Q$ .

Comme  $A$  est fini, pour tout  $Q \in A$ ,  $\bigcap_{Q' \in A/Q \not\supseteq Q'} U_{Q,Q'}$  est un ouvert, notons-le  $U_Q$ . Observons que pour tout  $Q'' \in A$ ,  $Q'' \subseteq U_Q$  si et seulement si  $Q \supseteq Q''$ . En effet, si  $Q'' \subseteq U_Q$ , alors  $Q'' \subseteq U_{Q,Q'}$  pour tout  $Q' \in A$  tel que  $Q \not\supseteq Q'$ . En particulier pour  $Q' = Q''$ , si  $Q \not\supseteq Q''$ ,  $Q'' \subseteq U_{Q,Q''}$ , ce qui est impossible. Donc  $Q \supseteq Q''$ . Réciproquement, si  $Q \supseteq Q''$ , alors pour tout  $Q' \in A$  tel que  $Q \not\supseteq Q'$ , en particulier,  $Q'' \subseteq U_{Q,Q'}$ , puisque  $U_{Q,Q'}$  contient  $Q$ .

Pour toute partie  $J$  close par le haut dans  $A$ , on en déduit que  $Q'' \in J$  si et seulement si  $Q'' \subseteq \bigcup_{Q \in J} U_Q$ . En effet, si  $Q'' \in J$ , alors  $Q'' \subseteq U_{Q''}$ , puisque  $Q'' \subseteq U_{Q'',Q'}$  pour tout  $Q'$ . Réciproquement, si  $Q'' \subseteq \bigcup_{Q \in J} U_Q$ , il existe  $Q \in J$  tel que  $Q'' \subseteq U_Q$ , donc tel que  $Q \supseteq Q''$ . Comme  $J$  est clos par le haut dans  $A$ ,  $Q'' \in J$ .  $\square$

**Lemme 5.2.2** *Pour toutes crédibilités simples  $\sum_{Q \in A} a_Q u_Q$  et  $\sum_{Q \in A} b_Q u_Q$ , où  $A$  est une partie finie de  $\mathcal{Q}(X)$ , on a  $\sum_{Q \in A} a_Q u_Q \leq \sum_{Q \in A} b_Q u_Q$  si et seulement si, pour toute partie  $J$  close par le haut dans  $A$ ,*

$$\sum_{Q \in J} a_Q \leq \sum_{Q \in J} b_Q$$

*Démonstration.* Supposons que l'inégalité tienne pour toute partie  $J$  close par le haut dans  $A$ . Soit  $U$  un ouvert quelconque. Posons  $J = \{Q \in A \mid Q \subseteq U\}$ .  $J$  est une partie close par le haut dans  $A$ , et l'on a  $(\sum_{Q \in A} a_Q u_Q)(U) = \sum_{Q \in J} a_Q$ ,  $(\sum_{Q \in A} b_Q u_Q)(U) = \sum_{Q \in J} b_Q$ , d'où l'inégalité.

Réciproquement, supposons  $\sum_{Q \in A} a_Q u_Q \leq \sum_{Q \in A} b_Q u_Q$ , et soit  $J$  une partie close par le haut dans  $A$ . Formons la famille  $(U_Q)_{Q \in A}$  donnée au lemme 5.2.1. Par construction, on a  $(\sum_{Q \in A} a_Q u_Q)(\bigcup_{Q \in J} U_Q) = \sum_{Q \in J} a_Q$  et  $(\sum_{Q \in A} b_Q u_Q) = \sum_{Q \in J} b_Q$ , d'où l'inégalité demandée.  $\square$

Rappelons maintenant l'énoncé du théorème “flux maximum, coupe minimum” (“max-flow, min-cut”). Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté fini, où  $V$  est l'ensemble des *sommets*, et  $E \subseteq V \times V$  est l'ensemble des *arcs*. Un *réseau* est un tel graphe muni de deux sommets  $s$  (la *source*) et  $t$  (le *puits*), et où chaque arc  $e$  est munie d'une *contenance*  $k(e) \in \mathbb{R}^+$ . (Le terme usuel est “capacité”, mais nous préférons utiliser un autre terme pour éviter toute confusion.) Nous supposons que tout sommet de  $G$  est accessible depuis  $s$ , et que  $t$  est accessible depuis tout sommet de  $G$ .

Un *flux* de  $s$  vers  $t$  est une fonction  $f$  qui à chaque arc  $e$  associe un *débit* à travers  $e$ , de sorte que  $0 \leq f(e) \leq k(e)$ , et vérifiant les équations de conservation de débit : pour tout sommet  $v \in V \setminus \{s, t\}$ ,  $\sum_{v'/(v',v) \in E} f(v', v) = \sum_{v'/(v,v') \in E} f(v, v')$ . Si l'on note  $In_f(v) = \sum_{v'/(v',v) \in E} f(v', v)$ ,  $Out_f(v) = \sum_{v'/(v,v') \in E} f(v, v')$ , ceci exprime que  $In_f(v) = Out_f(v)$  pour tout  $v \in V \setminus \{s, t\}$ .

La *valeur*  $val(f)$  du flux  $f$  est par définition  $In_f(t) - Out_f(t)$ . À cause des équations de conservation, elle est aussi égale à  $Out_f(s) - In_f(s)$ .

Une *coupe*  $c$  à travers  $G$  est juste un sous-ensemble de sommets de  $G$  contenant  $s$  mais ne contenant pas  $t$ . La *valeur*  $val(c)$  de la coupe  $c$  est la somme des contenances des arcs sortant de  $c$  :  $val(c) = \sum_{v \in c, v' \in V \setminus c, (v,v') \in E} k(v, v')$ .

Le théorème “flux maximum, coupe minimum” énonce que la valeur maximale des flux possibles est égale à la valeur minimale des coupes possibles. Autrement dit, la valeur de tout flux

de  $s$  vers  $t$  est inférieure ou égale à la valeur de toute coupe à travers  $G$ , et il existe un flux  $f$  et une coupe  $c$  tels que  $val(f) = val(c)$ .

**Lemme 5.2.3 (Lemme de découpage)** *On a  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \leq \sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j}$  si et seulement s'il existe une matrice  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$  telle que*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n t_{ij} &= a_i \quad \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^m t_{ij} &\leq b_j \quad \text{pour tout } j, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

et telle que les seules entrées non nulles de la matrice sont les  $t_{ij}$  telles que  $Q_i \supseteq Q'_j$ .

*Démonstration.* Si les  $t_{ij}$  existent qui vérifient les inégalités annoncées, alors clairement

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} u_{Q_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m t_{ij} u_{Q_i} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m t_{ij} u_{Q'_j} \quad \text{puisque si } t_{ij} \neq 0, u_{Q_i} \leq u_{Q'_j} \\ &\leq \sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j} \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \leq \sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j}$ . Soit  $A$  l'ensemble formé des  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , et des  $Q'_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . On peut écrire  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i}$  sous la forme  $\sum_{Q \in A} a_Q u_Q$ , où  $a_Q$  vaut  $a_{Q_i}$  si  $Q = Q_i$  pour un  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , et 0 sinon; de même on peut écrire  $\sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j}$  sous la forme  $\sum_{Q \in A} b_Q u_Q$ , où  $b_Q$  vaut  $b_{Q'_j}$  si  $Q = Q'_j$  pour un  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , et 0 sinon.

Supposons donc  $\sum_{Q \in A} a_Q u_Q \leq \sum_{Q \in A} b_Q u_Q$ . Construisons le graphe  $G$  ayant les sommets suivants. D'abord, la source  $s$ . Ensuite,  $2|A|$  sommets  $[Q]$ ,  $\langle Q \rangle$ , pour chaque  $Q \in A$ . Finalement, le puits  $t$ .

Les arcs sont  $(s, [Q])$  pour tout  $Q \in A$ , de contenance  $a_Q$ ;  $([Q], \langle Q' \rangle)$  pour tout couple  $Q, Q' \in A$  tel que  $Q \supseteq Q'$ , ayant une contenance suffisamment grande  $M$ , disons  $M > \max(\sum_{Q \in A} a_Q, \sum_{Q \in A} b_Q)$ ; enfin,  $(\langle Q \rangle, t)$  pour tout  $Q \in A$ , de contenance  $b_Q$ .

S'il existe un flux  $f$  tel que  $f(s, [Q]) = a_Q$  pour tout  $Q \in A$ , alors sa valeur sera  $\sum_{Q \in A} a_Q$ , et clairement cette valeur sera maximale. Montrons que la valeur de toute coupe est d'au moins  $\sum_{Q \in A} a_Q$ . En utilisant le théorème "flux maximum, coupe minimum", ceci montrera que la valeur de la coupe minimale, et donc aussi du flux maximal, est exactement  $\sum_{Q \in A} a_Q$ .

Soit donc  $c$  une coupe à travers  $G$ . Soit  $(*)$  l'hypothèse : il existe  $[Q] \in c$  et  $\langle Q' \rangle \notin c$ , avec un arc de  $[Q]$  vers  $\langle Q' \rangle$ . Alors  $Q \supseteq Q'$ , et l'arc est de contenance  $M$ . Donc la valeur de la coupe est d'au moins  $M$ , qui est supérieur ou égal à  $\sum_{Q \in A} a_Q$ . Si en revanche  $(*)$  est fautive, les seuls arcs  $(v, v')$  tels que  $v \in c$  et  $v' \notin c$  sont de la forme  $(s, [Q])$  ou  $(\langle Q \rangle, t)$ . La valeur de la coupe

$c$  est  $\sum_{[Q] \notin c} a_Q + \sum_{[Q] \in c} b_Q$ . Puisque  $(*)$  est faux,  $\langle Q \rangle$  est dans  $c$  dès que  $[Q]$  y est. Il se peut cependant que  $\langle Q \rangle$  y soit mais pas  $[Q]$ . Mais si l'on enlève de  $c$  les sommets  $\langle Q \rangle$  tels que  $[Q]$  n'est pas dans  $c$ , on obtient une coupe de valeur éventuellement plus faible, mais vérifiant toujours  $(*)$  et telle de plus que  $[Q] \in c$  est équivalent à  $\langle Q \rangle \in c$ . Soit  $J$  l'ensemble des  $Q \in A$  tels que  $[Q]$  est dans  $c$ . La valeur de la coupe est alors  $\sum_{Q \notin J} a_Q + \sum_{Q \in J} b_Q$ . On remarque que  $J$  est clos par le haut dans  $A$  : si  $Q \in J$ ,  $[Q] \in c$ , donc pour tout  $Q' \in A$  tel que  $Q \supseteq Q'$ ,  $\langle Q' \rangle \in c$ , donc  $Q' \in J$ . Par le lemme 5.2.2,  $\sum_{Q \in J} a_Q \leq \sum_{Q \in J} b_Q$ , donc la valeur de la coupe est supérieure ou égale à  $\sum_{Q \in A} a_Q$ .

Il existe donc un flux maximal  $f$ , de valeur  $\sum_{Q \in A} a_Q$ . Nécessairement,  $f(s, [Q]) = a_Q$  pour tout  $Q \in A$ . Posons  $T_{QQ'} = f([Q], \langle Q' \rangle)$  si  $Q \supseteq Q'$ ,  $T_{QQ'} = 0$  sinon. On remarque que

$$\sum_{Q' \in A} T_{QQ'} = a_Q \quad (5.1)$$

pour tout  $Q \in A$ . En effet,  $a_Q = In_f([Q]) = Out_f([Q])$  (par l'équation de conservation du débit)  $= \sum_{Q' \in A/Q \supseteq Q'} f([Q], \langle Q' \rangle) = \sum_{Q' \in A} T_{QQ'}$ . On remarque ensuite que

$$\sum_{Q \in A} T_{QQ'} \leq b_{Q'} \quad (5.2)$$

pour tout  $Q' \in A$ . En effet,  $b_{Q'} \geq Out_f(\langle Q' \rangle) = In_f(\langle Q' \rangle) = \sum_{Q \in A/Q \supseteq Q'} f([Q], \langle Q' \rangle) = \sum_{Q \in A} T_{QQ'}$ .

On note maintenant que, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $T_{Q_i Q'} = 0$  si  $Q'$  n'est pas l'un des  $Q'_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . En effet,  $T_{Q_i Q'}$  est un réel positif ou nul, et par (5.2) leur somme lorsque  $i$  varie est inférieure ou égale à  $b_{Q'}$ , qui est nul.

De même, on note que, pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $T_{QQ'_j} = 0$  si  $Q$  n'est pas l'un des  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . En effet, la somme des  $T_{QQ'_j}$  lorsque  $j$  varie est inférieure ou égale à  $a_Q = 0$ , par (5.1).

L'équation (5.2) lorsque  $Q = Q_i$  devient alors  $\sum_{j=1}^n T_{Q_i Q'_j} = a_{Q_i} = a_i$ , et l'inégalité (5.2) lorsque  $Q' = Q'_j$  devient  $\sum_{i=1}^m T_{Q_i Q'_j} \leq b_{Q'_j} = b_j$ , d'où les inégalités annoncées.  $\square$

Notons que ceci signifie notamment que  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \leq \sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j}$  si et seulement si l'inégalité sur les valuations simples correspondantes sur  $\mathcal{Q}(X)$ ,  $\sum_{i=1}^m a_i \delta_{Q_i} \leq \sum_{j=1}^n b_j \delta_{Q'_j}$ , est vraie aussi.

### 5.3 La relation $\ll$ sur les crédibilités simples

Caractérisons maintenant la relation "bien au-dessous" sur les crédibilités simples. Encore une fois, nous suivons Jones (1990, section 4.4).

**Lemme 5.3.1** *Soit  $X$  un espace bien filtrant. Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de compacts saturés non vides. Alors  $u_{\bigcap_{i \in I} Q_i} = \sup_{i \in I} u_{Q_i}$ .*

*Démonstration.* Pour tout ouvert  $U$ ,  $u_{\bigcap_{i \in I} Q_i}(U) = 1$  si et seulement si  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$ , si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq U$  puisque  $X$  est bien filtrant. Mais ceci est équivalent au fait que  $\sup_{i \in I} u_{Q_i}(U)$  vaut 1.  $\square$

**Lemme 5.3.2** Soit  $Q$  et  $Q'$  deux compacts saturés de  $X$ . On n'a jamais  $u_Q \ll u_{Q'}$ .

Si  $X$  est bien filtrant et localement compact, pour tout réel  $r$ ,  $0 < r < 1$ ,  $ru_Q \ll u_{Q'}$  si et seulement si  $Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}$ .

*Démonstration.* L'ensemble dirigé  $(ru_{Q'})_{0 < r < 1}$  a  $u_{Q'}$  pour borne supérieure, mais  $u_Q \leq ru_{Q'}$  n'est jamais vrai, par le lemme 5.2.3. Donc  $u_Q \not\ll u_{Q'}$ .

Supposons  $ru_Q \ll u_{Q'}$ . Ceci implique  $ru_Q \leq u_{Q'}$ . Par le lemme 3.3.1,  $Q'$  est la borne supérieure (pour  $\supseteq$ ) des compacts saturés  $Q_i$  ( $i \in I$ ) tels que  $Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}_i$ . Autrement dit,  $Q' = \bigcap_{i \in I} Q_i$ . Par le lemme 5.3.1,  $u_{Q'} = \sup_{i \in I} u_{Q_i}$ . Comme  $ru_Q \ll u_{Q'}$ , il existe  $i \in I$  tel que  $ru_Q \leq u_{Q_i}$ . Par le lemme 5.2.3,  $Q \supseteq Q_i$ . Comme par construction  $Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}_i$ , c'est que  $Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}$ .

Réciproquement, si  $Q' \subseteq \overset{\circ}{Q}$ , montrons que  $ru_Q \ll u_{Q'}$ . Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille dirigée quelconque de crédibilités continues telles que  $u_{Q'} \leq \sup_{i \in I} \nu_i$ . En appliquant chaque côté de l'inégalité à l'ouvert  $\overset{\circ}{Q}$ , on obtient  $1 \leq \sup_{i \in I} \nu_i(\overset{\circ}{Q})$ . Donc il existe  $i \in I$  tel que  $r \leq \nu_i(\overset{\circ}{Q})$ . Pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ , on en déduit  $ru_Q(U) = r \leq \nu_i(\overset{\circ}{Q}) \leq \nu_i(U)$ . Donc  $ru_Q \leq \nu_i$ .  $\square$

**Lemme 5.3.3** Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Si  $a_i < b_i$  et  $Q'_i \subseteq \overset{\circ}{Q}_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , alors

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i} \ll \sum_{i=1}^n b_i u_{Q'_i}$$

*Démonstration.* Soit  $(\nu_j)_{j \in I}$  une famille dirigée de crédibilités continues telle que  $\sum_{i=1}^n b_i u_{Q'_i} \leq \sup_{j \in I} \nu_j$ . Soit  $J$  une partie close par le haut non vide de  $A = \{Q_i | 1 \leq i \leq n\}$ . Posons  $U_J$  l'ouvert  $\bigcup_{Q \in J} \overset{\circ}{Q}$ . On a  $(\sum_{i=1}^n b_i u_{Q'_i})(U_J) \leq \sup_{j \in I} \nu_j(U_J)$ . Comme  $Q'_i \subseteq U_J$  pour tout  $i$  tel que  $Q_i \in J$ , le côté gauche est supérieur ou égal à  $\sum_{i/Q_i \in J} b_i$ . Comme  $a_i < b_i$  pour tout  $i$  et  $J$  est non vide,  $\sum_{i/Q_i \in J} a_i < \sup_{j \in I} \nu_j(U_J)$ . Il existe donc un indice  $j \in I$  tel que  $\sum_{i/Q_i \in J} a_i \leq \nu_j(U_J)$ .

Cette dernière inégalité est aussi vraie lorsque  $J$  est vide, trivialement. De plus, comme la famille  $(\nu_j)_{j \in I}$  est dirigée et il n'y a qu'un nombre fini de parties  $J$  closes par le haut de  $A$ , il existe un indice  $j$  commun tel que  $\sum_{i/Q_i \in J} a_i \leq \nu_j(U_J)$ , quelle que soit la partie  $J$  close par le haut dans  $A$ .

Montrons que  $\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i} \leq \nu_j$ . Pour tout ouvert  $U$ , soit  $J = \{Q_i | 1 \leq i \leq n, Q_i \subseteq U\}$ , de sorte que  $(\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i})(U) = \sum_{i/Q_i \in J} a_i$ , ce qui est inférieur ou égal à  $\nu_j(U_J)$  par le calcul ci-dessus. Or pour tout  $x \in U_J$ , il existe  $Q_i \in J$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q}_i$ , donc  $x \in U$ , c'est-à-dire que  $U_J \subseteq U$ . Donc  $\nu_j(U_J) \leq \nu_j(U)$ .

Ayant montré  $\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i} \leq \nu_j$ , nous avons démontré le résultat voulu.  $\square$

**Lemme 5.3.4** Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact, et  $\sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j}$  une crédibilité simple sur  $X$ . Alors  $\sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j}$  est la borne supérieure de la famille dirigée des crédibilités simples de la forme  $\sum_{j=1}^n r b_j u_{Q''_j}$ , où  $0 < r < 1$  et  $Q'_j \subseteq \overset{\circ}{Q}''_j$  pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

*Démonstration.* Considérons donc la famille des crédibilités continues de la forme  $\sum_{j=1}^n rb_j u_{Q_j''}$ , où  $0 < r < 1$  et  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_j''$  pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , et montrons en premier que cette famille est dirigée. D'abord, elle est non vide : pour tout  $j$ , comme  $Q_j'$  est inclus dans  $X$ , qui est ouvert, il existe un compact saturé  $Q_j''$  tel que  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_j'' \subseteq Q_j'' \subseteq X$ . Ensuite, donnons-nous deux crédibilités de la sorte,  $\sum_{j=1}^n r_1 b_j u_{Q_{1j}''}$  et  $\sum_{j=1}^n r_2 b_j u_{Q_{2j}''}$ , avec  $0 < r_1, r_2 < 1$  et  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_{1j}'' \cap \overset{\circ}{Q}_{2j}''$  pour tout  $j$ . Comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q_j''$  tel que  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_j'' \subseteq Q_j'' \subseteq \overset{\circ}{Q}_{1j}'' \cap \overset{\circ}{Q}_{2j}''$ , pour chaque  $j$ . Si l'on pose  $r = \max(r_1, r_2)$ ,  $\sum_{j=1}^n rb_j u_{Q_j''}$  fait partie de la famille, puisque  $0 < r < 1$  et  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_j''$ . De plus, comme  $Q_j'' \subseteq Q_{1j}''$  et  $r \geq r_1$ ,  $\sum_{j=1}^n rb_j u_{Q_j''} \geq \sum_{j=1}^n r_1 b_j u_{Q_{1j}''}$ ; de même,  $\sum_{j=1}^n rb_j u_{Q_j''} \geq \sum_{j=1}^n r_2 b_j u_{Q_{2j}''}$ .

Montrons que la borne supérieure des  $\sum_{j=1}^n rb_j u_{Q_j''}$  avec  $0 < r < 1$  et  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_j''$  pour tout  $j$  vaut  $\sum_{j=1}^n b_j u_{Q_j'}$ . D'abord, par le lemme 3.3.1,  $Q_j'$  est l'intersection de la famille filtrante de tous les compacts saturés  $Q_j''$  dont l'intérieur contient  $Q_j'$ . Par le lemme 5.3.1, la borne supérieure des  $u_{Q_j''}$  lorsque  $\overset{\circ}{Q}_j'' \supseteq Q_j'$  vaut  $u_{Q_j'}$ . Donc la borne supérieure des  $rb_j u_{Q_j''}$  lorsque  $0 < r < 1$  et  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_j''$  parcourt les compacts saturés dont l'intérieur contient  $Q_j'$  vaut  $b_j u_{Q_j'}$ . On conclut car l'addition est Scott-continue.  $\square$

**Lemme 5.3.5 (Lemme de découpage,  $\ll$ )** Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. On a  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \ll \sum_{j=1}^n b_j u_{Q_j}$  — où tous les  $b_j$  sont non nuls,  $1 \leq j \leq n$  — si et seulement si il existe une matrice  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n t_{ij} &= a_i \quad \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^m t_{ij} &< b_j \quad \text{pour tout } j, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

et telle que les seules entrées non nulles de la matrice sont les  $t_{ij}$  telles que  $\overset{\circ}{Q}_i \supseteq Q_j'$ .

*Démonstration.* S'il existe une telle matrice de coefficients  $t_{ij}$ , posons  $r$  la valeur maximale de  $(\sum_{i=1}^m t_{ij})/b_j$  lorsque  $1 \leq j \leq n$ . (Ceci suppose  $n \neq 0$  pour être bien défini. Si  $n = 0$ , l'existence de la matrice demandée, qui ne contient aucun coefficient, est évidente.) Alors  $\sum_{i=1}^m t_{ij} \leq rb_j$  pour tout  $j$ , et  $0 < r < 1$ . Pour tout  $j$ ,  $Q_j'$  est inclus dans l'ouvert  $\bigcap_{i/t_{ij} \neq 0} \overset{\circ}{Q}_i$ . Comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q_j''$  tel que  $Q_j' \subseteq \overset{\circ}{Q}_j'' \subseteq Q_j'' \subseteq \bigcap_{i/t_{ij} \neq 0} \overset{\circ}{Q}_i$ . En particulier,  $Q_i \supseteq Q_j''$  dès que  $t_{ij} \neq 0$ . Par le lemme de découpage 5.2.3,  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \leq \sum_{j=1}^n rb_j u_{Q_j''}$ . Comme  $rb_j < b_j$  et  $\overset{\circ}{Q}_j'' \supseteq Q_j'$  pour tout  $j$ , par le lemme 5.3.3,  $\sum_{j=1}^n rb_j u_{Q_j''} \ll \sum_{j=1}^n b_j u_{Q_j'}$ . Donc  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \ll \sum_{j=1}^n b_j u_{Q_j'}$ .

Montrons la réciproque. Si  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \ll \sum_{j=1}^n b_j u_{Q'_j}$ , par le lemme 5.3.4, il existe donc un réel  $r$ ,  $0 < r < 1$ , et  $n$  compacts saturés  $Q''_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tels que  $Q'_j \subseteq \overset{\circ}{Q}''_j$ , tels que  $\sum_{i=1}^m a_i u_{Q_i} \leq \sum_{j=1}^n r b_j u_{Q'_j}$ . Par le lemme de découpage 5.2.3, il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\sum_{j=1}^n t_{ij} = a_i$  pour tout  $i$ ,  $\sum_{i=1}^m t_{ij} \leq r b_j$  pour tout  $j$ , et les seuls  $t_{ij}$  non nuls sont ceux tels que  $Q_i \supseteq Q''_j$ . En particulier  $\overset{\circ}{Q}_i \supseteq Q'_j$ , et  $\sum_{i=1}^m t_{ij} < b_j$ .  $\square$

## 5.4 Capacités linéairement extensibles par le bas

On peut voir tout jeu totalement convexe, c'est-à-dire toute crédibilité, sur un ensemble fini  $X$  comme une loi de probabilité sur un espace plus grand que  $X$ . Rappelons qu'un jeu totalement convexe sur un espace fini  $X$  s'écrit

$$\nu = \sum_{A \neq \emptyset, A \subseteq X} \alpha_A u_A$$

où tous les coefficients  $\alpha_A$  sont positifs ou nuls. Sur l'espace  $\mathbb{P}^*(X)$  des parties non vides de  $X$ , il correspond à  $\nu$  une loi de probabilité

$$\nu^* = \sum_{A \neq \emptyset, A \subseteq X} \alpha_A \delta_A$$

Pour toute fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , si l'on pose  $f_* : \mathbb{P}^*(X) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui à tout  $A$  associe  $\min_{x \in A} f(x)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{A \in \mathbb{P}^*(X)} f_*(A) d\nu^* &= \sum_{A \neq \emptyset, A \subseteq X} \alpha_A f_*(A) \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu \end{aligned}$$

En ce sens, toute loi de crédibilité peut être étendue à une loi de probabilité sur l'espace  $\mathbb{P}^*(X)$ .

On a une caractérisation similaire des lois de crédibilité dans le cas topologique, à condition de supposer quelques conditions sur l'espace  $X$ , comme nous allons le montrer. De plus, c'est  $\mathcal{Q}(X)$  qui jouera le rôle de  $\mathbb{P}^*(X)$ .

**Définition 5.4.1** Soit  $X$  un espace bien filtrant. On dit qu'un jeu  $\nu$  sur  $X$  est linéairement extensible par le bas si et seulement s'il existe une valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  telle que, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} f_*(Q) dP \quad (5.3)$$

où

$$f_*(Q) = \inf_{x \in Q} f(x)$$

Nous demandons que  $X$  soit bien filtrant pour que l'intégrale de  $f_*$  ait un sens : voir le lemme 5.4.3 ci-dessous.

Notons en passant que :

**Fait 5.4.2** Soit  $Q$  un compact saturé non vide de  $X$ ,  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . La borne inférieure  $\inf_{x \in Q} f(x)$  est atteinte, autrement dit  $f_*(Q) = \min_{x \in Q} f(x)$ .

Ceci est une conséquence directe du lemme 3.10.38, et du fait que l'image par  $f$  du compact  $Q$  est compacte dans  $\mathbb{R}$ .

Notons aussi que l'intégrale de droite a un sens dans (5.3), car :

**Lemme 5.4.3** Soit  $X$  un espace bien filtrant. Pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f_*$  est une fonction continue de  $\mathcal{Q}(X)$  dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Par la proposition 4.2.2,

$$f_*(Q) = \int_{x \in X} f(x) du_Q$$

Or, si  $(Q_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de compacts saturés non vides de  $X$ ,  $(u_{Q_i})_{i \in I}$  est une famille dirigée de crédibilités simples, de borne supérieure  $u_{\bigcap_{i \in I} Q_i}$  par le lemme 5.3.1. On conclut par la proposition 4.2.5, tous les jeux utilisés étant normalisés.  $\square$

▷ **Exercice 5.1**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont comonotones si et seulement si  $f_*$  et  $g_*$  le sont.

Rappelons (lemme 3.3.4, corollaire 3.3.6) que la topologie de  $\mathcal{Q}(X)$  est engendrée par les ouverts  $\square U = \{Q \in \mathcal{Q}(X) \mid Q \subseteq U\}$ , dès que  $X$  est bien filtrant et localement compact.

**Proposition 5.4.4** Soit  $X$  un espace bien filtrant. Un jeu  $\nu$  sur  $X$  est linéairement extensible par le bas si et seulement si il existe une valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  telle que, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,

$$\nu(U) = P(\square U)$$

Toute capacité  $\nu$  vérifiant cette équation est totalement convexe, monotone et continue. En particulier, tout jeu linéairement extensible par le bas est une loi de crédibilité continue sur  $X$ .

*Démonstration.* Si  $\nu$  est linéairement extensible par le bas, soit  $P$  une valuation continue vérifiant (5.3). Posons  $f = \chi_U$ , alors l'intégrale de Choquet de  $f$  vaut  $\nu(U)$ . D'autre part,  $f_*(Q)$  vaut 1 si et seulement si  $Q \subseteq U$ , et 0 sinon, donc  $f_* = \chi_{\square U}$ . On a donc  $\nu(U) = P(\square U)$ .

Réciproquement, supposons que  $\nu(U) = P(\square U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . On a

$$\int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} f_*(Q) dP = \int_0^{+\infty} P(f_*^{-1}[t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [P(f_*^{-1}[t, +\infty[) - P(\mathcal{Q}(X))] dt$$

Or  $P(f_*^{-1}t, +\infty[) = P\{Q \in \mathcal{Q}(X) \mid \min_{x \in Q} f(x) > t\} = P\{Q \in \mathcal{Q}(X) \mid Q \subseteq f^{-1}]t, +\infty[\}$   
(noter que le fait que la borne inférieure soit atteinte, grâce au fait 5.4.2, est important ici) =  
 $P(\square f^{-1}]t, +\infty[) = \nu(f^{-1}]t, +\infty[)$ . Comme d'autre part,  $P(\mathcal{Q}(X)) = P(\square X) = \nu(X)$ ,

$$\begin{aligned} \oint_{Q \in \mathcal{Q}(X)} f_*(Q) dP &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \\ &= \oint_{x \in X} f(x) d\nu \end{aligned}$$

Montrons qu'alors  $\nu$  est une loi de crédibilité. D'abord,  $\nu$  est monotone : si  $U \subseteq V$ , alors  $\square U \subseteq \square V$  par le lemme 3.3.5, donc  $P(\square U) \subseteq P(\square V)$  puisque  $P$  est monotone, donc  $\nu(U) \subseteq \nu(V)$ .

Ensuite,  $\nu$  est continue. Pour montrer ceci, considérons une famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ . Par le lemme 3.3.5,  $\square \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \square U_i$ . On en déduit

$$\nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = P \left( \square \bigcup_{i \in I} U_i \right) = P \left( \bigcup_{i \in I} \square U_i \right) = \bigcup_{i \in I} P(\square U_i) = \bigcup_{i \in I} \nu(U_i)$$

Finalement, montrons que  $\nu$  est totalement convexe. Soit  $(U_i)_{i=1}^n$  une famille finie d'ouverts. Alors, en observant que  $\square \bigcup_{i=1}^n U_i \supseteq \bigcup_{i=1}^n \square U_i$ ,

$$\begin{aligned} \nu \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) &= P \left( \square \bigcup_{i=1}^n U_i \right) \\ &\geq P \left( \bigcup_{i=1}^n \square U_i \right) \quad \text{parce que } P \text{ est monotone} \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} P \left( \bigcap_{i \in I} \square U_i \right) \\ &\quad \text{par le principe d'inclusion-exclusion appliqué à la valuation } P \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} P \left( \square \bigcap_{i \in I} U_i \right) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \end{aligned}$$

où l'avant-dernière ligne se déduit du fait que  $\square \bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \square U_i$  (lemme 3.3.5).  $\square$

Nous allons maintenant chercher à démontrer une réciproque à la proposition 5.4.4. Pour ceci, nous aurons besoin que  $X$  soit non seulement bien filtrant mais aussi localement compact.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant.

**Lemme 5.4.5** *Soit  $X$  un espace topologique. Pour toutes familles finies  $(U_i)_{i=1}^n$  et  $(V_j)_{j=1}^m$  d'ouverts de  $X$ ,  $\bigcup_{i=1}^n \square U_i \subseteq \bigcup_{j=1}^m \square V_j$  si et seulement si  $(U_i)_{i=1}^n$  est plus petite ou égale à  $(V_j)_{j=1}^m$*

dans l'ordre de Hoare  $\sqsubseteq^b$ , défini par  $(U_i)_{i=1}^n \sqsubseteq^b (V_j)_{j=1}^m$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , il existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , tel que  $U_i \subseteq V_j$ .

*Démonstration.* La direction si est évidente. Traitons de la direction seulement si, et supposons  $\bigcup_{i=1}^n \square U_i \subseteq \bigcup_{j=1}^m \square V_j$ . Si la topologie de  $X$  était telle que tout ouvert était compact (par exemple, la topologie discrète), on choisirait pour tout  $i$  le compact  $Q = U_i$ , qui est bien dans  $\bigcup_{i=1}^n \square U_i$ , donc dans  $\bigcup_{j=1}^m \square V_j$ , donc dans un  $\square V_j$ , d'où  $U_i \subseteq V_j$ .

Dans le cas général, on va choisir pour  $Q$  des compacts arbitrairement gros inclus dans  $U_i$ . Remarquons d'abord que tout ouvert est une union dirigée de compacts saturés. En effet, tout ouvert  $U$  est l'union des  $\uparrow E$ , pour toute partie finie  $E$  de  $U$ , et tous les  $\uparrow E$  sont des compacts saturés — des compacts finitaires. De plus, la famille de ces  $\uparrow E$  est clairement dirigée. On a même une propriété plus forte : l'union de deux tels compacts  $\uparrow E_1$  et  $\uparrow E_2$ , à savoir  $\uparrow (E_1 \cup E_2)$ , est de la même forme.

Soit donc  $(Q_{ik})_{k \in K}$  une famille dirigée de compacts saturés telle que  $U_i = \bigcup_{k \in K} Q_{ik}$ , et telle que : (\*) pour tous  $k, k' \in K$ , il existe  $k'' \in K$  tel que  $Q_{ik} \cup Q_{ik'} = Q_{ik''}$ . Comme  $Q_{ik} \subseteq U_i$ ,  $Q_{ik} \in \square U_i$ , donc il existe un indice  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tel que  $Q_{ik} \in \square V_j$ . En général,  $j$  dépend de  $k$ ; on aimerait montrer qu'il existe un unique indice  $j$  tel que  $\square V_j$  contienne tous les  $Q_{ik}$ , pour tous les  $k$ .

Pour chaque indice  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , soit  $K_j = \{k \in K \mid Q_{ik} \subseteq V_j\}$ . L'argument ci-dessus montre que  $K = \bigcup_{j=1}^m K_j$ .

Soit  $J$  le sous-ensemble des  $j \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $K_j$  est non vide.  $J$  lui-même est non vide, puisque  $K$  est non vide et  $K = \bigcup_{j=1}^m K_j$ . On observe maintenant qu'il existe nécessairement un indice  $j \in J$  tel que  $K_j$  est *cofinale* dans  $K$  : pour tout  $k \in K$ , il existe  $k' \in K_j$  tel que  $Q_{ik} \subseteq Q_{ik'}$ . Sinon, pour tout  $j \in J$ , il existerait un indice  $k_j \in K$  tel que  $Q_{ik_j} \not\subseteq Q_{ik'}$  pour tout  $k' \in K_j$ . Par la propriété (\*), et comme  $J$  est fini, il existe  $k'' \in K$  tel que  $Q_{ik''} = \bigcup_{j \in J} Q_{ik_j}$ . Comme  $K = \bigcup_{j=1}^m K_j$ , il existe un entier  $j$  tel que  $k'' \in K_j$ ; en particulier  $K_j \neq \emptyset$ , donc  $j \in J$ . Par construction,  $Q_{ik_j} \not\subseteq Q_{ik'}$  pour tout  $k' \in K_j$ . En prenant  $k' = k''$ , on obtient  $Q_{ik_j} \not\subseteq Q_{ik''} = \bigcup_{j \in J} Q_{ik_j}$ , qui est absurde.

Soit donc  $j \in J$  tel que  $K_j$  est cofinale dans  $K$ . Par la définition même de la cofinalité,  $\bigcup_{k' \in K_j} Q_{ik'} = \bigcup_{k \in K} Q_{ik} = U_i$ . Or, par définition de  $K_j$ , pour tout  $k' \in K_j$ ,  $Q_{ik'} \subseteq V_j$ . Donc  $U_i \subseteq V_j$ .  $\square$

**Lemme 5.4.6** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact.*

*Pour toute capacité sur  $X$ , il existe au plus une valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  telle que  $\nu(U) = P(\square U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , ou de façon équivalente telle que (5.3) soit vraie pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 5.4.4, les deux conditions sont équivalentes. Par le corollaire 3.3.6, tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{Q}(X)$  est une union  $\bigcup_{i \in I} \square U_i$ , où  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille d'ouverts de  $X$ . On peut de plus supposer  $I$  non vide. Pour toute partie finie non vide  $J$  de  $I$ , notons  $\square U_J$  l'union  $\bigcup_{i \in J} \square U_i$ . Alors la famille des  $U_J$  est dirigée, et l'on a

$$P(\mathcal{U}) = \sup_{J \text{ fini, } J \subseteq I} P(\square U_J) \quad (5.4)$$

Donc  $P$  est entièrement déterminée par sa valeur sur les  $\square U_J$ , c'est-à-dire sur les unions d'un nombre fini d'ouverts  $\square U_i$ .

Or, si  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^n \square U_i$  est une telle union finie, par la formule d'inclusion-exclusion pour les valuations, et le fait que pour tout  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $\square \bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \square U_i$  par le lemme 3.3.5, on a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i\right) &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} P\left(\square \bigcap_{i \in I} U_i\right) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

ce qui finit de démontrer que  $P$  est uniquement déterminée par  $\nu$ .  $\square$

**Proposition 5.4.7** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Si  $\nu$  est une loi de crédibilité sur  $X$ , alors il existe une unique valuation continue  $\nu^*$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  telle que  $\nu(U) = \nu^*(\square U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

*Démonstration.* L'unicité est par le lemme 5.4.6. Nous laissant guider par la formule (5.5), définissons une fonction  $P$  qui à toute famille finie  $(U_i)_{i=1}^n$  d'ouverts de  $X$ , associe

$$P((U_i)_{i=1}^n) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right)$$

1. On va d'abord montrer que, si  $U_{n+1}$  est un ouvert supplémentaire de  $X$ , on a

$$P((U_i)_{i=1}^{n+1}) \geq P((U_i)_{i=1}^n) \quad (5.6)$$

avec égalité si  $U_{n+1} \subseteq U_i$  pour un  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En effet,

$$\begin{aligned} P((U_i)_{i=1}^{n+1}) &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n+1\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) + \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i \cap U_{n+1}\right) \\ &\quad \text{en séparant les parties non vides de } \{1, \dots, n+1\} \\ &\quad \text{en les parties non vides de } I \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ d'une part,} \\ &\quad \text{et les parties } I \cup \{n+1\} \text{ avec } I \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ d'autre part} \\ &= P((U_i)_{i=1}^n) + \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i \cap U_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Maintenant, la dernière somme s'écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \cap U_{n+1} \right) &= \nu(U_{n+1}) - \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} (U_i \cap U_{n+1}) \right) \\
&\geq \nu(U_{n+1}) - \nu \left( \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap U_{n+1}) \right) \quad \text{par convexité totale} \\
&= \nu(U_{n+1}) - \nu \left( U_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n U_i \right) \geq 0 \quad \text{par monotonie}
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité (5.6).

Si en revanche il existe un indice  $i_0$  tel que  $U_{n+1} \subseteq U_{i_0}$ , la même somme peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \cap U_{n+1} \right) &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, i_0 \notin I} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \cap U_{i_0} \cap U_{n+1} \right) \\
&\quad + \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, i_0 \in I} (-1)^{|I|} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \cap U_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

en découpant la deuxième somme en les parties de  $\{1, \dots, n\}$  qui contiennent  $i_0$ , c'est-à-dire de la forme  $I \cup \{i_0\}$ ,  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $i_0 \notin I$ , et celles qui ne contiennent pas  $i_0$ . Or, puisque  $U_{i_0} \cap U_{n+1} = U_{n+1}$ , les termes de ces deux dernières sommes s'annulent deux à deux. On obtient donc l'égalité

$$P((U_i)_{i=1}^{n+1}) = P((U_i)_{i=1}^n)$$

dans ce cas.

2. Ensuite, si  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ , il est clair que  $P((U_i)_{i=1}^n) = P(U_{\sigma(i)}_{i=1}^n)$ .

3. On en déduit que si  $(U_i)_{i=1}^n \subseteq^b (V_j)_{j=1}^m$  (voir lemme 5.4.5), alors  $P((U_i)_{i=1}^n) \leq P((V_j)_{j=1}^m)$ . En effet, on peut obtenir  $(V_j)_{j=1}^m$  à partir de  $(U_i)_{i=1}^n$  en ajoutant d'abord les  $V_j$  un à un, ce qui fait augmenter la valeur de  $P$ , puis en retirant les  $U_i$  un à un ; comme chaque  $U_i$  retiré est inclus dans un des  $V_j$ , ceci préserve la valeur de  $P$ .

4. Une première conséquence de 3. est que  $P((U_i)_{i=1}^n)$  ne dépend que de  $\bigcup_{i=1}^n \square U_i$ , pas des ouverts  $U_i$  eux-mêmes. En effet, si  $\bigcup_{i=1}^n \square U_i = \bigcup_{j=1}^m \square V_j$ , par le lemme 5.4.5, on a  $(U_i)_{i=1}^n \subseteq^b (V_j)_{j=1}^m$  et  $(V_j)_{j=1}^m \subseteq^b (U_i)_{i=1}^n$ , donc  $P((U_i)_{i=1}^n) = P((V_j)_{j=1}^m)$ .

Il est donc légitime de noter  $P(\bigcup_{i=1}^n \square U_i)$  la quantité que nous notions jusqu'ici  $P((U_i)_{i=1}^n)$ .

5. Une seconde conséquence de 3. est que, si  $\bigcup_{i=1}^n \square U_i \subseteq \bigcup_{j=1}^m \square V_j$ , alors  $P(\bigcup_{i=1}^n \square U_i) \leq P(\bigcup_{j=1}^m \square V_j)$ .  $P$  est donc monotone.

6. Clairement,  $P(\emptyset) = P(\bigcup_{i \in \emptyset} U_i) = 0$ .

7. Montrons maintenant que  $P$  est modulaire, au sens où

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i \cup \bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right) + P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i \cap \bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i\right) + P\left(\bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pour ceci, on calcule

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i \cap \bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right) &= P\left(\bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} (\square U_i \cap \square U_{j+n})\right) \\ &= P\left(\bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} \square(U_i \cap U_{j+n})\right) \end{aligned}$$

car  $\square(U \cap V) = \square U \cap \square V$  pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$  (lemme 3.3.5). Maintenant, par la définition de  $P$ , on en déduit

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i \cap \bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right) = \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ K \neq \emptyset}} (-1)^{|K|+1} \nu\left(\bigcap_{(i,j) \in K} (U_i \cap U_{j+n})\right)$$

Clairement,  $\bigcap_{(i,j) \in K} (U_i \cap U_{j+n})$  ne dépend que de  $\pi_1 K$  et de  $\pi_2 K$ , pas de  $K$ , puisque cette quantité vaut  $\bigcap_{i \in \pi_1 K} U_i \cap \bigcap_{j \in \pi_2 K} U_j$ . On peut donc découper la sommation en une somme sur les valeurs possibles  $I$  et  $J$  de  $\pi_1 K$  et de  $\pi_2 K$  respectivement :

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i \cap \bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right) \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ J \subseteq \{1, \dots, m\}, J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K = I, \pi_2 K = J}} (-1)^{|K|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{j \in J} U_{j+n}\right) \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ J \subseteq \{1, \dots, m\}, J \neq \emptyset}} \left( \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \\ \pi_1 K = I, \pi_2 K = J}} (-1)^{|K|+1} \right) \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{j \in J} U_{j+n}\right) \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ J \subseteq \{1, \dots, m\}, J \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+|J|} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{j \in J} U_{j+n}\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

en utilisant le lemme 3.11.3 à la dernière ligne.

D'autre part, en découpant tous les ensembles  $L \subseteq \{1, \dots, n+m\}$  non vides en ceux de la forme  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , et ceux de la forme  $J \subseteq \{n+1, \dots, m\}$ , et enfin en ceux qui sont réunion d'un de la première forme et d'un de la seconde,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i \cup \bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right) &= \sum_{L \subseteq \{1, \dots, n+m\}, L \neq \emptyset} (-1)^{|L|+1} \nu\left(\bigcap_{\ell \in L} U_\ell\right) \\
&= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \\
&\quad + \sum_{J \subseteq \{1, \dots, m\}, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|+1} \nu\left(\bigcap_{j \in J} U_{j+n}\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ J \subseteq \{1, \dots, m\}, J \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+|J|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{j \in J} U_{j+n}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i\right) + P\left(\bigcup_{j=1}^m \square U_{j+n}\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^n \square U_i \cap \bigcup_{j=n+1}^{n+m} \square U_j\right)
\end{aligned}$$

en utilisant (5.8), ce qui démontre (5.7).

8. Tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{Q}(X)$  est réunion d'une famille  $\square U_i, i \in I$ . En fait, par le corollaire 3.3.6,  $\mathcal{U}$  est la réunion  $\bigcup_{Q \in \mathcal{U}} \square \overset{\circ}{Q}$ . Donc  $\mathcal{U}$  est aussi la réunion de la famille dirigée des  $\bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q}$  lorsque  $\mathcal{J}$  parcourt l'ensemble des parties finies de  $\mathcal{U}$ . Il ne reste plus qu'à poser

$$\nu^*(\mathcal{U}) = \sup_{\mathcal{J} \text{ finie } \subseteq \mathcal{U}} P\left(\bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q}\right)$$

conformément à (5.4). Ceci est bien défini : en effet,  $P\left(\bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q}\right) \leq P\left(\square \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \overset{\circ}{Q}\right)$  (par monotonie de  $P$ , voir le point 5.)  $= \nu\left(\bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \overset{\circ}{Q}\right)$  (par définition)  $\leq \nu(X)$ , donc  $\nu^*(\mathcal{U})$  est bien défini comme la borne supérieure de quantités majorées par  $\nu(X)$ .

On a  $\nu^*(\emptyset) = P(\emptyset) = 0$  par 6., donc  $\nu^*$  est une capacité. Ensuite,  $\nu^*$  est monotone par construction (sans même utiliser le point 5. ci-dessus).

9. On observe maintenant que  $\nu^*$  est continue. C'est pratiquement par construction. Soit  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'ouverts de  $\mathcal{Q}(X)$ . Pour toute partie finie  $\mathcal{J}, \mathcal{J} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$  si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{U}_i$ . En effet, la direction si est évidente, et réciproquement, si  $\mathcal{J} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ , alors pour chaque  $Q \in \mathcal{J}$ , il existe  $i \in I$  tel que  $Q \in \mathcal{U}_i$ ; comme  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est

dirigée, il existe un  $\mathcal{U}_i$ ,  $i \in I$ , qui contient tous les  $Q \in \mathcal{J}$ , qui sont en nombre fini. On a alors

$$\begin{aligned} \nu^* \left( \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) &= \sup_{\mathcal{J} \text{ finie } \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) \\ &= \sup_{\mathcal{J} \text{ finie } / \exists i \in I \cdot \mathcal{J} \subseteq \mathcal{U}_i} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{U}_i} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) = \sup_{i \in I} \nu^*(\mathcal{U}_i) \end{aligned}$$

10. Pour toute partie finie  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{Q}(X)$ ,

$$\nu^* \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) = P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right)$$

L'inégalité  $\geq$  est par définition. Réciproquement, soit  $\mathcal{U} = \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q}$ , et considérons n'importe quelle partie finie  $\mathcal{J}'$  de  $\mathcal{U}$ . Pour tout  $Q' \in \mathcal{J}'$ ,  $Q'$  est dans  $\mathcal{U}$ , donc il existe  $Q \in \mathcal{J}$  tel que  $Q' \in \square \overset{\circ}{Q}$ , en particulier  $\overset{\circ}{Q}' \subseteq \overset{\circ}{Q}$ . Par le lemme 5.4.5,  $\bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \subseteq \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q}$ . Puisque  $P$  est monotone (point 5.),

$$P \left( \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) \leq P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right)$$

En prenant les bornes supérieures sur les parties finies  $\mathcal{J}'$  de  $\mathcal{U}$ , on obtient l'inégalité

$$\nu^* \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) \leq P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right)$$

d'où l'égalité.

11. Montrons que  $\nu^*$  est modulaire. On a  $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}' = \bigcup_{Q \in \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'} \square \overset{\circ}{Q}$ , donc  $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$  est l'union dirigée des  $\bigcup_{Q \in \mathcal{J} \cup \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q} = \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cup \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}'$ , lorsque  $\mathcal{J}$  parcourt l'ensemble des parties finies de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{J}'$  parcourt celui des parties finies de  $\mathcal{U}'$ . Donc

$$\begin{aligned} \nu^*(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}') &= \sup_{\substack{\mathcal{J} \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{J}' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U}'}} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cup \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) \\ &= \sup_{\substack{\mathcal{J} \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{J}' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U}'}} \left[ P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) + P \left( \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) - P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) \right] \quad (5.9) \end{aligned}$$

par le point 7. ci-dessus.

Le cas de l'intersection est un peu plus subtil. On a :

$$\nu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') = \sup_{\mathcal{J}'' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} P \left( \bigcup_{Q'' \in \mathcal{J}''} \square \overset{\circ}{Q}'' \right)$$

D'une part, toute partie finie  $\mathcal{J}''$  de  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$  est à la fois une partie finie  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{U}$  et une partie finie  $\mathcal{J}'$  de  $\mathcal{U}'$ , d'où

$$\bigcup_{Q'' \in \mathcal{J}''} \square \overset{\circ}{Q}'' = \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}'$$

On en déduit

$$\nu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \leq \sup_{\substack{\mathcal{J} \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{J}' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U}'}} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) \quad (5.10)$$

Démontrons l'inégalité inverse. Si  $\mathcal{J}$  est une partie finie de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{J}'$  une partie finie de  $\mathcal{U}'$ , tout  $Q'' \in \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}'$  est par définition tel que  $Q'' \subseteq \overset{\circ}{Q}$  et  $Q'' \subseteq \overset{\circ}{Q}'$  pour au moins un  $Q \in \mathcal{J}$ , et un  $Q' \in \mathcal{J}'$ . Comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q_1$  tel que  $Q'' \subseteq \overset{\circ}{Q}_1 \subseteq Q_1 \subseteq \overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{Q}'$ . Comme  $Q_1 \subseteq \overset{\circ}{Q}$  et  $Q \in \mathcal{U}$ ,  $Q_1 \in \mathcal{U}$ ; de même,  $Q_1 \in \mathcal{U}'$ , donc  $Q_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ . Comme  $Q''$  est arbitraire, on en déduit

$$\begin{aligned} \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' &\subseteq \bigcup_{Q_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} \square \overset{\circ}{Q}_1 \\ &= \bigcup_{\mathcal{J}'' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} \bigcup_{Q_1 \in \mathcal{J}''} \square \overset{\circ}{Q}_1 \end{aligned}$$

Par le point 8.,  $\nu^*$  est monotone, et par le point 9.,  $\nu^*$  est continue, donc

$$\begin{aligned} \nu^* \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) &\leq \nu^* \left( \bigcup_{\mathcal{J}'' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} \bigcup_{Q_1 \in \mathcal{J}''} \square \overset{\circ}{Q}_1 \right) \\ &= \sup_{\mathcal{J}'' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} \nu^* \left( \bigcup_{Q_1 \in \mathcal{J}''} \square \overset{\circ}{Q}_1 \right) \end{aligned}$$

Par le point 10.,

$$\begin{aligned} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) &\leq \sup_{\mathcal{J}'' \text{ finie } \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} P \left( \bigcup_{Q_1 \in \mathcal{J}''} \square \overset{\circ}{Q}_1 \right) \\ &= \nu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \end{aligned}$$

En prenant les bornes supérieures, on obtient

$$\sup_{\substack{\mathcal{J} \text{ finie} \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{J}' \text{ finie} \subseteq \mathcal{U}'}} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) \leq \nu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$$

En combinant ceci avec (5.10), on obtient l'égalité :

$$\nu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') = \sup_{\substack{\mathcal{J} \text{ finie} \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{J}' \text{ finie} \subseteq \mathcal{U}'}} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) \quad (5.11)$$

En sommant (5.11) avec (5.9), et comme l'addition de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  est Scott-continue,

$$\begin{aligned} \nu^*(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}') + \nu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') &= \sup_{\substack{\mathcal{J} \text{ finie} \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{J}' \text{ finie} \subseteq \mathcal{U}'}} \left[ P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) + P \left( \bigcup_{Q' \in \mathcal{J}'} \square \overset{\circ}{Q}' \right) \right] \\ &= \nu^*(\mathcal{U}) + \nu^*(\mathcal{U}') \end{aligned}$$

Donc  $\nu^*$  est une valuation continue.

12. Montrons finalement que, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\nu^*(\square U) = \nu(U)$ . Par définition,

$$\begin{aligned} \nu^*(\square U) &= \sup_{\mathcal{J} \text{ finie} \subseteq \square U} P \left( \bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \right) \\ &\geq \sup_{Q \text{ compact saturé} \subseteq U} P(\square \overset{\circ}{Q}) = \sup_{Q \text{ compact saturé} \subseteq U} \nu(\overset{\circ}{Q}) \end{aligned}$$

Or  $U$  est l'union dirigée des  $\overset{\circ}{Q}$ ,  $Q$  compact saturé inclus dans  $U$ , car  $X$  est localement compact. En effet, pour tout  $x \in U$ , il existe un compact saturé  $Q_x$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q}_x \subseteq Q_x \subseteq U$ . Et si  $Q_1, Q_2 \in U$ , alors on peut trouver un compact saturé  $Q$  tel que  $Q_1 \cup Q_2 \subseteq \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq U$ , car  $Q_1 \cup Q_2$  est compact ; ceci montre que la famille est dirigée. Puisque  $\nu$  est continue, la borne supérieure des  $\nu(\overset{\circ}{Q})$ ,  $Q \subseteq U$ , égale donc  $\nu(U)$ . Donc  $\nu^*(\square U) \geq \nu(U)$ .

Réciproquement, pour toute partie finie  $\mathcal{J}$  de  $\square U$ ,  $\bigcup_{Q \in \mathcal{J}} \square \overset{\circ}{Q} \subseteq \bigcup_{Q \in \square U} \square \overset{\circ}{Q} \subseteq \square U$ , donc  $\nu^*(\square U) \leq P(\square U) = \nu(U)$ . Donc  $\nu^*(\square U) = \nu(U)$ .  $\square$

En combinant la proposition 5.4.4 et la proposition 5.4.7, on obtient le théorème principal de cette section :

**Théorème 5.4.8** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Les lois de crédibilité continues  $\nu$  sur  $X$  sont exactement les jeux linéairement extensibles par le bas. Il existe alors une unique valuation continue  $\nu^*$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  telle que  $\nu(U) = \nu^*(\square U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

▷ **Exercice 5.2**

Un théorème de Tix (1995, Satz 2.2) énonce que si  $X$  est sobre, les valuations continues ne prenant qu'un nombre fini de valeurs sont exactement les valuations simples. En déduire que, si  $X$  est bien filtrant et localement compact, et  $\nu$  est une crédibilité continue ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, toutes multiples d'un même réel  $a > 0$ , alors  $\nu$  est une crédibilité simple.

## 5.5 L'ensemble ordonné continu des crédibilités continues

On observe, par simple calcul :

**Fait 5.5.1** Soit  $\nu$  un jeu linéairement extensible par le bas sur  $X$ , et  $\nu^*$  son extension sur  $\mathcal{Q}(X)$ . Alors  $\nu^*$  est la crédibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{Q_i}$  si et seulement si  $\nu$  est la valuation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{Q_i}$ .

Lorsque  $X$  est bien filtrant et localement compact, par le lemme 3.3.1,  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo continu. On peut donc réutiliser les théorèmes de Jones (1990) sur les valuations continues sur les cpo continus. Pour ceci, on a encore besoin de quelques lemmes.

**Lemme 5.5.2** Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de crédibilités continues sur  $X$ , ayant pour borne supérieure  $\nu$ . Alors  $\nu$  est une crédibilité continue.

*Démonstration.* Clairement  $\nu(\emptyset) = 0$ , et  $\nu$  est monotone. Pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_j)_{j \in J}$  de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \nu \left( \bigcup_{j \in J} U_j \right) &= \sup_{i \in I} \nu_i \left( \bigcup_{j \in J} U_j \right) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} \nu_i(U_j) = \sup_{j \in J} \sup_{i \in I} \nu_i(U_j) = \sup_{j \in J} \nu(U_j) \end{aligned}$$

donc  $\nu$  est continue. Reste à montrer que  $\nu$  est totalement convexe. Pour chaque  $i \in I$ ,  $\nu_i$  est totalement convexe, ce que l'on peut écrire

$$\nu_i \left( \bigcup_{j=1}^n U_j \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ pair}}} \nu_i \left( \bigcap_{j \in I} U_j \right) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ impair}}} \nu_i \left( \bigcap_{j \in I} U_j \right)$$

Prenons les bornes supérieures de chaque côté. Comme l'addition est Scott-continue sur  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ,

$$\nu \left( \bigcup_{j=1}^n U_j \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ pair}}} \nu \left( \bigcap_{j \in I} U_j \right) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ impair}}} \nu \left( \bigcap_{j \in I} U_j \right)$$

ce qui signifie que  $\nu$  est totalement convexe. □

Nous verrons au corollaire 6.3.12 que, si  $X$  est stablement compact, la borne inférieure de toute famille filtrante de crédibilités continues sur  $X$  sera, elle aussi, une crédibilité continue.

**Lemme 5.5.3** Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Pour toutes crédibilités continues  $\nu_1, \nu_2$  sur  $X$ , si  $\nu_1^* \leq \nu_2^*$  alors  $\nu_1 \leq \nu_2$ .

*Démonstration.* Si  $\nu_1^* \leq \nu_2^*$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\nu_1(U) = \nu_1^*(\square U) \leq \nu_2^*(\square U) = \nu_2(U)$ .  $\square$

**Lemme 5.5.4** Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Pour toute famille  $(\nu_i)_{i \in I}$  de crédibilités continues telle que  $(\nu_i^*)_{i \in I}$  est dirigée, alors  $(\nu_i)_{i \in I}$  est dirigée. Si de plus  $(\nu_i^*)_{i \in I}$  a une borne supérieure  $\sup_{i \in I} \nu_i^*$  dans l'espace  $\mathbf{V}(X)$  des valuations continues, alors elle est de la forme  $\nu^*$ , et  $\nu$  est la borne supérieure de la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$ .

*Démonstration.* Le fait que  $(\nu_i)_{i \in I}$  soit dirigée est une conséquence directe du lemme 5.5.3. Si  $\sup_{i \in I} \nu_i^*$  existe, alors elle est de la forme  $\nu^*$  pour une certaine crédibilité continue  $\nu$ , par la proposition 5.4.4. Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,

$$\nu(U) = \nu^*(\square U) = \sup_{i \in I} \nu_i^*(\square U) = \sup_{i \in I} \nu_i(U)$$

Donc  $\nu = \sup_{i \in I} \nu_i$ , ce qui est l'égalité annoncée.  $\square$

**Théorème 5.5.5** Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Toute loi de crédibilité continue sur  $X$  est la borne supérieure d'une famille dirigée de crédibilités simples. L'espace  $\mathbf{Cd}(X)$  des lois de crédibilité continues  $\nu$  sur  $X$  est un ensemble ordonné continu, avec une base de crédibilités simples. L'espace  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  des lois de crédibilité continues sous-normalisées  $\nu$  sur  $X$  est un cpo continu.

*Démonstration.* Soit  $\nu$  une loi de crédibilité sur  $X$ . Considérons la valuation continue  $\nu^*$  donnée au théorème 5.4.8. Elle est la borne supérieure d'une famille dirigée de valuations simples  $P_i$ ,  $i \in I$ , par le théorème de Jones. Par la proposition 5.4.4, chacune de ces valuations simples définit une crédibilité continue  $\nu_i$  définie par  $\nu_i(U) = P_i(\square U)$ . Par la proposition 5.4.7, et l'unicité de  $\nu_i^*$ ,  $P_i = \nu_i^*$ . Pour tous indices  $i, j \in I$ , comme la famille des  $(P_i)_{i \in I}$ , c'est-à-dire des  $(\nu_i^*)_{i \in I}$ , est dirigée, le lemme 5.5.4 implique que la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$  est dirigée et que  $\nu = \sup_{i \in I} \nu_i$ .

Montrons que l'on peut maintenant demander de plus que  $\nu_i \ll \nu$  pour tout  $i$ . Pour ceci, nous allons en fait fabriquer une autre famille de crédibilités simples, dirigée, qui sont toutes bien au-dessous de  $\nu$ , et de borne supérieure  $\nu$ . Par le lemme 5.3.4, chaque  $\nu_i$  est borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_{ik})_{k \in K_i}$  de crédibilités simples, lesquelles sont toutes bien au-dessous de  $\nu_i$  par le lemme 5.3.3, donc bien au-dessous de  $\nu$ . En particulier,  $\nu$  est la borne supérieure des  $\nu_{ik}$ ,  $i \in I, k \in K_i$ . Nous allons montrer que la famille des  $\nu_{ik}$ ,  $i \in I, k \in K_i$ , est dirigée, ce qui montrera le résultat attendu.

D'abord, cette famille est non vide. Ensuite, si  $\nu_{ik}$  et  $\nu_{i'k'}$  sont deux éléments de cette famille,  $\nu_{ik} \ll \nu_i$  et  $\nu_{i'k'} \ll \nu_{i'}$ . Il existe  $i'' \in I$  tel que  $\nu_i, \nu_{i'} \leq \nu_{i''}$ . Donc  $\nu_{ik}, \nu_{i'k'} \ll \nu_{i''}$ . Or  $\nu_{i''}$  est la borne supérieure des  $\nu_{i''k''}$ ,  $k'' \in K_{i''}$ . Par la définition de  $\ll$ , et  $\nu_{ik} \ll \nu_{i''}$ , il existe  $k_1$  tel que  $\nu_{ik} \leq \nu_{i''k_1}$ . De même, il existe  $k_2$  tel que  $\nu_{i'k'} \leq \nu_{i''k_2}$ . Comme la famille  $(\nu_{i''k''})_{k'' \in K_{i''}}$  est dirigée, il existe  $k_3 \in K_{i''}$  tel que  $\nu_{i''k_1}, \nu_{i''k_2} \leq \nu_{i''k_3}$ , donc  $\nu_{ik}, \nu_{i'k'} \leq \nu_{i''k_3}$ .

Donc  $\mathbf{Cd}(X)$  est un ensemble ordonné continu, avec une base de crédibilités simples. Le fait que le sous-espace  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  est un cpo est évident.  $\square$

On en déduit que l'espace  $\mathbf{Cd}(X)$  des crédibilités continues est le plus petit espace permettant de parler à la fois de non-déterminisme démoniaque et de tirage probabiliste, dans un cadre continu, comme promis au début du chapitre :

**Proposition 5.5.6** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. L'espace  $\mathbf{Cd}(X)$  des crédibilités continues sur  $X$  est le plus petit espace  $\mathcal{C}$  de capacités sur  $X$  tel que :*

**(Non-déterminisme)** *Tout jeu d'unanimité continu  $u_Q$ ,  $Q \in \mathcal{Q}(X)$ , est dans  $\mathcal{C}$ .*

**(Valuation)** *Toute combinaison linéaire finie à coefficients positifs d'éléments de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{C}$ .*

**(Continuité)** *Toute borne supérieure de famille dirigée d'éléments de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Clairement tout élément de  $\mathcal{C}$  est une crédibilité continue, puisque  $u_Q$  est une crédibilité continue par la proposition 5.1.1, que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de crédibilités continues est encore une crédibilité continue à l'évidence, et que toute borne supérieure de famille dirigée de crédibilités continue est une crédibilité continue par le lemme 5.5.2. La réciproque est par le théorème 5.5.5.  $\square$

La raison pour laquelle les jeux de la forme  $u_Q$  peuvent être vus comme le codage de choix non-déterministes démoniaques est, plus précisément, la proposition suivante.

**Proposition 5.5.7** *Soit  $X$  un espace bien filtrant. La fonction de  $\mathcal{Q}(X)$  dans l'espace  $\mathbf{Cd}(X)$  des crédibilités continues (resp.  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  des crédibilités continues sous-normalisées, resp.  $\mathbf{Cd}_1(X)$  des crédibilités continues normalisées) qui à  $Q$  associe  $u_Q$  est un plongement d'ordre Scott-continu.*

*C'est aussi un plongement d'espaces topologiques dès que  $X$  est non seulement bien filtrant mais aussi localement compact.*

*Démonstration.* Si  $Q \supseteq Q'$ , alors  $u_Q \leq u_{Q'}$ . En effet, pour tout ouvert  $U$ , si  $u_Q(U) = 1$ , c'est-à-dire si  $Q \subseteq U$ , alors  $Q' \subseteq U$ , donc  $u_{Q'}(U) = 1$ . Réciproquement, supposons  $u_Q \leq u_{Q'}$ . Comme  $Q$  est saturé,  $Q$  est l'intersection de la famille  $(U_i)_{i \in I}$  de tous les ouverts contenant  $Q$ . Pour chaque  $i \in I$ ,  $u_Q(U_i) = 1$ , donc  $u_{Q'}(U_i) = 1$ , donc  $Q' \subseteq U_i$ . Ceci implique que  $Q' \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i = Q$ . Donc  $Q \mapsto u_Q$  est un plongement d'ordre.

Montrons qu'il est continu, c'est-à-dire Scott-continu puisque  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo, au vu du lemme 3.3.1. Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de compacts saturés non vides de  $X$ , soit  $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i$ , et montrons que  $u_Q = \sup_{i \in I} u_{Q_i}$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $u_Q(U) = 1$  si et seulement si  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$ , si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq U$  (puisque  $X$  est bien filtrant), si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $u_{Q_i}(U) = 1$ . Donc  $u_Q(U) = \sup_{i \in I} u_{Q_i}(U)$ .

Pour montrer qu'il s'agit d'un plongement d'espaces topologiques, lorsque  $X$  est de surcroît localement compact, on note d'abord que  $Q \mapsto u_Q$  est injective, car un plongement d'ordre. Ensuite, soit  $U$  un ouvert de  $X$ . L'image de  $\square U$  par la fonction  $Q \mapsto u_Q$  est l'espace des  $\nu = u_Q$  tels que  $\nu(U) > 1/2$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{S}(Q \mapsto u_Q) \cap [U > 1/2]$ . Il est facile de voir que l'ouvert faible  $[U > 1/2]$  est aussi Scott-ouvert. Comme les  $\square U$  engendrent la topologie de  $\mathcal{Q}(X)$  par le corollaire 3.3.6, la fonction  $(Q \mapsto u_Q)^{-1}$  est donc continue de  $\mathfrak{S}(Q \mapsto u_Q)$  vers  $\mathcal{Q}(X)$ . Donc  $Q \mapsto u_Q$  est un plongement d'espaces topologiques.  $\square$

On a un analogue du théorème 5.5.5 pour les crédibilités normalisées, c'est-à-dire telles que  $\nu(X) = 1$ . Pour ceci, nous avons besoin que  $X$  soit, de surcroît, compact.

**Proposition 5.5.8** *Soit  $X$  un espace bien filtrant, compact et localement compact. Toute loi de crédibilité continue normalisée sur  $X$  est la borne supérieure d'une famille dirigée de crédibilités simples normalisées. L'espace  $\mathbf{Cd}_1(X)$  des lois de crédibilité continues normalisées  $\nu$  sur  $X$  est un cpo continu, avec une base de crédibilités simples normalisées.*

*Démonstration.* On utilise l'astuce d'Edalat (Edalat, 1995, section 3), qui est une technique permettant de déduire que l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des probabilités continues sur un cpo continu ayant un plus petit élément  $\perp$  est continu, avec une base de probabilités simples. Ici, c'est  $X$  qui est le plus petit élément de  $\mathcal{Q}(X)$  — car  $X$  est compact.

Pour toute valuation simple sous-normalisée  $\nu'$ , écrivons  $\nu'$  sous la forme  $a_X u_X + \sum_{Q \in A} a_Q u_Q$ , où  $A$  est un ensemble fini de compacts saturés non vides différents de  $X$ . Comme  $\nu'(X) \leq 1$ ,  $a_X + \sum_{Q \in A} a_Q \leq 1$ . On peut alors définir une nouvelle valuation simple  $\nu'_\perp$  par  $(1 - \sum_{Q \in A} a_Q)u_X + \sum_{Q \in A} a_Q u_Q$ . Intuitivement,  $\nu'_\perp$  est obtenue en rajoutant la masse manquante pour arriver à 1 en le plus petit élément  $X$  de  $\mathcal{Q}(X)$ . Clairement,  $\nu'_\perp(X) = 1$ .

Pour toute crédibilité simple  $\nu'$ ,  $\nu'_\perp(U) = \nu'(U)$  pour tout ouvert  $U \neq X$ . C'est par construction, puisqu'alors  $u_X(U) = 0$ .

On en déduit que : (\*) si  $\nu'$  et  $\nu''$  sont deux crédibilités simples telles que  $\nu' \leq \nu''$ , alors  $\nu'_\perp \leq \nu''_\perp$ . En effet, pour tout ouvert  $U$ , soit  $U = X$  et alors  $\nu'_\perp(U) = 1 = \nu''_\perp(U)$ , soit  $U \neq X$  et alors  $\nu'_\perp(U) = \nu'(U) \leq \nu''(U) = \nu''_\perp(U)$ .

Soit  $\nu$  une crédibilité continue normalisée. Par le théorème 5.5.5,  $\nu$  est la borne supérieure d'une famille dirigée de crédibilités simples  $(\nu_i)_{i \in I}$  avec  $\nu_i \ll \nu$ . Par (\*) ci-dessus,  $(\nu_i)_\perp_{i \in I}$  est une famille dirigée. Comme  $\nu_i \leq \nu$  pour tout  $i \in I$ ,  $\nu_i)_\perp \leq \nu_\perp$  (par (\*)) =  $\nu$  (puisque  $\nu$  est normalisée), donc  $\sup_{i \in I} \nu_i)_\perp \leq \nu$ . Comme  $\nu_i \leq \nu_i)_\perp$  pour tout  $i \in I$ ,  $\sup_{i \in I} \nu_i)_\perp = \nu$ .

Il ne reste qu'à montrer que  $\nu_i)_\perp \ll_1 \nu$ , où  $\ll_1$  est la relation "bien au-dessous" dans l'espace des crédibilités continues normalisées. Soit  $(\nu'_j)_{j \in J}$  une famille dirigée de crédibilités continues normalisées telles que  $\sup_{j \in J} \nu'_j \geq \nu$ . Comme  $\nu'_j$  et  $\nu$  sont des crédibilités continues et  $\nu_i \ll \nu$ , il existe  $j \in J$  tel que  $\nu_i \leq \nu'_j$ . Donc  $\nu_i)_\perp \leq \nu'_j)_\perp$  (par (\*)) =  $\nu'_j$  (puisque  $\nu'_j$  est normalisée). Donc  $\nu_i)_\perp \ll_1 \nu$ .  $\square$

Au passage, on déduit du théorème 5.5.5 la réciproque du lemme 5.5.3. Bien qu'apparemment innocent, le fait que  $\nu_1 \leq \nu_2$  implique  $\nu_1^* \leq \nu_2^*$  est loin d'être évident lorsque l'on considère la formule (5.5) pour  $P = \nu^*$ , qui contient des coefficients tant positifs que négatifs.

**Lemme 5.5.9** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Pour toutes crédibilités continues  $\nu_1, \nu_2$  sur  $X$ ,  $\nu_1 \leq \nu_2$  si et seulement si  $\nu_1^* \leq \nu_2^*$ .*

*Démonstration.* La direction facile est le lemme 5.5.3. Réciproquement, supposons  $\nu_1 \leq \nu_2$ . Écrivons  $\nu_1$  sous forme de la borne supérieure d'une famille dirigée de crédibilités simples  $(\nu_{1i})_{i \in I}$  telle que  $\nu_{1i} \ll \nu_1$  pour tout  $i$ , et de même  $\nu_2$  sous forme de la borne supérieure d'une famille dirigée de crédibilités simples  $(\nu_{2j})_{j \in J}$  telle que  $\nu_{2j} \ll \nu_2$  pour tout  $j$ . Pour chaque  $i \in I$ , comme  $\nu_{1i} \ll \nu_1 \leq \nu_2 = \sup_{j \in J} \nu_{2j}$ , il existe  $j \in J$  tel que  $\nu_{1i} \leq \nu_{2j}$ .

Si  $\nu_{1i} \leq \nu_{2j}$ , comme  $\nu_{1i}$  et  $\nu_{2j}$  sont deux crédibilités simples, par le lemme de découpage 5.2.3, il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  vérifiant certaines conditions. Il est inutile de répéter ces conditions, et il suffit de remarquer que ce sont exactement les conditions

permettant de montrer que  $\nu_{1i}^* \leq \nu_{2j}^*$ , par le lemme de découpage de Jones (1990, théorème 4.10). Donc pour tout  $i \in I$ , il existe  $j \in J$  tel que  $\nu_{1i}^* \leq \nu_{2j}^*$ . Ceci implique que  $\sup_{i \in I} \nu_{1i}^* \leq \sup_{j \in J} \nu_{2j}^*$ . Or par le lemme 5.5.4,  $\sup_{i \in I} \nu_{1i}^* = \nu_1^*$  et  $\sup_{j \in J} \nu_{2j}^* = \nu_2^*$ .  $\square$

**Corollaire 5.5.10** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. La fonction  $\nu \mapsto \nu^*$  est un isomorphisme d'ordre, donc aussi un homéomorphisme, de l'espace  $\mathbf{Cd}(X)$  des crédibilités continues sur  $X$  sur l'espace  $\mathbf{V}(\mathcal{Q}(X))$  des valuations continues sur  $\mathcal{Q}(X)$ , du sous-espace  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  sur l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{Q}(X))$ , et du sous-espace  $\mathbf{Cd}_1(X)$  des crédibilités continues normalisées sur  $X$  sur l'espace  $\mathbf{V}_1(\mathcal{Q}(X))$  des probabilités continues sur  $\mathcal{Q}(X)$ .*

Les crédibilités représentent donc naturellement un tirage probabiliste, via la valuation continue  $\nu^*$ , d'un élément  $Q \in \mathcal{Q}(X)$ , qui est un compact au sein duquel on va effectuer un choix non déterministe démoniaque.

**Corollaire 5.5.11** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. L'espace  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  des lois de crédibilité continues sous-normalisées  $\nu$  sur  $X$  est un cpo continu cohérent et compact, donc stablement compact.*

*Si  $X$  est stablement compact, l'espace  $\mathbf{Cd}_1(X)$  des lois de crédibilités continues normalisées est un cpo stablement compact.*

*Démonstration.* Ce sont des cpos continus par le théorème 5.5.5, resp. la proposition 5.5.8.

Comme  $X$  est stablement localement compact,  $\mathcal{Q}(X)$  est un domaine, par la proposition 3.3.2. Donc, par le théorème 4.5.12, l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  des valuations continues sous-normalisées sur  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo continu cohérent et compact. Mais cet espace est isomorphe à celui,  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$ , des lois de crédibilité continues sous-normalisées, par le corollaire 5.5.10, première partie.

Si de plus  $X$  est compact, on applique le théorème 4.5.13 au lieu du théorème 4.5.12, et le corollaire 5.5.10, troisième partie.  $\square$

Une autre conséquence peut-être un peu surprenante du théorème 5.5.5 est que la valuation de Lebesgue sur  $[a, b]$  est la borne supérieure d'une famille dirigée de crédibilités simples sur  $[a, b]$  —  $[a, b]$  étant équipé de sa topologie métrique usuelle. Par le théorème de Jones, on sait que la valuation de Lebesgue est la borne supérieure d'une famille dirigée de valuations simples sur  $[a, b]$ , mais avec  $[a, b]$  équipé de la topologie de Scott, qui est nettement moins fine que la topologie métrique usuelle.

## 5.6 La topologie faible sur les espaces de crédibilités

Par le lemme 3.3.1,  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo continu dès que  $X$  est bien filtrant et localement compact. Il a un plus petit élément ( $X$  lui-même) si  $X$  est compact. On peut donc appliquer la proposition 3.7.12 : la topologie de Scott et la topologie faible coïncident sur  $\mathbf{V}(\mathcal{Q}(X))$ , sur  $\mathbf{V}_1(\mathcal{Q}(X))$ , et sur  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{Q}(X))$ . On pourrait donc penser que ces deux topologies coïncident aussi sur  $\mathbf{Cd}(X)$ ,  $\mathbf{Cd}_1(X)$ , et  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$ , puisque ces espaces sont isomorphes aux précédents, par le corollaire 5.5.10.

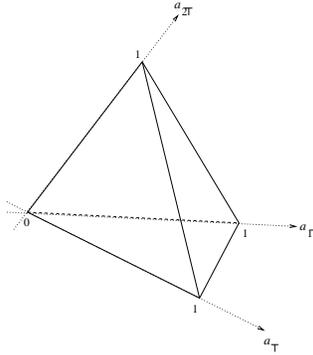


FIG. 5.1 – Crédibilités sur  $X = \{1, 2, \top\}$

Ce n'est pas nécessairement le cas. L'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, et induit donc aussi un isomorphisme entre les espaces topologiques correspondants, munis de leurs topologies de Scott respectives, mais pas nécessairement de leurs topologies faibles respectives. Tout ce que l'on peut conclure, c'est que  $\mathbf{Cd}_1(X)$  muni de sa topologie de Scott est homéomorphe à  $\mathbf{V}_1(\mathcal{Q}(X))$  muni de sa topologie faible (et similairement pour les autres couples d'espaces). La topologie faible de  $\mathbf{Cd}_1(X)$  est engendrée par les ouverts de la forme  $[U > r]$ , lorsque  $U$  parcourt les ouverts de  $X$  et  $r \in \mathbb{R}$ . L'isomorphisme d'ordre envoie ces ouverts vers les ouverts faibles  $[\square U > r]$  de  $\mathbf{V}_1(\mathcal{Q}(X))$ . Mais la topologie faible de ce dernier espace est engendrée par tous les ensembles  $[\mathcal{U} > r]$ , où  $\mathcal{U}$  parcourt tous les ouverts de  $\mathcal{Q}(X)$ , et pas seulement ceux de la forme  $\square U$ . (Rappelons qu'en général, par le lemme 3.3.5, les ouverts  $\mathcal{U}$  sont les unions finies ou infinies d'ouverts de la forme  $\square U$ .)

Considérons par exemple l'espace  $X$  formé des trois éléments 1, 2, et  $\top$ , avec  $\top$  l'élément le plus grand, 1 et 2 étant incomparables. Équipons  $X$  de sa topologie de Scott, dont les ouverts sont juste les ensembles clos par le haut :  $\emptyset, \{\top\}, \{1, \top\}, \{2, \top\}$ , et  $\{1, 2, \top\}$ . Ce sont aussi les compacts saturés de  $X$ . Posons  $U_1 = \{1, \top\}, U_2 = \{2, \top\}$ , et considérons  $[\square U_1 \cup \square U_2 > r]$ .

Les probabilités  $\nu$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  sont toutes simples, donc de la forme

$$a_\top \delta_{\{\top\}} + a_{1\top} \delta_{\{1,\top\}} + a_{2\top} \delta_{\{2,\top\}} + a_{12\top} \delta_{\{1,2,\top\}}$$

Elles sont donc caractérisées de façon unique par les quadruplets  $(a_\top, a_{1\top}, a_{2\top}, a_{12\top})$  de réels positifs ou nuls, avec  $a_\top + a_{1\top} + a_{2\top} + a_{12\top} = 1$ . On peut représenter géométriquement ces probabilités comme l'espace des points de coordonnées  $(a_\top, a_{1\top}, a_{2\top})$  positives de somme au plus 1, en laissant implicite  $a_{12\top} = 1 - a_\top - a_{1\top} - a_{2\top}$ , voir la figure 5.1.

Puisque  $\square U_1 \cup \square U_2 = \{\{\top\}, \{1, \top\}, \{2, \top\}\}$ , l'ouvert  $\mathcal{U} = [\square U_1 \cup \square U_2 > 1/2]$  correspond à l'ensemble des triplets comme ci-dessus tels que

$$a_\top + a_{1\top} + a_{2\top} > \frac{1}{2}$$

Ceci est représenté en figure 5.2, où le côté gauche est grisé pour signifier que la face de gauche est exclue du rhomboèdre.

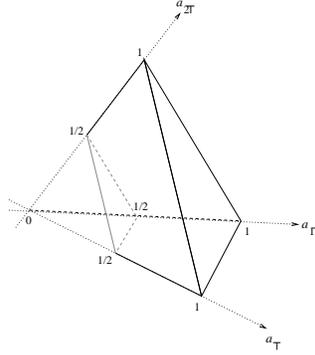


FIG. 5.2 – L'ouvert  $[\square U_1 \cup \square U_2 > 1/2]$

D'autre part, les ouverts de la forme  $[\square U > r']$  sont ceux caractérisés par les inégalités :

$$\begin{aligned}
 U = \emptyset & & 0 > r' \\
 U = \{\top\} & & a_{\top} > r' \\
 U = \{1, \top\} & & a_{\top} + a_{1\top} > r' \\
 U = \{2, \top\} & & a_{\top} + a_{2\top} > r' \\
 U = \{1, 2, \top\} & & 1 > r'
 \end{aligned}$$

la première et la dernière définissant, selon la valeur de  $r'$ , soit  $\emptyset$  soit  $X$ . Posons  $U_3 = \{\top\}$ . Les ouverts de la topologie faible sur  $\mathbf{Cd}_1(X)$ , vus au travers de l'isomorphisme d'ordre avec  $\mathbf{V}_1(\mathcal{Q}(X))$ , sont donc les unions d'ouverts de la forme

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3} &= [\square U_1 > r_1] \cap [\square U_2 > r_2] \cap [\square U_3 > r_3] \\
 &= \{(a_{\top}, a_{1\top}, a_{2\top}) \in [0, 1]^3 \mid a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} \leq 1, a_{\top} + a_{1\top} > r_1, a_{\top} + a_{2\top} > r_2, a_{\top} > r_3\}
 \end{aligned}$$

Regardons sous quelles conditions  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3} \subseteq \mathfrak{U}$ . Si  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$ , c'est clair. Sinon, considérons le point  $\nu = (1/2 - \epsilon, 0, 0)$ , où  $\epsilon > 0$  est suffisamment petit, de sorte que  $1/2 - \epsilon > \max(r_1, r_2, r_3)$ . Alors  $\nu$  est dans  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3}$ , mais pas dans  $\mathfrak{U}$ . Donc  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3} \subseteq \mathfrak{U}$  si et seulement si  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$ .

Considérons maintenant le point  $\nu = (1/6 + \epsilon, 1/6 + \epsilon, 1/6 + \epsilon)$  avec  $\epsilon > 0$  de nouveau suffisamment petit ; ici nous demanderons  $\epsilon \leq 1/12$ . Clairement  $\nu$  est dans  $\mathfrak{U}$ . Mais  $\nu$  n'est dans aucun  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3}$  avec  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$ . Il s'ensuit que  $\mathfrak{U}$  n'est pas l'union d'aucune famille d'ouverts  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3}$  inclus dans  $\mathfrak{U}$ .

La topologie faible sur  $\mathbf{Cd}_1(X)$  est donc strictement moins fine que celle obtenue via l'isomorphisme d'ordre avec  $\mathbf{V}_1(\mathcal{Q}(X))$ . Cette dernière étant la topologie de Scott sur  $\mathbf{Cd}_1(X)$ , et  $X = \{1, 2, \top\}$  étant clairement stablement compact, on obtient le résultat négatif suivant.

**Fait 5.6.1** *La topologie faible sur  $\mathbf{Cd}_1(X)$  est en général strictement moins fine que la topologie de Scott sur  $\mathbf{Cd}_1(X)$ , même lorsque  $X$  est contraint à être stablement compact, et en fait fini.*

Avec  $X = \{1, 2, \top\}$  comme ci-dessus,  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  doit être identifié à un ensemble de quadruplets  $(a_{\top}, a_{1\top}, a_{2\top}, a_{12\top})$  avec  $a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} + a_{12\top} \leq 1$ , et non plus de triplets. Il y a maintenant quatre formes d'ouverts  $[\square U > r']$  non triviales et non plus trois. Posons donc

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\top\} \\ U_2 &= \{1, \top\} \\ U_3 &= \{2, \top\} \\ U_4 &= \{1, 2, \top\} \end{aligned}$$

Définissons aussi  $\mathcal{U}$  comme étant l'ouvert  $[\square U_2 \cup \square U_3 > 1/2]$ , c'est-à-dire l'ensemble des quadruplets tels que  $a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} > 1/2$ , et :

$$\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4} = [\square U_1 > r_1] \cap [\square U_2 > r_2] \cap [\square U_3 > r_3] \cap [\square U_4 > r_4]$$

que l'on identifie à l'ensemble des quadruplets  $(a_{\top}, a_{1\top}, a_{2\top}, a_{12\top})$  avec :

$$\begin{aligned} a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} + a_{12\top} &\leq 1 \\ a_{\top} &> r_1 \\ a_{\top} + a_{1\top} &> r_2 \\ a_{\top} + a_{2\top} &> r_3 \\ a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} + a_{12\top} &> r_4 \end{aligned}$$

Ici,  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4} \subseteq \mathcal{U}$  si et seulement si  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$ , ou  $r_4 \geq 1$ . En effet, si  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$ , clairement tout point tel que  $a_{\top} > r_1$ ,  $a_{\top} + a_{1\top} > r_2$ , et  $a_{\top} + a_{2\top} > r_3$  est tel que  $a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} > 1/2$ . Et si  $r_4 \geq 1$ , les inégalités  $a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} + a_{12\top} > r_4$  et  $a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} + a_{12\top} \leq 1$  se contredisent, dont  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$  est vide, donc inclus dans  $\mathcal{U}$ . Réciproquement, supposons  $r_1 < 1/2$ ,  $r_2 < 1/2$ ,  $r_3 < 1/2$ , et  $r_4 < 1$ , et montrons qu'alors  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$  n'est pas inclus dans  $\mathcal{U}$  : considérons le point  $(1/2 - \epsilon, 0, 0, r_4 - 1/2 + 2\epsilon)$ , avec  $\epsilon$  suffisamment petit, c'est-à-dire de sorte que  $1/2 - \epsilon > r_1, r_2, r_3$  et  $r_4 + \epsilon \leq 1$ . Ce point est alors dans  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$ , mais pas dans  $\mathcal{U}$ .

Considérons maintenant le point  $(1/6 + \epsilon, 1/6 + \epsilon, 1/6 + \epsilon, 0)$  avec  $\epsilon > 0$  suffisamment petit ( $\epsilon \leq 1/12$ ). De nouveau, ce point est dans  $\mathcal{U}$ , et dans aucun  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$  tel que  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$  ou  $r_4 \geq 1$ . Donc  $\mathcal{U}$  n'est pas l'union des  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$  qu'il contient. On en déduit de façon similaire :

**Fait 5.6.2** *La topologie faible sur  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  est en général strictement moins fine que la topologie de Scott sur  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$ , même lorsque  $X$  est contraint à être stablement compact, et en fait fini.*

L'inégalité  $a_{\top} + a_{1\top} + a_{2\top} + a_{12\top} \leq 1$  ne joue qu'un rôle mineur dans l'argument ci-dessus. Dans  $\mathbf{Cd}(X)$ , définissons  $U_1, U_2, U_3, U_4, \mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$  et  $\mathcal{U}$  comme ci-dessus. Alors  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4} \subseteq \mathcal{U}$  si et seulement si  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$ . De nouveau, le point  $(1/6 + \epsilon, 1/6 + \epsilon, 1/6 + \epsilon, 0)$  avec  $\epsilon > 0$  suffisamment petit ( $\epsilon \leq 1/12$ ) est dans  $\mathcal{U}$ , et dans aucun  $\mathfrak{U}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$  tel que  $r_1 \geq 1/2$  ou  $r_2 \geq 1/2$  ou  $r_3 \geq 1/2$ . On en conclut ainsi :

**Fait 5.6.3** *La topologie faible sur  $\mathbf{Cd}(X)$  est en général strictement moins fine que la topologie de Scott sur  $\mathbf{Cd}(X)$ , même lorsque  $X$  est contraint à être stablement compact, et en fait fini.*

Ceci est remarquable, car le théorème 4.5.11 énonce en particulier :

**Fait 5.6.4** *Lorsque  $X$  est stablement localement compact, l'espace  $\mathbf{Cd}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  des crédibilités continues sous-normalisées est stablement compact.*

*Lorsque  $X$  est stablement compact, l'espace  $\mathbf{Cd}_{1 \text{ wk}}(X)$  des crédibilités continues normalisées est stablement compact.*

En effet, tout espace stablement localement compact est stablement localement relativement compact.

On a donc, par le fait 5.6.4 et le corollaire 5.5.11, *au moins deux* topologies distinctes en général sur les espaces de crédibilités  $\mathbf{Cd}_1(X)$ , resp.  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$ , qui sont stablement compactes, lorsque  $X$  est stablement compact, resp. stablement localement compact. Deux plus, ces deux topologies ont le même ordre de spécialisation  $\leq$ .

D'autre part, et malgré le fait que les topologies faible et de Scott ne coïncident pas en général, le plongement  $Q \mapsto u_Q$  de  $\mathcal{Q}(X)$  dans  $\mathbf{Cd}(X)$  (proposition 5.5.7) définit aussi un plongement dans l'espace  $\mathbf{Cd}_{\text{wk}}(X)$  des crédibilités continues sur  $X$ , avec la topologie faible.

**Proposition 5.6.5** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. La fonction de  $\mathcal{Q}(X)$  dans  $\mathbf{Cd}_{\text{wk}}(X)$ , resp.  $\mathbf{Cd}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , resp.  $\mathbf{Cd}_{1 \text{ wk}}(X)$ , qui à  $Q$  associe  $u_Q$  est un plongement d'espaces topologiques.*

*Démonstration.* Notons temporairement  $\eta$  cette fonction. Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , pour tout réel  $r$ ,  $\eta^{-1}[U > r]$  vaut  $X$  si  $r < 0$ ,  $\emptyset$  si  $r \geq 1$ ,  $\square U$  sinon. Donc  $\eta$  est continue. Réciproquement, par le corollaire 3.3.6, tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{Q}(X)$  est une union d'ouverts de la forme  $\square U$ . Or l'image de  $\square U$  par  $\eta$  est l'intersection de l'image  $A$  de  $\eta$  avec  $[U > 1/2]$ , et est donc ouvert dans  $A$ . Comme l'image d'une union est l'union des images, l'image de tout ouvert de  $\mathcal{Q}(X)$  par  $\eta$  est ouvert dans  $A$ .  $\square$

## 5.7 Crédibilités produits

Nous avons vu à la section 4.6 que, si l'on dispose d'un théorème de Fubini pour les produits de valuations continues, le cas des jeux continus est plus problématique. Nous examinons ici le cas de produits de crédibilités continues.

Nous avons déjà vu qu'il n'existait pas en général de produit unique  $\nu \otimes \nu'$  de deux jeux continus  $\nu$  sur  $X$  et  $\nu'$  sur  $Y$ , c'est-à-dire de jeu sur  $X \times Y$  tel que  $(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et tout ouvert  $V$  de  $Y$  : les deux produits  $\times$  et  $\otimes$  sont des candidats à ce titre, qui ne coïncident pas en général. Le contre-exemple de l'exercice 4.9 montre qu'il n'y a aucun mieux à espérer dans le monde plus restreint des crédibilités :  $\nu$  y était en effet un jeu d'unanimité  $u_X$ , et  $\nu'$  y était une valuation simple.

On peut raffiner cette analyse, et explorer les produits possibles de deux jeux d'unanimité  $\nu = u_Q$  et  $\nu' = u_{Q'}$ . Les crédibilités simples de la forme  $u_Q$ , où  $Q$  est un compact saturé de

$X \times Y$ , sont des candidats naturels pour un produit  $\nu \otimes \nu'$ . Rappelons que  $\pi_1 A$  est défini comme  $\{x | (x, y) \in A\}$ , et  $\pi_2 A = \{y | (x, y) \in A\}$ .

**Lemme 5.7.1** *La crédibilité  $u_Q$  sur  $X \times Y$  est un produit de  $u_Q$  et de  $u_{Q'}$  si et seulement si  $\pi_1 Q = Q$  et  $\pi_2 Q = Q'$ .*

*Démonstration.* L'équation (3.2) est valide, pour  $\nu \otimes \nu' = u_Q$ , si et seulement si pour tous ouverts  $U, V, Q \subseteq U \times V$  si et seulement si  $Q \subseteq U$  et  $Q' \subseteq V$ . Comme  $Q$  est saturé,  $Q$  est l'intersection de la famille filtrante  $(U_i)_{i \in I}$  des ouverts qui le contiennent, de même  $Q'$  est l'intersection de la famille filtrante  $(V_j)_{j \in J}$  des ouverts qui le contiennent. Si l'équation (3.2) est valide, alors  $Q \subseteq U_i \times V_j$  pour tous  $i \in I, j \in J$ , donc  $Q \subseteq \bigcap_{i \in I, j \in J} U_i \times V_j = Q \times Q'$ . En particulier,  $\pi_1 Q \subseteq Q$  et  $\pi_2 Q \subseteq Q'$ .

Il est facile de voir que  $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$  et  $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$  sont continues, donc  $\pi_1 Q$  et  $\pi_2 Q$  sont compacts. De plus, ils sont saturés : si  $x \in \pi_1 Q$  et  $x \leq x'$ , alors il existe  $(x, y) \in Q$  et comme  $Q$  est saturé,  $(x', y) \in Q$ , donc  $x' \in \pi_1 Q$ ; de même pour  $\pi_2 Q$ . Comme  $\pi_1 Q$  est saturé, si  $\pi_1 Q$  était strictement inclus dans  $Q$ , il existerait donc un ouvert  $U$  contenant  $\pi_1 Q$  mais pas  $Q$ . Alors  $U \times Y$  contiendrait  $Q$ , donc  $u_Q(U \times Y) = 1$ , mais  $u_Q(U).u_{Q'}(Y) = 0$ . Donc  $\pi_1 Q = Q$ . De façon similaire,  $\pi_2 Q = Q'$ .

Réciproquement, supposons  $\pi_1 Q = Q$  et  $\pi_2 Q = Q'$ . Alors, si  $u_Q(U \times V) = 1$  alors  $Q \subseteq U \times V$ , donc  $Q = \pi_1 Q \subseteq U$  et  $Q' = \pi_2 Q \subseteq V$ , donc  $u_Q(U).u_{Q'}(V) = 1$ . Inversement, si  $u_Q(U).u_{Q'}(V) = 1$ , alors  $Q \subseteq U$  et  $Q' \subseteq V$ , donc tout  $(x, y) \in Q$  est tel que  $x \in U$  et  $y \in V$ , donc  $Q \subseteq U \times V$ , d'où  $u_Q(U \times V) = 1$ .  $\square$

En conséquence, si les jeux produits ne sont pas en général uniques, les *crédibilités* qui sont aussi des produits de  $u_Q$  et  $u_{Q'}$  non plus. Dans le cas d'une topologie discrète, les compacts saturés étant les ensembles finis, les  $Q$  possibles sont donnés comme les ensembles de points dans le plan  $X \times Y$  tel que toute abscisse est l'abscisse d'au moins un point de  $Q$ , et toute ordonnée est l'ordonnée d'au moins un point de  $Q$ ; voir la figure 5.3 pour un exemple. Ceci est analogue à la figure 3.2.

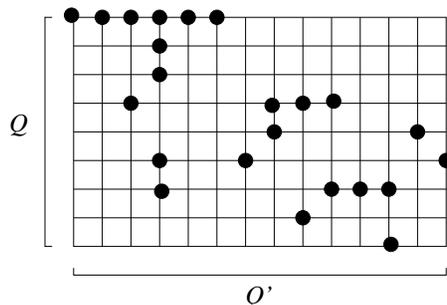


FIG. 5.3 – Les  $Q$  du lemme 5.7.1

Notons en particulier que si un produit de  $u_Q$  et  $u_{Q'}$  est naturellement  $u_{Q \times Q'}$  (rappelons que  $Q \times Q'$  est compact, par le théorème de Tychonoff), il est en général loin d'être le seul.

▷ **Exercice 5.3**

Montrer que  $u_Q \times u_{Q'} = u_Q \times u_{Q'} = u_{Q \times Q'}$ .

Le théorème de Fubini pour  $\mathbf{u}_Q \otimes \mathbf{u}_{Q'}$  prendrait la forme suivante, en utilisant la proposition 4.2.2 :  $\inf_{x \in Q} \inf_{y \in Q'} f(x, y) = \inf_{(x, y) \in Q} f(x, y) = \inf_{y \in Q'} \inf_{x \in Q} f(x, y)$ . Ceci n'est clairement pas vérifié pour toutes les fonctions  $f$  et tous les  $Q$  donnés par le lemme 5.7.1. Cependant, il est clair que ceci est vrai lorsque  $Q = Q \times Q'$ , pour toutes les fonctions continues  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ .

Bauer remarque que, dans un cadre légèrement différent (le cas où  $X$  et  $Y$  sont deux espaces réels de dimension finie, munis de la tribu borélienne construite sur la topologie métrique usuelle) on peut toujours définir une unique crédibilité produit de deux crédibilités, qui de plus vérifie le théorème de Fubini (4.3) pour toutes les fonctions  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont comonotones (Bauer, 2003, théorème 17). Nous avons déjà vu que l'on pouvait définir deux produits  $\times$  et  $\bowtie$  de jeux, qui vérifiaient cette dernière propriété : c'est la proposition 4.6.10. En revanche, il n'y a aucune raison que  $\nu \times \nu'$  ou  $\nu \bowtie \nu'$  soient des crédibilités, même lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont des crédibilités continues.

Définissons donc un nouveau produit, spécifiquement étudié pour le cas des crédibilités continues. Nous démontrerons qu'il vérifie encore un théorème de Fubini pour les fonctions comonotones, à la Bauer, c'est-à-dire un analogue de la proposition 4.6.10.

Une propriété fondamentale des fonctions comonotones en l'un ou l'autre argument est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 5.7.2** *Soit  $f$  une fonction de  $X \times Y$  dans  $\mathbb{R}$ .*

*Si  $f$  est continue et comonotone en son second argument et  $Q'$  est un compact de  $Y$ , il existe  $y_{Q'} \in Q'$  tel que  $f(x, y_{Q'}) = \min_{y \in Q'} f(x, y)$  pour tout  $x \in X$ .*

*Si  $f$  est continue et comonotone en son premier argument et  $Q$  est un compact de  $X$ , il existe  $x_Q \in Q$  tel que  $f(x_Q, y) = \min_{x \in Q} f(x, y)$  pour tout  $y \in Y$ .*

*Démonstration.* Montrons la première affirmation, la seconde étant symétrique.

Pour tout  $x \in X$ , soit  $F_x = \{y \in Q' \mid f(x, y) = \min_{y \in Q'} f(x, y)\}$ . Comme la fonction qui à  $y$  associe  $f(x, y)$  est continue,  $F_x$  est fermé. De plus,  $F_x$  est non vide.

Lorsque  $x, x' \in X$ ,  $F_x \subseteq F_{x'}$  ou bien  $F_{x'} \subseteq F_x$ . Sinon, il existerait  $y \in F_x \setminus F_{x'}$  et  $y' \in F_{x'} \setminus F_x$ , c'est-à-dire  $f(x, y) = \min_{y \in Q'} f(x, y)$ ,  $f(x', y) > \min_{y \in Q'} f(x', y)$ ,  $f(x', y') = \min_{y \in Q'} f(x', y)$ ,  $f(x, y') > \min_{y \in Q'} f(x, y)$ . Ceci impliquerait  $f(x', y) > f(x', y')$  et  $f(x, y) < f(x, y')$ , contredisant le fait que  $f$  est comonotone en son second argument. Donc la famille  $(F_x)_{x \in X}$  est totalement ordonnée, en particulier filtrante.

Si  $\bigcap_{x \in Q} F_x = \emptyset$ , alors  $(F_x)_{x \in X}$  serait une famille filtrante de fermés qui n'intersecte pas le compact  $Q'$ . Il existerait donc  $x \in X$  tel que  $F_x$  n'intersecte pas  $Q'$ . Comme  $F_x \subseteq Q'$  par définition, ceci impliquerait que  $F_x = \emptyset$ , ce qui est impossible.

Donc  $\bigcap_{x \in Q} F_x \neq \emptyset$ . On définit  $y_{Q'}$  comme un élément quelconque de  $\bigcap_{x \in Q} F_x$ . □

**Définition 5.7.3** *Soient  $\nu = \sum_{Q \in A} a_Q \mathbf{u}_Q$  et  $\nu' = \sum_{Q' \in B} b_{Q'} \mathbf{u}_{Q'}$  deux crédibilités simples, sur  $X$  et sur  $Y$  respectivement. Posons  $\nu \otimes \nu' = \sum_{Q \in A, Q' \in B} a_Q b_{Q'} \mathbf{u}_{Q \times Q'}$ .*

**Lemme 5.7.4** *La crédibilité simple  $\nu \otimes \nu'$  de la définition 5.7.3 est une crédibilité produit, au sens où*

1.  $(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$  pour tous ouverts  $U$  de  $X$ ,  $V$  de  $Y$  ;

2. si  $f$  est comonotone en son second argument, ou si  $\nu'$  est une valuation simple,

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') = \int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x,y) d\nu d\nu'$$

3. si  $f$  est comonotone en son premier argument, ou si  $\nu$  est une valuation simple,

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') = \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu$$

*Démonstration.* Aucun compact  $Q \in A$  ou  $Q' \in B$  n'est vide, par définition. En conséquence,  $Q \times Q' \subseteq U \times V$  si et seulement si  $Q \subseteq U$  et  $Q' \subseteq V$ . Donc

$$\begin{aligned} (\nu \otimes \nu')(U \times V) &= \sum_{\substack{Q \in A \\ Q' \in B \\ Q \times Q' \subseteq U \times V}} a_Q b_{Q'} = \sum_{\substack{Q \in A, Q \subseteq U \\ Q' \in B, Q' \subseteq V}} a_Q b_{Q'} \\ &= \sum_{Q \in A, Q \subseteq U} a_Q \times \sum_{Q' \in B, Q' \subseteq V} b_{Q'} = \nu(U) \cdot \nu'(V) \end{aligned}$$

Montrons 2. Pour toute fonction continue bornée  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , par le corollaire 4.2.7,

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') &= \sum_{Q \in A, Q' \in B} a_Q b_{Q'} \inf_{(x,y) \in Q \times Q'} f(x,y) \\ &= \sum_{Q \in A, Q' \in B} a_Q b_{Q'} \min_{(x,y) \in Q \times Q'} f(x,y) \end{aligned}$$

puisque  $Q \times Q'$  étant compact et  $f$  étant continue, l'image  $f(Q \times Q')$  est compact, donc fermé et borné : donc la borne inférieure  $\inf_{(x,y) \in Q \times Q'} f(x,y)$  est atteinte. On en déduit

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') = \sum_{Q' \in B} b_{Q'} \sum_{Q \in A} a_Q \min_{x \in Q} \min_{y \in Q'} f(x,y)$$

Soit  $Q'$  un élément quelconque de  $B$ .

- Si  $\nu'$  est une valuation continue, alors  $u_{Q'} = \delta_{y'}$  pour un élément  $y'$  donné, donc  $Q' = \uparrow y'$ . Posons  $y_{Q'} = y'$ . Alors pour tout  $x \in X$ ,  $f(x, y_{Q'}) = \min_{y \in Q'} f(x, y)$ .
- Si  $f$  est comonotone en son second argument, il existe  $y_{Q'} \in Y$  tel que  $f(x, y_{Q'}) = \min_{y \in Q'} f(x, y)$  pour tout  $x \in Q$ , par le lemme 5.7.2.

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') &= \sum_{Q' \in B} b_{Q'} \sum_{Q \in A} a_Q \min_{x \in Q} f(x, y_{Q'}) \\ &= \sum_{Q' \in B} b_{Q'} \int_{x \in X} f(x, y_{Q'}) d\nu \end{aligned}$$

par le corollaire 4.2.7. Maintenant,  $y_{Q'} \in Q'$  et pour tout  $y \in Q'$ ,  $f(x, y_{Q'}) \leq f(x, y)$ , donc

$$\int_{x \in X} f(x, y_{Q'}) d\nu \leq \int_{x \in X} f(x, y) d\nu$$

par le lemme 4.1.2. Donc

$$\int_{x \in X} f(x, y_{Q'}) d\nu = \min_{y \in Q'} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \otimes \nu') &= \sum_{Q' \in B} b_{Q'} \min_{y \in Q'} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu \\ &= \int_{y \in B'} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu d\nu' \end{aligned}$$

par le corollaire 4.2.7 de nouveau. On a ainsi montré 2. Le point 3. se montre de façon similaire.

□

#### ▷ Exercice 5.4

Montrer que, malgré le résultat de l'exercice 5.3, et l'analogie entre le lemme 5.7.4 et les résultats donnés pour  $\times$  et  $\otimes$  aux propositions 4.6.7 et 4.6.10,  $\nu \times \nu'$ ,  $\nu \otimes \nu'$ , et  $\nu \otimes \nu'$  ne coïncident pas en général, lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont des crédibilités simples.

Nous avons suffisamment travaillé sur les produits de crédibilités simples pour donner la définition correcte de ce que nous appellerons le produit naturel de deux crédibilités continues générales. Il est facile de vérifier que, lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont des crédibilités simples, alors :

$$(\nu \otimes \nu')^* = (\_ \times \_)[\nu^* \otimes \nu'^*] \quad (5.12)$$

où  $(\_ \times \_)$  dénote la fonction produit cartésien de  $\mathcal{Q}(X) \times \mathcal{Q}(Y)$  vers  $\mathcal{Q}(X \times Y)$ , laquelle est clairement Scott-continue, et  $\otimes$  dans  $\nu^* \otimes \nu'^*$  dénote le produit de deux valuations continues, que nous avons déjà vu à la section 3.8 et à la section 4.6. En effet, lorsque  $\nu = \sum_{Q \in A} a_Q u_Q$  et  $\nu' = \sum_{Q' \in B} b_{Q'} u_{Q'}$ ,

$$\begin{aligned} (\nu \otimes \nu')^* &= \sum_{Q \in A, Q' \in B} a_Q b_{Q'} \delta_{Q \times Q'} \\ (\_ \times \_)[\nu^* \otimes \nu'^*] &= (\_ \times \_) \left[ \sum_{Q \in A} a_Q \delta_Q \otimes \sum_{Q' \in B} b_{Q'} \delta_{Q'} \right] = (\_ \times \_) \left[ \sum_{Q \in A, Q' \in B} a_Q b_{Q'} \delta_{(Q, Q')} \right] \\ &\quad \text{par le lemme 3.8.1} \\ &= \sum_{Q \in A, Q' \in B} a_Q b_{Q'} \delta_{Q \times Q'} \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que :

$$(\nu \otimes \nu')(W) = (\_ \times \_)[\nu^* \otimes \nu'^*](\square W)$$

pour tout ouvert  $W$  de  $X \times Y$ , en utilisant le théorème 5.4.8 appliqué à l'équation (5.12).

En général :

**Proposition 5.7.5** *Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  espaces bien filtrants et localement compacts,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un espace topologique, et  $g$  une fonction continue de  $\mathcal{Q}(X_1) \times \dots \times \mathcal{Q}(X_n)$  vers  $\mathcal{Q}(X)$ . Pour toutes crédibilités continues  $\nu_1$  sur  $X_1, \dots, \nu_n$  sur  $X_n$ , il existe une unique crédibilité continue  $\nu$  sur  $X$  telle que :*

$$\nu(W) = g[\nu_1^* \otimes \dots \otimes \nu_n^*](\square W)$$

pour tout ouvert  $W$  de  $X$ .

Lorsque  $g$  est la fonction produit cartésien de  $\mathcal{Q}(X_1) \times \dots \times \mathcal{Q}(X_n)$  vers  $\mathcal{Q}(X_1 \times \dots \times X_n)$ , on appelle  $\nu$  le produit naturel des crédibilités continues  $\nu_1, \dots, \nu_n$ , et on le note  $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ .

*Démonstration.* Clairement,  $\nu$  est définie de façon unique. Par le théorème 5.4.8,  $\nu_1^*, \dots, \nu_n^*$  sont bien définies, et sont des valuations continues. Alors  $\nu_1^* \otimes \dots \otimes \nu_n^*$  est une valuation continue, donc  $g[\nu_1^* \otimes \dots \otimes \nu_n^*]$  aussi, par le lemme 4.2.9. La fonction qui à  $W$  associe  $g[\nu_1^* \otimes \dots \otimes \nu_n^*](\square W)$  est alors une crédibilité continue, par la proposition 5.4.4.  $\square$

Le produit naturel est bien un produit :

**Lemme 5.7.6** *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces bien filtrants et localement compacts, et  $\nu$  et  $\nu'$  deux crédibilités continues, sur  $X$  et sur  $Y$  respectivement. Alors le produit naturel  $\nu \otimes \nu'$  vérifie :*

$$(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$$

pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (\nu \otimes \nu')(U \times V) &= (\_ \times \_)[\nu^* \otimes \nu'^*](\square(U \times V)) \\ &= (\nu^* \otimes \nu'^*)\{(Q_1, Q_2) \in \mathcal{Q}(X_1) \times \mathcal{Q}(X_2) \mid Q_1 \times Q_2 \subseteq U \times V\} \\ &= (\nu^* \otimes \nu'^*)(\square U \times \square V) \\ &= \nu^*(\square U) \cdot \nu'^*(\square V) = \nu(U) \cdot \nu'(V) \end{aligned}$$

$\square$

On en déduit que, lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont deux valuations continues, alors le produit naturel de  $\nu$  et  $\nu'$  vues en tant que crédibilités continues est leur produit  $\nu \otimes \nu'$  en tant que valuations, par unicité de la valuation produit (section 3.8). La notation  $\nu \otimes \nu'$  est donc non ambiguë.

Pour démontrer le théorème 5.7.9 ci-dessous, nous aurons besoin de quelques lemmes auxiliaires. Rappelons la fonction  $\eta_{\mathcal{Q}} : X \rightarrow \mathcal{Q}(X)$  étudiée au lemme 3.9.1, qui à  $x$  associe  $\uparrow x$ .

**Lemme 5.7.7** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact,  $\nu$  une valuation continue sur  $X$ , alors  $\nu^* = \eta_{\mathcal{Q}}[\nu]$ . Pour toute fonction  $g$  continue et bornée de  $\mathcal{Q}(X)$  vers  $\mathbb{R}$ ,*

$$\int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} g(Q) d\nu^* = \int_{x \in X} g(\uparrow x) d\nu$$

Il est à noter que ceci ne fonctionne pas si  $\nu$  est une crédibilité continue en général. Par exemple, avec  $X = \{1, 2\}$  muni de la topologie discrète, et  $\nu = u_X$ , le côté gauche de l'égalité ci-dessus vaudrait  $g(X)$ , le côté droit  $\min(g(\uparrow 1), g(\uparrow 2))$ . Il suffit de prendre  $g(\{1\}) = g(\{2\}) = 1$ ,  $g(\{1, 2\}) = 0$  pour obtenir un contre-exemple. L'hypothèse selon laquelle  $\nu$  est une valuation continue est donc nécessaire.

*Démonstration.* On note que  $\eta_Q[\nu]$  est une valuation continue sur  $\mathcal{Q}(X)$  par le lemme 4.2.9. De plus, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\eta_Q[\nu](\square U) = \nu\{x \in X \mid \uparrow x \in \square U\} = \nu(U)$ . Par unicité de  $\nu^*$  (lemme 5.4.6),  $\eta_Q[\nu] = \nu^*$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} g(Q) d\nu^* &= \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} g(Q) d\eta_Q[\nu] \\ &= \int_{x \in X} g(\uparrow x) d\nu \end{aligned}$$

par la proposition 4.2.11. □

**Proposition 5.7.8** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f$  une fonction continue bornée de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ .

Lorsque  $f$  est comonotone en son premier argument, pour tout jeu continu  $\nu'$  sur  $Y$ , pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$ ,

$$\int_{y \in Y} \min_{x \in Q} f(x, y) d\nu' = \min_{x \in Q} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu'$$

Lorsque  $f$  est comonotone en son second argument, pour tout jeu continu  $\nu$  sur  $X$ , pour tout compact saturé  $Q'$  de  $Y$ ,

$$\int_{x \in X} \min_{y \in Q'} f(x, y) d\nu = \min_{y \in Q'} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu$$

*Démonstration.* Démontrons la première partie, la seconde étant similaire. D'abord, on note que la fonction qui à  $y \in Y$  associe  $\min_{x \in Q} f(x, y)$  est continue : par le lemme 5.7.2, c'est la fonction qui à  $y$  associe  $f(x_Q, y)$ . On note maintenant que :

$$\int_{y \in Y} f(x_Q, y) d\nu' = \min_{x \in Q} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' \quad (5.13)$$

En effet, le côté gauche est trivialement supérieur ou égal au côté droit, et l'inégalité réciproque vient du fait que  $f(x, y) \leq f(x_Q, y)$  pour tout  $y$ , en utilisant le lemme 4.1.2. On a donc :

$$\int_{y \in Y} \min_{x \in Q} f(x, y) d\nu' = \int_{y \in Y} f(x_Q, y) d\nu' = \min_{x \in Q} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu'$$

□

**Théorème 5.7.9 (Bauer-Fubini)** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces bien filtrants et localement compacts. Pour toutes crédibilités continues  $\nu$  sur  $X$  et  $\nu'$  sur  $Y$ , le produit naturel  $\nu \otimes \nu'$  sur  $X \times Y$  est tel que :

1. si  $f$  est comonotone en son premier argument, ou bien si  $\nu$  est une valuation continue,

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') = \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu$$

2. si  $f$  est comonotone en son second argument, ou bien si  $\nu'$  est une valuation continue,

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') = \int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x,y) d\nu d\nu'$$

*Démonstration.* Démontrons la première partie, la deuxième étant entièrement analogue. On a :

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') &= \int_{Q \in \mathcal{Q}(X \times Y)} \min_{(x,y) \in Q} f(x,y) d(\nu \otimes \nu')^* \\ &\quad \text{par le théorème 5.4.8, la proposition 5.4.4, et la définition 5.4.1} \\ &= \int_{Q \in \mathcal{Q}(X \times Y)} \min_{(x,y) \in Q} f(x,y) d(- \times -)[\nu^* \otimes \nu'^*] \quad \text{par définition} \\ &= \int_{(Q,Q') \in \mathcal{Q}(X) \times \mathcal{Q}(Y)} \min_{x \in Q, y \in Q'} f(x,y) d(\nu^* \otimes \nu'^*) \quad \text{par la proposition 4.2.11} \\ &= \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} \int_{Q' \in \mathcal{Q}(Y)} \min_{x \in Q, y \in Q'} f(x,y) d\nu'^* d\nu^* \quad \text{par le théorème 4.6.2} \\ &= \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} \int_{y \in Y} \min_{x \in Q} f(x,y) d\nu' d\nu^* \end{aligned}$$

par le théorème 5.4.8, la proposition 5.4.4, et la définition 5.4.1 de nouveau.

Lorsque  $\nu$  est une valuation continue, on applique le lemme 5.7.7 pour continuer le calcul :

$$\begin{aligned} \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} \int_{y \in Y} \min_{x \in Q} f(x,y) d\nu' d\nu^* &= \int_{x_1 \in X} \int_{y \in Y} \min_{x \in \uparrow x_1} f(x,y) d\nu' d\nu \\ &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f$  est comonotone en son premier argument,

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) d(\nu \otimes \nu') &= \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} \int_{y \in Y} \min_{x \in Q} f(x,y) d\nu' d\nu^* \\ &= \int_{Q \in \mathcal{Q}(X)} \min_{x \in Q} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu^* \quad \text{par la proposition 5.7.8} \\ &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x,y) d\nu' d\nu \end{aligned}$$

par le théorème 5.4.8, la proposition 5.4.4, et la définition 5.4.1 de nouveau.  $\square$



# Chapitre 6

## Plausibilités : P joue, puis C coopère

Alors que les crédibilités modélisent un coup d'un joueur probabiliste suivi d'un coup d'un joueur démoniaquement non déterministe, les plausibilités remplacent ce dernier par un joueur angéliquement non déterministe. Nous développons donc dans ce chapitre l'analogie des résultats du chapitre 5.

### 6.1 Plausibilités simples

De façon symétrique aux jeux d'unanimité, pour tout  $A \subseteq X$ , nous appellerons la capacité  $\epsilon_A$  qui à tout ouvert  $U$  associe 1 si  $U \cap A \neq \emptyset$ , et 0 sinon, le *jeu d'exemple* sur  $A$ .

**Lemme 6.1.1** *Le jeu d'exemple  $\epsilon_A$  est une plausibilité.*

*Démonstration.* D'abord,  $\epsilon_A$  est monotone, car si  $U$  intersecte  $A$  et  $U \subseteq V$ , alors  $V$  intersecte aussi  $A$ . Montrons que  $\epsilon_A$  est totalement concave. Soit  $(U_i)_{i=1}^n$  une famille finie d'ouverts. Soit  $J$  la famille des indices  $i$  tels que  $U_i \cap A \neq \emptyset$ . Notons que  $\bigcup_{i \in I} U_i \cap A \neq \emptyset$  si et seulement si  $I \cap J \neq \emptyset$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \epsilon_A \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \cap J \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } J = \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

par le lemme 3.11.2. D'autre part, si  $\epsilon_A \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) = 1$  alors  $A$  intersecte chaque  $U_i$ , donc  $J = \{1, \dots, n\}$ , donc  $\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \epsilon_A \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right)$  vaut 1 aussi.  $\square$

Lorsque  $X$  est fini, il est inutile de refaire toute la théorie des plausibilités. En effet, dans le cas où  $X$  est fini, pour toute capacité  $\nu$ , on peut construire une capacité *duale*  $\nu^\perp$  définie par  $\nu^\perp(U) = \nu(X) - \nu(X \setminus U)$ . Si  $\nu$  est (resp. totalement) convexe,  $\nu^\perp$  est (resp. totalement) concave et réciproquement. De plus,  $\epsilon_A = \mathbf{u}_A^\perp$ , et ceci permet d'adapter tous les résultats sur les crédibilités aux plausibilités.

De plus, on a

$$\epsilon_A = \sum_{B \subseteq A, B \neq \emptyset} (-1)^{|B|+1} \mathbf{u}_B$$

dans le cas où  $X$  est un ensemble fini, ce qu'on peut vérifier par calcul direct. Dans le cadre topologique général que nous considérerons, il y a aura une notion de dual d'une capacité, que nous développerons, mais qui sera plus complexe. L'expression de  $\epsilon_A$  en fonction des  $\mathbf{u}_B$ ,  $B \subseteq A$ ,  $B \neq \emptyset$  ci-dessus n'aura pas de sens.

Regardons, comme en section 5.1, à quelles conditions les jeux d'exemple sont continus. La réponse est ici extrêmement simple.

**Proposition 6.1.2** *Le jeu d'exemple  $\epsilon_A$  est toujours continu.*

*Démonstration.* Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'ouverts :  $\epsilon_A(\bigcup_{i \in I} U_i)$  vaut 1 si et seulement si  $A$  intersecte  $\bigcup_{i \in I} U_i$ , si et seulement si  $A$  intersecte l'un des  $U_i$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\sup_{i \in I} \epsilon_A(U_i) = 1$ .  $\square$

L'analogie de la proposition 5.1.2 est donc lui aussi très simple :

**Proposition 6.1.3** *Le jeu  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_{A_i}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est continu.*

On note aussi que  $\epsilon_{\downarrow A} = \epsilon_A$  :  $\epsilon_{\downarrow A}(U) = 1$  si et seulement si  $U$  intersecte  $\downarrow A$ , mais comme  $U$  est clos par le haut, ceci est équivalent à demander que  $U$  intersecte  $A$ . On peut aller plus loin :

**Lemme 6.1.4** *Pour toute partie  $A$  de  $X$ ,  $\epsilon_A = \epsilon_{cl(A)}$ .*

*Démonstration.* Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\epsilon_A(U) = 0$  si et seulement si  $A \cap U = \emptyset$ , si et seulement si  $A$  est un sous-ensemble du fermé  $X \setminus U$ . Ceci est équivalent à  $cl(A) \subseteq X \setminus U$  : si  $A \subseteq X \setminus U$ , le plus petit fermé contenant  $A$ , à savoir  $cl(A)$ , est ainsi inclus dans  $X \setminus U$  ; et la réciproque est évidente. Maintenant  $cl(A) \subseteq X \setminus U$  si et seulement si  $cl(A) \cap U = \emptyset$ , si et seulement si  $\epsilon_{cl(A)}(U) = 0$ .  $\square$

En général,  $\epsilon_F$ , avec  $F$  fermé, représentera un choix (angéliquement) non déterministe d'un élément  $x$  à l'intérieur de  $F$ .

On pourra de plus éviter de considérer le jeu  $\epsilon_\emptyset$ , qui est identiquement nul.

Ceci mène à la définition suivante.

**Définition 6.1.5 (Plausibilité simple)** *Une loi de plausibilité est dite simple si et seulement si elle s'écrit  $\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_{F_i}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}^+$ , et  $F_i$  est un fermé non vide pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

Toute plausibilité simple est continue. De plus, toute combinaison linéaire finie  $\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_{A_i}$  ( $a_i \in \mathbb{R}^+$ ) est une plausibilité simple, par le lemme 6.1.4.

Une plausibilité simple représente assez clairement la spécification d'un coup du joueur probabiliste  $P$  suivi d'un coup, non de l'adversaire, mais de l'assistant  $C$  :  $P$  choisit un ensemble clos par le bas  $B_i$  avec probabilité  $a_i$ , puis  $C$  opère un choix non déterministe angélique parmi  $B_i$ .

On a le pendant de la proposition 4.2.2 :

**Lemme 6.1.6** *Intégrer par rapport à un jeu d'exemple revient à calculer une borne supérieure :*

$$\oint_{x \in X} f(x) d\mathbf{e}_A = \sup_{x \in A} f(x)$$

*Démonstration.* Par l'équation (4.1),

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x) d\mathbf{e}_A &= \int_0^{+\infty} \mathbf{e}_A(f^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\mathbf{e}_A(f^{-1}]t, +\infty[) - \mathbf{e}_A(X)] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{e}_A(f^{-1}]t, +\infty[)(t) dt + \int_{-\infty}^0 [\mathbf{e}_A(f^{-1}]t, +\infty[) - 1] dt \end{aligned}$$

Or, si  $t \geq \sup_{x \in A} f(x)$ , c'est-à-dire si  $t \geq f(x)$  pour tout  $x \in A$ , alors  $f^{-1}]t, +\infty[ \cap A = \emptyset$ , donc  $\mathbf{e}_A(f^{-1}]t, +\infty[)(t) = 0$ . En revanche, si  $t < \sup_{x \in A} f(x)$ , il existe  $x \in A$  tel que  $t < f(x)$ , donc  $f^{-1}]t, +\infty[ \cap A \neq \emptyset$ , c'est-à-dire  $\mathbf{e}_A(f^{-1}]t, +\infty[)(t) = 1$ . Autrement dit,  $\mathbf{e}_A(f^{-1}]t, +\infty[)(t) = 1$  si et seulement si  $t < \sup_{x \in A} f(x)$ .

Si  $\sup_{x \in A} f(x) \geq 0$ , on a donc

$$\oint_{x \in X} f(x) d\mathbf{e}_A = \int_0^{\sup_{x \in A} f(x)} 1 dt + \int_{-\infty}^0 [1 - 1] dt = \sup_{x \in A} f(x)$$

Si  $\sup_{x \in A} f(x) < 0$ ,

$$\oint_{x \in X} f(x) d\mathbf{e}_A = \int_0^{+\infty} 0 dt + \int_{\sup_{x \in A} f(x)}^0 -1 dt = \sup_{x \in A} f(x)$$

D'où le résultat. □

Par la proposition 4.2.6, on en déduit donc

**Corollaire 6.1.7** *Si  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{A_i}$ , alors*

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \sup_{x \in A_i} f(x)$$

On aura aussi besoin du résultat suivant.

**Lemme 6.1.8** *Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de fermés non vides. Alors  $\mathbf{e}_{\bigcup_{i \in I} F_i} = \sup_{i \in I} \mathbf{e}_{F_i}$ .*

*Démonstration.* On a  $\mathbf{e}_{\bigcup_{i \in I} F_i}(U) = 1$  si et seulement si  $\bigcup_{i \in I} F_i \cap U \neq \emptyset$ , si et seulement s'il existe  $x \in U$  et  $i \in I$  tel que  $x \in F_i$ , si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $F_i \cap U \neq \emptyset$ , si et seulement si  $\mathbf{e}_{F_i}(U) = 1$  pour un  $i \in I$ . □

Nous notons finalement, avant de passer à la suite, que l'hémi-distance de Hutchinson, sur les jeux, correspond à celle de Hausdorff-Hoare sur  $\mathcal{H}(X)$ .

**Lemme 6.1.9** Pour tous  $F, F' \in \mathcal{H}(X)$ ,  $d_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}_F, \mathbf{e}_{F'}) = d_{\mathcal{J}\mathcal{C}}(F, F')$ .

*Démonstration.* On a d'abord :

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}_F, \mathbf{e}_{F'}) &= \sup_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1} d_{\mathbb{R}}(\sup_{x \in F} f(x), \sup_{x' \in F'} f(x')) \quad \text{par le corollaire 6.1.7} \\
&= \sup_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1} \max(\sup_{x \in F} f(x) + \inf_{x' \in F'} -f(x'), 0) \\
&= \sup_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1} \max(\sup_{x \in F} (f(x) + \inf_{x' \in F'} -f(x')), 0) \\
&= \sup_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1} \max(\sup_{x \in F} \inf_{x' \in F'} (f(x) - f(x')), 0) \\
&\leq \sup_{x \in F} \inf_{x' \in F'} d(x, x') \quad \text{puisque } f \text{ est 1-lipschitzienne} \\
&= d_{\mathcal{J}\mathcal{C}}(F, F')
\end{aligned}$$

Réciproquement, posons  $f(x) = d(x, F')$  : par le lemme 3.10.42,  $f$  est 1-lipschitzienne. De plus,  $\sup_{x \in F} f(x) = d_{\mathcal{J}\mathcal{C}}(F, F')$ ,  $\sup_{x' \in F'} f(x') = 0$ , donc  $d_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}_F, \mathbf{e}_{F'}) \geq d_{\mathbb{R}}(\sup_{x \in F} f(x), \sup_{x' \in F'} f(x')) = d_{\mathcal{J}\mathcal{C}}(F, F')$ .  $\square$

## 6.2 La dualité convexe-concave

La théorie des plausibilités semble plus complexe que celle des crédibilités. Pour illustrer la difficulté, on pourrait penser refaire toute la théorie des crédibilités, en remplaçant compacts saturés par fermés. Cependant, déjà, il semble déjà difficile de démontrer l'analogie du lemme 5.2.2, qui énoncerait que pour toutes plausibilités simples  $\sum_{F \in A} a_F \mathbf{e}_F$  et  $\sum_{F \in A} b_F \mathbf{e}_F$ , où  $A$  est un ensemble fini de fermés non vides de  $X$ , on a  $\sum_{F \in A} a_F \mathbf{e}_F \leq \sum_{F \in A} b_F \mathbf{e}_F$  si et seulement si, pour toute partie  $J$  close par le haut dans  $A$ ,

$$\sum_{F \in J} a_F \leq \sum_{F \in J} b_F$$

Dans le cas où  $X$  est stablement compact, on peut à la place ramener l'étude des plausibilités à celle des crédibilités. Ceci se fera par l'extension de la notion de capacité duale du cas fini au cadre topologique.

### 6.2.1 Le dual $\nu^\perp$ d'une capacité $\nu$

On aimerait définir  $\nu^\perp(U)$  comme  $\nu(X) - \nu(X \setminus U)$ , pour tout ouvert  $U$ . Mais  $X \setminus U$ , qui est fermé, n'est en général pas ouvert. En revanche, rappelons que  $X \setminus U$  est un compact saturé du dual de de Groot  $X^d$  de  $X$  (voir la section 2.3). Nous allons donc nous intéresser aux extensions de jeux à l'espace des compacts saturés d'un espace stablement localement compact  $X$ . Nous généralisons en ceci le résultat de Tix (1995, Satz 3.4), et suivons entièrement sa démonstration.

**Définition 6.2.1** Soit  $X$  un espace topologique,  $\nu$  une fonction de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$ . On définit une fonction  $\nu^\dagger$  qui à toute partie  $A$  de  $X$  associe

$$\nu^\dagger(A) = \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq A} \nu(U)$$

Nous regarderons  $\nu^\dagger$  comme étant réellement défini sur les compacts saturés  $Q$  ici. Nous aurons besoin de le définir sur les protocompacts à la section 9.4.

**Lemme 6.2.2** Soit  $X$  un espace localement compact, et  $\nu$  une fonction continue de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  — par exemple un jeu continu sur  $X$ . Alors on peut reconstruire  $\nu$  à partir de  $\nu^\dagger$ , par  $\nu(U) = \sup_Q \text{compact saturé } \subseteq U \nu^\dagger(Q)$ .

*Démonstration.* D'abord, si  $Q \subseteq U$ , alors  $\nu^\dagger(Q) = \inf_{V \text{ ouvert } \supseteq Q} \nu(V) \leq \nu(U)$ .

Donc  $\sup_Q \text{compact saturé } \subseteq U \nu^\dagger(Q) \leq \nu(U)$ .

Montrons l'inégalité réciproque. Pour ceci, observons déjà que pour tout compact saturé  $Q$  :  
 (\*)  $\nu(\overset{\circ}{Q}) \leq \nu^\dagger(Q)$ . En effet, pour tout ouvert  $U$  tel que  $Q \subseteq U$ ,  $\overset{\circ}{Q} \subseteq U$ , donc  $\nu(\overset{\circ}{Q}) \leq \nu(U)$  puisque  $\nu$ , étant continue, est monotone. D'où  $\nu(\overset{\circ}{Q}) \leq \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q} \nu(U) = \nu^\dagger(Q)$ .

Comme  $X$  est localement compact, pour tout  $x \in U$ , il existe un compact saturé  $Q_x$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q}_x \subseteq Q_x \subseteq U$ . Donc  $U = \bigcup_{x \in U} \overset{\circ}{Q}_x$ . Donc  $U$  est aussi l'union de la famille dirigée des  $\bigcup_{x \in E} \overset{\circ}{Q}_x$  lorsque  $E$  parcourt les parties finies de  $U$ . Comme  $\nu$  est continue,  $\nu(U) = \sup_{E \text{ fini } \subseteq U} \nu(\bigcup_{x \in E} \overset{\circ}{Q}_x)$ . Ceci est inférieur ou égal à  $\sup_{E \text{ fini } \subseteq U} \nu(\overbrace{\bigcup_{x \in E} Q_x}^{\circ})$  puisque  $\bigcup_{x \in E} \overset{\circ}{Q}_x \subseteq$

$\overbrace{\bigcup_{x \in E} Q_x}^{\circ}$  et  $\nu$  est monotone. Et à son tour, ceci est inférieur ou égal à  $\sup_Q \text{compact saturé } \subseteq U \nu(\overset{\circ}{Q})$ .

Finalement,  $\nu(\overset{\circ}{Q}) \leq \nu^\dagger(Q)$  par (\*), et l'on conclut.  $\square$

**Lemme 6.2.3** Soit  $X$  un espace topologique, et  $\nu$  une capacité sur  $X$ . Alors

1.  $\nu^\dagger$  est stricte :  $\nu^\dagger(\emptyset) = 0$ .
2.  $\nu^\dagger$  est monotone : si  $Q \subseteq Q'$  alors  $\nu^\dagger(Q) \leq \nu^\dagger(Q')$ .
3. Si de plus  $X$  est bien filtrant, alors  $\nu^\dagger$  est cocontinue sur les compacts saturés : si  $(Q_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de compacts saturés de  $X$ , alors  $\nu^\dagger(\bigcap_{i \in I} Q_i) = \inf_{i \in I} \nu^\dagger(Q_i)$ .

*Démonstration.* 1.  $\nu^\dagger(\emptyset) = \inf_{U \text{ ouvert}} \nu(U) = \nu(\emptyset) = 0$ .

2. Si  $Q \subseteq Q'$ , alors tout ouvert qui contient  $Q'$  contient aussi  $Q$ , donc  $\nu^\dagger(Q) \leq \nu^\dagger(Q')$  par définition.

3. Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de compacts saturés de  $X$ .

$$\begin{aligned} \nu^\dagger \left( \bigcap_{i \in I} Q_i \right) &= \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq \bigcap_{i \in I} Q_i} \nu(U) \\ &= \inf_{U \text{ ouvert} / \exists i \in I, Q_i \subseteq U} \nu(U) \quad \text{car } X \text{ est bien filtrant} \\ &= \inf_{i \in I} \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q_i} \nu(U) = \inf_{i \in I} \nu^\dagger(Q_i) \end{aligned}$$

□

**Proposition 6.2.4** Soit  $X$  un espace stablement localement compact, et  $\nu$  un jeu continu sur  $X$ . Alors :

1. Si  $\nu$  est convexe, alors  $\nu^\dagger$  est convexe :  $\nu^\dagger(Q_1 \cup Q_2) + \nu^\dagger(Q_1 \cap Q_2) \geq \nu^\dagger(Q_1) + \nu^\dagger(Q_2)$  pour tous compacts saturés  $Q_1, Q_2$ .
2. Si  $\nu$  est concave, alors  $\nu^\dagger$  est concave :  $\nu^\dagger(Q_1 \cup Q_2) + \nu^\dagger(Q_1 \cap Q_2) \leq \nu^\dagger(Q_1) + \nu^\dagger(Q_2)$  pour tous compacts saturés  $Q_1, Q_2$ .
3. Si  $\nu$  est modulaire, alors  $\nu^\dagger$  aussi :  $\nu^\dagger(Q_1 \cup Q_2) + \nu^\dagger(Q_1 \cap Q_2) = \nu^\dagger(Q_1) + \nu^\dagger(Q_2)$  pour tous compacts saturés  $Q_1, Q_2$ .
4. Si  $\nu$  est totalement convexe, alors  $\nu^\dagger$  est totalement convexe :

$$\nu^\dagger \left( \bigcup_{i=1}^n Q_i \right) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu^\dagger \left( \bigcap_{i \in I} Q_i \right)$$

5. Si  $\nu$  est totalement concave, alors  $\nu^\dagger$  est totalement concave :

$$\nu^\dagger \left( \bigcap_{i=1}^n Q_i \right) \leq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu^\dagger \left( \bigcup_{i \in I} Q_i \right)$$

*Démonstration.* 1, 2, 3. Pour tous compacts saturés  $Q_1$  et  $Q_2$ ,

$$\nu^\dagger(Q_1 \cup Q_2) + \nu^\dagger(Q_1 \cap Q_2) = \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \cup Q_2} \nu(U) + \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \cap Q_2} \nu(U)$$

Or les ouverts  $U$  contenant  $Q_1 \cup Q_2$  sont exactement les unions  $U_1 \cup U_2$  d'ouverts  $U_1 \supseteq Q_1$  et  $U_2 \supseteq Q_2$  : si  $U \supseteq Q_1 \cup Q_2$ , prendre  $U_1 = U_2 = U$  ; réciproquement, si  $U_1 \supseteq Q_1$  et  $U_2 \supseteq Q_2$ , alors  $U = U_1 \cup U_2$ . Donc

$$\inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \cup Q_2} \nu(U) = \inf_{\substack{U_1 \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \\ U_2 \text{ ouvert } \supseteq Q_2}} \nu(U_1 \cup U_2)$$

D'autre part, pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q_1 \cap Q_2$ ,  $U$  contient un ouvert  $U_1 \cap U_2$ , où  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ouverts contenant  $Q_1$  et  $Q_2$  respectivement, par le lemme 3.3.7. Réciproquement, pour tous ouverts  $U_1 \supseteq Q_1$  et  $U_2 \supseteq Q_2$ ,  $U_1 \cap U_2$  est un ouvert qui contient  $Q_1 \cap Q_2$ , donc

$$\inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \cap Q_2} \nu(U) = \inf_{\substack{U_1 \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \\ U_2 \text{ ouvert } \supseteq Q_2}} \nu(U_1 \cap U_2)$$

Donc

$$\begin{aligned} \nu^\dagger(Q_1 \cup Q_2) + \nu^\dagger(Q_1 \cap Q_2) &= \inf_{\substack{U_1 \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \\ U_2 \text{ ouvert } \supseteq Q_2}} \nu(U_1 \cup U_2) + \inf_{\substack{U_1 \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \\ U_2 \text{ ouvert } \supseteq Q_2}} \nu(U_1 \cap U_2) \\ &= \inf_{\substack{U_1 \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \\ U_2 \text{ ouvert } \supseteq Q_2}} (\nu(U_1 \cup U_2) + \nu(U_1 \cap U_2)) \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que les bornes inférieures sont prises sur des familles filtrantes de paires d'ouverts, l'addition étant Scott-cocontinue. La dernière quantité ci-dessus est supérieure ou égale (si  $\nu$  est convexe), inférieure ou égale (si  $\nu$  est concave), ou bien égale (si  $\nu$  est modulaire), à

$$\inf_{\substack{U_1 \text{ ouvert } \supseteq Q_1 \\ U_2 \text{ ouvert } \supseteq Q_2}} (\nu(U_1) + \nu(U_2)) = \inf_{U_1 \text{ ouvert } \supseteq Q_1} \nu(U_1) + \inf_{U_2 \text{ ouvert } \supseteq Q_2} \nu(U_2) = \nu^\dagger(Q_1) + \nu^\dagger(Q_2)$$

4. De façon similaire. Soit  $(Q_i)_{i=1}^n$  une famille finie de compacts saturés de  $X$ . Comme ci-dessus, les ouverts  $U$  contenant  $\bigcup_{i \in I} Q_i$ , pour toute partie  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$ , sont exactement les unions  $\bigcup_{i \in I} U_i$  d'ouverts  $U_i$  contenant  $Q_i$ , pour tout  $i \in I$ , donc

$$\inf_{U \text{ ouvert } \supseteq \bigcup_{i \in I} Q_i} \nu(U) = \inf_{\forall i \in I, U_i \text{ ouvert } \supseteq Q_i} \nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right)$$

En utilisant plusieurs fois le lemme 3.3.7, lorsque  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $I \neq \emptyset$ , tout ouvert  $U$  contenant  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  contient une intersection  $\bigcap_{i \in I} U_i$  d'ouverts  $U_i \supseteq Q_i$ ,  $i \in I$ . Réciproquement, si  $U_i \supseteq Q_i$  pour tout  $i \in I$ , alors  $U = \bigcap_{i \in I} U_i$  est un ouvert contenant  $\bigcap_{i \in I} Q_i$ , donc

$$\inf_{U \text{ ouvert } \supseteq \bigcap_{i \in I} Q_i} \nu(U) = \inf_{\forall i \in I, U_i \text{ ouvert } \supseteq Q_i} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right)$$

pour tout  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $I \neq \emptyset$ . Donc, si  $\nu$  est totalement convexe,

$$\begin{aligned}
& \nu \left( \bigcup_{i=1}^n Q_i \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ pair}}} \nu \left( \bigcap_{i \in I} Q_i \right) \\
&= \inf_{\substack{\forall i \in \{1, \dots, n\} \cdot U_i \\ \text{ouvert} \supseteq Q_i}} \nu \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ pair}}} \inf_{\forall i \in I \cdot U_i \text{ ouvert} \supseteq Q_i} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \\
&= \inf_{\substack{\forall i \in \{1, \dots, n\} \cdot U_i \\ \text{ouvert} \supseteq Q_i}} \left[ \nu \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ pair}}} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \right] \\
&\geq \inf_{\substack{\forall i \in \{1, \dots, n\} \cdot U_i \\ \text{ouvert} \supseteq Q_i}} \left[ \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ impair}}} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \right] \quad \text{par convexité totale} \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ impair}}} \inf_{\forall i \in I \cdot U_i \text{ ouvert} \supseteq Q_i} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ impair}}} \nu^\dagger \left( \bigcap_{i \in I} Q_i \right)
\end{aligned}$$

donc  $\nu^\dagger$  est totalement convexe. Le fait que si  $\nu$  est totalement concave alors  $\nu^\dagger$  aussi se démontre de façon exactement analogue.  $\square$

**Définition 6.2.5** Soit  $X$  un espace topologique. Pour toute capacité  $\nu$  sur  $X$ , définissons la fonction  $\nu^\perp$  sur l'espace des parties de  $X$  par :

$$\nu^\perp(X \setminus A) = \nu(X) - \nu^\dagger(A) = \nu(X) - \inf_{U \text{ ouvert} \supseteq A} \nu(U)$$

pour tout  $A \subseteq X$ .

**Théorème 6.2.6 (Dualité convexe-concave)** Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour tout jeu  $\nu$  sur  $X$ ,  $\nu^\perp$  est un jeu sur  $X^d$ . De plus,

1.  $\nu^\perp$  est continu ;
2. si  $\nu$  est convexe, alors  $\nu^\perp$  est concave ;
3. si  $\nu$  est concave, alors  $\nu^\perp$  est convexe ;
4. si  $\nu$  est modulaire, alors  $\nu^\perp$  est modulaire ;

5. si  $\nu$  est totalement convexe, alors  $\nu^\perp$  est totalement concave ;  
 6. si  $\nu$  est totalement concave, alors  $\nu^\perp$  est totalement convexe.

*Démonstration.* Rappelons que  $X^d$  est le dual de de Groot de  $X$ , et que ses ouverts sont les cocompacts  $X \setminus Q$ ,  $Q$  compact de  $X$ , que  $X^d$  est aussi stablement compact, et que  $X^{dd} = X$ . Par le lemme 6.2.3, points 1. et 2.,  $\nu^\perp$  est un jeu. Par le point 3., pour toute famille dirigée de cocompacts  $X \setminus Q_i, i \in I$ ,

$$\begin{aligned} \nu^\perp \left( \bigcup_{i \in I} (X \setminus Q_i) \right) &= \nu^\perp \left( X \setminus \bigcap_{i \in I} Q_i \right) = \nu(X) - \nu^\dagger \left( \bigcap_{i \in I} Q_i \right) \\ &= \nu(X) - \inf_{i \in I} \nu^\dagger(Q_i) = \sup_{i \in I} [\nu(X) - \nu^\dagger(Q_i)] = \sup_{i \in I} \nu^\perp(X \setminus Q_i) \end{aligned}$$

donc  $\nu^\perp$  est continu.

Si  $\nu$  est convexe, pour tous cocompacts  $X \setminus Q_1$  et  $X \setminus Q_2$ ,

$$\begin{aligned} &\nu^\perp((X \setminus Q_1) \cup (X \setminus Q_2)) + \nu^\perp((X \setminus Q_1) \cap (X \setminus Q_2)) \\ &= \nu^\perp(X \setminus (Q_1 \cap Q_2)) + \nu^\perp(X \setminus (Q_1 \cup Q_2)) \\ &= 2\nu(X) - \nu^\dagger(Q_1 \cap Q_2) - \nu^\dagger(Q_1 \cup Q_2) \\ &\leq 2\nu(X) - \nu^\dagger(Q_1) - \nu^\dagger(Q_2) \quad \text{par la proposition 6.2.4, point 1.} \\ &= \nu^\perp(X \setminus Q_1) + \nu^\perp(X \setminus Q_2) \end{aligned}$$

De même, si  $\nu$  est concave, alors  $\nu^\perp$  est convexe, en utilisant le point 6. ; et si  $\nu$  est modulaire, alors  $\nu^\perp$  aussi, par le point 7.

Si  $\nu$  est totalement convexe, pour toute famille finie  $(X \setminus Q_i)_{i=1}^n$  de cocompacts de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \nu^\perp \left( \bigcap_{i=1}^n (X \setminus Q_i) \right) &= \nu^\perp \left( X \setminus \bigcup_{i=1}^n Q_i \right) = \nu(X) - \nu^\dagger \left( \bigcup_{i=1}^n Q_i \right) \\ &\leq \nu(X) - \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu^\dagger \left( \bigcap_{i \in I} Q_i \right) \quad \text{par la proposition 6.2.4, point 4.} \\ &= \nu(X) - \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu(X) \\ &\quad + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu^\perp \left( X \setminus \bigcap_{i \in I} Q_i \right) \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu^\perp \left( X \setminus \bigcap_{i \in I} Q_i \right) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu^\perp \left( \bigcup_{i \in I} (X \setminus Q_i) \right) \end{aligned}$$

puisque, par le lemme 3.11.1 avec  $I_0 = \{1, \dots, n\}$ ,  $\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} = 1$ . Donc  $\nu^\perp$  est totalement concave. On montre de même que si  $\nu$  est totalement concave, alors  $\nu^\perp$  est totalement convexe, en utilisant la proposition 6.2.4, point 5.  $\square$

En particulier, le dual  $\nu^\perp$  d'une crédibilité continue  $\nu$  sur  $X$  est une plausibilité continue sur  $X^d$ , et le dual d'une plausibilité continue  $\nu$  sur  $X$  est une crédibilité continue sur  $X^d$  (si  $X$  est stablement compact). Ceci est bien une dualité :

**Lemme 6.2.7** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour tout jeu continu  $\nu$ ,  $\nu^{\perp\perp} = \nu$ , c'est-à-dire  $\nu^{\perp\perp}(U) = \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $\nu^\perp$  est un jeu sur  $X^d$ , que les ouverts de  $X^d$  sont les cocompacts  $X \setminus Q$  de  $X$ , et que les compacts saturés de  $X^d$  sont les fermés  $X \setminus U$ , avec  $U$  ouvert de  $X$ , donc

$$\begin{aligned} \nu^{\perp\perp}(X \setminus U) &= \inf_{Q \text{ compact saturé } / X \setminus Q \supseteq X \setminus U} \nu^\perp(X \setminus Q) \\ &= \nu(X) - \sup_{Q \text{ compact saturé } / X \setminus Q \supseteq X \setminus U} \nu^\dagger(Q) \\ &= \nu(X) - \sup_{Q \text{ compact saturé } / Q \subseteq U} \nu^\dagger(Q) \\ &= \nu(X) - \nu(U) \end{aligned}$$

par le lemme 6.2.2. Donc, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\nu^{\perp\perp}(U) = \nu(X) - \nu^\dagger(X \setminus U) = \nu(U)$ .  $\square$

La forme que nous avons choisie des plausibilités simples correspond exactement, via la dualité convexe-concave, à celle des crédibilités simples :

**Lemme 6.2.8** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Si  $\nu$  est la crédibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{Q_i}$  sur  $X$ , alors  $\nu^\perp$  est la plausibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{Q_i}$  sur  $X^d$ . Si  $\nu$  est la plausibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{F_i}$  sur  $X$ , alors  $\nu^\perp$  est la crédibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{F_i}$  sur  $X^d$ .*

*Démonstration.* Soit  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{Q_i}$ . Pour tout compact saturé  $Q$ ,

$$\nu^\dagger(Q) = \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q} \sum_{i/Q_i \subseteq U} a_i \geq \sum_{i/Q_i \subseteq Q} a_i \quad (6.1)$$

Réciproquement, soit  $J$  l'ensemble des  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tels que  $Q_i \subseteq Q$ .  $J$  est clos par le haut dans l'ensemble  $A$  de tous les  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  : si  $Q_i \in J$  et  $Q_j \subseteq Q_i$  alors  $Q_j \in J$ . (Rappelons que l'ordre sur  $\mathcal{Q}(X)$  est l'inclusion inverse  $\supseteq$ .) Par le lemme 5.2.1, il existe une famille d'ouverts  $(U_Q)_{Q \in A}$  telle que  $J = \{Q' \in A \mid Q' \subseteq \bigcup_{Q \in J} U_Q\}$ . Donc  $\nu(\bigcup_{Q \in J} U_Q) = \sum_{i/Q_i \subseteq Q} a_i$  : la borne inférieure est atteinte dans (6.1). Donc  $\nu^\dagger(Q) = \sum_{i/Q_i \subseteq Q} a_i$ , ce qui implique :

$$\begin{aligned} \nu^\perp(X \setminus Q) &= \nu(X) - \nu^\dagger(Q) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i/Q_i \subseteq Q} a_i = \sum_{i/Q_i \not\subseteq Q} a_i \\ &= \sum_{i/Q_i \cap (X \setminus Q) \neq \emptyset} a_i = \left( \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{Q_i} \right) (X \setminus Q) \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\nu$  la plausibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{F_i}$  sur  $X$ . Considérons la crédibilité simple  $\nu' = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{F_i}$  sur  $X^d$ . Par le résultat ci-dessus,  $\nu'^{\perp}$  est la plausibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{F_i}$  sur  $X^{dd}$ . Comme  $X^{dd} = X$ ,  $\nu'^{\perp} = \nu$ . Par le lemme 6.2.7,  $\nu^{\perp} = \nu'^{\perp\perp} = \nu'$ .  $\square$

La dualité convexe-concave renverse (presque) l'ordre, ce que nous montrons à la proposition 6.2.10 ci-dessous.

**Lemme 6.2.9** *Pour toutes fonctions  $\nu$  et  $\nu'$  de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  — par exemple des capacités —, si  $\nu \leq \nu'$  alors  $\nu^{\dagger} \leq \nu'^{\dagger}$ , au sens où  $\nu^{\dagger}(Q) \leq \nu'^{\dagger}(Q)$  pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$ .*

*Si  $X$  est localement compact, et  $\nu$  et  $\nu'$  sont des fonctions continues de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  — notamment des jeux continus —, la réciproque est vraie :  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu^{\dagger} \leq \nu'^{\dagger}$ .*

*Démonstration.* Si  $\nu \leq \nu'$ , alors :

$$\nu^{\dagger}(Q) = \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q} \nu(U) \leq \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q} \nu'(U) = \nu'^{\dagger}(Q)$$

Réciproquement, si  $\nu$  et  $\nu'$  sont des jeux continus sur l'espace localement compact  $X$ , avec  $\nu^{\dagger} \leq \nu'^{\dagger}$ , alors :

$$\begin{aligned} \nu(U) &= \sup_{Q \text{ compact saturé } \subseteq U} \nu^{\dagger}(Q) \quad \text{par le lemme 6.2.2} \\ &\leq \sup_{Q \text{ compact saturé } \subseteq U} \nu'^{\dagger}(Q) = \nu'(U) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 6.2.10** *Soit  $X$  un espace localement compact, et  $\nu$  est  $\nu'$  deux jeux continus sur  $X$ . Si  $\nu(X) = \nu'(X)$ , alors  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu^{\perp} \geq \nu'^{\perp}$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 6.2.9, première partie,  $\nu^{\perp}(X \setminus Q) = \nu(X) - \nu^{\dagger}(Q) \geq \nu(X) - \nu'^{\dagger}(Q) = \nu'(X) - \nu'^{\dagger}(Q) = \nu'^{\perp}(X \setminus Q)$ . Réciproquement, si  $\nu(X) = \nu'(X)$ , alors  $\nu^{\dagger}(X) = \nu(X) = \nu'(X) = \nu'^{\dagger}(X)$ . Donc si  $\nu^{\perp} \geq \nu'^{\perp}$ , alors  $\nu^{\dagger} \leq \nu'^{\dagger}$ . D'où  $\nu \leq \nu'$  par le lemme 6.2.9, deuxième partie.  $\square$

En général, cependant,  $\nu \leq \nu'$  n'implique pas  $\nu^{\perp} \geq \nu'^{\perp}$ . Considérons par exemple l'espace  $X$  formé de trois éléments  $x_1, x_2$ , et  $\perp$ , avec  $\perp \leq x_1, \perp \leq x_2$ , et  $x_1$  et  $x_2$  incomparables. Soit  $\nu = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\{\perp, x_1, x_2\}}$ ,  $\nu' = \frac{1}{4} \mathbf{u}_{\{x_1\}} + \frac{3}{4} \mathbf{u}_{\{x_2\}}$ . On vérifie que  $\nu \leq \nu'$  :

$U$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{\perp, x_1, x_2\}$
$\nu(U)$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\nu'(U)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Mais  $\nu^{\perp} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\{\perp, x_1, x_2\}}$ ,  $\nu'^{\perp} = \frac{1}{4} \mathbf{e}_{\{x_1\}} + \frac{3}{4} \mathbf{e}_{\{x_2\}}$ , et  $\nu^{\perp}$  et  $\nu'^{\perp}$  sont en fait incomparables :

$U$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{\perp, x_1, x_2\}$
$\nu^{\perp}(U)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\nu'^{\perp}(U)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Un cas important où l'ordre est bien renversé est celui des capacités  $\nu$  normalisées, c'est-à-dire telles que  $\nu(X) = 1$ .

**Théorème 6.2.11 (Dualité convexe-concave, isomorphisme)** Soit  $X$  un espace stablement compact. Alors  $\nu \mapsto \nu^\perp$  définit un isomorphisme entre :

- l'ensemble ordonné  $\mathbf{J}_1(X)$  des jeux normalisés continus sur  $X$  et l'opposé  $\mathbf{J}_1^{op}(X^d)$  de l'ensemble ordonné des jeux normalisés continus sur  $X^d$  ;
- l'ensemble ordonné  $\nabla \mathbf{J}_1(X)$  des jeux convexes continus normalisés sur  $X$  et l'opposé  $\Delta \mathbf{J}_1^{op}(X^d)$  de l'ensemble ordonné des jeux concaves continus normalisés sur  $X^d$  ;
- l'ensemble ordonné  $\mathbf{Cd}_1(X)$  des crédibilités normalisées continues sur  $X$  et l'opposé  $\mathbf{Pb}_1^{op}(X^d)$  de l'ensemble ordonné des plausibilités normalisées continues sur  $X^d$  ;
- l'ensemble ordonné  $\mathbf{V}_1(X)$  des probabilités continues sur  $X$  et l'opposé  $\mathbf{V}_1^{op}(X^d)$  de l'ensemble ordonné des probabilités continues sur  $X^d$ .

*Démonstration.* Conséquence immédiate du théorème 6.2.6 et de la proposition 6.2.10.  $\square$

Pour ce qui est de l'effet de  $\nu \mapsto \nu^\perp$  sur les mêmes espaces, munis de la topologie faible, nous nous y intéresserons en section 6.4.

L'intuition qui se cache derrière cette dualité est qu'un joueur probabiliste est *neutre*, ni démoniaque, ni angélique. Revenons en effet à notre explication des jeux en termes de parties entre un joueur probabiliste  $P$  et un joueur démoniaquement non-déterministe  $C$ . Que  $C$  soit démoniaque signifie informellement qu'il va essayer de contrer tous les coups effectués par  $P$ , c'est-à-dire de diminuer ses gains. Lorsque nous recourons à cette explication, nous nous plaçons tacitement du côté de  $P$ . Nous faisons cause avec  $P$ , et nous nous méfions des coups de  $C$ . Si à l'opposé nous changeons de point de vue, et nous faisons l'allié de  $C$ , alors  $C$  apparaîtra comme coopérant avec nous, et jouant donc de façon angélique. En revanche,  $P$  est neutre : il apparaîtra toujours comme jouant de façon probabiliste, ne cherchant ni à maximiser ni à minimiser ses gains. Le fait de changer de point de vue nous a fait passer d'un mélange de probabilités et de choix démoniaque (le cas où  $\nu$  est totalement convexe) à un mélange de probabilités et de choix angélique ( $\nu^\perp$  est totalement concave). Si nous changeons de nouveau de point de vue, nous repassons de  $\nu^\perp$  à  $\nu^{\perp\perp} = \nu$ , et nous retrouvons notre point de vue initial. Nous explorerons les relations entre les gains obtenus selon  $\nu$  et selon  $\nu^\perp$  à la section 6.2.2. Il s'agira donc là de relier les fonctionnelles d'intégration par rapport à  $\nu$  et par rapport à  $\nu^\perp$ .

Terminons auparavant cette section en montrant un lemme de découpage pour les plausibilités simples.

**Lemme 6.2.12 (Lemme de découpage)** On a  $\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{F_i} \leq \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_{F'_j}$  si et seulement s'il existe une matrice  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n t_{ij} &= a_i \quad \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^m t_{ij} &\leq b_j \quad \text{pour tout } j, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

et telle que les seules entrées non nulles de la matrice sont les  $t_{ij}$  telles que  $F_i \subseteq F'_j$ .

*Démonstration.* Soit  $\nu = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{F_i}$  et  $\nu' = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_{F'_j}$ . Si  $X$  est stablement compact et  $\nu$  et  $\nu'$  sont normalisées, le résultat se déduit des résultats précédents. En effet,  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu^\perp \geq \nu'^\perp$  par la proposition 6.2.10, si et seulement si  $\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{u}_{F_i} \geq \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_{F'_j}$ . Par le lemme de découpage sur les crédibilités 5.2.3, on en déduit l'existence d'une matrice  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  telle que  $\sum_{j=1}^n t_{ij} \leq a_i$  et  $\sum_{i=1}^m t_{ij} = b_j$ . Comme les valuations prises en compte ici sont normalisées,  $\sum_{j=1}^n t_{ij} \leq a_i$  pour tout  $i$  implique  $\sum_{j=1}^n t_{ij} = a_i$  pour tout  $i$ , et lui est donc équivalent.

Dans le cas général, d'abord, on vérifie que s'il existe une matrice  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  vérifiant les conditions du lemme, alors

$$\begin{aligned} \nu' &= \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_{F'_j} \geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} t_{ij} \mathbf{e}_{F'_j} \\ &\geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m \\ t_{ij} \neq 0}} t_{ij} \mathbf{e}_{F_i} \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{F_i} = \nu \end{aligned}$$

Il est imaginable de montrer la réciproque via le théorème “flux maximum, coupe minimum”. Nous allons montrer la réciproque en nous ramenant au cas évoqué ci-dessus des plausibilités normalisées sur un espace stablement compact.

Considérons l'espace de Sierpiński  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$  muni, rappelons-le, de la topologie formée des ouverts  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ , et  $\mathbb{S}$ . La fonction  $\eta_{\mathbb{S}}$  est continue de  $X$  dans  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$ , par la proposition 3.9.5. On peut donc transporter toute plausibilité continue  $\nu_1$  sur  $X$  vers une plausibilité continue  $\eta_{\mathbb{S}}[\nu_1]$  sur  $\mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$ , par le lemme 4.2.9.

On a :

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbb{S}}[\nu](\mathcal{U}) &= \nu(\eta_{\mathbb{S}}^{-1}(\mathcal{U})) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{F_i}(\eta_{\mathbb{S}}^{-1}(\mathcal{U})) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{\eta_{\mathbb{S}}(F_i)}(\mathcal{U}) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{cl(\eta_{\mathbb{S}}(F_i))}(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

puisque  $F_i$  intersecte  $\eta_{\mathbb{S}}^{-1}(\mathcal{U})$  si et seulement si  $\eta_{\mathbb{S}}(F_i)$  intersecte  $\mathcal{U}$ , et en utilisant le lemme 6.1.4. Donc

$$\eta_{\mathbb{S}}[\nu] = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{cl(\eta_{\mathbb{S}}(F_i))}$$

et de même

$$\eta_{\mathbb{S}}[\nu'] = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_{cl(\eta_{\mathbb{S}}(F'_j))}$$

Comme  $\nu \leq \nu'$ ,  $\eta_{\mathbb{S}}[\nu] \leq \eta_{\mathbb{S}}[\nu']$ . En effet,  $\eta_{\mathbb{S}}[\nu](\mathcal{U}) = \nu(\eta_{\mathbb{S}}^{-1}(\mathcal{U})) \leq \nu'(\eta_{\mathbb{S}}^{-1}(\mathcal{U})) = e_{\mathbb{S}}[\nu'](\mathcal{U})$ .

Soit  $c$  un réel quelconque supérieur ou égal à  $\sum_{i=1}^m a_i$  et à  $\sum_{j=1}^n b_j$ , et strictement positif. Construisons maintenant

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{1}{c} \left( \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{cl(\eta_{\mathbb{S}}(F_i))} + (c - \sum_{i=1}^m a_i) \delta_{\perp} \right) \\ \nu'_0 &= \frac{1}{c} \left( \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_{cl(\eta_{\mathbb{S}}(F'_j))} + (c - \sum_{j=1}^n b_j) \delta_{\perp} \right)\end{aligned}$$

où  $\perp$  est le plus petit élément de  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$ , c'est-à-dire la famille indexée par les ouverts de  $X$ , composée uniquement de zéros. Rappelons en effet que l'ordre de spécialisation de  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$  est l'ordre point à point (proposition 3.9.5).

On observe que  $\nu_0 \leq \nu'_0$  : pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$ , soit  $\mathcal{U}$  ne contient pas  $\perp$  et le résultat est clair, soit  $\mathcal{U}$  contient  $\perp$ , mais alors  $\mathcal{U}$  est  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$  tout entier, puisque tout ouvert est clos par le haut, et alors  $\nu_0(\mathcal{U}) = 1 = \nu'_0(\mathcal{U})$ .

Il est clair que  $\nu_0$  et  $\nu'_0$  sont normalisées, simples. De plus,  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$  est stablement compact (proposition 3.9.6), et  $\nu_0 \leq \nu'_0$ . Remarquons aussi que  $\delta_{\perp} = \mathbf{e}_{\{\perp\}}$ , et notons  $a_0 = c - \sum_{i=1}^m a_i$ ,  $b_0 = c - \sum_{j=1}^n b_j$ . Donc il existe une matrice  $(t_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n t_{ij} &= a_i \quad \text{pour tout } i, 0 \leq i \leq m \\ \sum_{i=0}^m t_{ij} &= b_j \quad \text{pour tout } j, 0 \leq j \leq n\end{aligned}$$

et telle que les seules entrées non nulles de la matrice sont les  $t_{ij}$  telles que  $i \geq 1, j \geq 1$ , et  $cl(\eta_{\mathbb{S}}(F_i)) \subseteq cl(\eta_{\mathbb{S}}(F'_j))$ ; ou bien  $i = 0$ .

Montrons que la condition  $cl(\eta_{\mathbb{S}}(F_i)) \subseteq cl(\eta_{\mathbb{S}}(F'_j))$  est équivalente à  $F_i \subseteq F'_j$ . La direction de droite à gauche est évidente. Supposons donc  $\eta_{\mathbb{S}}(F_i) \subseteq cl(\eta_{\mathbb{S}}(F'_j))$ . Pour tout  $x \in F_i$ ,  $\eta_{\mathbb{S}}(x)$  est donc dans l'adhérence de  $\eta_{\mathbb{S}}(F'_j)$ . En particulier, considérons le fermé  $\mathcal{F}_{U_0}$  de  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$  formé des points  $(x_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$  tels que  $x_{U_0} = 0$ , pour un ouvert  $U_0$  fixé de  $X$ . Ce fermé contient  $\eta_{\mathbb{S}}(F'_j)$  si et seulement si  $F'_j$  est inclus dans  $X \setminus U_0$ , ou de façon équivalente,  $U_0 \subseteq X \setminus F'_j$ . Posons  $U_0 = X \setminus F'_j$ . Pour tout  $x \in F_i$ ,  $\eta_{\mathbb{S}}(x)$  est dans  $\eta_{\mathbb{S}}(F_i)$ , donc dans  $cl(\eta_{\mathbb{S}}(F'_j))$ , donc dans  $\mathcal{F}_{X \setminus F'_j}$ . Ceci implique que  $x$  n'est pas dans  $U_0$ , donc  $x \in F'_j$ . Donc  $F_i \subseteq F'_j$ .

La sous-matrice des  $t_{ij}$  avec  $i \geq 1, j \geq 1$ , satisfait alors aux conditions demandées.  $\square$

## 6.2.2 Intégration par rapport à $\nu^{\perp}$

Dans le cas où  $X$  est fini, muni de la topologie discrète,  $X$  est stablement compact. Toute partie de  $X$  est à la fois ouverte, fermée, compacte, et cocompacte. De plus, toute crédibilité est simple. Si  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i}$ , on a alors  $\nu^{\perp} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{Q_i}$  et :

$$\oint_{x \in X} -f(x) d\nu^{\perp} = \sum_{i=1}^n a_i \sup_{x \in Q_i} -f(x) = - \sum_{i=1}^n a_i \inf_{x \in Q_i} f(x) = - \oint_{x \in X} f(x) d\nu$$

Ceci correspond à l'idée que les jeux entre P et C sont à somme nulle : si  $f(x)$  est le gain de l'un, alors  $f(x)$  est le gain de l'autre, et la dualité convexe-concave reflète ce changement de point de vue.

Dans le cas général, l'équation ci-dessus n'a plus aucun sens. Si  $f$  est une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $-f$  n'est en effet pas nécessairement continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Rappelons que nous considérons toujours  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie de Scott, dans laquelle les ouverts non vides sont de la forme  $]t, +\infty[$ .

La fonction  $-f$  n'est pas non plus en général continue de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$ . Pour ceci, il faudrait que  $f^{-1}] - \infty, t[$  soit cocompact pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On peut cependant approcher  $-f$  par le haut, par des fonctions  $g$  continues bornées de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$  telles que  $f + g \geq 0$  : voir la proposition 6.2.14 plus bas.

En attendant, démontrons un lemme technique.

**Lemme 6.2.13** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute fonction étagée  $f = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  est une suite décroissante d'ouverts de  $X$ , et  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , pour toute fonction  $g$  continue bornée de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f + g \geq 0$ , il existe une fonction étagée de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme*

$$h = - \sum_{i=0}^n a_i \chi_{Q_i}$$

où la famille de compacts saturés  $(Q_i)_{i=1}^n$  vérifie  $Q_i \subseteq U_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , et  $Q_n \subseteq \dots \subseteq Q_1 \subseteq Q_0 = X$ , et telle que  $-f \leq h \leq g$ .

*Démonstration.* Supposons que  $g$  soit une fonction continue bornée de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $f + g \geq 0$ . Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $g^{-1}] - a_0 - a_1 - \dots - a_i, +\infty[$  est un ouvert de  $X^d$ , donc un cocompact  $X \setminus Q_i$ . Posons  $h = (- \sum_{i=0}^n a_i) \chi_X + \sum_{i=1}^n a_i \chi_{X \setminus Q_i}$ . On observe que :

- $h$  est de la forme souhaitée : puisque  $\chi_{X \setminus Q_i} = 1 - \chi_{Q_i}$ ,  $h = -a_0 \chi_X - \sum_{i=1}^n a_i \chi_{Q_i}$  ;
- Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $Q_i \subseteq U_i$ . C'est évident pour  $i = 0$ , puisque  $Q_0 = X = U_0$ . Supposons donc  $i \geq 1$ . Si  $x \in Q_i$ , alors  $x \notin X \setminus Q_i$ , donc  $g(x) \leq -a_0 - a_1 - \dots - a_i$  par définition de  $Q_i$ . Comme  $f(x) + g(x) \geq 0$ ,  $f(x) \geq a_0 + a_1 + \dots + a_i$ . Or si  $x$  n'était pas dans  $U_i$ , il ne serait pas non plus dans  $U_{i+1}, \dots, U_n$ , donc  $f(x)$  vaudrait au plus  $a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1}$ . Donc  $x \in U_i$ .
- En particulier,  $f + h \geq 0$ , c'est-à-dire  $-f \leq h$ . En effet, comme  $Q_i \subseteq U_i$ ,  $\chi_{Q_i} \leq \chi_{U_i}$ , donc pour tout  $x \in X$ ,  $f(x) + h(x) = a_0 - a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (\chi_{U_i}(x) - \chi_{Q_i}(x)) \geq 0$ .
- $Q_n \subseteq \dots \subseteq Q_1 \subseteq Q_0 = X$ . En effet, l'inclusion dans  $Q_0 = X$  est triviale, d'une part, et pour montrer que  $Q_n \subseteq \dots \subseteq Q_1$ , on remarque que lorsque  $i$  croît de 1 à  $n$ , l'intervalle  $] - a_0 - a_1 - \dots - a_i, +\infty[$  croît, donc  $X \setminus Q_i$  croît aussi, donc  $Q_i$  décroît pour l'ordre d'inclusion  $\subseteq$ .
- Donc  $h$  est une fonction étagée de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$ , car on peut l'écrire

$$\left( - \sum_{i=0}^n a_i \right) \chi_X + a_n \chi_{X \setminus Q_n} + a_{n-1} \chi_{X \setminus Q_{n-1}} + \dots + a_1 \chi_{X \setminus Q_1}$$

où  $X \supseteq X \setminus Q_n \supseteq \dots \supseteq X \setminus Q_1$ , et  $X$  et les  $X \setminus Q_i$  sont bien des ouverts de  $X^d$ .

- Finalement,  $h \leq g$ . En effet, pour tout  $x \in X$ , soit  $k$  l'entier,  $1 \leq k \leq n$ , tel que  $x \notin X \setminus Q_{k-1}$  mais  $x \in X \setminus Q_k$ . Alors  $h(x) = (-\sum_{i=0}^n a_i) + \sum_{i=k}^n a_i = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i$ , et  $g(x) \geq -\sum_{i=0}^{k-1} a_i$ , puisque comme  $x \in X \setminus Q_k$ , par définition  $g(x) > -\sum_{i=0}^k a_i$ .  $\square$

**Proposition 6.2.14** Soit  $X$  un espace stablement compact,  $\nu$  un jeu continu sur  $X$ . Pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$-\int_{x \in X} f(x) d\nu = \inf_g \int_{x \in X^d} g(x) d\nu^\perp$$

où  $g$  parcourt l'ensemble des fonctions continues bornées (resp. des fonctions étagées) de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f + g \geq 0$ .

*Démonstration.* On doit d'abord montrer que, pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , pour toute fonction  $g$  continue bornée de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $f + g \geq 0$ , alors

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X^d} g(x) d\nu^\perp \geq 0 \quad (6.2)$$

Considérons la fonction étagée  $f_K$  définie au lemme 4.1.6, et écrivons-la  $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$ . Pour toute fonction continue bornée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f + g \geq 0$ , on a  $f_K + g \geq -\frac{1}{2K}$ . Posons  $g'$  la fonction continue bornée  $g + \frac{1}{2K}$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$ . Comme  $f_K + g' \geq 0$ , par le lemme 6.2.13, il existe une fonction étagée  $h$  de la forme

$$h = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{Q_i}$$

avec  $Q_i \subseteq U_i$  pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , telle que  $-f_K \leq h \leq g'$ . Alors

$$\begin{aligned} & \int_{x \in X} f_K(x) d\nu + \int_{x \in X^d} h(x) d\nu^\perp \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \nu(U_i) + \left( -\sum_{i=0}^n a_i \right) \nu^\perp(X) + \sum_{i=1}^n a_i \nu^\perp(X \setminus Q_i) \\ & \quad \text{par la proposition 4.1.4, et en utilisant le fait que} \\ & \quad h = \left( -\sum_{i=0}^n a_i \right) \chi_X + \sum_{i=1}^n a_i \chi_{X \setminus Q_i} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \nu(U_i) + \left( -\sum_{i=0}^n a_i \right) [\nu(X) - \nu^\dagger(\emptyset)] + \sum_{i=1}^n a_i [\nu(X) - \nu^\dagger(Q_i)] \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \nu(U_i) - a_0 \nu(X) - \sum_{i=1}^n a_i \nu^\dagger(Q_i) \\ & \quad \text{puisque } \nu^\dagger(\emptyset) = 0, \text{ par le lemme 6.2.3, point 1.} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \nu(U_i) - \sum_{i=1}^n a_i \nu^\dagger(Q_i) \quad \text{car } U_0 = X \\ &\geq 0 \quad \text{car } Q_i \subseteq U_i, \text{ donc } \nu^\dagger(Q_i) \leq \nu(U_i), \text{ par la définition 6.2.1.} \end{aligned}$$

Comme  $h \leq g' = g + \frac{1}{2K}$ , et  $\nu^\perp(X^d) = \nu(X)$ ,

$$\int_{x \in X^d} h(x) d\nu^\perp \leq \int_{x \in X^d} g(x) d\nu^\perp + \frac{1}{2K} \nu(X)$$

Comme  $f_K \leq f$ ,

$$\int_{x \in X} f_K(x) d\nu \leq \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

Donc

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X^d} g(x) d\nu^\perp \geq -\frac{1}{2K}$$

Ceci étant vrai pour tout  $K \in \mathbb{N}$ , nous avons montré (6.2).

Réciproquement, montrons que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une fonction continue bornée, en fait même une fonction étagée  $h$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f + h \geq 0$  et :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X^d} h(x) d\nu^\perp \leq \epsilon$$

Posons  $K \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, de sorte que  $\frac{1}{2K} \nu(X) \leq \epsilon/2$ . De nouveau, écrivons  $f_K$  sous la forme  $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$ . Supposons de plus que  $a_i \neq 0$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Par le lemme 6.2.2, point 1., pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\nu(U_i)$  est la borne supérieure des  $\nu^\dagger(Q)$ , lorsque  $Q$  parcourt les compacts saturés de  $X$  inclus dans  $U$ . Il existe donc un compact saturé  $Q_i \subseteq U_i$  tel que  $\nu^\dagger(Q_i) \geq \nu(U_i) - \frac{\epsilon}{2 \sum_{i=1}^n a_i}$  (si  $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ ; sinon, comme les  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont non nuls, c'est que  $n = 0$ , et alors le problème ne se pose pas, puisqu'il n'y a pas de  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ). De plus, on peut supposer sans perte de généralité que  $Q_n \subseteq \dots \subseteq Q_1$ , quitte à remplacer  $Q_i$  par  $\bigcup_{j \leq i} Q_j$ . En posant, additionnellement,  $Q_0 = X = U_0$ , la fonction

$$h = -\sum_{i=0}^n a_i \chi_{Q_i}$$

est étagée de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$ , par le même raisonnement qu'au lemme 6.2.13. De même, on peut réécrire

$$h = \left( -\sum_{i=0}^n a_i \right) \chi_X + \sum_{i=1}^n a_i \chi_{X \setminus Q_i}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X^d} h(x) d\nu^\perp \\
& \leq \int_{x \in X} f_K(x) d\nu + \frac{1}{2^K} \nu(X) + \int_{x \in X^d} h(x) d\nu^\perp \quad \text{car } f \leq f_K + \frac{1}{2^K} \\
& = \sum_{i=0}^n a_i \nu(U_i) + \frac{1}{2^K} \nu(X) + \left( - \sum_{i=0}^n a_i \right) \nu^\perp(X) + \sum_{i=1}^n a_i \nu^\perp(X \setminus Q_i) \\
& = \sum_{i=1}^n a_i \nu(U_i) + \frac{1}{2^K} \nu(X) - \sum_{i=1}^n a_i \nu^\perp(Q_i) = \sum_{i=1}^n a_i [\nu(U_i) - \nu^\perp(Q_i)] + \frac{1}{2^K} \nu(X) \\
& \leq \sum_{i=1}^n a_i \frac{\epsilon}{2 \sum_{i=1}^n a_i} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 6.2.15** Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $\nu$  un jeu continu sur  $X^d$ . Pour toute fonction continue bornée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$- \int_{x \in X^d} g(x) d\nu = \inf_f \int_{x \in X} f(x) d\nu^\perp$$

lorsque  $f$  parcourt les fonctions continues bornées (resp. étagées) de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f+g \geq 0$ .

*Démonstration.* Par la proposition 6.2.14, car  $X^{dd} = X$ .  $\square$

### 6.3 Capacités linéairement extensibles par le haut

Les crédibilités étant exactement les jeux linéairement extensibles par le bas (théorème 5.4.8), sous quelques hypothèses sur l'espace  $X$ , on peut se demander si les plausibilités ne seraient pas caractérisables de manière similaire. C'est bien évidemment une conséquence du théorème de dualité convexe-concave.

On en déduit en particulier les résultats suivants, à partir de ceux du chapitre 5.

**Définition 6.3.1** On dit qu'un jeu  $\nu$  sur  $X$  est linéairement extensible par le haut si et seulement s'il existe une valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{H}(X)$  telle que, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) dP \quad (6.3)$$

où

$$f^*(F) = \sup_{x \in F} f(x)$$

L'intégrale de droite a un sens dans (6.3), car :

**Lemme 6.3.2** *Pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f^*$  est une fonction continue de  $\mathcal{H}_u(X)$  dans  $\mathbb{R}$ , donc aussi de  $\mathcal{H}(X)$  dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $\mathcal{H}_u(X)$  est l'espace des fermés de  $X$ , ordonnés par l'inclusion  $\subseteq$ , et muni de la topologie haute. Comme tout ouvert de  $\mathcal{H}_u(X)$  est un ouvert de Scott, c'est-à-dire un ouvert de  $\mathcal{H}(X)$ , toute fonction qui est continue de  $\mathcal{H}_u(X)$  dans  $\mathbb{R}$  est aussi continue de  $\mathcal{H}(X)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f^{*-1}(]t, +\infty]) = \{F \in \mathcal{H}(X) \mid \sup_{x \in F} f(x) > t\} = \{F \in \mathcal{H}(X) \mid \exists x \in F \cdot f(x) > t\} = \{F \in \mathcal{H}(X) \mid F \cap f^{-1}]t, +\infty[ \neq \emptyset\} = \diamond f^{-1}]t, +\infty[$ , qui est ouvert dans la topologie haute, par la proposition 3.4.17.  $\square$

Comme à la proposition 5.4.4, on peut démontrer que tout jeu linéairement extensible par le haut est une plausibilité continue.

**Proposition 6.3.3** *Soit  $X$  un espace topologique. Une capacité  $\nu$  sur  $X$  est linéairement extensible par le haut si et seulement s'il existe une valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{H}_u(X)$  telle que, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,*

$$\nu(U) = P(\diamond U)$$

*Alors  $\nu$  est totalement concave, monotone et continue : toute capacité linéairement extensible par le haut est une loi de plausibilité continue sur  $X$ . De plus, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , l'égalité (6.3) est valide.*

*Démonstration.* Si  $\nu$  est linéairement extensible par le haut, soit  $P$  une valuation continue vérifiant (6.3). Posons  $f = \chi_U$ , alors l'intégrale de Choquet de  $f$  vaut  $\nu(U)$ . D'autre part,  $f^*(F)$  si et seulement si  $\sup_{x \in F} \chi_U(x) = 1$ , si et seulement si  $F$  intersecte  $U$ , si et seulement si  $F \in \diamond U$ . Donc  $f^* = \chi_{\diamond U}$ . L'intégrale de Choquet de  $f^*$  vaut donc  $P(\diamond U)$ . Donc nécessairement  $\nu(U) = P(\diamond U)$ .

Réciproquement, supposons que  $\nu(U) = P(\diamond U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . On a

$$\oint_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) dP = \int_0^{+\infty} P(f^{*-1}]t, +\infty]) dt + \int_{-\infty}^0 [P(f^{*-1}]t, +\infty]) - P(\mathcal{H}(X))] dt$$

Or  $P(f^{*-1}]t, +\infty]) = P(\diamond f^{-1}]t, +\infty]) = \nu(f^{-1}]t, +\infty])$ . Comme d'autre part,  $P(\mathcal{H}(X)) = P(\diamond X) = \nu(X)$ ,

$$\begin{aligned} \oint_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) dP &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty]) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty]) - \nu(X)] dt \\ &= \oint_{x \in X} f(x) d\nu \end{aligned}$$

Montrons qu'alors  $\nu$  est une loi de plausibilité. D'abord,  $\nu$  est monotone : si  $U \subseteq V$ , alors  $\diamond U \subseteq \diamond V$  par le lemme 3.4.18, donc  $P(\diamond U) \subseteq P(\diamond V)$  puisque  $P$  est monotone, donc  $\nu(U) \subseteq \nu(V)$ .

Ensuite,  $\nu$  est continue. Pour montrer ceci, considérons une famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ . Par le lemme 3.4.18,  $\diamond \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \diamond U_i$ . On en déduit

$$\nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = P \left( \diamond \bigcup_{i \in I} U_i \right) = P \left( \bigcup_{i \in I} \diamond U_i \right) = \bigcup_{i \in I} P(\diamond U_i) = \bigcup_{i \in I} \nu(U_i)$$

Finalement, montrons que  $\nu$  est totalement concave. Soit  $(U_i)_{i=1}^n$  une famille finie d'ouverts. Alors, en observant que  $\diamond \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n \diamond U_i$ ,

$$\begin{aligned} \nu \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) &= P \left( \diamond \bigcap_{i=1}^n U_i \right) \\ &\leq P \left( \bigcap_{i=1}^n \diamond U_i \right) \quad \text{parce que } P \text{ est monotone} \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} P \left( \bigcup_{i \in I} \diamond U_i \right) \\ &\quad \text{par le principe d'exclusion-inclusion appliqué à la valuation } P \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} P \left( \diamond \bigcup_{i \in I} U_i \right) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \end{aligned}$$

où l'avant-dernière ligne se déduit du fait que  $\diamond \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \diamond U_i$  par le lemme 3.4.18.  $\square$

La réciproque est valide, au moins sous certaines conditions sur  $X$ , au sens où les capacités linéairement extensibles par le haut sont exactement les plausibilités continues, mais ceci n'est pas immédiat. On le déduira en adaptant les résultats qui montrent que toute crédibilité continue  $\nu$  est borne supérieure d'une famille de crédibilités simples bien au-dessous de  $\nu$ .

Comme l'application  $\nu \mapsto \nu^\perp$  renverse l'ordre sur les jeux continus normalisés (par le théorème 6.2.11), il est naturel de montrer que toute plausibilité continue normalisée  $\nu$  est borne inférieure de plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu$ , au sens suivant :

**Définition 6.3.4** *Sur tout ensemble ordonné, définissons la relation “bien au-dessus”  $\gg$  par :  $x \gg y$  si et seulement si, pour toute famille filtrante  $(z_i)_{i \in I}$  ayant une borne inférieure  $z$  telle que  $z \leq y$ , il existe  $i \in I$  tel que  $z_i \leq x$ .*

On fera bien attention que, alors que  $x \geq y$  est par définition équivalent à  $y \leq x$ , en revanche  $x \gg y$  n'a en général rien à voir avec  $y \ll x$ . La relation  $\gg$  est cependant bien la relation “bien au-dessus” pour l'opposé  $\geq$  de l'ordre  $\leq$ .

On a l'observation symétrique du lemme 5.5.2 :

**Lemme 6.3.5** Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de plausibilités continues normalisées sur l'espace stablement compact  $X$ , ayant pour borne inférieure  $\nu$ . Alors  $\nu$  est une plausibilité continue normalisée.

*Démonstration.* Pour tout  $i \in I$ ,  $\nu_i^\perp$  est une crédibilité continue normalisée, et  $(\nu_i^\perp)_{i \in I}$  est une famille dirigée dont la borne supérieure (dans l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des jeux normalisés continus) est  $\nu^\perp$ , par le théorème 6.2.11. Par le lemme 5.5.2,  $\nu^\perp$  est une crédibilité continue normalisée. Par le théorème 6.2.11 encore,  $\nu$  est une plausibilité continue normalisée.  $\square$

**Lemme 6.3.6** Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour tous jeux normalisés continus (resp. convexes, concaves, totalement convexes, totalement concaves)  $\nu, \nu', \nu \ll \nu'$  si et seulement si  $\nu^\perp \gg \nu'^\perp$ .

*Démonstration.* Supposons  $\nu \ll \nu'$ . Pour toute famille filtrante  $(\nu_i)_{i \in I}$  de jeux normalisés continus (resp. convexes, concaves, totalement convexes, totalement concaves) telle que  $\inf_{i \in I} \nu_i \leq \nu'^\perp$ , le théorème 6.2.11 implique  $\sup_{i \in I} \nu_i^\perp \geq \nu'$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $\nu_i^\perp \geq \nu$ . Donc  $\nu_i \leq \nu^\perp$  par le théorème 6.2.11. On en conclut que  $\nu^\perp \gg \nu'^\perp$ . L'affirmation symétrique et démontrée de façon similaire.  $\square$

**Proposition 6.3.7** Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $\gg_1$  la relation “bien au-dessus” dans l'espace  $\mathbf{Pb}_1(X)$  des plausibilités continues normalisées sur  $X$ .

Toute loi de plausibilité continue normalisée  $\nu$  est la borne inférieure d'une famille filtrante  $(\nu_i)_{i \in I}$  de plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu$ , i.e., telles que  $\nu_i \gg_1 \nu$  pour tout  $i \in I$ . Plus précisément, la famille des plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu$  est filtrante, et a pour borne inférieure  $\nu$ .

*Démonstration.* Soit  $\nu$  une plausibilité continue normalisée. Par le théorème 6.2.11,  $\nu^\perp$  est une crédibilité continue normalisée. Par la proposition 5.5.8,  $\nu^\perp$  est la borne supérieure de la famille dirigée  $(\nu'_i)_{i \in I}$  de toutes les crédibilités simples normalisées telles que  $\nu'_i \ll_1 \nu^\perp$  pour tout  $i$ , où  $\ll_1$  est la relation “bien au-dessous” dans l'espace  $\mathbf{Cd}_1(X^d)$  des crédibilités continues normalisées sur  $X^d$ . Par le théorème 6.2.11,  $\nu_i = \nu'_i{}^\perp$  définit une famille filtrante de plausibilités continues normalisées, de borne inférieure  $\nu$ . Par le lemme 6.2.8,  $\nu_i$  est même une plausibilité simple. De plus, comme  $\nu'_i \ll_1 \nu^\perp$ , on a  $\nu'_i{}^\perp \gg_1 \nu$  par le lemme 6.3.6.

Finalement, la famille des plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu$  est exactement la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$ , par le lemme 6.3.6 encore, d'où l'on déduit qu'elle est filtrante et a pour borne inférieure  $\nu$ .  $\square$

On peut même généraliser au cas des espaces stablement *localement* compacts, ce sera la proposition 6.3.13 ci-dessous. Ceci nécessite l'utilisation d'une variante de l'astuce d'Edalat (voir la proposition 5.5.8), sous la forme, duale, utilisée par Alvarez-Manilla (2000, corollaire 3.40).

**Lemme 6.3.8** Soit  $X_\perp$  l'espace  $X$  avec un nouvel élément  $\perp$ , dont les ouverts sont ceux de  $X$ , plus  $X_\perp$  tout entier. Les compacts saturés de  $X_\perp$  sont ceux de  $X$ , plus  $X_\perp$  tout entier.

Si  $X$  est stablement localement compact, alors  $X_\perp$  est stablement compact, son ordre de spécialisation coïncide avec celui de  $X$  sur  $X$ , et  $\perp$  est l'élément le plus petit de  $X_\perp$ .

*Démonstration.* Notons  $\leq_{\perp}$  le préordre de spécialisation de  $X_{\perp}$ ,  $\leq$  celui de  $X$ . D'abord,  $\perp \leq_{\perp} x$  pour tout  $x \in X_{\perp}$ , puisque le seul ouvert contenant  $\perp$  est  $X_{\perp}$  tout entier. Donc  $\perp$  est l'élément le plus petit de  $X_{\perp}$ . Ensuite, pour tous  $x, y \in X$ , si  $x \leq y$  alors tout ouvert de  $X_{\perp}$  qui contient  $x$  contient aussi  $y$ , soit que cet ouvert soit  $X_{\perp}$  tout entier, soit que ce soit un ouvert de  $X$ ; donc  $x \leq_{\perp} y$ . Réciproquement, si  $x \leq_{\perp} y$ , alors  $x \leq y$  car tout ouvert de  $X$  est un ouvert de  $X_{\perp}$ . Donc  $\leq_{\perp}$  coïncide avec  $\leq$  sur  $X$ .

Montrons que les compacts saturés de  $X_{\perp}$  sont ceux de  $X$ , plus  $X_{\perp}$  tout entier :

- Soit  $Q$  un compact saturé de  $X_{\perp}$ . Si  $Q$  contient  $\perp$ , alors  $Q = X_{\perp}$  car  $Q$  est saturé. Sinon,  $Q$  est inclus dans  $X$ , et de tout recouvrement ouvert dans  $X$ , qui est nécessairement un recouvrement ouvert de  $Q$  dans  $X_{\perp}$ , on peut en extraire un sous-recouvrement fini; donc  $Q$  est compact dans  $X$ , et aussi saturé car  $\leq_{\perp}$  coïncide avec  $\leq$  sur  $X$ .
- Réciproquement, soit  $Q$  un compact saturé de  $X$ , et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $Q$  dans  $X_{\perp}$ . S'il existe  $i \in I$  tel que  $U_i = X_{\perp}$ , alors  $U_i$  seul recouvre déjà  $Q$ . Sinon,  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $Q$  dans  $X$ , donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Donc  $Q$  est un compact de  $X_{\perp}$ , qui est saturé parce que  $\leq_{\perp}$  coïncide avec  $\leq$  sur  $X$ . D'autre part,  $X_{\perp}$  est lui aussi compact : si  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $X_{\perp}$ , alors  $\perp \in \bigcup_{i \in I} U_i$ , donc  $\perp \in U_i$  pour un  $i \in I$ , ce qui implique sur  $U_i$  seul recouvre déjà  $X_{\perp}$ .

Il reste à montrer que  $X_{\perp}$  est stablement compact :

- Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de compacts saturés de  $X_{\perp}$  telle que  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$ , où  $U$  est un ouvert de  $X_{\perp}$ . Si  $U = X_{\perp}$ , et alors  $Q_i \subseteq U$  pour n'importe quel  $i \in I$  (qui existe, puisqu'une famille filtrante est non vide). Si  $Q_i = X_{\perp}$  pour tout  $i \in I$ , alors  $U = X_{\perp}$ . Traitons donc du cas restant où  $U \neq X_{\perp}$  est un ouvert de  $X$ , et il existe des indices  $i \in I$  tels que  $Q_i \neq X_{\perp}$ . La sous-famille des  $Q_i$  tels que  $Q_i \neq X_{\perp}$  est alors une famille filtrante de compacts saturés de  $X$ , telle que  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$ , donc il existe  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq U$ , parce que  $X$  est bien filtrant.
- Soit  $x$  un point de  $X_{\perp}$ , et  $U$  un ouvert de  $X_{\perp}$  contenant  $x$ . Si  $U = X_{\perp}$ , alors il existe un compact saturé  $Q$  de  $X_{\perp}$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq U$  (où l'intérieur  $\overset{\circ}{Q}$  de  $Q$  est pris dans  $X_{\perp}$ ), à savoir  $X_{\perp}$  lui-même, qui est à la fois compact et ouvert. Sinon,  $U$  est un ouvert de  $X$ . Comme  $x \in U$ ,  $x$  est un point de  $X$ , donc il existe un compact saturé  $Q$  de  $X_{\perp}$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq U$  (où l'intérieur  $\overset{\circ}{Q}$  de  $Q$  est cette fois-ci pris dans  $X$ ). Mais  $Q$  est aussi un compact de  $X_{\perp}$ , et son intérieur dans  $X$  est aussi son intérieur dans  $X_{\perp}$ . Donc  $X_{\perp}$  est localement compact.
- L'intersection de deux compacts saturés de  $X_{\perp}$  est clairement encore un compact saturé de  $X_{\perp}$ . Lorsque les deux compacts saturés sont dans  $X$ , c'est parce que  $X$  est cohérent.
- Finalement, on a vu plus haut que  $X_{\perp}$  était compact. □

**Lemme 6.3.9** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact, et  $\nu$  une capacité sur  $X$ . Pour tout  $c \geq \nu(X)$ , définissons  $\nu_{\perp}^c$  par :  $\nu_{\perp}^c(U) = \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , et  $\nu_{\perp}^c(X_{\perp}) = c$ .*

*Si  $\nu$  est monotone, alors  $\nu_{\perp}^c$  est monotone. Si  $\nu$  est continue, alors  $\nu_{\perp}^c$  est continue. Si  $\nu$  est totalement concave (resp. concave, resp. totalement convexe, resp. convexe, resp. modulaire), alors  $\nu_{\perp}^c$  est totalement concave (resp. concave, resp. totalement convexe, resp. convexe, resp. modulaire).*

*Démonstration.* Le fait que  $\nu_{\perp}^c$  soit monotone dès que  $\nu$  l'est est une conséquence directe de  $c \geq \nu(X)$ . Si  $\nu$  est continue, alors  $\nu_{\perp}^c$  est continue, parce que pour toute famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X_{\perp}$ , si  $\perp \in \bigcup_{i \in I} U_i$ , alors  $\perp \in U_i$  pour un  $i \in I$ . Supposons  $\nu$  totalement concave, et soit  $(U_i)_{i=1}^n$  une famille finie d'ouverts de  $X_{\perp}$ ,  $n \geq 1$ , soit  $I_0$  l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $\perp \notin U_i$ , alors

$$\nu_{\perp} \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) = \begin{cases} c & \text{si tous les } U_i \text{ contiennent } \perp, \text{ c'est-à-dire si } I_0 = \emptyset \\ \nu \left( \bigcap_{i \in I_0} U_i \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

D'autre part,

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} c + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right)$$

Si  $I_0 = \emptyset$ , ceci vaut

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} c = c$$

par le lemme 3.11.1. Sinon,

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} c = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \cap (\{1, \dots, n\} \setminus I_0) \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} c = 0$$

par le lemme 3.11.2, donc

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \\ &\geq \nu \left( \bigcap_{i \in I_0} U_i \right) = \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) \end{aligned}$$

puisque  $\nu$  est totalement concave.

Si  $\nu$  est concave, l'argument est similaire à l'argument ci-dessus dans le cas  $n = 2$ , et nous permet de conclure que  $\nu_{\perp}^c$  est concave.

Si  $\nu$  est totalement convexe, soit  $I_0$  l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $\perp \in U_i$ , alors

$$\nu_{\perp} \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) = \begin{cases} c & \text{si un } U_i \text{ contient } \perp, \text{ c'est-à-dire si } I_0 \neq \emptyset \\ \nu \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

D'autre part,

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} c + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right)$$

Si  $I_0 = \emptyset$ , le premier terme de l'addition est nul, donc

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \leq \nu \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) \end{aligned}$$

puisque  $\nu$  est totalement convexe. Si  $I_0 \neq \emptyset$ , le premier terme de l'addition vaut  $c$  par le lemme 3.11.1, donc

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) &= c + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \\ &= c + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \end{aligned}$$

Posons maintenant  $U'_i = U_i$  si  $i \notin I_0$ , c'est-à-dire si  $\perp \notin U_i$ , et  $U'_i = X$  sinon. Dans tous les cas,  $U'_i$  est un ouvert de  $X$ . De plus, si  $I \not\subseteq I_0$ , alors  $\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I \setminus I_0} U_i = \bigcap_{i \in I \setminus I_0} U'_i = \bigcap_{i \in I} U'_i$ , donc :

$$\begin{aligned} &\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_{\perp} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \\ &= c + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U'_i \right) \\ &= c - \nu(X) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu(X) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U'_i \right) \\ &\quad \text{par le lemme 3.11.1} \\ &= c - \nu(X) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \\ I \subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U'_i \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \not\subseteq I_0}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U'_i \right) \\ &= c - \nu(X) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U'_i \right) \\ &\leq c - \nu(X) + \nu \left( \bigcup_{i=1}^n U'_i \right) \end{aligned}$$

puisque  $\nu$  est totalement convexe. Or  $\nu(\bigcup_{i=1}^n U'_i) = \nu(X)$  puisque  $I_0$  est non vide, donc ceci est inférieur ou égal à  $c = \nu_\perp(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ .

Le cas où  $\nu$  est convexe se démontre par le même argument, avec  $n = 2$ . Le cas où  $\nu$  est modulaire se déduit des cas convexe et concave.  $\square$

Ceci nous permet d'étendre le lemme 6.3.5.

**Lemme 6.3.10** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact, et  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de plausibilités continues sur  $X$ , ayant pour borne inférieure  $\nu$ . Alors  $\nu$  est une plausibilité continue. Si les  $\nu_i$  sont normalisées, alors  $\nu$  est normalisée.*

*Démonstration.* Fixons  $c > \nu(X)$ , et considérons la sous-famille  $J$  des  $i \in I$  tels que  $\nu_i(X) \leq c$ . Cette famille est non vide, puisque  $c > \nu(X) = \inf_{i \in I} \nu_i(X)$ . La famille  $(\nu_i)_{i \in J}$  est alors filtrante. Ceci provient du fait : (\*) si  $i \in I$  (a fortiori  $i \in J$ ) et  $j \in J$ , il existe  $k \in K$  tel que  $\nu_k \leq \nu_i, \nu_j$ , donc aussi  $\nu_k(X) \leq \nu_j(X) \leq c$ . Enfin  $\inf_{i \in J} \nu_i = \inf_{i \in I} \nu_i : \inf_{i \in J} \nu_i \geq \inf_{i \in I} \nu_i$  car  $J \subseteq I$ , et  $\inf_{i \in J} \nu_i \leq \inf_{i \in I} \nu_i$  car pour tout  $i \in I$ , il existe  $j \in J$ , donc  $k \in J$  tel que  $\nu_i \geq \nu_k$  par (\*).

La famille  $(\nu_i^c / c)_{i \in J}$  est alors encore filtrante. En effet,  $\nu_i^c / c \leq \nu_j^c / c$  si et seulement si  $\nu_i \leq \nu_j$ ; c'est une conséquence directe de la définition de  $\nu_i^c / c$ . Chaque capacité  $\nu_i^c / c$  est une plausibilité continue sur  $X_\perp$  par le lemme 6.3.9, qui est de plus normalisée par construction. Par le lemme 6.3.5, sa borne inférieure  $\nu' = \inf_{i \in J} \nu_i^c / c$  est une plausibilité continue normalisée sur  $X_\perp$ . Posons  $\nu$  égale à  $c$  fois la restriction de  $\nu'$  à  $X$ . Par construction,  $\nu$  est une plausibilité continue sur  $X$ , et pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\nu(U) = c \cdot \nu'(U) = c \cdot \inf_{i \in J} \nu_i^c / c(U) = c \cdot \inf_{i \in J} \nu_i(U) / c = \inf_{i \in J} \nu_i(U) = \inf_{i \in I} \nu_i(U)$ .

Finalement, si les  $\nu_i$  sont normalisées,  $\nu(X) = \inf_{i \in I} \nu_i(X) = 1$ , donc  $\nu$  est normalisée.  $\square$

Ouvrons une parenthèse, et remarquons que toute borne supérieure de famille dirigée de plausibilités continues est aussi une plausibilité continue :

**Lemme 6.3.11** *Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de plausibilités continues sur  $X$ , ayant pour borne supérieure  $\nu$ . Alors  $\nu$  est une plausibilité continue.*

*Démonstration.* Similaire au lemme 6.3.11. Clairement  $\nu(\emptyset) = 0$ , et  $\nu$  est monotone. Pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_j)_{j \in J}$  de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \nu \left( \bigcup_{j \in J} U_j \right) &= \sup_{i \in I} \nu_i \left( \bigcup_{j \in J} U_j \right) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} \nu_i(U_j) = \sup_{j \in J} \sup_{i \in I} \nu_i(U_j) = \sup_{j \in J} \nu(U_j) \end{aligned}$$

donc  $\nu$  est continue. Reste à montrer que  $\nu$  est totalement concave. Pour chaque  $i \in I$ ,  $\nu_i$  est totalement concave, ce que l'on peut écrire

$$\nu_i \left( \bigcap_{j=1}^n U_j \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ pair}}} \nu_i \left( \bigcup_{j \in I} U_j \right) \leq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ impair}}} \nu_i \left( \bigcup_{j \in I} U_j \right)$$

Prenons les bornes supérieures de chaque côté. Comme l'addition est Scott-continue sur  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ,

$$\nu \left( \bigcap_{j=1}^n U_j \right) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ pair}}} \nu \left( \bigcup_{j \in I} U_j \right) \leq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ I \neq \emptyset, \\ |I| \text{ impair}}} \nu \left( \bigcup_{j \in I} U_j \right)$$

ce qui signifie que  $\nu$  est totalement concave.  $\square$

Par dualité convexe-concave (proposition 6.2.10 et lemme 6.2.8), on en déduit :

**Corollaire 6.3.12** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de crédibilités continues sur  $X$ , ayant pour borne inférieure  $\nu$ . Alors  $\nu$  est une crédibilité continue.*

Refermons la parenthèse, et revenons à l'étude de l'espace  $\mathbf{Pb}(X)$  des plausibilités continues sur  $X$ , avec son ordre inversé  $\geq$ .

**Proposition 6.3.13** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Soit  $\gg$  la relation "bien au-dessus" dans l'espace  $\mathbf{Pb}(X)$  (resp.,  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ ) des plausibilités continues (resp. sous-normalisées) sur  $X$ .*

*Tout plausibilité continue (resp. et sous-normalisée)  $\nu$  est la borne inférieure d'une famille filtrante  $(\nu_i)_{i \in I}$  de plausibilités simples (resp. et sous-normalisées) bien au-dessus de  $\nu$ , c'est-à-dire telles que  $\nu_i \gg \nu$  pour tout  $i \in I$ . Plus précisément, la famille des plausibilités simples (resp. et sous-normalisées) bien au-dessus de  $\nu$  est filtrante, et a pour borne inférieure  $\nu$ .*

*Démonstration.* Fixons  $c \geq \nu(X)$  non nul,  $c = 1$  dans le cas sous-normalisé. Par le lemme 6.3.9,  $\nu_{\perp}^c$  est une plausibilité continue, donc  $\nu_{\perp} = 1/c \cdot \nu_{\perp}^c$  est aussi une plausibilité continue, qui de plus est normalisée. Par le lemme 6.3.8,  $X_{\perp}$  est stablement compact. On peut donc appliquer la proposition 6.3.7 :  $\nu_{\perp}$  est borne inférieure de la famille filtrante  $(\nu'_i)_{i \in I}$  des plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu_{\perp}$ , c'est-à-dire telles que  $\nu'_i \gg_1 \nu_{\perp}$ . Soit  $\nu_i$  la restriction de  $\nu'_i$  à  $X$ . La famille  $(\nu_i)_{i \in I}$  est encore une famille filtrante. Dans le cas sous-normalisé, rappelons que  $c = 1$ , et  $\nu_i$  est donc sous-normalisée pour tout  $i \in I$ . De plus,  $\nu_{i\perp} = \nu'_i$  par définition de  $\nu_{i\perp} = 1/c \nu_{i\perp}^c$ . Si  $\nu'_i$  s'écrit

$$a_{\perp} \mathbf{e}_{\{\perp\}} + \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{F_i}$$

où chaque  $F_i$  est un fermé non vide de  $X_{\perp}$  non réduit à  $\{\perp\}$ , alors

$$\nu_i = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{F_i \cap X}$$

est donc une plausibilité simple.

Montrons que  $\nu_i \gg \nu$ . Pour toute famille filtrante  $(\nu_{ij})_{j \in J}$  de plausibilités continues (resp. et sous-normalisées) sur  $X$  telle que  $\inf_{j \in J} \nu_{ij} \leq \nu$ , clairement  $\inf_{j \in J} \nu_{ij\perp} \leq \nu_{\perp}$ , donc il existe  $j \in J$  tel que  $\nu_{ij\perp} \leq \nu'_i$ , puisque  $\nu'_i \gg_1 \nu_{\perp}$ . On en déduit  $\nu_{ij\perp} \leq \nu_{i\perp}$ , donc  $\nu_{ij} \leq \nu_i$ .

La plausibilité continue  $\nu$  est donc la borne inférieure d'une famille filtrante de plausibilités continues (resp. et sous-normalisées) bien au-dessus de  $\nu$ , au sens de la relation  $\gg$ . De plus, toute plausibilité continue  $\nu^1$  (resp. et sous-normalisée) bien au-dessus de  $\nu$ , c'est-à-dire telle que  $\nu^1 \gg \nu$ , est l'un des  $\nu_i$  : en effet, pour toute famille filtrante  $(\nu_j^1)_{j \in J}$  de plausibilités continues normalisées sur  $X_\perp$  telle que  $\inf_{j \in J} \nu_j^1 \leq \nu_\perp$ , alors en posant  $\nu_j^1$  la restriction de  $\nu_j^1$  à  $X$ ,  $\inf_{j \in J} \nu_j^1 \leq \nu$ , donc  $\nu_j^1 \leq \nu^1$  pour un  $j \in J$ , d'où  $\nu_j^1 \leq \nu_\perp^1$  ; donc  $\nu_\perp^1 \gg_1 \nu_\perp$ , c'est-à-dire qu'il existe  $i \in I$  tel que  $\nu_\perp^1 = \nu_i^1$ , autrement dit  $\nu^1 = \nu_i$ . Donc la famille des plausibilités simples (resp. et sous-normalisées)  $(\nu_i)_{i \in I}$  est celle des plausibilités simples bien au-dessus de  $\nu$  ; elle est filtrante, et a pour borne inférieure  $\nu$ .  $\square$

En passant, nous verrons à la proposition 6.3.18 que toute plausibilité continue est aussi la borne supérieure d'une famille dirigée de plausibilités simples, dès que  $X$  est stablement localement compact.

En renversant l'ordre, on obtient un résumé simple de la structure des plausibilités continues normalisées.

**Corollaire 6.3.14** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. L'espace  $\mathbf{Pb}^{op}(X)$  des plausibilités continues sur  $X$ , resp. l'espace  $\mathbf{Pb}_1^{op}(X)$  des plausibilités continues sous-normalisées sur  $X$ , munis de l'opposé  $\geq$  de l'ordre  $\leq$ , sont des cpos continus. Les plausibilités simples (resp. sous-normalisées) en forment une base.*

*Soit  $X$  un espace stablement compact. L'espace  $\mathbf{Pb}_1^{op}(X)$  des plausibilités continues normalisées sur  $X$ , muni de l'opposé  $\geq$  de l'ordre  $\leq$ , est un cpo continu. Les plausibilités simples normalisées en forment une base.*

*Démonstration.* Par la proposition 6.3.7 et la proposition 6.3.13.  $\square$

On en déduit le symétrique de la proposition 4.2.5.

**Proposition 6.3.15** *L'intégrale de Choquet sur les fonctions positives est Scott-cocontinue en le jeu : pour toute famille filtrante  $(\nu_i)_{i \in I}$  de jeux ayant une borne inférieure, alors pour toute fonction  $f$  continue bornée à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$\int_{x \in X} f(x) d \inf_{i \in I} \nu_i = \inf_{i \in I} \int_{x \in X} f(x) d \nu_i$$

*De plus, l'intégrale de Choquet est Scott-cocontinue en le jeu normalisé : l'égalité ci-dessus reste vraie pour toute fonction continue bornée à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , du moment que toutes les jeux  $\nu_i$  sont normalisés.*

*Démonstration.* On reprend la définition :

$$\int_{x \in X} f(x) d \inf_{i \in I} \nu_i = \int_0^{+\infty} \inf_{i \in I} \nu_i(f^{-1}t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\inf_{i \in I} \nu_i(f^{-1}t, +\infty[) - \inf_{i \in I} \nu_i(X)] dt$$

Si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , alors l'intégrale de droite est identiquement nulle, et l'on conclut par le théorème de Scott-cocontinuité pour les intégrales de Riemann de fonctions décroissantes.

Sinon, et si tous les jeux  $\nu_i$  sont normalisés,  $\nu_i(X) = 1$ , donc aussi  $\inf_{i \in I} \nu_i(X) = 1$ , et l'on conclut encore par le théorème de Scott-cocontinuité pour les intégrales de Riemann de fonctions décroissantes.  $\square$

**Théorème 6.3.16** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Les lois de plausibilité continues  $\nu$  sur  $X$  sont exactement les capacités linéairement extensibles par le haut. Si  $\nu$  est une plausibilité continue sur  $X$ , il existe une unique valuation continue  $\nu_*$  sur  $\mathcal{H}_u(X)$  telle que*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} f^*(F) d\nu_* \quad (6.4)$$

De plus,  $\nu_* = \nu^{\perp * \perp}$ . La fonction  $\nu \mapsto \nu_*$  est un isomorphisme d'ordre, donc aussi un homéomorphisme, de l'espace  $\mathbf{Pb}_1(X)$  des plausibilités continues normalisées sur  $X$  sur l'espace  $\mathbf{V}_1(\mathcal{H}_u(X))$  des valuations continues normalisées sur  $\mathcal{H}_u(X)$ .

La valuation continue  $\nu_*$  s'étend en une valuation continue  $\tilde{\nu}_*$  sur  $\mathcal{H}(X)$  telle que

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) d\tilde{\nu}_* \quad (6.5)$$

pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . De plus,  $\tilde{\nu}_*(\mathcal{H}(X)) = \nu_*(\mathcal{H}(X)) = \nu(X)$ .

La fonction  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$  est homogène : pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $(a\nu)_* = a\tilde{\nu}_*$  ; elle est de plus croissante et cocontinue sur l'espace  $\mathbf{Pb}_1(X)$  des plausibilités continues normalisées, et définit un plongement d'ordre : pour toutes plausibilités continues normalisées  $\nu, \nu', \nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu_* \leq \nu'_*$  si et seulement si  $\tilde{\nu}_* \leq \tilde{\nu}'_*$ .

*Démonstration.* L'unicité de  $\nu_*$  sur la topologie haute, c'est-à-dire sur  $\mathcal{H}_u(X)$ , est une conséquence de la proposition 6.3.3. En effet,  $\nu_*(\diamond U)$  est nécessairement égal à  $\nu(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Pour toute intersection finie  $\bigcap_{i=1}^n \diamond U_i$  de tels ouverts, on a nécessairement

$$\begin{aligned} \nu_* \left( \bigcap_{i=1}^n \diamond U_i \right) &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_* \left( \bigcup_{i \in I} \diamond U_i \right) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu_* \left( \diamond \bigcup_{i \in I} U_i \right) \end{aligned}$$

par le principe d'exclusion-inclusion et le lemme 3.4.18. Toute union finie d'intersections finies  $\bigcup_j \bigcap_i \diamond U_{ij}$  s'écrit aussi  $\bigcap_f \bigcup_j \diamond U_{f(j)j}$  (où  $f$  parcourt l'espace des fonctions qui à chaque  $j$  associe l'un des  $i$  possibles) =  $\bigcap_f \diamond \bigcup_j U_{f(j)j}$  par le lemme 3.4.18, et la valeur de  $\nu_*$  est donc définie de façon unique sur de tels ouverts. Finalement, tout ouvert de  $\mathcal{H}_u(X)$  est une union dirigée de tels ouverts, d'où l'unicité de la valeur de  $\nu_*$ , qui est continue, sur tout ouvert de  $\mathcal{H}_u(X)$ .

Noter que  $\nu_*$  n'est probablement elle-même pas unique sur tout  $\mathcal{H}(X)$ , contrairement à  $\nu^*$ , qui était unique sur tout  $\mathcal{Q}(X)$ , par la proposition 5.4.4.

Soit  $\nu$  une plausibilité continue sur  $X$ . En multipliant au besoin par  $1/\nu(X)$ , on peut se ramener au cas où  $\nu$  est normalisée. (Sauf si  $\nu(X) = 0$ , auquel cas le résultat est trivial.) La capacité  $\nu_* = \nu^{\perp* \perp}$  est une valuation continue sur  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$ , c'est-à-dire sur  $\mathcal{H}_u(X)$ , par la proposition 3.4.17 — mais pas sur  $\mathcal{H}(X)$ , qui a une topologie plus fine. Pour étendre  $\nu_*$  à  $\mathcal{H}(X)$ , on pourrait penser utiliser les résultats de Goubault-Larrecq (2005) pour étendre  $\nu_*$  à la topologie d'Alexandroff de  $\mathcal{H}_u(X)$ , puis restreindre la valuation continue obtenue à  $\mathcal{H}(X)$ . Ceci nécessiterait de montrer que  $\mathcal{H}_u(X)$  est un C-espace, ou bien est stablement localement finitaire, ce qui ne semble pas être le cas en général.

Nous emprunterons donc une autre voie.

Par la proposition 6.3.7,  $\nu$  est la borne inférieure de la famille filtrante  $(\nu_i)_{i \in I}$  des plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu$ . On remarque que, pour toute plausibilité simple  $\nu_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \mathbf{e}_{F_{ij}}$ ,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \mathbf{e}_{F_{ij}} \right)_* &= \left( \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \mathbf{u}_{F_{ij}} \right)^{\perp* \perp} && \text{par le lemme 6.2.8} \\ &= \left( \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \delta_{F_{ij}} \right)^{\perp} && \text{par le fait 5.5.1} \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \delta_{F_{ij}} \end{aligned}$$

par le lemme 6.2.8 encore, comme  $\delta_{F_{ij}} = \mathbf{u}_{\uparrow\{F_{ij}\}} = \mathbf{e}_{\downarrow\{F_{ij}\}}$ . Donc  $\nu_{i*}$  est une valuation simple normalisée sur  $\mathcal{H}^{op}(X)^d = \mathcal{H}_u(X)$  pour tout  $i \in I$ . La notion de valuation simple normalisée ne dépendant pas de la topologie,  $\nu_{i*}$  est aussi une valuation simple normalisée sur  $\mathcal{H}(X)$  — en fait sur tout espace ayant le même ordre de spécialisation — pour tout  $i \in I$ .

Ensuite, comme  $(\nu_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de plausibilités continues normalisées de borne inférieure  $\nu$ ,  $(\nu_i^{\perp})_{i \in I}$  est une famille dirigée de crédibilités continues normalisées de borne supérieure  $\nu^{\perp}$  par le théorème 6.2.11. Par le lemme 5.5.4,  $(\nu_i^{\perp*})_{i \in I}$  est une famille dirigée de valuations continues normalisées sur  $\mathcal{H}^{op}(X)$ , de borne supérieure  $\nu^{\perp*}$ . Par le théorème 6.2.11 de nouveau,  $(\nu_i^{\perp* \perp})_{i \in I} = (\nu_{i*})_{i \in I}$  est une famille filtrante de valuations continues normalisées sur  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$ , de borne inférieure  $\nu^{\perp* \perp} = \nu_*$ .

L'isomorphisme annoncé entre  $\mathbf{Pb}_1(X)$  et  $\mathbf{V}_1(\mathcal{H}_u(X))$  est alors une conséquence du théorème 6.2.11, du corollaire 5.5.10, et encore du théorème 6.2.11.

Comme de plus les valuations  $\nu_{i*}$  sont simples, la condition  $\nu_{i*} \leq \nu_{j*}$  s'exprime au travers du lemme de découpage de Jones, qui est une condition combinatoire sur les coefficients de  $\nu_{i*}$  et  $\nu_{j*}$  ne dépendant de la topologie qu'à travers son ordre de spécialisation. Comme  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  et  $\mathcal{H}(X)$  ont le même ordre de spécialisation, on a  $\nu_{i*} \leq \nu_{j*}$  en tant que valuations sur  $\mathcal{H}^{op}(X)^d$  si et seulement si  $\nu_{i*} \leq \nu_{j*}$  en tant que valuations sur  $\mathcal{H}(X)$ . Donc  $(\nu_{i*})_{i \in I}$  est une famille filtrante de valuations continues normalisées sur  $\mathcal{H}(X)$ . Soit  $\tilde{\nu}_*$  la borne inférieure de cette famille ; clairement la restriction de  $\tilde{\nu}_*$  à  $\mathcal{H}_u(X) = \mathcal{H}^{op}(X)^d$  vaut  $\nu_*$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} f(x) d\nu &= \int_{x \in X} f(x) d \inf_{i \in I} \nu_i \\
&= \inf_{i \in I} \int_{x \in X} f(x) d\nu_i \quad \text{par la proposition 6.3.15} \\
&= \inf_{i \in I} \int_{x \in X} f(x) d \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \epsilon_{F_{ij}} \\
&= \inf_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \int_{x \in X} f(x) d\epsilon_{F_{ij}} \quad \text{par la proposition 4.2.6} \\
&= \inf_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \sup_{x \in F_{ij}} f(x) \quad \text{par le lemme 6.1.6}
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 6.3.15, ceci est égal à

$$\inf_{i \in I} \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} f^*(F) d \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \delta_{F_{ij}} = \inf_{i \in I} \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} f^*(F) d\nu_i = \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} f^*(F) d\nu_*$$

mais aussi à

$$\inf_{i \in I} \int_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) d \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \delta_{F_{ij}} = \inf_{i \in I} \int_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) d\nu_i = \int_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) d\tilde{\nu}_*$$

Donc  $\nu$  est linéairement extensible par le haut.

Comme toutes les valuations impliquées sont normalisées — à un facteur multiplicatif près, identique pour toutes les valuations —, on a  $\tilde{\nu}_*(\mathcal{H}(X)) = 1 = \nu_*(\mathcal{H}_u(X)) = \nu(X)$ .

Le fait que  $(a\nu)_* = a\tilde{\nu}_*$  pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$  est par construction. Rappelons que nous avons défini  $\tilde{\nu}_*$  en pré-normalisant  $\nu$  d'abord, autrement dit en définissant  $\tilde{\nu}_* = 1/a \cdot (\widetilde{a\nu})_*$ , où  $a = 1/\nu(X)$  (si  $\nu(X) \neq 0$ ; sinon,  $\tilde{\nu}_* = 0$ ).

Il ne reste qu'à montrer que la fonction  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$  est croissante et continue sur les plausibilités continues normalisées. La monotonie vient du fait que, si  $\nu$  et  $\nu'$  sont deux plausibilités continues normalisées telles que  $\nu \leq \nu'$ , alors toutes les plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu'$  sont au bien au-dessus de  $\nu$ . Réciproquement,  $\tilde{\nu}_* \leq \tilde{\nu}'_*$  implique  $\nu_* \leq \nu'_*$ , puisque  $\tilde{\nu}_*$  étend  $\nu_*$  et  $\tilde{\nu}'_*$  étend  $\nu'_*$ ; ce qui implique  $\nu \leq \nu'$  puisque pour tout ouvert  $U$ ,  $\nu(U) = \nu_*(\diamond U)$  et  $\nu'(U) = \nu'_*(\diamond U)$ .

Montrons la cocontinuité. Soit  $(\nu^j)_{j \in J}$  une famille filtrante de plausibilités continues normalisées, de borne inférieure  $\nu$ . Pour chaque  $j \in J$ , soit  $(\nu_i^j)_{i \in I_j}$  la famille filtrante des plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu^j$ . Soit  $(\nu_{i'}^j)_{i' \in I'}$  la famille filtrante des plausibilités simples normalisées bien au-dessus de  $\nu$ . Pour tout  $j \in J$ ,  $i \in I_j$ ,  $\nu_i^j \gg \nu^j$ , et  $\nu^j \geq \nu$ , donc  $\nu_i^j = \nu_{i'}$  pour un  $i' \in I'$ . Réciproquement, pour tout  $i' \in I'$ ,  $\nu_{i'} \gg \nu$ . Par le corollaire 6.3.14, on peut invoquer une propriété d'interpolation : il existe une plausibilité continue normalisée  $\nu'$

telle que  $\nu_{i'} \gg \nu' \gg \nu$ . Par définition de  $\gg$ , et comme  $\nu = \inf_{j \in J} \nu^j$ , il existe  $j \in J$  tel que  $\nu' \geq \nu^j$ . Donc  $\nu_{i'} \gg \nu^j$ . Donc il existe  $i \in I_j$  tel que  $\nu_{i'} = \nu_i^j$ . On en conclut que les familles  $(\nu_{i'})_{i' \in I'}$  et  $(\nu_i^j)_{\substack{i \in I_j \\ j \in J}}$  sont identiques. Donc

$$\tilde{\nu}_* = \inf_{i' \in I'} \nu_{i'*} = \inf_{\substack{j \in J \\ i \in I_j}} \nu_{i*}^j = \inf_{j \in J} \inf_{i \in I_j} \nu_{i*}^j = \inf_{j \in J} \tilde{\nu}_*^j$$

Donc  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$  est cocontinue.  $\square$

On peut encore une fois généraliser au cas des espaces stablement localement compacts, en utilisant l'astuce d'Alvarez-Manilla. On y perd a priori l'homogénéité de la fonction  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$ .

**Théorème 6.3.17** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Les lois de plausibilité continues  $\nu$  sur  $X$  sont exactement les capacités linéairement extensibles par le haut. Si  $\nu$  est une plausibilité continue sur  $X$ , il existe une unique valuation continue  $\nu_*$  sur  $\mathcal{H}_u(X)$  telle que*

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu = \oint_{F \in \mathcal{H}_u(X)} f^*(F) d\nu_* \quad (6.6)$$

De plus,  $\nu_*(\mathcal{H}_u(X)) = \nu(X)$ .

La fonction  $\nu \mapsto \nu_*$  définit un isomorphisme d'ordre, donc un homéomorphisme de l'espace  $\mathbf{Pb}(X)$  des plausibilités continues sur  $X$  sur l'espace  $\mathbf{V}(\mathcal{H}_u(X))$  des valuations continues sur  $\mathcal{H}_u(X)$ , ainsi que du sous-espace  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$  des plausibilités continues sous-normalisées sur  $X$  sur l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{H}_u(X))$ , et du sous-espace  $\mathbf{Pb}_1(X)$  sur  $\mathbf{V}_1(\mathcal{H}_u(X))$ .

La valuation continue  $\nu_*$  s'étend en une valuation continue  $\tilde{\nu}_*$  sur  $\mathcal{H}(X)$  telle que

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu = \oint_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) d\tilde{\nu}_* \quad (6.7)$$

pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . De plus,  $\tilde{\nu}_*(\mathcal{H}(X)) = \nu(X)$ .

La fonction  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$  est croissante et cocontinue de l'espace  $\mathbf{Pb}_1(X)$  des plausibilités continues normalisées vers l'espace  $\mathbf{V}_1(\mathcal{H}(X))$  des valuations continues normalisées sur  $\mathcal{H}(X)$ , et définit un plongement d'ordre : pour toutes plausibilités continues normalisées  $\nu, \nu', \nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu_* \leq \nu'_*$  si et seulement si  $\tilde{\nu}_* \leq \tilde{\nu}'_*$ .

*Démonstration.* Encore une fois, l'unicité est garantie, par la proposition 6.3.3.

Notons que les éléments de  $\mathcal{H}_u(X_\perp)$  sont les  $F \cup \{\perp\}$ , où  $F$  parcourt les fermés de  $X$  (y compris le fermé vide). Réservons la notation  $\diamond U$  aux ouverts de base de  $\mathcal{H}_u(X)$  ( $U$  ouvert de  $X$ ), et notons  $\diamond_\perp U' = \{F \cup \{\perp\} \mid F \text{ fermé de } X, (F \cup \{\perp\}) \cap U' \neq \emptyset\}$  les ouverts de base de  $\mathcal{H}_u(X_\perp)$ ,  $U'$  ouvert de  $X_\perp$ . (Ces ouverts engendrent les topologies respectives, par la proposition 3.4.17.) Notons que si  $U'$  est  $X_\perp$  tout entier, alors  $\diamond_\perp U' = \mathcal{H}_u(X_\perp)$ , et si  $U'$  est un ouvert  $U$  de  $X$ , alors  $\diamond_\perp U = \{F \cup \{\perp\} \mid F \in \diamond U\}$ .

Considérons la fonction  $j : \mathcal{H}_u(X_\perp) \rightarrow \mathcal{H}_u(X)_\perp$  définie par  $j(F \cup \{\perp\}) = F$  si  $F$  est un fermé non vide de  $X$ ,  $j(\{\perp\}) = \perp$  sinon. Montrons que la fonction  $j$  est continue. Les ouverts de  $\mathcal{H}_u(X)_\perp$  sont ceux de  $\mathcal{H}_u(X)$  plus  $\mathcal{H}_u(X)_\perp$  tout entier. Par la proposition 3.4.17, la

topologie de  $\mathcal{H}_u(X)_\perp$  est donc engendrée par les ensembles  $\diamond U$ ,  $U$  ouvert de  $X$ . Or  $j^{-1}(\diamond U) = \{F \cup \{\perp\} \mid F \in \mathcal{H}_u(X) \text{ et } F \in \diamond U, \text{ ou } F = \emptyset \text{ et } \perp \in \diamond U\}$ . Comme  $\perp$  n'appartient pas à  $\diamond U$ ,  $j^{-1}(\diamond U) = \{F \cup \{\perp\} \mid F \in \diamond U\} = \diamond_\perp U$ . Donc  $j$  est continue.

Par le lemme 6.3.8,  $X_\perp$  est stablement compact. Soit  $c = \nu(X)$ , par le lemme 6.3.9,  $\nu_\perp^c$  est une plausibilité continue sur  $X_\perp$ . Donc, en utilisant le théorème 6.3.16 et la caractérisation des capacités linéairement extensibles par le haut donnée à la proposition 6.3.3, il existe une valuation continue  $\nu_{\perp*}^c$  sur  $\mathcal{H}_u(X_\perp)$  telle que  $\nu_{\perp*}^c(\diamond_\perp U') = \nu_\perp^c(U')$  pour tout ouvert  $U'$  de  $X_\perp$ .

Par le lemme 4.2.9,  $j[\nu_{\perp*}^c]$  est une valuation continue sur  $\mathcal{H}_u(X)_\perp$ . Pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}_u(X)$ , en rappelant que  $\mathcal{U}$  est aussi un ouvert de  $\mathcal{H}_u(X)_\perp$ , posons  $\nu_*(\mathcal{U}) = j[\nu_{\perp*}^c](\mathcal{U})$ . Il est immédiat que  $\nu_*$  est une valuation continue sur  $\mathcal{H}_u(X)$ . De plus, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\nu_*(\diamond U) = \nu_{\perp*}^c(j^{-1}(\diamond U)) = \nu_{\perp*}^c(\diamond_\perp U) = \nu_\perp^c(U) = \nu(U)$ , la dernière égalité étant due au fait que  $U$  est un ouvert de  $X$  et à la définition de  $\nu_\perp^c$ .

Ceci termine de démontrer que  $\nu$  est linéairement extensible par le haut. Le fait que (6.6) soit valide vient du fait que  $P = \nu_*$  vérifie l'équation (6.3), par la proposition 6.3.3. On a de plus  $\nu_*(\mathcal{H}_u(X)) = \nu_*(\diamond X) = \nu(X)$  par construction.

Montrons que  $\nu \mapsto \nu_*$  définit un isomorphisme d'ordre. Soit  $\nu \leq \nu'$ , et posons  $c = \nu(X)$ ,  $c' = \nu'(X)$ . En particulier,  $c \leq c'$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\nu_\perp^c(U) = \nu(U) \leq \nu'(U) = \nu_\perp^{c'}(U)$ ; pour l'ouvert  $X_\perp$ ,  $\nu_\perp^c(X_\perp) = c \leq c' = \nu_\perp^{c'}(X_\perp)$ . (Voir la définition, lemme 6.3.9.) Donc  $\nu_{\perp*}^c \leq \nu_{\perp*}^{c'}$  par le théorème 6.3.16, donc pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}_u(X)$ ,  $\nu_*(\mathcal{U}) = \nu_{\perp*}^c(j^{-1}(\mathcal{U})) \leq \nu_{\perp*}^{c'}(j^{-1}(\mathcal{U})) = \nu'_*(\mathcal{U})$ . Donc  $\nu_* \leq \nu'_*$ . Réciproquement, si  $\nu_* \leq \nu'_*$  alors  $\nu_*(\diamond U) \leq \nu'_*(\diamond U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , donc  $\nu(U) \leq \nu'(U)$ .

Ceci définit un isomorphisme d'ordre, donc un homéomorphisme, de  $\mathbf{Pb}(X)$  sur  $\mathbf{V}(\mathcal{H}_u(X))$ . De plus, si  $\nu(X) = 1$ , alors  $\nu_*(\mathcal{H}_u(X)) = \nu(X) = 1$ , et réciproquement si  $\nu_*(\mathcal{H}_u(X)) = 1$  alors  $\nu(X) = 1$ , donc ceci définit aussi un isomorphisme de  $\mathbf{Pb}_1(X)$  sur  $\mathbf{V}_1(\mathcal{H}_u(X))$ . On en déduit de même que ceci définit encore un isomorphisme de  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$  sur  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{H}_u(X))$ .

Passons à l'étude de  $\mathcal{H}(X)$  et de la valuation  $\tilde{\nu}_*$ .

Considérons la fonction  $k : \mathcal{H}(X_\perp) \rightarrow \mathcal{H}(X)_\perp$  définie, comme  $j$ , par  $k(F \cup \{\perp\}) = F$  si  $F$  est un fermé non vide de  $X$ ,  $k(\{\perp\}) = \perp$  sinon. Réserveons la notation  $cl$  pour l'adhérence dans  $X$ , et notons  $cl_\perp$  l'adhérence dans  $X_\perp$ . Notons que  $cl_\perp(A \cup \{\perp\}) = cl(A) \cup \{\perp\}$  pour toute partie  $A$  de  $X$  : l'inclusion  $cl(A) \cup \{\perp\} \supseteq cl_\perp(A \cup \{\perp\})$  est due au fait que  $cl(A) \cup \{\perp\}$  est un fermé de  $X_\perp$  contenant  $A \cup \{\perp\}$ ; pour l'inclusion réciproque, on note que  $\{\perp\} \subseteq cl_\perp(A \cup \{\perp\})$  d'une part, et d'autre part que  $cl(A) = \bigcap_F \text{fermé de } X, F \supseteq A \text{ } F \subseteq \bigcap_F \text{fermé de } X, F \supseteq A (F \cup \{\perp\}) \subseteq \bigcap_{F' \text{ fermé de } X_\perp, F' \supseteq A \cup \{\perp\}} F' = cl_\perp(A \cup \{\perp\})$ , puisque tout fermé  $F'$  contenant  $A \cup \{\perp\}$  est de la forme  $F' \cup \{\perp\}$  contient  $A$ .

Considérons une famille dirigée  $(F'_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $X_\perp$ . Si cette famille ne contient que  $\{\perp\}$ , alors sa borne supérieure est  $\{\perp\}$ , et  $k(cl_\perp(\bigcup_{i \in I} F'_i)) = k(\{\perp\}) = \perp = \sup_{i \in I} k(F'_i)$ . Sinon, considérons la sous-famille — non vide — des  $F'_i$  qui sont de la forme  $F_i \cup \{\perp\}$ ,  $F_i \in \mathcal{H}(X)$ . Cette sous-famille est clairement dirigée, et de même borne supérieure de  $(F'_i)_{i \in I}$ . On peut donc supposer sans perdre de généralité que  $F'_i$  est de la forme  $F_i \cup \{\perp\}$  pour tout  $i \in I$ ,  $F_i \in \mathcal{H}(X)$ . Alors  $k(cl_\perp(\bigcup_{i \in I} F'_i)) = k(cl_\perp(\bigcup_{i \in I} F_i \cup \{\perp\})) = k(cl(\bigcup_{i \in I} F_i) \cup \{\perp\}) = cl(\bigcup_{i \in I} F_i) = \sup_{i \in I} k(F'_i)$ . Donc  $k$  est continue.

On procède alors de même que plus haut, en utilisant  $k$  plutôt que  $j$ , c'est-à-dire en posant

$\tilde{\nu}_*(\mathcal{U}) = k[\widetilde{\nu_{\perp*}^c}](\mathcal{U})$  pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}(X)$ . On note que  $\tilde{\nu}_*$  est une valuation continue sur  $\mathcal{H}(X)$ , que  $\tilde{\nu}_*$  étend  $\nu_*$ , puisque pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}_u(X)$  (qui est aussi un ouvert de  $\mathcal{H}(X)$ ),  $\tilde{\nu}_*(\mathcal{U}) = \widetilde{\nu_{\perp*}^c}(k^{-1}(\mathcal{U})) = \widetilde{\nu_{\perp*}^c}(j^{-1}(\mathcal{U}))$  (puisque  $k$  et  $j$  coïncident)  $= \nu_{\perp*}^c(j^{-1}(\mathcal{U}))$  (puisque  $j^{-1}(\mathcal{U})$  est un ouvert de  $\mathcal{H}_u(X_{\perp})$ , et  $\nu_{\perp*}^c$  étend  $\nu_{\perp*}^c = \nu_*(\mathcal{U})$ ). En particulier,  $\tilde{\nu}_*(\mathcal{H}(X)) = \widetilde{(\diamond X)} = \nu_*(\diamond X) = \nu(X)$ .

L'équation (6.7) s'en déduit tout de suite. En effet, par la définition 4.1.1,

$$\begin{aligned} \oint_{F \in \mathcal{H}(X)} f^*(F) d\tilde{\nu}_* &= \int_0^{+\infty} \tilde{\nu}_*(f^{*-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\tilde{\nu}_*(f^{*-1}]t, +\infty[) - \tilde{\nu}_*(\mathcal{H}(X))] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \nu_*(f^{*-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu_*(f^{*-1}]t, +\infty[) - \tilde{\nu}_*(\mathcal{H}(X))] dt \\ &\quad \text{puisque } f^{*-1}]t, +\infty[ \text{ est un ouvert de } \mathcal{H}_u(X) \\ &\quad \text{et } \tilde{\nu}_* \text{ est une extension de } \nu_* \\ &= \int_0^{+\infty} \nu_*(f^{*-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu_*(f^{*-1}]t, +\infty[) - \nu_*(\mathcal{H}_u(X))] dt \\ &= \oint_{F \in \mathcal{H}_u(X)} f^*(F) d\nu_* = \oint_{x \in X} f(x) d\nu \end{aligned}$$

par l'équation (6.6).

Montrons que  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$  est croissante. Soient  $\nu, \nu'$  deux plausibilités continues sur  $X$ , soit  $c = \nu(X)$  et  $c' = \nu'(X)$ . Supposons  $\nu \leq \nu'$ . En particulier,  $c \leq c'$ . Donc  $\nu_{\perp}^c \leq \nu'_{\perp}^{c'}$ , par définition. Par le théorème 6.3.16,  $\widetilde{\nu_{\perp*}^c} \leq \widetilde{\nu'_{\perp*}^{c'}}$ . Ceci implique que  $\tilde{\nu}_* \leq \tilde{\nu}'_*$  : pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}(X)$ ,  $\tilde{\nu}_*(\mathcal{U}) = \widetilde{\nu_{\perp*}^c}(k^{-1}(\mathcal{U})) \leq \widetilde{\nu'_{\perp*}^{c'}}(k^{-1}(\mathcal{U})) = \tilde{\nu}'_*(\mathcal{U})$ .

Réciproquement, si  $\tilde{\nu}_* \leq \tilde{\nu}'_*$ , alors en particulier  $\tilde{\nu}_*(\diamond U) \leq \tilde{\nu}'_*(\diamond U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , donc  $\nu(U) \leq \nu'(U)$ . Donc  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$  définit un plongement d'ordre.

Pour la cocontinuité, soit  $(\nu_j)_{j \in J}$  une famille filtrante de plausibilités continues, de borne inférieure  $\nu$ . Posons  $c_j = \nu_j(X)$ . La famille  $(c_j)_{j \in J}$  est filtrante, et a pour borne inférieure  $c = \nu(X)$ . Comme  $\nu \mapsto \tilde{\nu}_*$  est croissante,  $(\tilde{\nu}_j)_{j \in J}$  est une famille filtrante. Par le théorème 6.3.16,  $\widetilde{\nu_{\perp*}^c} = \inf_{j \in J} \widetilde{\nu_{j\perp*}^{c_j}}$ . Pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}(X)$ ,  $\tilde{\nu}_*(\mathcal{U}) = \widetilde{\nu_{\perp*}^c}(k^{-1}(\mathcal{U})) = \inf_{j \in J} \widetilde{\nu_{j\perp*}^{c_j}}(k^{-1}(\mathcal{U})) = \inf_{j \in J} \tilde{\nu}_{j*}(\mathcal{U})$ .  $\square$

Nous déduisons de ce théorème une forme symétrique de la proposition 6.3.13 : les plausibilités continues sont non seulement bornes inférieures de familles dirigées de plausibilités simples, mais aussi bornes supérieures d'autres familles de plausibilités simples :

**Proposition 6.3.18** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Pour toute plausibilité continue  $\nu$  sur  $X$ ,  $\tilde{\nu}_*$  est une valuation quasi-simple sur  $\mathcal{H}(X)$ . Toute plausibilité continue  $\nu$  sur  $X$  est borne supérieure d'une famille dirigée de plausibilités simples  $(\nu_i)_{i \in I}$ .*

*Démonstration.* Rappelons que l'existence de  $\tilde{\nu}_*$  est garantie par le théorème 6.3.17. Or  $\mathcal{H}(X)$  est stablement localement finitaire par le lemme 3.4.3. Rappelons que sur tout espace stablement localement finitaire, toute valuation continue a une plus grande extension à la topologie

d'Alexandroff, et est donc quasi-simple (voir la section 2.8, ou Goubault-Larrecq 2005). Donc  $\tilde{\nu}_*$  est quasi-simple.

Écrivons  $\tilde{\nu}_*$  sous forme d'une borne supérieure d'une famille dirigée de valuations simples  $(\nu'_i)_{i \in I}$  sur  $\mathcal{H}(X)$ . Pour toute valuation simple  $\nu' = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{F_i}$  sur  $\mathcal{H}(X)$ , posons  $\nu'_\circ$  la plausibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{F_i}$ . On observe :

1. Si  $\nu' \leq \nu''$  alors  $\nu'_\circ \leq \nu''_\circ$ . En effet, soit  $\nu' = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{F_i}$ ,  $\nu'' = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_{F'_j}$ . Par le lemme de découpage de Jones, il existe une matrice de coefficients  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  dans  $\mathbb{R}^+$  tels que la somme des coefficients sur chaque ligne donne les  $a_i$  ( $\sum_{j=1}^n t_{ij} = a_i$ ), la somme des coefficients sur chaque colonne donne une quantité inférieure ou égale aux  $b_j$  ( $\sum_{i=1}^m t_{ij} \leq b_j$ ), et telle que les seules entrées  $t_{ij}$  non nulles de la matrice sont telles que  $F_i \subseteq F'_j$ . Alors

$$\begin{aligned} \nu'_\circ &= \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{F_i} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} t_{ij} \mathbf{e}_{F_i} \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} t_{ij} \mathbf{e}_{F'_j} \quad \text{puisque lorsque } t_{ij} \neq 0, F_i \subseteq F'_j, \\ &\quad \text{donc } \mathbf{e}_{F_i} \leq \mathbf{e}_{F'_j} \text{ par la proposition 6.3.19} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m t_{ij} \right) \mathbf{e}_{F'_j} \leq \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_{F'_j} = \nu''_\circ \end{aligned}$$

2. Posons  $\nu_i = \nu'_{i_\circ}$  pour tout  $i \in I$ . Par le point 2. ci-dessus,  $(\nu_i)_{i \in I}$  est donc une famille dirigée de plausibilités simples.

3. Notons que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \nu(U) &= \int_{x \in X} \chi_U(x) d\nu = \int_{F \in \mathcal{H}(X)} \chi_U^*(F) d\tilde{\nu}_* \\ &\quad \text{par le théorème 6.3.17} \\ &= \int_{F \in \mathcal{H}(X)} \chi_{\diamond U}(F) d\tilde{\nu}_* = \tilde{\nu}_*(\diamond U) \end{aligned}$$

et que pour toute valuation simple  $\nu' = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{F_i}$  sur  $\mathcal{H}(X)$ ,

$$\nu'_\circ(U) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ F_i \cap U \neq \emptyset}} a_i = \nu'(\diamond U)$$

Comme  $\tilde{\nu}_* = \sup_{i \in I} \nu'_i$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , on a donc

$$\nu(U) = \tilde{\nu}_*(\diamond U) = \sup_{i \in I} \nu'_i(\diamond U) = \sup_{i \in I} \nu'_{i_\circ}(U) = \sup_{i \in I} \nu_i(U)$$

D'où le résultat. □

Le théorème 6.3.16 et le théorème 6.3.17 nous présentent un dilemme. D'une part,  $\nu_*$  est unique, et la théorie est donc particulièrement agréable lorsque l'on considère les valuations continues sur  $\mathcal{H}_u(X)$ , et non  $\mathcal{H}(X)$ . Il serait donc tentant de fonder notre étude sur  $\mathcal{H}_u(X)$  comme modèle de non-déterminisme angélique.

La tradition, par ailleurs plutôt fructueuse, veut que l'on cherche des modèles de calculs sous forme de cpo, et non d'espaces topologiques généraux. Ceci implique de considérer l'espace  $\mathcal{H}(X)$ . On a alors :

**Proposition 6.3.19** *Soit  $X$  un espace topologique. La fonction de  $\mathcal{H}(X)$  dans l'espace  $\mathbf{Pb}(X)$  des plausibilités continues (resp.  $\mathbf{Pb}_1(X)$  des plausibilités continues normalisées) qui à  $F$  associe  $\epsilon_F$  est un plongement d'ordre Scott-continu.*

*Démonstration.* Si  $F \subseteq F'$ , alors  $\epsilon_F \leq \epsilon_{F'}$  : pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , si  $\epsilon_F(U) = 1$ , c'est-à-dire si  $F \cap U \neq \emptyset$ , alors a fortiori  $F' \cap U \neq \emptyset$ , donc  $\epsilon_{F'}(U) = 1$ . Réciproquement, si  $\epsilon_F \leq \epsilon_{F'}$ , posons  $U$  l'ouvert  $X \setminus F'$ . Comme  $\epsilon_{F'}(U) = 0$ , nécessairement  $\epsilon_F(U) = 0$ , c'est-à-dire  $F \cap (X \setminus F') = \emptyset$ , autrement dit  $F \subseteq F'$ . Donc  $F \mapsto \epsilon_F$  est un plongement d'ordre.

Montrons que  $F \mapsto \epsilon_F$  est continue, c'est-à-dire Scott-continue. Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de fermés non vides de  $X$ . On observe d'abord que  $\epsilon_{\bigcup_{i \in I} F_i}(U) = 1$  si et seulement si  $(\bigcup_{i \in I} F_i) \cap U \neq \emptyset$ , si et seulement s'il existe  $x \in U$  tel que  $x \in \bigcup_{i \in I} F_i$ , si et seulement s'il existe  $i \in I$  et  $x \in U$  tels que  $x \in F_i$ , si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $F_i \cap U \neq \emptyset$ . Donc  $\epsilon_{\bigcup_{i \in I} F_i} = \sup_{i \in I} \epsilon_{F_i}$ . Or la borne supérieure de  $(F_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{H}(X)$  est  $cl(\bigcup_{i \in I} F_i)$ , et  $\epsilon_{cl(\bigcup_{i \in I} F_i)} = \epsilon_{\bigcup_{i \in I} F_i}$  par le lemme 6.1.4.  $\square$

Ceci justifie, au moins en partie, que nous ayons à considérer  $\mathcal{H}(X)$  plutôt que  $\mathcal{H}_u(X)$ . Le prix à payer est qu'il ne semble pas que  $\tilde{\nu}_*$  soit particulièrement unique, ni même canonique, au sens où  $\tilde{\nu}_*$  serait, disons, le  $P$  le plus petit ou le plus grand vérifiant (6.3). Si l'on tient à  $\mathcal{H}_u(X)$ , nous devons considérer la topologie faible, comme on le verra à la proposition 6.3.20 ci-dessous.

Notons en attendant un point subtil. La fonction qui à  $F \in \mathcal{H}(X)$  associe  $\epsilon_F$  est injective, Scott-continue, et il est facile de voir que le fait que ce soit un plongement d'ordre implique que son inverse est aussi Scott-continue de son image  $\mathfrak{S}(F \mapsto \epsilon_F)$  vers  $\mathcal{H}(X)$ . Ceci n'en fait pas pour autant un plongement d'espaces topologiques. Pour ceci, il faudrait que son inverse soit continue de  $\mathfrak{S}(F \mapsto \epsilon_F)$ , muni de la topologie induite par celle de  $\mathbf{Pb}(X)$ , resp.  $\mathbf{Pb}_1(X)$ . Il n'y a aucune raison que cette dernière topologie soit identique à la topologie de Scott de  $\mathfrak{S}(F \mapsto \epsilon_F)$ .

**Proposition 6.3.20** *Soit  $X$  un espace topologique. La fonction de  $\mathcal{H}_u(X)$  dans  $\mathbf{Pb}_{wk}(X)$ , resp.  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$  qui à  $F$  associe  $\epsilon_F$  est un plongement d'espaces topologiques.*

*Démonstration.* Notons temporairement  $\eta$  cette fonction. Pour tout ouvert  $U$  et tout réel  $r$ ,  $\eta^{-1}[U > r]$  vaut  $X$  si  $r < 0$ ,  $\emptyset$  si  $r \geq 1$ , et  $\diamond U$  sinon, donc  $\eta$  est continue. Réciproquement, l'image par  $\eta$  de  $\diamond U_1 \cap \dots \cap \diamond U_n$  est l'ensemble des  $\eta_F$  qui sont dans  $[U_1 > 1/2] \cap \dots \cap [U_n > 1/2]$  : ceci est l'intersection de l'image  $A$  de  $\mathcal{H}_u(X)$  par  $\eta$  avec un ouvert de  $\mathbf{Pb}_{wk}(X)$ , resp.  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ , et donc est un ouvert de  $A$ . Tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X$  est une union d'ouverts de la forme  $\diamond U_1 \cap \dots \cap \diamond U_n$ . Comme l'image d'une union est l'union des images, l'image de  $U$  par  $\eta$  est aussi un ouvert de  $A$ . Comme  $\eta$  est injective, ce qui est notamment une conséquence de la proposition 6.3.19,  $\eta$  est un plongement.  $\square$

Lorsque  $X$  est un cpo continu, la proposition 3.4.19 énonce que  $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}_u(X)$ . Les deux propositions ci-dessus énoncent alors que ce dernier espace se plonge, topologiquement, dans tous les espaces de plausibilités, avec la topologie faible ou de Scott.

On peut maintenant reformuler l'analogie de la proposition 5.5.6. L'espace  $\mathbf{Pb}_1(X)$  des plausibilités continues normalisées est le plus petit espace permettant de parler à la fois de non-déterminisme angélique et de tirage probabiliste :

**Proposition 6.3.21** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. L'espace  $\mathbf{Pb}_1(X)$  des plausibilités continues normalisées sur  $X$  est le plus petit espace  $\mathcal{C}$  de capacités sur  $X$  tel que :*

**(Non-déterminisme)** *Tout jeu d'exemple continu normalisé  $\epsilon_F$ ,  $F \in \mathcal{H}(X)$ , est dans  $\mathcal{C}$ .*

**(Valuation normalisée)** *Toute combinaison linéaire finie  $\sum_{i=1}^n a_i \nu_i$  à coefficients positifs tels que  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , d'éléments de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{C}$ .*

**(Cocontinuité)** *Toute borne inférieure de famille filtrante d'éléments de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* D'abord il est clair que tout élément de  $\mathcal{C}$  est une plausibilité continue normalisée, en utilisant la proposition 6.1.2, la proposition 6.1.3, et le lemme 6.3.10. La réciproque est par la proposition 6.3.13.  $\square$

Nous conjecturons que les résultats de cette section tiennent encore lorsque  $X$  n'est que localement compact et cohérent, mais pas nécessairement bien filtrant. Ceci, cependant, demanderait de nous passer du bel outil qu'est la dualité convexe-concave, et semble requérir des efforts soutenus.

Nous avons remarqué en section 5.5 que la valuation de Lebesgue sur  $[0, 1]$  était la borne supérieure d'une famille dirigée de crédibilités simples sur  $[0, 1]$ . Les résultats ci-dessus montrent que la valuation de Lebesgue sur  $[0, 1]$  est aussi la borne inférieure d'une famille filtrante de plausibilités simples sur  $[0, 1]$ , où  $[0, 1]$  est équipé de sa topologie métrique usuelle.

On peut donc approcher l'intégrale de toute fonction continue bornée  $f$  de  $[0, 1]$  (avec sa topologie métrique) vers  $\mathbb{R}$  (avec sa topologie de Scott) à la fois par le haut et par le bas :

- par le bas, par des sommes de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i \min_{x \in Q_i} f(x)$  ;
- par le haut, par des sommes de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i \sup_{x \in F_i} f(x)$ .

Comme les fermés  $F_i$  sont fermés dans  $[0, 1]$ , qui est compact  $T_2$ , chaque  $F_i$  est fermé, donc  $\sup_{x \in F_i} f(x) = \max_{x \in F_i} f(x)$ . Les sommes ci-dessus sont donc des sommes de Darboux. Une fonction est *R-intégrable* si et seulement si la borne supérieure des sommes du premier type égale la borne inférieure des sommes du second type : nous venons de retrouver que toute fonction continue de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}^+$  est R-intégrable (Edalat, 1995). Pour ceci, nous avons bien entendu utilisé des moyens d'une sophistication considérable, comparé au résultat obtenu. Nous ne souhaitons pas voir ceci comme l'unique aboutissement de la théorie des crédibilités et des plausibilités, ce qui serait par trop réducteur. Il est cependant agréable de voir que les sommes de Darboux hautes et basses sont naturellement en relation avec les notions de crédibilité et de plausibilité.

## 6.4 Les topologies cofaible et co-Scott

L'isomorphisme  $\nu \mapsto \nu^\perp$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, par le théorème 6.2.11, notamment entre  $\mathbf{J}_1(X)$  et  $\mathbf{J}_1^{op}(X^d)$ . Si l'on équipe  $\mathbf{J}_1(X)$  de sa topologie faible, c'est-à-dire si l'on considère l'espace  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X)$ , la bijection  $\nu \mapsto \nu^\perp$  envoie  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X)$  sur un espace de jeux normalisés sur  $X^d$ . Comme cette bijection renverse l'ordre, il serait tentant de penser que la topologie obtenue serait celle de  $\mathbf{J}_{1\ wk}^d(X^d)$ , l'ordre de spécialisation de  $\mathbf{J}_{1\ wk}^d(X^d)$  étant précisément celui de  $\mathbf{J}_1^{op}(X^d)$ . Mais ne mettons pas la charrue avant les bœufs, et examinons la topologie obtenue sur  $\mathbf{J}_1(X^d)$  en transportant la topologie faible de  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X)$  le long de la bijection  $\nu \mapsto \nu^\perp$ . Pour tout ouvert de base  $[X \setminus Q > r]$  de  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X^d)$ ,

$$\begin{aligned} (\nu \mapsto \nu^\perp)^{-1}[X \setminus Q > r] &= \{\nu \in \mathbf{J}_1(X) \mid \nu^\perp(X \setminus Q) > r\} \\ &= \{\nu \in \mathbf{J}_1(X) \mid \nu^\dagger(Q) < 1 - r\} \end{aligned}$$

Posons donc :

**Définition 6.4.1 (Topologie cofaible)** *La topologie cofaible sur un espace  $Y$  de fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}$  est celle engendrée par les ouverts  $\langle Q < r \rangle = \{\nu \in Y \mid \nu^\dagger(Q) < r\}$ ,  $Q$  compact saturé de  $X$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .*

Par le calcul ci-dessus,  $\nu \mapsto \nu^\perp$  est continue de  $\mathbf{J}_1(X)$  muni de la topologie cofaible vers  $\mathbf{J}_1(X^d)$  muni de la topologie faible. Réciproquement,

$$\begin{aligned} (\nu^\perp \mapsto \nu)^{-1}\langle Q < r \rangle &= \{\nu^\perp \in \mathbf{J}_1(X^d) \mid \nu^\dagger(Q) < r\} \\ &= \{\nu^\perp \in \mathbf{J}_1(X^d) \mid \nu^\perp(X \setminus Q) > 1 - r\} = [X \setminus Q > 1 - r] \end{aligned}$$

On obtient donc, par construction :

**Proposition 6.4.2** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Alors  $\nu \mapsto \nu^\perp$  définit un homéomorphisme entre :*

- l'espace des jeux normalisés continus sur  $X$ , muni de la topologie cofaible, et l'espace des jeux normalisés continus sur  $X^d$ , muni de la topologie faible ;
- l'espace des jeux convexes continus normalisés sur  $X$ , muni de la topologie cofaible, et l'espace des jeux concaves continus normalisés sur  $X^d$ , muni de la topologie faible ;
- l'espace des jeux concaves continus normalisés sur  $X$ , muni de la topologie cofaible, et l'espace des jeux convexes continus normalisés sur  $X^d$ , muni de la topologie faible ;
- l'espace des crédibilités continues normalisées sur  $X$ , muni de la topologie cofaible, et l'espace des plausibilités continues normalisées sur  $X^d$ , muni de la topologie faible ;
- l'espace des plausibilités continues normalisées sur  $X$ , muni de la topologie cofaible, et l'espace des crédibilités continues normalisées sur  $X^d$ , muni de la topologie faible ;
- l'espace des probabilités continues sur  $X$ , muni de la topologie cofaible, et l'espace des probabilités continues sur  $X^d$ , muni de la topologie faible.

On a vu l'importance des familles filtrantes de plausibilités, et de leurs bornes inférieures. Par exemple, par le lemme 6.3.5, si  $X$  est stablement compact, alors  $\mathbf{Pb}_1(X)$  admet toutes les bornes

inférieures de familles filtrantes. En d'autres termes,  $\mathbf{Pb}_1^{op}(X)$  est un cpo. La proposition 6.3.7 énonce que c'est en fait un cpo continu, avec une base de plausibilités simples normalisées. Ces résultats sont aussi valables lorsque  $X$  n'est que stablement localement compact, et en considérant les espaces  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$  ou même  $\mathbf{Pb}(X)$ , par le corollaire 6.3.14. Par analogie avec la définition de la topologie de Scott, posons :

**Définition 6.4.3** *La topologie co-Scott sur un ensemble ordonné  $X$  est formée des parties  $L \subseteq X$  qui sont closes par le bas et telles que toute partie filtrante  $F \subseteq X$  qui a une borne inférieure dans  $L$  intersecte  $L$ .*

Cette définition n'est pas spécialement nécessaire : la topologie co-Scott sur  $X$  est juste la topologie de Scott sur  $X^{op}$ , par construction. On a un analogue de la proposition 4.5.3, qui exprime que la topologie haute est moins fine que la topologie faible, qui est moins fine que la topologie de Scott. Rappelons que la topologie basse sur un ensemble ordonné  $X$  est engendrée par les complémentaires des ensembles  $\uparrow x$ ,  $x \in X$ .

**Proposition 6.4.4** *Soit  $Y$  un espace de capacités sur  $X$ . La topologie cofaible sur  $Y$  est moins fine que la topologie co-Scott.*

*Si  $X$  est localement compact, et  $Y$  est un espace de jeux continus sur  $X$ , alors la topologie basse est moins fine que la topologie cofaible.*

*Démonstration.* Considérons un ouvert cofaible  $\langle Q < r \rangle$  quelconque sur  $Y$ . Il est clos par le bas : si  $\nu_0 \in \langle Q < r \rangle$ , et  $\nu \leq \nu_0$ , alors  $\nu^\dagger \leq \nu_0^\dagger$  par le lemme 6.2.9, première partie, donc  $\nu^\dagger(Q) \leq \nu_0^\dagger(Q) < r$ , c'est-à-dire  $\nu \in \langle Q < r \rangle$ . Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille filtrante d'éléments de  $Y$  ayant une borne inférieure  $\nu$  dans  $\langle Q < r \rangle$ . Par définition,  $(\inf_{i \in I} \nu_i)^\dagger(Q) < r$ , c'est-à-dire  $\inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q} \inf_{i \in I} \nu_i(U) < r$ . Donc il existe un ouvert  $U \supseteq Q$  et un indice  $i \in I$  tels que  $\nu_i(U) < r$ . Ceci implique que  $\nu_i^\dagger(Q) = \inf_{U \text{ ouvert } \supseteq Q} \nu_i(U) < r$ , donc  $\nu_i \in \langle Q < r \rangle$ . Donc  $\langle Q < r \rangle$  est un ouvert de la topologie co-Scott.

Pour la deuxième partie de la proposition, soit  $\nu_0 \in Y$ , et considérons l'ouvert bas  $Y \setminus \uparrow \nu_0$  :

$$\begin{aligned} Y \setminus \uparrow \nu_0 &= \{ \nu \in Y \mid \nu_0 \not\leq \nu \} \\ &= \{ \nu \in Y \mid \nu_0^\dagger \not\leq \nu^\dagger \} \quad \text{par le lemme 6.2.9} \\ &= \{ \nu \in Y \mid \exists Q \text{ compact de } X \cdot \nu_0^\dagger(Q) > \nu^\dagger(Q) \} \\ &= \bigcup_{Q \text{ compact de } X} \langle Q < \nu_0^\dagger(Q) \rangle \end{aligned}$$

est donc un ouvert cofaible. □

Une autre inclusion de topologies est la suivante.

**Lemme 6.4.5** *Soit  $X$  un espace stablement compact. La topologie cocompacte de la topologie haute sur  $\mathbf{V}_1(X)$  (resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{Pb}_1(X)$ ,  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{Cd}_1(X)$ ,  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$ ) est moins fine que la topologie co-Scott. Autrement dit, tout compact saturé de  $\mathbf{V}_1(X)$  (resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{Pb}_1(X)$ ,  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{Cd}_1(X)$ ,  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$ ), muni de sa topologie haute, est co-Scott-fermé.*

*Démonstration.* Soit  $Y$  l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  (resp. l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{Pb}_1(X)$ ,  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ ,  $\mathbf{Cd}_1(X)$ ,  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$ ).

Soit  $\mathcal{Q}$  un compact saturé de  $Y$  muni de la topologie haute. Par définition, si  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée d'ouverts de la topologie haute telle que  $\mathcal{Q} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ , alors  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U}_i$  pour un certain  $i \in I$ . De façon équivalente, si  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante de fermés de la topologie haute telle que tout  $\mathcal{F}_i$  intersecte  $\mathcal{Q}$ , alors  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  intersecte  $\mathcal{Q}$ . Soit donc  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille filtrante quelconque d'éléments de  $Y$ , et  $\mathcal{F}_i = \downarrow \nu_i$  : alors la propriété de compacité s'exprime par le fait que si  $\downarrow \nu_i$  intersecte  $\mathcal{Q}$  pour tout  $i$ , alors  $\bigcap_{i \in I} \downarrow \nu_i$  intersecte  $\mathcal{Q}$ .

Comme  $\mathcal{Q}$  est saturé, et que l'ordre de spécialisation de la topologie haute est  $\leq$ , le fait que  $\downarrow \nu_i$  intersecte  $\mathcal{Q}$  est équivalent à demander que  $\nu_i \in \mathcal{Q}$ . Ensuite,  $\bigcap_{i \in I} \downarrow \nu_i$  est l'ensemble des minorants de la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$ . Mais, comme  $\inf_{i \in I} \nu_i$  existe toujours, et est une plausibilité continue (resp. normalisée) dès que tous les  $\nu_i$  le sont par le lemme 6.3.10, et aussi une crédibilité continue (resp. normalisée) dès que tous les  $\nu_i$  le sont par le corollaire 6.3.12, on peut simplifier la propriété de compacité en : si  $\nu_i \in \mathcal{Q}$  pour tout  $i$ , alors  $\inf_{i \in I} \nu_i \in \mathcal{Q}$ . Comme de plus  $\mathcal{Q}$  est clos par le haut pour  $\leq$ , il est clos par le bas pour  $\geq$ , donc est fermé pour la topologie co-Scott.  $\square$

Relions maintenant les topologies faible et cofaible. Le résultat est dû à Jung (2004, dernières lignes), où il est affirmé que les ensembles  $\langle Q < r \rangle$  engendrent la topologie cocompacte de  $\mathbf{V}_{1\text{wk}}(X)$ , lorsque  $X$  est stablement compact.

**Lemme 6.4.6** *Soit  $X$  un espace localement relativement compact. Soit  $P$  n'importe quelle conjonction de propriétés parmi "stricte", "convexe", "concave", "totalement convexe", "totalement concave", "modulaire", "normalisé".*

*Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$ , notons  $\langle Q \geq r \rangle$  le complémentaire de  $\langle Q < r \rangle$  dans l'espace des fonctions continues de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$  qui vérifient  $P$ , muni de la topologie faible (c'est-à-dire de la convergence simple). Alors  $\langle Q \geq r \rangle$  est un compact saturé de cet espace.*

*Démonstration.* On utilise la machinerie de la section 4.5. Posons  $E$  l'espace des fonctions continues de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$  vérifiant  $P$ . Notons que  $\langle Q \geq r \rangle = \{\nu \in E \mid \forall U \text{ ouvert } \supseteq Q \cdot \nu(U) \geq r\}$ . Soit  $Y = \prod_U [0, 1]$ , où le produit est indexé par les ouverts  $U$  de  $X$ , et posons  $Z$  l'ensemble des fonctions  $\nu$  de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$ , vérifiant  $P$  et telles que  $\nu(U) \geq r$  pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ . Comme à la proposition 4.5.7,  $Z$  est de la forme  $[\Sigma]$ , où  $\Sigma$  est un système d'équations patch-continues. Les nouvelles équations à prendre en compte sont  $\nu(U) \geq r$ , pour chaque ouvert  $U$  contenant  $Q$ . (On rappelle que  $x \geq y$  est une abréviation de l'équation  $\max(x, y) = x$ .)  $Z$  est donc patch-fermé et stablement compact, donc compact dans  $Y$ .

Comme à la proposition 4.5.10, on observe que  $\tau$  est continue de l'espace des fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$  vérifiant  $P$  (vu comme sous-espace de  $Y$ ) vers  $E$ , avec la topologie faible (c'est-à-dire de la convergence simple). On vérifie que  $\langle Q \geq r \rangle$  est exactement l'image  $\tau(Z)$  de  $Z$  par  $\tau$ . D'abord, si  $\nu \in \langle Q \geq r \rangle$ , alors  $\nu = \tau(\nu)$ , car  $(\nu)$  est la plus grande fonction continue en-dessous de  $\nu$ , et  $\nu$  est elle-même continue ; et  $\nu$  est clairement dans  $Z$ , donc  $\nu \in \tau(Z)$ . Réciproquement, soit  $\nu \in Z$  quelconque, et montrons que  $\tau(\nu) \in \langle Q \geq r \rangle$ . Si ce n'était pas le cas, par définition il existerait un ouvert  $U$  contenant  $Q$  tel que  $\sup_{V \in U} \nu(V) < r$ . En particulier,

pour tout  $V \in U$ ,  $\nu(V) < r$ . Or comme  $X$  est localement relativement compact,  $U$  est l'union des  $V \in U$ , lesquels forment donc un recouvrement ouvert (dirigé) de  $Q$ . Puisque  $Q$  est compact, il existe donc un  $V \in U$  tel que  $V \supseteq Q$ , et  $\nu(V) < r$ . Mais ceci contredit le fait que  $\nu \in Z$ . Donc  $\langle Q \geq r \rangle = \tau(Z)$ . En tant qu'image d'un compact par une fonction continue, il est compact.  $\square$

On procède en étudiant l'espace  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ , déjà étudié aux propositions 4.5.21 et 4.5.22.

**Proposition 6.4.7** *Soit  $X$  un espace localement compact. Alors  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  est un domaine stablement compact, et la topologie cocompacte sur cet espace coïncide avec sa topologie cofaible : les compacts saturés de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  sont exactement les fermés cofaibles, c'est-à-dire les intersections d'unions finies de parties de la forme  $\langle Q \geq r \rangle$ ,  $Q$  compact saturé de  $X$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* On rappelle  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  est un domaine stablement compact, par la proposition 4.5.22.

Démontrons la deuxième partie de la proposition. Commençons par examiner les compacts finitaires  $\uparrow E$  de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ . Écrivons  $E = \{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ . On a :

$$\begin{aligned} \uparrow E &= \bigcup_{i=1}^k \{\nu \in [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] \mid \nu_i \leq \nu\} \\ &= \bigcup_{i=1}^k \{\nu \in [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] \mid \nu_i^\dagger \leq \nu^\dagger\} \quad \text{par le lemme 6.2.9} \\ &= \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{Q \text{ compact saturé}} \{\nu \in [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] \mid \nu_i^\dagger(Q) \leq \nu^\dagger(Q)\} \\ &= \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{Q \text{ compact saturé}} \langle Q \geq \nu_i^\dagger(Q) \rangle \end{aligned}$$

Le complémentaire de  $\uparrow E$  est donc une intersection finie d'unions quelconques d'ensembles de la forme  $\langle Q < r \rangle$  (avec  $r = \nu_i^\dagger(Q)$ ), et est donc un ouvert cofaible. Donc  $\uparrow E$  est un fermé cofaible. Puisque  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  est un cpo continu par la proposition 4.5.22, on peut appliquer le lemme 3.1.4. Les compacts saturés de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  sont donc les intersections de familles filtrantes de compacts finitaires  $\uparrow E$ . Donc les compacts saturés sont tous des fermés cofaibles.

Réciproquement, montrons que tout fermé cofaible est compact saturé dans  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ . D'abord,  $\langle Q \geq r \rangle$  est compact saturé dans  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  par le lemme 6.4.6. Ensuite, tout fermé cofaible est par définition une intersection d'unions finies de parties de la forme  $\langle Q \geq r \rangle$ , et est donc encore compact saturé parce que  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  est stablement compact, donc compact, bien filtrant, et cohérent.

On a donc établi que les fermés cofaibles de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]] = [\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]_p$  sont exactement les compacts saturés.  $\square$

On peut maintenant passer aux espaces de jeux :

**Théorème 6.4.8** Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Soit  $P$  n'importe quelle conjonction de propriétés parmi "convexe", "concave", "totalement convexe", "totalement concave", "modulaire". L'espace des jeux continus sous-normalisés  $\nu$  sur  $X$  vérifiant  $P$ , muni de la topologie faible est stablement compact.

Si  $X$  est stablement compact, l'espace des jeux continus normalisés  $\nu$  sur  $X$  vérifiant  $P$ , muni de la topologie faible est stablement compact.

Dans tous les cas, la topologie cocompacte de cet espace coïncide avec sa topologie cofaible.

*Démonstration.* Soit  $Y$  l'espace de jeux continus considéré. La première partie du théorème est par le théorème 4.5.11, sachant que  $X$ , étant stablement localement compact, est en particulier stablement localement relativement compact. Pour la deuxième partie, le lemme 6.4.6 nous permet d'affirmer que la topologie cocompacte sur  $Y$  est plus fine que la topologie cofaible sur  $Y$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{Q}$  un compact saturé de  $Y$ . Montrons que  $\mathcal{Q}$  est compact dans  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ . Pour tout recouvrement de  $\mathcal{Q}$  par des ouverts  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ ,  $\mathcal{U}_i \cap Y$  est un ouvert de  $Y$  pour tout  $i \in I$ . En effet, la topologie de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  est aussi celle de la convergence simple (corollaire 4.5.21), et la topologie induite sur  $Y$  par la topologie de la convergence simple sur  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$  est encore la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie faible. Alors  $(\mathcal{U}_i \cap Y)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathcal{Q}$  dans  $Y$ . Comme  $\mathcal{Q}$  est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini  $(\mathcal{U}_i \cap Y)_{i \in J}$  ( $J$  fini). Alors  $(\mathcal{U}_i)_{i \in J}$  est un sous-recouvrement fini de  $\mathcal{Q}$  dans  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ . Donc  $\mathcal{Q}$  est bien compact dans  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ .

Notons  $\uparrow \mathcal{Q}$  la clôture par le haut de  $\mathcal{Q}$  dans  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ . (Notons que la clôture par le haut de  $\mathcal{Q}$  dans  $Y$  est  $\mathcal{Q}$  lui-même, puisque  $\mathcal{Q}$  est supposé saturé dans  $Y$ .)  $\uparrow \mathcal{Q}$  est un compact saturé de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ , et est donc de la forme  $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j=1}^{n_i} \langle Q_{ij} \geq r_{ij} \rangle_{[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]}$  — pour éviter toute ambiguïté, pour chaque espace  $Z$  de fonctions continues de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $[0, 1]$ , nous notons ici  $\langle Q \geq r \rangle_Z$  l'espace des fonctions  $\nu$  dans  $Z$  telles que  $\nu^\dagger(Q) \geq r$ . Il est facile de voir que  $\langle Q_{ij} \geq r_{ij} \rangle_Y = \langle Q_{ij} \geq r_{ij} \rangle_{[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]} \cap Y$ . De plus,  $\uparrow \mathcal{Q} \cap Y = \mathcal{Q}$  : l'inclusion  $\mathcal{Q} \subseteq \uparrow \mathcal{Q} \cap Y$  est claire, et réciproquement, si  $\nu \in \uparrow \mathcal{Q} \cap Y$ , alors il existe  $\nu' \in \mathcal{Q}$  telle que  $\nu' \leq \nu$  (pour l'ordre  $\leq$  de spécialisation de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ , qui n'est autre que l'ordre usuel défini par  $\nu'(U) \leq \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$ ), donc  $\nu \in \mathcal{Q}$  puisque  $\mathcal{Q}$  est saturé dans  $Y$ , et que  $\leq$  est aussi l'ordre de spécialisation de  $Y$  (proposition 4.5.3). Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \uparrow \mathcal{Q} \cap Y \\ &= \left( \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j=1}^{n_i} \langle Q_{ij} \geq r_{ij} \rangle_{[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]} \right) \cap Y \\ &= \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j=1}^{n_i} \langle Q_{ij} \geq r_{ij} \rangle_{[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]} \cap Y = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j=1}^{n_i} \langle Q_{ij} \geq r_{ij} \rangle_Y \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{Q}$  est un fermé cofaible de  $Y$ . Comme  $\mathcal{Q}$  est un compact saturé quelconque de  $Y$ , la topologie cocompacte sur  $Y$  est moins fine que la topologie cofaible sur  $Y$ .  $\square$

On en déduit l'analogie du théorème 6.2.11 pour la topologie faible :

**Corollaire 6.4.9 (Dualité convexe-concave, homéomorphisme)** Soit  $X$  un espace stablement compact. Alors  $\nu \mapsto \nu^\perp$  définit un homéomorphisme entre :

- le dual de de Groot  $\mathbf{J}_{1\ wk}^d(X)$  de l'espace  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X)$  des jeux normalisés continus sur  $X$ , et l'espace  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X^d)$  des jeux normalisés continus sur  $X^d$  ;
- le dual de de Groot  $\nabla \mathbf{J}_{1\ wk}^d(X)$  de l'espace  $\nabla \mathbf{J}_{1\ wk}(X)$  des jeux convexes continus normalisés sur  $X$ , et l'espace  $\Delta \mathbf{J}_{1\ wk}(X^d)$  des jeux concaves continus normalisés sur  $X^d$  ;
- le dual de de Groot  $\mathbf{Cd}_{1\ wk}^d(X)$  de l'espace  $\mathbf{Cd}_{1\ wk}(X)$  des crédibilités normalisées continues sur  $X$ , et l'espace  $\mathbf{Pb}_{1\ wk}(X^d)$  des plausibilités normalisées continues sur  $X^d$  ;
- le dual de de Groot  $\mathbf{V}_{1\ wk}^d(X)$  de l'espace  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$  des probabilités continues sur  $X$ , et l'espace  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X^d)$  des probabilités continues sur  $X^d$ .

*Démonstration.* Par la proposition 6.4.2, l'isomorphisme  $\nu \mapsto \nu^\perp$  définit un homéomorphisme de  $\mathbf{J}_1(X)$  muni de la topologie cofaible sur  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X^d)$ . Par le théorème 6.4.8,  $\mathbf{J}_1(X)$  muni de la topologie cofaible est exactement  $\mathbf{J}_{1\ wk}^d(X)$ . Les autres affirmations se démontrent de façon identique.  $\square$

## 6.5 Plausibilités produits

De même qu'en section 5.7 nous avons étudié la notion de crédibilité produit, et montré une forme de théorème de Fubini, la dualité convexe-concave nous permet de définir une notion de plausibilité produit, avec un théorème de Fubini associé.

Comme en section 5.7, caractérisons les produits de  $\epsilon_F$  et  $\epsilon_{F'}$ . On rappelle qu'un produit de deux capacités  $\nu$  sur  $X$  et  $\nu'$  sur  $Y$  est n'importe quelle capacité  $\nu \otimes \nu'$  vérifiant l'équation (3.2), c'est-à-dire

$$(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$$

pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ .

**Lemme 6.5.1** La crédibilité  $\epsilon_F$  sur  $X \times Y$  est un produit de  $\epsilon_F$  et de  $\epsilon_{F'}$  si et seulement si  $cl(\pi_1 \mathbf{F}) = F$  et  $cl(\pi_2 \mathbf{F}) = F'$ .

*Démonstration.* Sans que ceci nous fasse perdre de généralité, supposons que  $X$  et  $Y$  sont non vides. Supposons que  $\epsilon_F$  soit un produit de  $\epsilon_F$  et de  $\epsilon_{F'}$ . Pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ ,  $\epsilon_F(U \times V) = 0$  si et seulement si  $\mathbf{F} \cap (U \times V) = \emptyset$ . Pour  $U = X \setminus F$  et  $V = Y$ ,  $\epsilon_F(U \times V) = \epsilon_F(U) \cdot \epsilon_{F'}(V) = 0$ , donc  $\mathbf{F} \cap ((X \setminus F) \times Y) = \emptyset$ . Comme  $Y$  est non vide,  $\pi_1(\mathbf{F}) \cap (X \setminus F) = \emptyset$ , c'est-à-dire  $\pi_1(\mathbf{F}) \subseteq F$ . En particulier,  $cl(\pi_1(\mathbf{F})) \subseteq F$ .

Supposons que l'inclusion soit stricte :  $F \setminus cl(\pi_1(\mathbf{F}))$  est non vide, donc l'intérieur de  $F \setminus \pi_1(\mathbf{F})$  est non vide. Soit  $U$  l'intérieur de  $F \setminus \pi_1(\mathbf{F})$ , et posons encore  $V = Y$ . Comme  $U$  est non vide,  $F \cap U \neq \emptyset$ , donc  $\epsilon_F(U) \cdot \epsilon_{F'}(V) = 1$ . Mais  $\epsilon_F(U \times V) = 0$ , puisque pour tout  $(x, y) \in \mathbf{F} \cap (U \times V)$ ,  $x \in \pi_1(\mathbf{F}) \cap U = \emptyset$ . Donc  $cl(\pi_1(\mathbf{F})) = F$ .

De même,  $cl(\pi_2(\mathbf{F})) = F'$ .

Réciproquement, supposons que  $cl(\pi_1 \mathbf{F}) = F$  et  $cl(\pi_2 \mathbf{F}) = F'$ . Pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ ,  $\epsilon_F(U) \cdot \epsilon_{F'}(V) = 1$  si et seulement si  $F \cap U \neq \emptyset$  et  $F' \cap V \neq \emptyset$ . Or  $F \cap U = \emptyset$  si et seulement si  $F \subseteq X \setminus U$ , si et seulement si  $cl(\pi_1 \mathbf{F}) \subseteq X \setminus U$ , si et seulement si  $\pi_1 \mathbf{F} \subseteq X \setminus U$  puisque  $X \setminus U$  est fermé, si et seulement si  $\pi_1 \mathbf{F} \cap U = \emptyset$ . De même,  $F' \cap V = \emptyset$  si et seulement si  $\pi_2 \mathbf{F} \cap V = \emptyset$ . Donc  $\epsilon_F(U) \cdot \epsilon_{F'}(V) = 1$  si et seulement si  $\pi_1 \mathbf{F} \cap U \neq \emptyset$  et  $\pi_2 \mathbf{F} \cap V \neq \emptyset$ . Mais ceci est équivalent à  $\mathbf{F} \cap (U \times V) \neq \emptyset$ , c'est-à-dire à  $\epsilon_{\mathbf{F}}(U \times V) = 1$ .  $\square$

On en conclut, comme dans le cas des crédibilités, qu'il y a en général plusieurs plausibilités produits de  $\epsilon_F$  et de  $\epsilon_{F'}$ .

### ▷ Exercice 6.1

Montrer que  $\epsilon_F \times \epsilon_{F'} = \epsilon_{F \times F'} = \epsilon_{F \times F'}$ .

Un produit naturel de  $\epsilon_F$  et  $\epsilon_{F'}$  est donc  $\epsilon_{F \times F'}$ . (Notons au passage que  $F \times F'$  est fermé :  $F \times F'$  est le complémentaire de l'ouvert  $(X \setminus F) \times Y \cup X \times (Y \setminus F')$ .)

Bien que ce ne soit pas absolument nécessaire, nous procédons comme à la section 5.7, et examinons d'abord les produits de plausibilités simples.

**Définition 6.5.2** Soient  $\nu = \sum_{F \in A} a_F \epsilon_F$  et  $\nu' = \sum_{F' \in B} b_{F'} \epsilon_{F'}$  deux plausibilités simples, sur  $X$  et sur  $Y$  respectivement. Posons  $\nu \otimes \nu' = \sum_{F \in A, F' \in B} a_F b_{F'} \epsilon_{F \times F'}$ .

**Lemme 6.5.3** La plausibilité simple  $\nu \otimes \nu'$  de la définition 6.5.2 est une plausibilité produit, au sens où  $(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$  pour tous ouverts  $U$  de  $X$ ,  $V$  de  $Y$ .

*Démonstration.* Pour tous fermés  $F$  de  $A$  et  $F'$  de  $B$ , pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ ,  $(F \times F') \cap (U \times V) \neq \emptyset$  si et seulement si  $F \cap U \neq \emptyset$  et  $F' \cap V \neq \emptyset$ , donc

$$\begin{aligned} (\nu \otimes \nu')(U \times V) &= \sum_{\substack{F \in A \\ F' \in B \\ (F \times F') \cap (U \times V) \neq \emptyset}} a_F b_{F'} = \sum_{\substack{F \in A, F \cap U \neq \emptyset \\ F' \in B, F' \cap V \neq \emptyset}} a_F b_{F'} \\ &= \sum_{F \in A, F \cap U \neq \emptyset} a_F \times \sum_{F' \in B, F' \cap V \neq \emptyset} b_{F'} = \nu(U) \cdot \nu'(V) \end{aligned}$$

$\square$

Il est facile de vérifier que, lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont des plausibilités simples, alors :

$$(\nu \otimes \nu')_* = (\_ \times \_)[\nu_* \otimes \nu'_*] \quad (6.8)$$

où  $\otimes$  dans  $\nu_* \otimes \nu'_*$  dénote le produit de deux valuations continues, que nous avons déjà vu à la section 3.8 et à la section 4.6, et  $(\_ \times \_)$  dénote la fonction produit cartésien de  $\mathcal{H}_u(X) \times \mathcal{H}_u(Y)$  vers  $\mathcal{H}_u(X \times Y)$ . Cette dernière est continue, car pour tout ouvert  $W$  de  $\mathcal{H}_u(X \times Y)$ , si l'on écrit  $W$  sous la forme  $\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ , alors  $(\_ \times \_)^{-1}(\diamond W) = \{(F, F') \mid (F \times F') \cap W \neq \emptyset\} = \{(F, F') \mid \exists x \in F, y \in F', (x, y) \in \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\} = \{(F, F') \mid \exists i \in I \cdot F \cap U_i \neq \emptyset \text{ et } F' \cap V_i \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} \diamond U_i \times \diamond V_i$  est ouvert dans  $\mathcal{H}_u(X) \times \mathcal{H}_u(Y)$ .

L'équation (6.8) se vérifie comme suit. Posons  $\nu = \sum_{F \in A} a_F \mathbf{e}_F$  et  $\nu' = \sum_{F' \in B} b_{F'} \mathbf{e}_{F'}$ ,

$$\begin{aligned} (\nu \otimes \nu')_* &= \sum_{F \in A, F' \in B} a_F b_{F'} \delta_{F \times F'} \\ (- \times -)[\nu^* \otimes \nu'^*] &= (- \times -) \left[ \sum_{F \in A} a_F \delta_F \otimes \sum_{F' \in B} b_{F'} \delta_{F'} \right] = (- \times -) \left[ \sum_{F \in A, F' \in B} a_F b_{F'} \delta_{(F, F')} \right] \\ &\quad \text{par le lemme 3.8.1} \\ &= \sum_{F \in A, F' \in B} a_F b_{F'} \delta_{F \times F'} \end{aligned}$$

En général :

**Proposition 6.5.4** Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  espaces stablement localement compacts,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un espace topologique, et  $g$  une fonction continue de  $\mathcal{H}_u(X_1) \times \dots \times \mathcal{H}_u(X_n)$  vers  $\mathcal{H}_u(X)$ . Pour toutes crédibilités continues  $\nu_1$  sur  $X_1, \dots, \nu_n$  sur  $X_n$ , il existe une unique crédibilité continue  $\nu$  sur  $X$  telle que :

$$\nu(W) = g[\nu_1^* \otimes \dots \otimes \nu_n^*](\diamond W)$$

pour tout ouvert  $W$  de  $X$ .

Lorsque  $g$  est la fonction produit cartésien de  $\mathcal{H}_u(X_1) \times \dots \times \mathcal{H}_u(X_n)$  vers  $\mathcal{H}_u(X_1 \times \dots \times X_n)$ , on appelle  $\nu$  le produit naturel des plausibilités continues  $\nu_1, \dots, \nu_n$ , et on le note  $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ .

*Démonstration.* Clairement,  $\nu$  est définie de façon unique. Par le théorème 6.3.17,  $\nu_{1*}, \dots, \nu_{n*}$  sont bien définies, et sont des valuations continues. Alors  $\nu_{1*} \otimes \dots \otimes \nu_{n*}$  est une valuation continue, donc  $g[\nu_{1*} \otimes \dots \otimes \nu_{n*}]$  aussi, par le lemme 4.2.9. La fonction qui à  $W$  associe  $g[\nu_{1*} \otimes \dots \otimes \nu_{n*}](\square W)$  est alors une plausibilité continue, par le théorème 6.3.17.  $\square$

Le produit naturel est bien un produit :

**Lemme 6.5.5** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces stablement localement compacts, et  $\nu$  et  $\nu'$  deux plausibilités continues, sur  $X$  et sur  $Y$  respectivement. Alors le produit naturel  $\nu \otimes \nu'$  vérifie :

$$(\nu \otimes \nu')(U \times V) = \nu(U) \cdot \nu'(V)$$

pour tous ouverts  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (\nu \otimes \nu')(U \times V) &= (- \times -)[\nu_* \otimes \nu'_*](\diamond(U \times V)) \\ &= (\nu_* \otimes \nu'_*)\{(F_1, F_2) \in \mathcal{H}_u(X_1) \times \mathcal{H}_u(X_2) \mid F_1 \times F_2 \cap U \times V \neq \emptyset\} \\ &= (\nu_* \otimes \nu'_*)(\diamond U \times \diamond V) \\ &= \nu_*(\diamond U) \cdot \nu'_*(\diamond V) = \nu(U) \cdot \nu'(V) \end{aligned}$$

□

On en déduit que, lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont deux valuations continues, alors le produit naturel de  $\nu$  et  $\nu'$  vues en tant que plausibilités continues est leur produit  $\nu \otimes \nu'$  en tant que valuations, par unicité de la valuation produit (section 3.8). La notation  $\nu \otimes \nu'$  est donc, de nouveau, non ambiguë.

Pour démontrer le théorème 6.5.9 ci-dessous, nous aurons besoin de quelques lemmes auxiliaires. Rappelons la fonction  $\eta_{\mathcal{H}} : X \rightarrow \mathcal{H}_u(X)$  étudiée au lemme 3.9.2, qui à  $x$  associe  $\downarrow x$ .

**Lemme 6.5.6** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact,  $\nu$  une valuation continue sur  $X$ , alors  $\nu_* = \eta_{\mathcal{H}}[\nu]$ . Pour toute fonction  $g$  continue et bornée de  $\mathcal{H}_u(X)$  vers  $\mathbb{R}$ ,*

$$\int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} g(F) d\nu_* = \int_{x \in X} g(\downarrow x) d\nu$$

Comme pour le lemme 5.7.7, ce résultat n'est pas valable lorsque  $\nu$  est une plausibilité continue générale. Par exemple, prenons  $X = \{1, 2\}$  muni de la topologie discrète,  $\nu = \epsilon_X$ , alors le côté gauche de l'égalité ci-dessus vaut  $g(X)$ , le côté droit  $\max(g(\downarrow 1), g(\downarrow 2))$ . Il suffit de prendre  $g(\{1\}) = g(\{2\}) = 1$ ,  $g(\{1, 2\}) = 2$  pour obtenir un contre-exemple. L'hypothèse selon laquelle  $\nu$  est une valuation continue est donc nécessaire.

*Démonstration.* On note que  $\eta_{\mathcal{H}}[\nu]$  est une valuation continue sur  $\mathcal{H}_u(X)$  par le lemme 4.2.9. De plus, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\eta_{\mathcal{H}}[\nu](\diamond U) = \nu\{x \in X \mid \downarrow x \in \diamond U\} = \nu(U)$ , puisque, comme  $U$  est clos par le haut,  $\downarrow x \in \diamond U$  est équivalent à  $x \in U$ . Par unicité de  $\nu_*$  (théorème 6.3.17),  $\eta_{\mathcal{H}}[\nu] = \nu_*$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} g(Q) d\nu_* &= \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} g(F) d\eta_{\mathcal{H}}[\nu] \\ &= \int_{x \in X} g(\downarrow x) d\nu \end{aligned}$$

par la proposition 4.2.11. □

**Lemme 6.5.7** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f$  une fonction continue bornée de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ .*

*Lorsque  $f$  est comonotone en son premier argument, pour toute partie finie non vide  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  de  $X$ , il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que pour tout  $y \in Y$ ,  $\sup_{x \in E} f(x, y) = f(x_i, y)$ .*

*Lorsque  $f$  est comonotone en son second argument, pour toute partie finie non vide  $E = \{y_1, \dots, y_n\}$  de  $Y$ , il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que pour tout  $x \in X$ ,  $\sup_{y \in E} f(x, y) = f(x, y_i)$ .*

*Démonstration.* Montrons la première partie du lemme, la seconde étant similaire. Lorsque  $Y$  est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, fixons  $y_0 \in Y$ . Soit  $E'$  l'ensemble des  $x_i \in E$  tels qu'il existe un  $y \in Y$  avec  $\sup_{x \in E} f(x, y) = f(x_i, y)$ .  $E'$  est non vide, car pour  $y = y_0$ , il existe un  $i$  tel que  $\sup_{x \in E} f(x, y_0) = f(x_i, y_0)$ . Quitte à remplacer  $E$  par  $E'$ , nous pouvons supposer que : (\*) pour tout  $i$  il existe un élément  $y$  tel que  $\sup_{x \in E} f(x, y) = f(x_i, y)$ .

Définissons la relation binaire  $\prec$  sur  $E$  par  $i \prec j$  si et seulement s'il existe  $y, y' \in Y$  tels que  $f(x_i, y) = \sup_{x \in X} f(x, y)$ ,  $f(x_j, y') = \sup_{x \in X} f(x, y')$ , et  $f(x_j, y') > f(x_i, y)$ . Clairement,  $\prec$  est irréflexive. Montrons que  $\prec$  est transitive. Supposons donc  $i \prec j$  et  $j \prec k$ , c'est-à-dire qu'il existe quatre éléments  $y, y', z, z' \in Y$  tels que :

$$\begin{aligned}
 f(x_i, y) &= \sup_{x \in X} f(x, y) \\
 f(x_j, y') &= \sup_{x \in X} f(x, y') \\
 f(x_j, y') &> f(x_i, y) \\
 f(x_j, z) &= \sup_{x \in X} f(x, z) \\
 f(x_j, z') &= \sup_{x \in X} f(x, z') \\
 f(x_k, z') &> f(x_j, z')
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Pour démontrer que  $i \prec k$ , il suffit de montrer que  $f(x_k, z') > f(x_i, z')$ . Si ce n'était pas le cas, on aurait  $f(x_i, z') \geq f(x_k, z') > f(x_j, z')$ . Mais ceci, avec l'inégalité (6.9) ci-dessus, contredirait le fait que  $f$  soit comonotone en son premier argument.

Donc  $\prec$  est une relation d'ordre strict. L'ensemble  $E$  étant fini et non vide, il existe un élément  $x_i$  de  $E$  qui est maximal pour  $\prec$ . Montrons que l'indice  $i$  est l'indice souhaité. Si ce n'était pas le cas, il existerait un  $y' \in Y$  tel que  $\sup_{x \in E} f(x, y') > f(x_i, y')$ . Soit  $j$  un indice tel que  $\sup_{x \in E} f(x, y') = f(x_j, y')$ . Alors  $f(x_j, y') > f(x_i, y')$ . Par (\*), on en déduit  $i \prec j$ , contradiction.  $\square$

**Proposition 6.5.8** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f$  une fonction continue bornée de  $X \times Y$  vers  $\mathbb{R}$ .

Lorsque  $f$  est comonotone en son premier argument, pour tout jeu continu  $\nu'$  sur  $Y$ , pour tout fermé  $F$  de  $X$ ,

$$\int_{y \in Y} \sup_{x \in F} f(x, y) d\nu' = \sup_{x \in F} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu'$$

Lorsque  $f$  est comonotone en son second argument, pour tout jeu continu  $\nu$  sur  $X$ , pour tout fermé  $F'$  de  $Y$ ,

$$\int_{x \in X} \sup_{y \in F'} f(x, y) d\nu = \sup_{y \in F'} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu$$

*Démonstration.* Démontrons la première partie, la seconde étant similaire. D'abord, on note que la fonction qui à  $y \in Y$  associe  $\sup_{x \in F} f(x, y)$  est continue, puisque l'image réciproque par cette fonction de  $]t, +\infty[$  est  $\{y \in Y \mid \sup_{x \in F} f(x, y) > t\}$ , qui est l'union lorsque  $x \in F$  des images réciproques de  $]t, +\infty[$  par la fonction qui à  $y$  associe  $f(x, y)$ , laquelle est continue.

On remarque ensuite que la quantité  $\sup_{x \in F} f(x, y)$  est la borne supérieure de la famille dirigée  $(\sup_{x \in E} f(x, y))_E$  fini non vide  $\subseteq F$ . Par le lemme 6.5.7, pour chaque sous-ensemble fini

non vide  $E$  de  $F$ , il existe un élément  $x_E$  de  $E$  tel que  $\sup_{x \in E} f(x, y) = f(x_E, y)$ . On note que :

$$\int_{y \in Y} f(x_E, y) d\nu' = \sup_{x \in E} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' \quad (6.10)$$

En effet, le côté gauche est trivialement inférieur ou égal au côté droit, et l'inégalité réciproque vient du fait que  $f(x, y) \leq f(x_E, y)$  pour tout  $y$ , en utilisant le lemme 4.1.2. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{y \in Y} \sup_{x \in F} f(x, y) d\nu' &= \int_{y \in Y} \sup_{E \text{ fini non vide } \subseteq F} \sup_{x \in E} f(x, y) d\nu' \\ &= \int_{y \in Y} \sup_{E \text{ fini non vide } \subseteq F} f(x_E, y) d\nu' \\ &= \sup_{E \text{ fini non vide } \subseteq F} \int_{y \in Y} f(x_E, y) d\nu' \quad \text{par la proposition 4.2.1} \\ &= \sup_{E \text{ fini non vide } \subseteq F} \sup_{x \in E} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' = \sup_{x \in F} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' \end{aligned}$$

où nous utilisons (6.10) à la dernière ligne.  $\square$

**Théorème 6.5.9 (Bauer-Fubini, plausibilités)** *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces stablement localement compacts. Pour toutes plausibilités continues  $\nu$  sur  $X$  et  $\nu'$  sur  $Y$ , le produit naturel  $\nu \otimes \nu'$  sur  $X \times Y$  est tel que :*

1. *si  $f$  est comonotone en son premier argument, ou bien si  $\nu$  est une valuation continue,*

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \otimes \nu') = \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu$$

2. *si  $f$  est comonotone en son second argument, ou bien si  $\nu'$  est une valuation continue,*

$$\int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \otimes \nu') = \int_{y \in Y} \int_{x \in X} f(x, y) d\nu d\nu'$$

*Démonstration.* Démontrons la première partie, la deuxième étant entièrement analogue. On a :

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \otimes \nu') &= \int_{\mathbf{F} \in \mathcal{H}_u(X \times Y)} \sup_{(x,y) \in \mathbf{F}} f(x, y) d(\nu \otimes \nu')_* \\ &\quad \text{par le théorème 6.3.17} \\ &= \int_{\mathbf{F} \in \mathcal{H}_u(X \times Y)} \sup_{(x,y) \in \mathbf{F}} f(x, y) d(\_ \times \_)[\nu_* \otimes \nu'_*] \quad \text{par définition} \\ &= \int_{(F, F') \in \mathcal{H}_u(X) \times \mathcal{H}_u(Y)} \sup_{x \in F, y \in F'} f(x, y) d(\nu_* \otimes \nu'_*) \quad \text{par la proposition 4.2.11} \\ &= \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} \int_{F' \in \mathcal{H}_u(Y)} \sup_{x \in F, y \in F'} f(x, y) d\nu'_* d\nu_* \quad \text{par le théorème 4.6.2} \\ &= \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} \int_{y \in Y} \sup_{x \in F} f(x, y) d\nu' d\nu_* \end{aligned}$$

par le théorème 6.3.17 de nouveau.

Lorsque  $\nu$  est une valuation continue, on applique le lemme 6.5.6 pour continuer le calcul :

$$\begin{aligned} \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} \int_{y \in Y} \sup_{x \in F} f(x, y) d\nu' d\nu_* &= \int_{x_1 \in X} \int_{y \in Y} \sup_{x \in \downarrow x_1} f(x, y) d\nu' d\nu \\ &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f$  est comonotone en son premier argument,

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \otimes \nu') &= \int_{F \in \mathcal{H}_u(X)} \int_{y \in Y} \sup_{x \in F} f(x, y) d\nu' d\nu^* \\ &= \int_{F \in \mathcal{Q}(X)} \sup_{x \in F} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu^* \quad \text{par la proposition 6.5.8} \\ &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu \end{aligned}$$

par le théorème 6.3.17 de nouveau. □

# Chapitre 7

## Estimations : P joue, puis C fait... quoi ?

De même qu'une crédibilité est à peu de choses près une valuation sur l'espace de Smyth  $\mathcal{Q}(X)$  des choix non déterministes démoniaques, et qu'une plausibilité est une valuation sur l'espace de Hoare  $\mathcal{H}(X)$  des choix non déterministes angéliques, on peut naturellement se demander ce que serait le concept correspondant à une valuation sur l'espace de Plotkin  $\mathcal{P}\ell(X)$ , ou l'espace  $\mathcal{P}(X)$ , des choix non déterministes chaotiques.

La première réponse que nous proposons ici est celle d'*estimation*, définie plus bas. Une estimation n'est pas une capacité au sens où elle ne mesure pas des ouverts mais des *croissants*, ce qui peut paraître curieux. Il se trouve que c'est ce qui marche, et je n'ai aucune explication intuitive à la nature de la chose.

Rappelons qu'un croissant  $C$  est la différence  $U \setminus V$  de deux ouverts  $U$  et  $V$ . De façon équivalente, c'est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé. Rappelons aussi que, par le théorème de Smiley-Horn-Tarski, toute valuation  $\nu$  sur un espace topologique  $X$  s'étend en une unique pré-mesure  $\nu^\%$  sur la pré-tribu engendrée par la topologie de  $X$ . Les éléments de la pré-tribu engendrée par la topologie de  $X$  sont les unions finies disjointes de croissants  $U \setminus V$ , où  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $X$ . On a alors  $\nu^\%(U \setminus V) = \nu(U) - \nu(U \cap V) = \nu(U \cup V) - \nu(V)$ .

Ce qui sera curieux dans la définition d'une estimation, c'est qu'elle prendra des croissants en argument, et non pas des unions finies disjointes de croissants. C'est d'autant plus bizarre que si toute intersection finie de croissants est un croissant, les unions finies de croissants ne sont en général pas des croissants. L'espace des croissants n'a en fait pas de structure algébrique agréable.

### 7.1 Estimations

Voici comment on arrive à la notion d'estimation : à partir d'une valuation  $P$  sur l'espace de Plotkin de  $X$ , on construit une fonction  $\nu$  telle que  $\nu(U) = P(\square U)$  et  $\nu(X \setminus V) = P(\diamond V)$ . Ceci se passera sans difficulté si l'on choisit non pas  $\mathcal{P}\ell(X)$  mais  $\mathcal{P}_\nu(X)$  comme espace de choix non déterministes chaotiques. Ceci ne fait aucune différence si  $X$  est un cpo continu cohérent et compact (fait 3.6.26). Sinon, le remplacement de  $\mathcal{P}\ell(X)$  par  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est assez similaire à celui de  $\mathcal{H}(X)$  par  $\mathcal{H}_u(X)$  en théorie des plausibilités (proposition 6.3.3 et suivantes). Nous expliquerons

souvent dans la suite certaines constructions en termes de lentilles, pour les retraduire ensuite en termes d'**A**-valuations continues.

Rappelons que, dans  $\mathcal{P}_V(X)$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\square U$  est l'ensemble des lentilles  $L$  incluses dans  $U$ . On peut étendre cette notation aux croissants de  $X$  : si  $C = U \setminus V$  est un croissant de  $X$ , alors  $\square C$  est l'ensemble des lentilles  $L$  incluses dans  $C$ , c'est-à-dire incluses dans  $U$  et ne rencontrant pas  $V$ . En particulier,  $\square C = \square U \setminus \diamond V$  est un croissant de  $\mathcal{P}_V(X)$ . Nous allons poser  $\nu$  de telle sorte que  $\nu(C) = P^\%( \square C ) = P(\square U) - P(\square U \cap \diamond V) = P(\square U \cup \diamond V) - P(\diamond V)$ .

La construction analogue dans l'espace  $\mathcal{P}_V(X)$  des **A**-valuations continues est donnée au lemme 7.1.2 ci-dessous : dans  $\mathcal{P}_V(X)$ ,  $\square C$  sera l'ensemble des **A**-valuations continues  $\alpha$  telles que  $\alpha(U) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ , où  $C = U \setminus V$ . Il n'est cependant pas immédiatement clair que ceci soit bien défini, car il y a en général plusieurs couples d'ouverts  $U, V$  tels que  $C = U \setminus V$ . Notamment,  $C = (U \cup V) \setminus V = U \setminus (U \cap V)$ . L'inclusion entre croissants de  $X$  est caractérisée comme suit.

**Lemme 7.1.1** *Soient  $U, V, U', V'$  quatre ouverts. Alors  $U \setminus V \subseteq U' \setminus V'$  si et seulement si  $U \subseteq U' \cup V$  et  $U \cap V' \subseteq V$ .*

*Démonstration.* Supposons  $U \setminus V \subseteq U' \setminus V'$ . Pour tout  $x \in U$ , soit  $x \in V$ , soit  $x \notin V$  ; dans le deuxième cas,  $x \in U \setminus V$ , donc  $x \in U'$ . Donc  $U \subseteq U' \cup V$ . Pour tout  $x \in U \cap V'$ , si  $x$  n'était pas dans  $V$ , alors  $x$  serait dans  $U \setminus V$ , donc dans  $U' \setminus V'$ , ce qui contredit le fait que  $x \in V'$ . Donc  $U \cap V' \subseteq V$ .

Réciproquement, supposons que  $U \subseteq U' \cup V$  et  $U \cap V' \subseteq V$ . Pour tout  $x \in U \setminus V$ , comme  $x \in U$ , on a  $x \in U' \cup V$ . Mais comme  $x$  n'est pas dans  $V$ , nécessairement  $x \in U'$ . Si  $x$  était dans  $V'$ , alors  $x$  serait dans  $U \cap V'$ , donc dans  $V$ , ce qui est impossible. Donc  $x \in U' \setminus V'$ . Donc  $U \setminus V \subseteq U' \setminus V'$ .  $\square$

On rappelle que pour tous ouverts  $U$  et  $V$  de  $X$ , dans  $\mathcal{P}_V(X)$  on a  $\square U = \{\alpha \in \mathcal{P}_V(X) \mid \alpha(U) = 1\}$ , et  $\diamond V = \{\alpha \in \mathcal{P}_V(X) \mid \alpha(V) \neq 0\}$ .

**Lemme 7.1.2** *Posons, pour tout croissant  $C = U \setminus V$ ,  $\square C = \{\alpha \in \mathcal{P}_V(X) \mid \alpha(U) = 1 \text{ et } \alpha(V) = 0\}$ . Ceci est bien défini, et  $\square C = \square U \setminus \diamond V$ . En particulier, pour tout croissant  $C$  de  $X$ ,  $\square C$  est un croissant de  $\mathcal{P}_V(X)$ . De plus, si  $C \subseteq C'$ , alors  $\square C \subseteq \square C'$ .*

*Démonstration.* Notons temporairement  $\square(U, V)$  l'ensemble des **A**-valuations continues  $\alpha$  telles que  $\alpha(U) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ . On montre d'abord que si  $C = U \setminus V \subseteq U' \setminus V' = C'$ , alors  $\square(U, V) \subseteq \square(U', V')$ . Pour tout  $\alpha \in \square(U, V)$ , on a  $\alpha(U) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ . Puisque  $\alpha(V) = 0$  et par la propriété 4 de la définition 3.6.1,  $\alpha(U') = \alpha(U' \cup V)$ . Par le lemme 7.1.1, et comme  $\alpha$  est monotone,  $\alpha(U' \cup V) \geq \alpha(U) = 1$ . Donc  $\alpha(U') = 1$ . Puisque  $\alpha(U) = 1$  et par la propriété 5 de la définition 3.6.1,  $\alpha(V') = \alpha(U \cap V')$ . Par le lemme 7.1.1, et comme  $\alpha$  est monotone,  $\alpha(U \cap V') \leq \alpha(V) = 0$ . Donc  $\alpha(V') = 0$ . Donc  $\alpha \in \square(U', V')$ .

On en déduit en particulier que si  $U \setminus V = U' \setminus V'$ , alors  $\square(U, V) = \square(U', V')$ . Donc  $\square(U, V)$  ne dépend que de  $U \setminus V$ . Il est donc légitime de noter cette quantité  $\square(U \setminus V)$ . D'autre part, nous venons de montrer que si  $C \subseteq C'$  alors  $\square C \subseteq \square C'$ .

Le fait que  $\square C = \square U \setminus \diamond V$  est évident.  $\square$

De façon symétrique, pour toute partie  $G$  de  $X$ , on peut poser  $\diamond G = \{L \in \mathcal{P}l_{\nu}(X) \mid L \cap G \neq \emptyset\}$  dans  $\mathcal{P}l_{\nu}(X)$ . Nous utiliserons cette notation lorsque  $G$  est soit un ouvert soit un fermé. Dans  $\mathcal{P}_{\nu}(X)$ , on pose :

**Lemme 7.1.3** *Posons, pour tout ouvert ou fermé  $G$  de  $X$ ,  $\diamond G$  égal au complémentaire de  $\square(X \setminus G)$ . Lorsque  $G$  est un ouvert  $U$ ,  $\diamond U = \{\alpha \in \mathcal{P}_{\nu}(X) \mid \alpha(U) \neq 0\}$ . Lorsque  $G$  est un fermé  $X \setminus V$ ,  $\diamond(X \setminus V) = \{\alpha \in \mathcal{P}_{\nu}(X) \mid \alpha(V) \neq 1\}$ .*

**Lemme 7.1.4** *Pour tous croissants  $C$  et  $C'$  de  $X$ ,  $\square C \cap \square C' = \square(C \cap C')$ .*

*Démonstration.* Dans  $\mathcal{P}l_{\nu}(X)$ ,  $L$  est inclus dans  $C$  et dans  $C'$  si et seulement si  $L$  est inclus dans  $C \cap C'$ . Dans  $\mathcal{P}_{\nu}(X)$ , posons  $C = U \setminus V$  et  $C' = U' \setminus V'$  ; alors  $\alpha \in \square C \cap \square C'$  si et seulement si  $\alpha(U) = \alpha(U') = 1$  et  $\alpha(V) = \alpha(V') = 0$ . Si c'est le cas, alors  $\alpha(U \cap U') = 1$  par la propriété 5 de la définition 3.6.1, et  $\alpha(V \cup V') = 0$  par la propriété 4, donc  $\alpha \in \square((U \cap U') \setminus (V \cup V')) = \square(C \cap C')$ . Réciproquement, si  $\alpha(U \cap U') = 1$  et  $\alpha(V \cup V') = 0$ , par monotonie  $\alpha(U) = \alpha(U') = 1$  et  $\alpha(V) = \alpha(V') = 0$ .  $\square$

**Lemme 7.1.5** *Pour tout croissant  $C$  de  $X$ , pour tout ouvert ou fermé  $G$ ,  $\square C \setminus \diamond G = \square(C \setminus G)$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 7.1.3,  $\square C \setminus \diamond G = \square C \cap \square(X \setminus G) = \square(C \cap (X \setminus G)) = \square(C \setminus G)$ , par le lemme 7.1.4.  $\square$

Puisque  $\square C$ , par le lemme 7.1.2, est un croissant de  $\mathcal{P}_{\nu}(X)$ , il est naturel de définir  $\nu$  par  $\nu(C) = P^{\%}(\square C)$  pour tout croissant  $C$ . Par définition, en posant  $C = U \setminus V$ , et en utilisant le lemme 7.1.2,  $\nu(C) = P(\square U) - P(\square U \cap \diamond V) = P(\square U \cup \diamond V) - P(\diamond V)$ . Nous prétendons que  $\nu$  a les propriétés suivantes.

**Lemme 7.1.6** *Soit  $\nu$  une fonction de l'espace  $\mathcal{C}(X)$  des croissants sur  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Si  $P$  est une valuation sur  $\mathcal{P}l_{\nu}(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_{\nu}(X)$  telle que  $\nu(C) = P^{\%}(\square C)$  pour tout croissant  $C$ , alors nécessairement, pour tout croissant  $C$ , pour tous ouverts ou fermés  $G_1, \dots, G_p$ ,*

$$P^{\%}(\square C \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p) = \sum_{K \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{|K|} \nu \left( C \setminus \bigcup_{k \in K} G_k \right) \quad (7.1)$$

La formule ressemble à certaines que nous connaissons bien maintenant. Cependant,  $K$  parcourt tous les sous-ensembles de  $\{1, \dots, p\}$ , et plus seulement les sous-ensembles non-vides ; d'autre part, l'exposant de  $(-1)$  est  $|K|$ , et non  $|K| + 1$ .

*Démonstration.* Par récurrence sur  $p$ . Si  $p = 0$ , c'est évident. Supposons la formule juste pour  $p$ , et montrons-la pour  $p + 1$ . Puisque  $P^{\%}$  est additive, on a :

$$P^{\%}(\square C \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p \cap \diamond G_{p+1}) = P^{\%}(\square C \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p) - P^{\%}(\square C \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p \setminus \diamond G_{p+1})$$

Or  $\square C \setminus \diamond G_{p+1} = \square(C \setminus G_{p+1})$  par le lemme 7.1.5. On en déduit que  $\square C \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p \setminus \diamond G_{p+1} = \square(C \setminus G_{p+1}) \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} P^\%(\square C \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p \cap \diamond G_{p+1}) &= \sum_{K \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{|K|} \nu \left( C \setminus \bigcup_{k \in K} G_k \right) \\ &\quad - \sum_{K \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{|K|} \nu \left( C \setminus G_{p+1} \setminus \bigcup_{k \in K} G_k \right) \end{aligned}$$

Mais ceci est la somme souhaitée, indexée par les ensembles  $K \subseteq \{1, \dots, p, p+1\}$ . La première somme contient tous les termes où  $K$  ne contient pas  $p+1$ , la seconde ceux où  $K$  contient  $p+1$ .  $\square$

**Corollaire 7.1.7** Soit  $\nu$  une estimation sur  $X$ . Si  $P$  est une valuation sur  $\mathcal{P}_\nu(X)$  telle que  $\nu(C) = P^\%( \square C )$ , alors nécessairement, pour tout ouvert  $U$ , pour tous ouverts  $V_1, \dots, V_n$ ,

$$P(\square U \cap \diamond V_1 \cap \dots \cap \diamond V_n) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \nu \left( U \setminus \bigcup_{i \in I} V_i \right)$$

**Définition 7.1.8 (Estimation)** Soit  $X$  un espace topologique. Une estimation sur  $X$  est une fonction  $\nu$  de l'espace  $\mathcal{C}(X)$  des croissants de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , telle que :

- $\nu$  est stricte :  $\nu(\emptyset) = 0$  ;
- $\nu$  est monotone : si  $C \subseteq C'$  alors  $\nu(C) \leq \nu(C')$  ;
- pour tout ouvert  $U$ , pour tous ouverts  $U_1, \dots, U_m$  inclus dans  $U$  ( $m \geq 0$ ), pour tout ouvert  $V$ , pour tous ouverts  $V_1, \dots, V_n$  contenant  $V$  ( $n \geq 0$ ),

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ J \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|I|+|J|} \nu \left( \bigcap_{i \in I} {}^{[U]}U_i \setminus \bigcup_{j \in J} {}^{[V]}V_j \right) \geq 0 \quad (7.2)$$

où la notation  $\bigcap_{i \in I} {}^{[U]}U_i$  signifie  $\bigcap_{i \in I} U_i$  si  $I \neq \emptyset$ ,  $U$  sinon, et la notation  $\bigcup_{j \in J} {}^{[V]}V_j$  signifie  $\bigcup_{j \in J} V_j$  si  $J \neq \emptyset$ ,  $V$  sinon. De façon équivalente, quoique moins synthétique :

$$\begin{aligned} \nu(U \setminus V) &\geq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \setminus V \right) + \sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|+1} \nu \left( U \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) \\ &\quad - \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset \\ J \subseteq \{1, \dots, n\}, J \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+|J|} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

On dit que  $\nu$  est sesqui-continue si et seulement si :

– pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ , pour tout ouvert  $V$ ,

$$\nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \setminus V \right) = \sup_{i \in I} \nu(U_i \setminus V) \quad (7.4)$$

– pour tout ouvert  $U$ , pour toute famille dirigée  $(V_j)_{j \in J}$ ,

$$\nu \left( U \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) = \inf_{j \in J} \nu(U \setminus V_j) \quad (7.5)$$

**Lemme 7.1.9** Pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ , pour tout ouvert  $V$ ,  $\square(\bigcup_{i \in I} U_i \setminus V) = \bigcup_{i \in I} \square(U_i \setminus V)$ .

*Démonstration.* Dans  $\mathcal{P}l_{\mathcal{V}}(X)$ ,  $L \in \square(\bigcup_{i \in I} U_i \setminus V)$  si et seulement si  $L \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \setminus V$ , si et seulement si  $L \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ , et  $L$  n'intersecte pas  $V$ . Comme  $L$  est compacte, et que la famille  $(U_i)_{i \in I}$  est dirigée, si  $L \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ , alors  $L \subseteq U_i$  pour un certain  $i \in I$ , donc  $L \subseteq U_i \setminus V$ , et  $L \in \square(U_i \setminus V)$ . La réciproque est évidente.

Dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ ,  $\alpha \in \square(\bigcup_{i \in I} U_i \setminus V)$  si et seulement si  $\alpha(\bigcup_{i \in I} U_i) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ , si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $\alpha(U_i) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ , puisque  $\alpha$  est continue ; autrement dit,  $\alpha \in \square(U_i \setminus V)$ .  $\square$

**Lemme 7.1.10** Pour toute famille dirigée d'ouverts  $(V_i)_{i \in I}$ ,  $\diamond(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} \diamond V_i$ .

*Démonstration.* Dans  $\mathcal{P}l_{\mathcal{V}}(X)$ ,  $L \in \diamond(\bigcup_{i \in I} V_i)$  si et seulement si  $L$  intersecte  $\bigcup_{i \in I} V_i$ , si et seulement si  $L$  intersecte l'un des  $V_i$ , si et seulement si  $L \in \diamond V_i$  pour un certain  $i \in I$ . Dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ ,  $\alpha \in \diamond(\bigcup_{i \in I} V_i)$  si et seulement si  $\alpha(\bigcup_{i \in I} V_i) \neq 0$ , c'est-à-dire  $M \sqsubseteq \alpha(\bigcup_{i \in I} V_i)$ . Puisque  $\alpha$  est continue, ceci est équivalent à  $M \sqsubseteq \alpha(V_i)$ , c'est-à-dire à  $\alpha \in \diamond V_i$  pour un certain  $i \in I$ .  $\square$

**Proposition 7.1.11** Soit  $X$  un espace topologique,  $P$  une valuation sur  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ . Posons  $\nu(C) = P^{\%}(\square C)$  pour tout croissant  $C$  de  $X$ . Alors  $\nu$  est une estimation. Si de plus  $P$  est continue, alors  $\nu$  est sesqui-continue.

*Démonstration.* D'abord,  $\nu$  est stricte, puisque  $\square \emptyset = \emptyset$ , toutes les lentilles étant non vides, et parce que  $P$  est stricte. Ensuite, on rappelle que  $P^{\%}$ , en tant que pré-mesure, est monotone. Alors  $\nu$  est monotone, parce que si  $C \subseteq C'$  alors  $\square C \subseteq \square C'$  (lemme 7.1.2).

L'inégalité (7.2) est une application directe du lemme 7.1.6. Posons  $C = U \setminus V$ ,  $G_1 = V_1, \dots, G_n = V_n$ ,  $G_{n+1} = X \setminus U_1, \dots, G_{n+m} = X \setminus U_m$ , et  $p = n + m$ . Pour tout  $K \subseteq \{1, \dots, m + n\}$ , posons  $I = \{i \mid 1 \leq i \leq m, n + i \in K\}$  et  $J = \{j \mid 1 \leq j \leq n, j \in K\}$ . Alors  $C \setminus \bigcup_{k \in K} G_k = U \setminus V \cap \bigcap_{i \in I} U_i \setminus \bigcup_{j \in J} V_j$  si  $I \neq \emptyset$ , sinon  $C \setminus \bigcup_{k \in K} G_k = U \setminus V \setminus \bigcup_{j \in J} V_j$ . Puisque tous les  $U_i$  sont inclus dans  $U$ , et que chaque  $V_j$  contient  $V$ ,  $C \setminus \bigcup_{k \in K} G_k$  est toujours égal à  $\bigcap_{i \in I} {}^{[U]}U_i \setminus \bigcup_{j \in J} {}^{[V]}V_j$ . L'inégalité (7.2) exprime alors juste que  $P^{\%}(\square C \cap \diamond G_1 \cap \dots \cap \diamond G_p) \geq 0$ , par une relecture facile de l'égalité (7.1).

Montrons que  $\nu$  est sesqui-continue dès que  $P$  est continue. Rappelons que, si  $C$  est le croissant  $U \setminus V$ , alors  $\nu(C) = P(\square U) - P(\square U \cap \diamond V) = P(\square U \cup \diamond V) - P(\diamond V)$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'ouverts de  $X$ , alors

$$\begin{aligned} \nu \left( \bigcup_{i \in I} U_i \setminus V \right) &= P \left( \square \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup \diamond V \right) - P(\diamond V) \\ &= P \left( \bigcup_{i \in I} \square U_i \cup \diamond V \right) - P(\diamond V) \quad \text{par le lemme 7.1.9} \\ &= \sup_{i \in I} P(\square U_i \cup \diamond V) - P(\diamond V) \quad \text{puisque } P \text{ est continue} \\ &= \sup_{i \in I} \nu(U_i \setminus V) \end{aligned}$$

De même, si  $(V_j)_{j \in J}$  est une famille dirigée d'ouverts de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \nu \left( U \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) &= P(\square U) - P \left( \square U \cap \diamond \left( \bigcup_{j \in J} V_j \right) \right) \\ &= P(\square U) - P \left( \square U \cap \bigcup_{j \in J} \diamond V_j \right) \quad \text{par le lemme 7.1.10} \\ &= P(\square U) - \sup_{j \in J} P(\square U \cap \diamond V_j) \quad \text{puisque } P \text{ est continue} \\ &= \inf_{j \in J} \nu(U \setminus V_j) \end{aligned}$$

□

Comme pour les crédibilités et les plausibilités, nous montrerons que, sous quelques hypothèses sur l'espace  $X$ , pour toute estimation continue  $\nu$  sur  $X$ , il existe une unique valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{P}_V(X)$  telle que  $\nu(C) = P^\%(\square C)$  pour tout croissant  $C$ .

**Lemme 7.1.12** *Pour toute estimation  $\nu$  sur  $X$ , on a les inégalités suivantes.*

1. *Pour tous ouverts  $U_1, \dots, U_m$  ( $m \geq 1$ ), pour tout ouvert  $V$ ,*

$$\nu \left( \bigcup_{i=1}^m U_i \setminus V \right) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \setminus V \right)$$

2. *Pour tous ouverts  $U_1, \dots, U_m$  ( $m \geq 1$ ),*

$$\nu \left( \bigcup_{i=1}^m U_i \right) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \nu \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right)$$

3. Pour tout ouvert  $U$ , pour tous ouverts  $V_1, \dots, V_n$  ( $n \geq 1$ ),

$$\nu \left( U \setminus \bigcap_{j=1}^n V_j \right) \geq \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \nu \left( U \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right)$$

4. Pour tous ouverts  $V_1, \dots, V_n$  ( $n \geq 1$ ), si l'on pose  $\nu^\downarrow(V) = \nu(X) - \nu(X \setminus V)$ , alors :

$$\nu^\downarrow \left( \bigcap_{j=1}^n V_j \right) \leq \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \nu^\downarrow \left( \bigcup_{j \in J} V_j \right)$$

*Démonstration.* Ce sont des conséquences de (7.3) : 1. est le cas  $m \geq 1, n = 0, U = \bigcup_{i=1}^m U_i$ , 2. est 1. lorsque  $V$  est vide ; 3. est le cas  $m = 0, n \geq 1, V = \bigcap_{j=1}^n V_j$ . Lorsque  $U = X$  dans 3., on obtient :

$$\nu \left( X \setminus \bigcap_{j=1}^n V_j \right) \geq \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \nu \left( X \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \nu^\downarrow \left( \bigcup_{j \in J} V_j \right) &= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \nu(X) - \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} \nu \left( X \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) \\ &= \nu(X) - \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} \nu \left( X \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) \quad \text{par le lemme 3.11.1} \\ &\geq \nu(X) - \nu \left( X \setminus \bigcap_{j=1}^m V_j \right) = \nu^\downarrow \left( \bigcap_{j=1}^m V_j \right) \end{aligned}$$

□

Une estimation (resp., sesqui-continue)  $\nu$  définit donc à la fois une crédibilité (resp. continue)  $\nu^\uparrow$ , par restriction aux ouverts  $U : \nu^\uparrow(U) = \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$  ; et une plausibilité (resp. continue)  $\nu^\downarrow$ , qui à  $V$  associe  $\nu^\downarrow(V) = \nu(X) - \nu(X \setminus V)$ , par restriction aux fermés  $X \setminus V$ .

L'inégalité (7.3) implique aussi que : (a)  $\nu(U \setminus V) \geq \nu(U_1 \setminus V)$  dès que  $U_1 \subseteq U$  (le cas  $m = 1$  et  $n = 0$ ), et que : (b)  $\nu(U \setminus V) \geq \nu(U \setminus V_1)$  dès que  $V_1 \supseteq V$  (le cas  $m = 0$  et  $n = 1$ ). Ce sont des formes faibles de la propriété de monotonie. Nous verrons au lemme 7.4.17 qu'elles lui sont équivalentes. On n'a donc pas besoin de vérifier que  $\nu$  est monotone : c'est une conséquence de (7.3).

Nous utilisons finalement l'inégalité (7.3) avec  $m = n = 1$  pour en déduire les encadrements suivants.

**Lemme 7.1.13** Soit  $\nu$  une estimation sur  $X$ . Pour tous ouverts  $U$  et  $V$  de  $X$ ,

$$\begin{aligned} (i) \quad & \nu^\uparrow(U) \leq \nu^\downarrow(U) \\ (ii) \quad & \nu^\uparrow(U \cup V) \leq \nu(U \setminus V) + \nu^\downarrow(V) \quad (iii) \quad \nu^\uparrow(U \cap V) + \nu(U \setminus V) \leq \nu^\uparrow(U) \\ (iv) \quad & \nu^\uparrow(U) \leq \nu(U \setminus V) + \nu^\downarrow(U \cap V) \quad (v) \quad \nu^\downarrow(V) + \nu(U \setminus V) \leq \nu^\downarrow(U \cup V) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Lorsque  $m = n = 1$ , l'inégalité (7.3) implique finalement que  $\nu(U \setminus V) \geq \nu(U_1 \setminus V) + \nu(U \setminus V_1) - \nu(U_1 \setminus V_1)$  si  $U_1 \subseteq U$  et  $V_1 \supseteq V$ . En renommant  $U$  et  $V$  en  $U_0$  et  $V_0$  respectivement, on a : (\*) pour tous ouverts  $U_1 \subseteq U_0$ ,  $V_1 \supseteq V_0$ ,  $\nu(U_0 \setminus V_0) \geq \nu(U_1 \setminus V_0) + \nu(U_0 \setminus V_1) - \nu(U_1 \setminus V_1)$ .

On en déduit (i) en prenant  $U_0 = X$ ,  $U_1 = U$ ,  $V_1 = U$ , et  $V_0 = \emptyset$  dans (\*), ce qui nous donne  $\nu(X) \geq \nu(U) + \nu(X \setminus U) - \nu(\emptyset)$ . Pour (ii), on pose  $U_0 = X$ ,  $U_1 = U \cup V$ ,  $V_1 = V$ , et  $V_0 = \emptyset$  dans (\*), ce qui donne  $\nu(X) \geq \nu(U \cup V) + \nu(X \setminus V) - \nu((U \cup V) \setminus V)$ , et l'on conclut parce que  $(U \cup V) \setminus V = U \setminus V$ . Si l'on prend  $U_0 = U$ ,  $U_1 = U \cap V$ ,  $V_1 = V$ , et  $V_0 = \emptyset$ , on obtient  $\nu(U) \geq \nu(U \cap V) + \nu(U \setminus V) - \nu((U \cap V) \setminus V)$ , ce qui démontre (iii), puisque  $(U \cap V) \setminus V = \emptyset$ . Posons maintenant  $U_0 = X$ ,  $U_1 = U$ ,  $V_1 = U \cap V$ ,  $V_0 = \emptyset$  dans (\*) : on obtient  $\nu(X) \geq \nu(U) + \nu(X \setminus (U \cap V)) - \nu(U \setminus (U \cap V))$ ; or  $U \setminus (U \cap V) = U \setminus V$ , d'où l'inégalité (iv). Enfin, pour (v), on prend  $U_0 = X$ ,  $U_1 = U$ ,  $V_1 = U \cup V$ , et  $V_0 = V$ , ce qui implique  $\nu(X \setminus V) \geq \nu(U \setminus V) + \nu(X \setminus (U \cup V)) - \nu(U \setminus (U \cup V))$ . Or  $U \setminus (U \cup V)$  est vide, donc  $\nu(X \setminus V) \geq \nu(U \setminus V) + \nu(X \setminus (U \cup V))$ . Donc  $\nu^\downarrow(V) = \nu(X) - \nu(X \setminus V) \geq \nu(X) - \nu(X \setminus (U \cup V)) - \nu(U \setminus V) = \nu^\downarrow(U \cup V) - \nu(U \setminus V)$ .  $\square$

Lorsque  $P$  est une valuation,  $P^\%(U \cup V) = P^\%(U \setminus V) + P^\%(V)$ , et  $P^\%(U \cap V) + P^\%(U \setminus V) = P^\%(U)$ . Les inégalités ci-dessus peuvent être vues comme indiquant dans quel sens les estimations s'approchent de ces égalités. Par exemple, alors que  $P^\%(U \setminus V) = P^\%(U \cup V) - P^\%(V)$ , les inégalités (ii) et (v) entraînent que  $\nu(U \setminus V)$  est compris entre  $\nu^\uparrow(U \cup V) - \nu^\downarrow(V)$  et  $\nu^\downarrow(U \cup V) - \nu^\downarrow(V)$ . De même, alors que  $P^\%(U \setminus V) = P^\%(U) - P^\%(U \cap V)$ , les inégalités (iii) et (iv) entraînent que  $\nu(U \setminus V)$  est compris entre  $\nu^\uparrow(U) - \nu^\downarrow(U \cap V)$  et  $\nu^\uparrow(U) - \nu^\uparrow(U \cap V)$ .

## 7.2 Estimations simples

De même que les crédibilités et les plausibilités simples permettent de mieux comprendre, concrètement, ce que sont les crédibilités et plausibilités continues, définissons une notion d'estimation simple.

**Définition 7.2.1 (Estimation à l'unanimité)** Soit  $X$  un espace topologique. Pour toute partie  $A$  de  $X$ , l'estimation à l'unanimité  $\mathfrak{u}_A$  est la fonction de  $\mathcal{C}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  définie par : pour tout croissant  $C$ ,  $\mathfrak{u}_A(C) = 1$  si  $A \subseteq C$ ,  $\mathfrak{u}_A(C) = 0$  sinon.

La définition est la même que pour le jeu d'unanimité  $\mathfrak{u}_A$ , à ceci près que  $\mathfrak{u}_A$  mesure des croissants, pas des ouverts.

Rappelons que  $\langle A \rangle = \uparrow A \cap cl(A)$  (lemme 3.5.20).

**Lemme 7.2.2** Pour toute partie  $A$ ,  $\mathfrak{u}_A = \mathfrak{u}_{\langle A \rangle}$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que, pour tout croissant  $C = U \setminus V$ ,  $A \subseteq C$  si et seulement si  $\langle A \rangle \subseteq C$ . Puisque  $A \subseteq \langle A \rangle$ , la direction si est triviale. Réciproquement, supposons  $A \subseteq C$ , et montrons que  $\langle A \rangle \subseteq C$ . Soit donc  $x$  un élément quelconque de  $\langle A \rangle = \uparrow A \cap cl(A)$ .

Puisque  $x \in \uparrow A$ , il existe  $y \in A$  tel que  $y \leq x$ . Par hypothèse,  $y$  est dans  $A$ , donc dans  $C \subseteq U$ . Puisque  $U$  est clos par le haut,  $x$  appartient à  $U$ .

Puisque  $x \in cl(A)$ , tout ouvert contenant  $x$  intersecte  $A$ . Si  $x$  appartenait à  $V$ ,  $V$  intersecterait donc  $A$ , ce qui est impossible puisque  $A \subseteq C = U \setminus V$ . Donc  $x$  n'appartient pas à  $V$ .

On en déduit que  $x$  est dans  $U \setminus V = C$ . □

**Lemme 7.2.3** *La fonction  $\mathfrak{u}_A$  est continue, au sens où  $\mathfrak{u}_A(\bigcup_{i \in I} U_i) = \sup_{i \in I} \mathfrak{u}_A(U_i)$  pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ , si et seulement si  $A$  est compact.*

*Démonstration.* Clairement,  $\mathfrak{u}_A$  est continue si et seulement si  $u_A$  est continu, si et seulement si  $A$  est compact, par la proposition 5.1.1. □

Notons que la notion de continuité est bien plus faible que la sesqui-continuité. Ces deux lemmes permettent de se restreindre aux estimations à l'unanimité de la forme  $\mathfrak{u}_L$ , où  $L$  est une lentille.

Puisque l'espace des lentilles,  $\mathcal{P}_V(X)$ , se plonge dans l'espace  $\mathcal{P}_V(X)$  des  $\mathbf{A}$ -valuations continues, du moins lorsque  $X$  est sobre (proposition 3.6.2), on peut immédiatement généraliser :

**Définition 7.2.4 (A-estimation)** *Soit  $X$  un espace topologique. Pour toute  $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha \in \mathcal{P}_V(X)$ , l'A-estimation  $\mathfrak{u}_\alpha$  est la fonction de  $\mathcal{C}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  définie par : pour tout croissant  $C$ ,  $\mathfrak{u}_\alpha(C) = 1$  si  $\alpha \in \square C$ ,  $\mathfrak{u}_\alpha(C) = 0$  sinon.*

Autrement dit, si  $C = U \setminus V$ ,  $\mathfrak{u}_\alpha(C) = 1$  si  $\alpha(U) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ , et  $\mathfrak{u}_\alpha(C) = 0$  sinon. Clairement, le plongement  $L \mapsto L^*$  de  $\mathcal{P}_V(X)$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$  transporte la notion d'estimation à l'unanimité en A-estimation :

**Lemme 7.2.5** *Pour toute lentille  $L$ ,  $\mathfrak{u}_L = \mathfrak{u}_{L^*}$ .*

*Démonstration.* Soit  $C = U \setminus V$ . Alors  $\mathfrak{u}_L(C) = 1$  si et seulement si  $L \subseteq C$ , si et seulement si  $L \subseteq U$  et  $L$  n'intersecte pas  $V$ , si et seulement si  $L^*(U) = 1$  et  $L^*(V) = 0$ , si et seulement si  $\mathfrak{u}_{L^*}(C) = 1$ . □

Nous vérifions maintenant que  $\mathfrak{u}_\alpha$  est bien une estimation, et donc aussi  $\mathfrak{u}_L$  pour toute lentille  $L$ .

**Lemme 7.2.6** *Pour tout croissant  $\mathcal{C} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$  de  $\mathcal{P}_V(X)$ ,  $\delta_\alpha^\%(\mathcal{C}) = 1$  si  $\alpha \in \mathcal{C}$  et  $\delta_\alpha^\%(\mathcal{C}) = 0$  sinon.*

*Démonstration.* Calculons :  $\delta_\alpha^\%(\mathcal{C}) = \delta_\alpha(\mathcal{U}) - \delta_\alpha(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ . Si  $\alpha \in \mathcal{C}$ , alors  $\delta_\alpha^\%(\mathcal{C}) = 1 - 0 = 1$ . Sinon, soit  $\alpha$  n'est pas dans  $\mathcal{U}$ , soit  $\alpha$  est à la fois dans  $\mathcal{U}$  et dans  $\mathcal{V}$ . Dans les deux cas,  $\delta_\alpha^\%(\mathcal{C}) = 0$ . □

**Lemme 7.2.7** *Pour toute  $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$  sur  $X$ ,  $\mathfrak{u}_\alpha$  est une estimation sesqui-continue sur  $X$ . On a  $\mathfrak{u}_\alpha(C) = \delta_\alpha^\%(\square C)$  pour tout croissant  $C$ .*

*Démonstration.* En posant  $C = U \setminus V$ , on a  $\mathfrak{u}_\alpha(C) = 1$  si et seulement si  $\alpha \in \square C$  par définition. Par le lemme 7.2.6, ceci est équivalent à  $\delta_\alpha^\%(\square C) = 1$ . Comme  $\delta_\alpha^\%$  ne prend que les valeurs 0 ou 1 par le lemme 7.2.6,  $\mathfrak{u}_\alpha(C) = \delta_\alpha^\%(\square C)$  pour tout croissant  $C$ .

On en déduit immédiatement que  $\mathfrak{u}_\alpha$  est une estimation sesqui-continue par la proposition 7.1.11.  $\square$

**Définition 7.2.8 (Estimation simple)** Une estimation simple est une combinaison linéaire à coefficients positifs d' $\mathbf{A}$ -estimations, de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i \mathfrak{u}_{\alpha_i}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}^+$ , et  $\alpha_i \in \mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Lemme 7.2.9** Toute estimation simple est une estimation sesqui-continue.

*Démonstration.* Clairement, toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'estimations sesqui-continues est encore une estimation sesqui-continue. On conclut par le lemme 7.2.7.  $\square$

Nous verrons plus loin que, sous quelques hypothèses sur l'espace sous-jacent  $X$ , toute estimation sesqui-continue est borne supérieure d'une famille dirigée d'estimations simples. La seule difficulté est de déterminer quel est l'ordre adéquat sur l'espace des valuations continues. Cette question délicate sera abordée à la section 7.4.

## 7.3 Des estimations aux valuations sur $\mathcal{P}_\nu(X)$

Le but que nous poursuivons dans cette section est de montrer que, sous quelques conditions sur l'espace  $X$ , pour toute estimation continue  $\nu$  sur  $X$ , il existe une unique valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{P}_\nu(X)$  telle que  $\nu(C) = P^\%(\square C)$  pour tout croissant  $C$ . Autrement dit, toute estimation continue représente un choix probabiliste parmi des  $\mathbf{A}$ -valuations continues — à peu de choses près, parmi des lentilles — codant des choix chaotiques.

La stratégie de démonstration est analogue à celle de la proposition 5.4.7. Force est cependant de constater que si la structure générale reste, les détails sont bien plus complexes. Un des changements notables est le suivant. À la proposition 5.4.7, nous commençons par construire fonction  $P$  sur les unions finies d'ouverts de base  $\square U$ , que nous étendons ensuite par continuité à toutes les unions, finies ou infinies, d'ouverts de base, donc à la topologie de  $\mathcal{Q}(X)$ . Ici, tout ouvert de  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est une union d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\square U$  ou  $\diamond V$ ; en utilisant le lemme 7.1.4, une union d'ouverts de la forme  $\square U \cap \bigcap_{i=1}^n \diamond V_i$ . Ici, la stratégie analogue consistant à construire  $P$  sur les unions finies d'ouverts de la forme  $\square U \cap \bigcap_{i=1}^n \diamond V_i$  ne permettra pas de montrer facilement que  $P$  est monotone. À la place, nous construirons directement  $P^\%$  sur la pré-tribu engendrée par ces ouverts. Nous étudions cette pré-tribu à la section 7.3.1.

### 7.3.1 La pré-tribu engendrée par les $\square U, \diamond V$

Fixons d'abord un peu de vocabulaire.

**Définition 7.3.1 (Ouvert de base, élémentaire)** Un ouvert de base de  $\mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_V(X)$ , est un ouvert de la forme  $\square U$  ou  $\diamond U$ , où  $U$  est un ouvert de  $X$ .

Un ouvert élémentaire de  $\mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_V(X)$ , est un ouvert de la forme  $\square U \cap \bigcap_{i=1}^n \diamond V_i$ , où  $U, V_1, \dots, V_n$  sont des ouverts de  $X$ .

Tout ouvert de  $\mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_V(X)$ , est une union, possiblement infinie, d'ouverts élémentaires.

Nous allons plutôt nous intéresser à certains croissants :

**Définition 7.3.2 (Croissant élémentaire)** Un croissant élémentaire de  $\mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_V(X)$ , est une partie de la forme  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^n \diamond G_i$ , où  $C$  est un croissant de  $X$  et  $G_1, \dots, G_n$  sont des ouverts ou fermés de  $X$ .

On adopte la convention que, si  $n = 0$ , alors le croissant élémentaire en question est simplement  $\square C$ . En général, nous adopterons la convention qu'une intersection vide représente l'espace environnant tout entier, lequel sera déterminé de façon non ambiguë par le contexte.

**Lemme 7.3.3** Tout croissant élémentaire est un élément de la pré-tribu engendrée par les ouverts de base.

*Démonstration.* Lorsque  $C$  est le croissant  $U \setminus V$ ,  $\square C = \square U \setminus \diamond V$  par le lemme 7.1.2. D'autre part, séparons les ouverts ou fermés  $G_1, \dots, G_n$  en  $m$  ouverts  $V_1, \dots, V_m$  et  $n - m$  fermés  $X \setminus U_1, \dots, X \setminus U_{n-m}$ . Puisque  $\diamond(X \setminus U_j)$  est le complémentaire de  $\square U_j$  par définition (lemme 7.1.3), le croissant élémentaire  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^n \diamond G_i$  s'écrit  $\square U \setminus \diamond V \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n-m} \square U_j$ , et est donc la différence de l'ouvert élémentaire  $\square U \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond V_i$  et de l'union finie des  $n - m + 1$  ouverts élémentaires  $\diamond V, \square U_1, \dots, \square U_{n-m}$ . Il est donc dans la pré-tribu engendrée par les ouverts élémentaires.  $\square$

La pré-tribu engendrée par les ouverts de base est la plus petite famille contenant les ouverts de base, et stable par complémentaires, unions finies et intersections finies. Ceci peut se représenter à l'aide de *formules propositionnelles*.

**Définition 7.3.4** Fixons un ensemble dit de variables  $\varphi, \psi, \dots$ . Les formules propositionnelles sont définies par la grammaire :

$F ::=$	$\varphi$	variables
	$\top$	vrai
	$F \wedge F$	conjonction (et)
	$\perp$	faux
	$F \vee F$	disjonction (ou)
	$\neg F$	négation (non)

La sémantique des formules propositionnelles est définie comme suit. Un environnement  $\rho$  est une fonction qui à toute variable  $\varphi$  associe un ouvert ou fermé de  $\mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_V(X)$ . La valeur  $\llbracket F \rrbracket \rho$  de la formule dans  $\rho$  est définie par récurrence structurelle sur  $F$  par :

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket \rho &= \square \rho(\varphi) & \llbracket \neg F \rrbracket \rho &= \square X \setminus \llbracket F \rrbracket \rho \\ \llbracket \top \rrbracket \rho &= \square X & \llbracket F \wedge G \rrbracket \rho &= \llbracket F \rrbracket \rho \cap \llbracket G \rrbracket \rho \\ \llbracket \perp \rrbracket \rho &= \emptyset & \llbracket F \vee G \rrbracket \rho &= \llbracket F \rrbracket \rho \cup \llbracket G \rrbracket \rho \end{aligned}$$

Tout croissant s'exprime à l'aide d'unions (codées par des conjonctions  $\wedge$ ,  $\top$ ), d'intersections (disjonctions  $\vee$  et  $\perp$ ), et de complémentaires (codés par la négation  $\neg$ ) d'ouverts de base  $\square U$  ou  $\diamond V$  ( $U, V$  ouverts de  $X$ ). Le rôle des variables  $\varphi$  est intuitivement de nommer ces ouverts de base, et l'environnement  $\rho$  énonce la valeur associée à chacun de ces noms. Il serait donc raisonnable de demander que  $\rho(\varphi)$  soit un ouvert de base  $\square U$  ou  $\diamond V$ , et de poser  $\llbracket \varphi \rrbracket \rho = \rho(\varphi)$ , mais ceci rendrait certaines notations maladroites dans la suite, essentiellement celle de l'équation (7.6). Puisque notre logique dispose de la négation, il serait équivalent de demander que  $\rho(\varphi)$  soit de la forme  $\square G$ , où  $G$  est un ouvert ou un fermé ; dans le second cas, où  $G$  est le complémentaire d'un ouvert  $V$ , on utilise le fait que  $\square G$  est le complémentaire de  $\diamond V$ . Ceci étant acquis, on peut décider que  $\rho(\varphi)$  est juste la donnée de  $G$  lui-même, auquel cas on doit poser  $\llbracket \varphi \rrbracket \rho = \square \rho(\varphi)$ .

La sémantique de la définition 7.3.4 n'est pas la sémantique usuelle des formules propositionnelles. La voici. Intuitivement, une affectation est l'ensemble des variables que l'on veut considérer comme vraies, les autres étant considérées comme fausses.

**Définition 7.3.5** *Pour toute formule propositionnelle  $F$ , l'ensemble  $\text{vars}(F)$  des variables libres de  $F$  est par définition l'ensemble des variables qui apparaissent dans  $F$  :  $\text{vars}(\varphi) = \{\varphi\}$ ,  $\text{vars}(\top) = \text{vars}(\perp) = \emptyset$ ,  $\text{vars}(\neg F) = \text{vars}(F)$ ,  $\text{vars}(F \wedge G) = \text{vars}(F \vee G) = \text{vars}(F) \cup \text{vars}(G)$ .*

Soit  $\mathcal{V}$  un ensemble fini de variables. Une affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$  est un ensemble de variables dans  $\mathcal{V}$ . On dit que  $\mathcal{A}$  satisfait la formule  $F$ , avec  $\text{vars}(F) \subseteq \mathcal{V}$ , si et seulement si  $\mathcal{A} \models F$ , où  $\models$  est la relation définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi & \text{ ssi } \varphi \in \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \models \neg F & \text{ ssi } \mathcal{A} \not\models F \\ \mathcal{A} \models \top & \text{ toujours} \\ \mathcal{A} \models F \wedge G & \text{ ssi } \mathcal{A} \models F \text{ et } \mathcal{A} \models G \\ \mathcal{A} \models \perp & \text{ jamais} \\ \mathcal{A} \models F \vee G & \text{ ssi } \mathcal{A} \models F \text{ ou } \mathcal{A} \models G \end{aligned}$$

La relation entre les deux sémantiques est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 7.3.6** *Soit  $\mathcal{V}$  un ensemble fini de variables,  $F$  une formule propositionnelle telle que  $\text{vars}(F) \subseteq \mathcal{V}$ , et  $\rho$  un environnement.*

*Pour toute affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$ , notons  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \square \rho(\varphi) \setminus \bigcup_{\varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} \square \rho(\varphi)$ . De façon duale, posons  $\overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket}_{\mathcal{V}} \rho$  égal au complémentaire de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ .*

*Alors  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  est un croissant élémentaire, plus précisément :*

$$\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = \square \left( \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) \cap \bigcap_{\varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} \diamond (X \setminus \rho(\varphi)) \quad (7.6)$$

*De plus,  $\llbracket F \rrbracket \rho$  est l'union disjointe  $\bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  de tous les  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  lorsque  $\mathcal{A}$  parcourt les affectations sur  $\mathcal{V}$  telles que  $\mathcal{A} \models F$ .  $\llbracket F \rrbracket \rho$  est aussi l'intersection  $\bigcap_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \not\models F} \overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket}_{\mathcal{V}} \rho$ .*

*Démonstration.* L'équation (7.6) est claire, en utilisant le fait que  $\square$  commute avec les intersections finies, par le lemme 7.1.4, et que le complémentaire de  $\square\rho(\varphi)$  est  $\diamond(X \setminus \rho(\varphi))$ . On note ensuite que  $X \setminus \rho(\varphi)$  est un ouvert ou fermé de  $X$ , et que  $\bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi)$ , en tant qu'intersection finie d'ouverts et de fermés, est un croissant. Donc le côté droit de l'équation (7.6) est un croissant élémentaire.

On note maintenant que : (a) si  $\text{vars}(F) \subseteq \mathcal{V}$ , et  $\varphi_0$  est une variable hors de  $\mathcal{V}$ , alors  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \cup \llbracket \mathcal{A} \cup \{\varphi_0\} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho$ . En effet,

$$\begin{aligned} & \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \cup \llbracket \mathcal{A} \cup \{\varphi_0\} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \\ = & \left( \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \square\rho(\varphi) \setminus \left( \bigcup_{\varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} \square\rho(\varphi) \cup \square\rho(\varphi_0) \right) \right) \cup \left( \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \square\rho(\varphi) \cap \square\rho(\varphi_0) \setminus \bigcup_{\varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} \square\rho(\varphi) \right) \\ = & \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \square\rho(\varphi) \setminus \bigcup_{\varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} \square\rho(\varphi) \cap (\overline{\square\rho(\varphi_0)} \cup \square\rho(\varphi_0)) \\ & \text{où } \overline{\square\rho(\varphi_0)} \text{ est le complémentaire de } \square\rho(\varphi_0) \\ = & \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho \end{aligned}$$

On en déduit que, si l'on pose  $[F]_{\mathcal{V}} = \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$ , alors : (b) si  $\text{vars}(F) \subseteq \mathcal{V}$  et  $\varphi_0$  est une variable hors de  $\mathcal{V}$ , alors  $[F]_{\mathcal{V}} = [F]_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}}$ . En effet,

$$\begin{aligned} [F]_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} &= \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \\ &= \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \cup \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \cup \{\varphi_0\} \models F} \llbracket \mathcal{A} \cup \{\varphi_0\} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \end{aligned}$$

en séparant les affectations sur  $\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}$  en celles qui ne contiennent pas, resp. contiennent  $\varphi_0$ . Puisque  $\varphi_0 \notin \text{vars}(F)$ ,  $\mathcal{A} \cup \{\varphi_0\} \models F$  est équivalent à  $\mathcal{A} \models F$ . Donc

$$\begin{aligned} [F]_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} &= \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \cup \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \cup \{\varphi_0\} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \\ &= \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} (\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho \cup \llbracket \mathcal{A} \cup \{\varphi_0\} \rrbracket_{\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}} \rho) \\ &= \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho \quad \text{par (a)} \\ &= [F]_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

On en déduit que : (c)  $[F]_{\mathcal{V}}$  est indépendant de  $\mathcal{V}$ , du moment que  $\text{vars}(F) \subseteq \mathcal{V}$ . En effet, pour tous  $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$  contenant  $\text{vars}(F)$ , on démontre que  $[F]_{\mathcal{V}} = [F]_{\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'}$  par récurrence sur le nombre d'éléments de  $\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$  qui ne sont pas dans  $\mathcal{V}$ , en utilisant (b) ; et de même,  $[F]_{\mathcal{V}'} = [F]_{\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'}$ . Notons en conséquence  $[F]_{\mathcal{V}}$  simplement  $[F]$ .

Il est ensuite facile de voir que : (d) l'intersection  $\langle F \rangle = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \not\models F} \overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho}$  est égale au complémentaire de  $[\neg F]$ . En particulier, par (c),  $\langle F \rangle$  est indépendante de  $\mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F)$ .

Notre dernière remarque préliminaire est : (e) si  $\mathcal{A}$  et  $I'$  sont deux affectations distinctes sur  $\mathcal{V}$ , alors  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  et  $\llbracket I' \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  sont disjoints. En effet, il existe une variable  $\varphi$  de  $\mathcal{V}$  telle que  $\varphi \in \mathcal{A}$  et  $\varphi \notin I'$  (ou le contraire). Alors  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  est inclus dans  $\square \rho(\varphi)$ , alors que  $\llbracket I' \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  est inclus dans le complémentaire de  $\square \rho(\varphi)$ , donc ils sont disjoints.

On montre maintenant que  $\llbracket F \rrbracket \rho = [F] = \langle F \rangle$  par récurrence structurale sur  $F$ .

Si  $F$  est une variable  $\varphi$ , alors par (c),  $[F]$  est indépendant de  $\mathcal{V}$ , du moment que  $\varphi \in \mathcal{V}$ . On peut donc en particulier prendre  $\mathcal{V} = \{\varphi\}$ . Alors  $[F] = \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \{\varphi\}/\mathcal{A} \models \varphi} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\{\varphi\}} \rho = \square \rho(\varphi)$ , puisque  $\mathcal{A} \models \varphi$  si et seulement si  $\mathcal{A} = \{\varphi\}$ , pour toute affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\{\varphi\}$ . Mais  $\square \rho(\varphi) = \llbracket F \rrbracket \rho$ , donc  $\llbracket F \rrbracket \rho = [F]$ . De même, pour toute affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\{\varphi\}$ ,  $\mathcal{A} \not\models \varphi$  si et seulement si  $\mathcal{A} = \emptyset$ . Or  $\llbracket \emptyset \rrbracket_{\{\varphi\}} \rho = \square X \setminus \square \rho(\varphi)$ , donc  $\overline{\llbracket \emptyset \rrbracket_{\{\varphi\}} \rho} = \square \rho(\varphi)$ , ce qui implique que  $\langle F \rangle = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \not\models \varphi} \overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\{\varphi\}} \rho} = \square \rho(\varphi) = \llbracket F \rrbracket \rho$ .

Si  $F$  est de la forme  $\neg F'$ , alors  $\llbracket F \rrbracket \rho$  est le complémentaire de  $\llbracket F' \rrbracket \rho = [F'] = \langle F' \rangle$ , par hypothèse de récurrence. Comme  $\langle F \rangle$  est le complémentaire de  $[F']$  et  $[F]$  est celui de  $\langle F' \rangle$ , par (d), on en déduit  $\llbracket F \rrbracket \rho = \langle F \rangle = [F]$ .

Si  $F$  est de la forme  $F_1 \vee F_2$ , alors  $\llbracket F \rrbracket \rho = \llbracket F_1 \rrbracket \rho \cup \llbracket F_2 \rrbracket \rho = [F_1] \cup [F_2] = \bigcup_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F_1} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho \cup \bigcup_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F_2} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = \bigcup_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F_1 \text{ ou } \mathcal{A} \models F_2} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = \bigcup_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = [F]$ . On a aussi  $\llbracket F \rrbracket \rho = \langle F_1 \rangle \cup \langle F_2 \rangle = \bigcap_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \not\models F_1} \overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho} \cup \bigcap_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \not\models F_2} \overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho} = \bigcap_{\mathcal{A}, I'/\mathcal{A} \not\models F_1, I' \not\models F_2} (\overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho} \cup \overline{\llbracket I' \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho})$ . Lorsque  $\mathcal{A} \neq I'$ , par (e)  $\overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho} \cup \overline{\llbracket I' \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho}$  est l'espace  $\square X$  tout entier. Donc  $\llbracket F \rrbracket \rho$  est égal à l'intersection restreinte aux cas  $\mathcal{A} = I'$  :  $\llbracket F \rrbracket \rho = \bigcap_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \not\models F_1 \text{ et } \mathcal{A} \not\models F_2} \overline{\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho} = \langle F \rangle$ .

Le cas  $F = F_1 \wedge F_2$  est similaire, et les cas  $F = \top$ ,  $F = \perp$  sont triviaux.

Finalement, l'union des  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  est une union disjointe, par (e).  $\square$

**Corollaire 7.3.7** *La pré-tribu engendrée par les ouverts de base sur  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , est formée des unions finies disjointes de croissants élémentaires.*

**Lemme 7.3.8** *Soit  $\nu$  une fonction de  $\mathcal{C}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Posons  $P_{\nu}^0$  la fonction qui à toute affectation  $\mathcal{A}$  sur l'ensemble fini  $\mathcal{V}$ , et à tout environnement  $\rho$ , associe :*

$$P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) = \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right)$$

*Posons ensuite  $P_{\nu}^1$  la fonction qui à toute formule  $F$ , tout environnement  $\rho$ , et tout ensemble fini de variables contenant  $\text{vars}(F)$ , associe :*

$$P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V}) = \sum_{\mathcal{A} \text{ affectation sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) \quad (7.7)$$

*S'il existe une valuation  $P$  sur  $\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , telle que  $\nu(C) = P^{\%}(\square C)$  pour tout croissant  $C$ , alors  $P^{\%}(\llbracket F \rrbracket \rho) = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$  pour toute formule propositionnelle  $F$ , tout environnement  $\rho$ , et tout ensemble fini  $\mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F)$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\nu(C) = P^{\%}(\square C)$  pour tout croissant  $C$ , où  $P$  est une valuation sur  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ . Alors :

$$\begin{aligned}
P^{\%}(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho) &= P^{\%} \left( \square \left( \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) \cap \bigcap_{\varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} \diamond(X \setminus \rho(\varphi)) \right) \\
&\quad \text{par l'équation 7.6 (lemme 7.3.6)} \\
&= \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi) \setminus \bigcup_{\varphi \in K} (X \setminus \rho(\varphi)) \right) \\
&\quad \text{par l'équation 7.1 (lemme 7.1.6)} \\
&= \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi) \cap \bigcap_{\varphi \in K} \rho(\varphi) \right) = P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V})
\end{aligned}$$

Puisque  $\llbracket F \rrbracket \rho$  est l'union disjointe des  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$  lorsque  $\mathcal{A}$  parcourt les affectations sur  $\mathcal{V}$  telles que  $\mathcal{A} \models F$ , par le lemme 7.3.6, et que  $P^{\%}$  est additive, l'équation (7.7) est claire.  $\square$

**Lemme 7.3.9** *Soit  $\nu$  une estimation sur  $X$ . Alors  $P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) \in \mathbb{R}^+$ , et  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V}) \in \mathbb{R}^+$ .*

*Démonstration.* La seconde affirmation est une conséquence triviale de la première. Séparons  $\mathcal{V}$  en  $m + m'$  variables  $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m'}$  dont l'image par  $\rho$  est ouverte, disons  $\rho(\varphi_i) = U_i$ ,  $1 \leq i \leq m + m'$ , et en  $n + n'$  variables  $\varphi'_1, \dots, \varphi'_n, \varphi'_{n+1}, \dots, \varphi'_{n+n'}$  dont l'image par  $\rho$  est fermée, disons  $\rho(\varphi'_j) = X \setminus V_j$ ,  $1 \leq j \leq n + n'$ . De plus, arrangeons les variables de sorte que celles qui sont dans  $\mathcal{A}$  sont  $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m'}$  et  $\varphi'_{n+1}, \dots, \varphi'_{n+n'}$ . Posons  $U = \bigcap_{i=m+1}^{m'} U_i$ ,  $V = \bigcup_{j=n+1}^{n'} V_j$ . Alors :

$$\begin{aligned}
P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) &= \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ J \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|I|+|J|} \nu \left( \bigcap_{i=m+1}^{m'} U_i \cap \bigcap_{j=n+1}^{n'} (X \setminus V_j) \cap \bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{j \in J} (X \setminus V_j) \right) \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ J \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|I|+|J|} \nu \left( U \setminus V \cap \bigcap_{i \in I} U_i \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ J \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|I|+|J|} \nu \left( \bigcap_{i \in I}^{[U]} (U \cap U_i) \setminus \bigcup_{j \in J}^{[V]} (V \cup V_j) \right)
\end{aligned}$$

ce qui est positif ou nul, par l'inégalité (7.2), qui s'applique car  $U \cap U_i \subseteq U$  pour tout  $i$ , et  $V \cup V_j \supseteq V$  pour tout  $j$ .  $\square$

Le lemme 7.3.9 est le seul et unique endroit dans la construction de  $P_{\nu}^1$  à partir de  $\nu$  où nous utiliserons la propriété (7.2) : elle ne sert que pour garantir que la fonction  $P_{\nu}^1$  est à valeurs positives ou nulles sur les croissants, et donc que la valuation obtenue par restriction aux unions d'ouverts élémentaires est positive ou nulle et monotone.

### 7.3.2 Propriétés de $P_{\nu}^1$

Le lemme 7.3.8 montre que nous n'avons pas le choix. Pour trouver  $P$  à partir de  $\nu$ , nous devons définir  $P$  de sorte que  $P^{\%}(\mathcal{C}) = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$  pour tout croissant  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , où les arguments  $F, \rho, \mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F)$  sont quelconques tels que  $\mathcal{C} = \llbracket F \rrbracket \rho$ . Notre objectif est maintenant de montrer que, lorsque  $\nu$  est une estimation,  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$  ne dépend que de  $\llbracket F \rrbracket \rho$ .

On a d'abord :

**Lemme 7.3.10** *Pour toute formule  $F$ , pour tout environnement  $\rho$ ,  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$  est indépendant de l'ensemble  $\mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F)$ .*

*Nous noterons ainsi  $P_{\nu}^1(F, \rho)$  au lieu de  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{V}$  un ensemble fini de variables contenant  $\text{vars}(F)$  mais pas la variable  $\varphi_0$ . Pour toute affectation  $\mathfrak{A}$  sur  $\mathcal{V}$ , on a : (a)  $P_{\nu}^0(\mathfrak{A}, \rho, \mathcal{V}) = P_{\nu}^0(\mathfrak{A}, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) + P_{\nu}^0(\mathfrak{A} \cup \{\varphi_0\}, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\})$ . En effet,

$$\begin{aligned}
& P_{\nu}^0(\mathfrak{A}, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) + P_{\nu}^0(\mathfrak{A} \cup \{\varphi_0\}, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) \\
&= \sum_{K \subseteq (\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) \setminus \mathfrak{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathfrak{A}} \rho(\varphi) \right) + \sum_{K \subseteq (\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) \setminus (\mathfrak{A} \cup \{\varphi_0\})} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathfrak{A} \cup \{\varphi_0\}} \rho(\varphi) \right) \\
&= \sum_{K \subseteq (\mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) \setminus \mathfrak{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathfrak{A}} \rho(\varphi) \right) + \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathfrak{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathfrak{A}} \rho(\varphi) \cap \rho(\varphi_0) \right) \\
&= \sum_{K \subseteq \mathcal{V}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathfrak{A}} \rho(\varphi) \right) + \sum_{K \subseteq \mathcal{V}} (-1)^{|K|+1} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathfrak{A}} \rho(\varphi) \cap \rho(\varphi_0) \right) \\
&\quad + \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathfrak{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathfrak{A}} \rho(\varphi) \cap \rho(\varphi_0) \right)
\end{aligned}$$

en séparant la première somme selon que  $K$  contient  $\varphi_0$  ou non. Les deux dernières sommes s'annulent, et il reste la première, qui n'est autre que  $P_{\nu}^0(\mathfrak{A}, \rho, \mathcal{V})$ .

On en déduit que : (b) si  $\mathcal{V}$  contient  $\text{vars}(F)$ , et  $\varphi_0$  est une variable hors de  $\mathcal{V}$ , alors  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V} \cup$

$\{\varphi_0\}) = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$ . En effet :

$$\begin{aligned} P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V}) &= \sum_{\mathcal{A} \text{ affectation sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) \\ &= \sum_{\mathcal{A} \text{ affectation sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} (P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) + P_{\nu}^0(\mathcal{A} \cup \{\varphi_0\}, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\})) \\ &= \sum_{\mathcal{A} \text{ affectation sur } \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}/\mathcal{A} \models F} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V} \cup \{\varphi_0\}) \end{aligned}$$

Donc  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V} \cup \mathcal{V}') = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$ , en utilisant (b), et par récurrence sur le cardinal de  $(\mathcal{V} \cup \mathcal{V}') \setminus \mathcal{V}$ . Par symétrie,  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V} \cup \mathcal{V}') = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V}')$ , donc  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V}) = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V}')$ .  $\square$

Ensuite, nous devrons étudier plus finement les croissants élémentaires. Le lemme suivant caractérise ceux qui sont non vides.

**Lemme 7.3.11** *Soit  $X$  un espace localement compact,  $C$  un croissant de  $X$ ,  $G_1, \dots, G_n$  des ouverts ou fermés de  $X$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes, dans  $\mathcal{P}l_{\mathcal{V}}(X)$  ou dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$  :*

1.  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^n \diamond G_i \neq \emptyset$ ;
2.  $C$  intersecte chaque  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Démonstration.* Écrivons  $C$  sous la forme  $U \setminus V$ . Commençons par montrer l'équivalence de 1 et 2 dans  $\mathcal{P}l_{\mathcal{V}}(X)$ .

$2 \Rightarrow 1$ . Fixons un élément  $x_i$  de  $C \cap G_i$  pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Puisque  $x_i \in C$ , on a  $x_i \in U$ . Comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $\overset{\circ}{Q}_i$  tel que  $x_i \in \overset{\circ}{Q}_i \subseteq Q_i \subseteq U$ . Soit  $Q$  le compact saturé  $\bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{Q}_i$ , et  $L$  la lentille  $Q \setminus V$ . Alors  $L = \bigcup_{i=1}^n Q_i \setminus V \subseteq U \setminus V = C$ , donc  $L \in \square C$ . D'autre part,  $x_i \in Q_i \subseteq Q$  et comme  $x_i \in C$ ,  $x_i \notin V$ , donc  $x_i \in Q \setminus V = L$ ; comme  $x_i \in G_i$ ,  $L$  intersecte  $G_i$ , donc  $L \in \diamond G_i$  : on obtient ainsi 1.

$1 \Rightarrow 2$ . Soit  $L$  une lentille incluse dans  $C$  et qui intersecte chaque  $G_i$ , disons en  $x_i$ . Alors  $x_i \in C \cap G_i$ , donc 2 s'ensuit.

Passons maintenant à l'équivalence de 1 et 2 dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ .

$2 \Rightarrow 1$ . Fixons comme plus haut  $x_i \in C \cap G_i$  pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i \in \overset{\circ}{Q}_i \subseteq Q_i \subseteq U$ ,  $Q = \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{Q}_i$  et  $L = Q \setminus V$ . On a  $L^*(U) = 1$  car  $L \subseteq Q \subseteq U$ , et  $L^*(V) = 0$  car  $L \cap V = \emptyset$ ; donc  $L^* \in \square C$ . De même que plus haut,  $x_i$  est dans  $L$  et dans  $G_i$ . Utilisons le lemme 7.1.3. Si  $G_i$  est un ouvert,  $L^*(G_i) \neq 0$ , donc  $L^* \in \diamond G_i$ . Si  $G_i$  est un fermé  $X \setminus W$ ,  $L$  n'est pas inclus dans  $W$ , donc  $L^*(W) \neq 1$ , c'est-à-dire de nouveau  $L^* \in \diamond G_i$ . Dans tous les cas  $L^*$  est dans  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^n \diamond G_i \neq \emptyset$ .

$1 \Rightarrow 2$ . Soit  $\alpha$  une  $\mathbf{A}$ -évaluation continue incluse dans  $C$  (donc  $\alpha(U) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ ) et telle que  $\alpha \in \diamond G_i$  pour chaque  $i$ . Si  $G_i$  est un ouvert,  $\alpha \in \diamond G_i$  implique  $\alpha(G_i) \neq 0$ . Puisque  $\alpha(U) = 1$ , par la propriété 5 de la définition 3.6.1,  $\alpha(U \cap G_i) = \alpha(G_i)$ . donc  $\alpha(U \cap G_i) \neq 0$ . Donc  $U \cap G_i \not\subseteq V$ , sinon on aurait  $\alpha(U \cap G_i) \leq \alpha(V) = 0$ . Donc il existe un élément  $x_i$  dans  $U \cap G_i$  et hors de  $V$ , donc dans  $C \cap G_i$ . Si à l'opposé  $G_i$  est un fermé  $X \setminus W$ ,  $\alpha(W) \neq 1$ . Par

la propriété 4 de la définition 3.6.1,  $\alpha(V \cup W) = \alpha(W)$ , donc  $\alpha(V \cup W) \neq 1$ . Il s'ensuit que  $U$  n'est pas inclus dans  $V \cup W$ , donc il existe un élément  $x_i$  dans  $U$  qui n'est ni dans  $V$  ni dans  $W$ . Alors  $x_i$  est dans  $C$  et dans  $G_i$  de nouveau.  $\square$

**Lemme 7.3.12** *Soit  $X$  un espace localement compact. Pour toute formule propositionnelle  $F$ , pour tout environnement  $\rho$ , si  $\llbracket F \rrbracket \rho = \emptyset$  alors  $P_{\nu}^1(F, \rho) = 0$ .*

*Démonstration.* Fixons un ensemble fini  $\mathcal{V}$  quelconque contenant  $\text{vars}(F)$ . On rappelle que  $P_{\nu}^1(F, \rho) = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$  (lemme 7.3.10).

Commençons par montrer que pour toute affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$  telle que  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = \emptyset$ , on a  $P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) = 0$ . Par l'équation (7.6) (lemme 7.3.6), le croissant élémentaire  $\square \left( \bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) \cap \bigcap_{\varphi \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} \diamond(X \setminus \rho(\varphi))$  est vide. Par le lemme 7.3.11, il existe donc  $\varphi_0 \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}$  telle que  $\bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi)$  n'intersecte pas  $X \setminus \rho(\varphi_0)$ , autrement dit telle que  $\bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi) \subseteq \rho(\varphi_0)$ . Par définition,

$$\begin{aligned} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) &= \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) \\ &= \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A} \setminus \{\varphi_0\}} (-1)^{|K|+1} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A} \cup \{\varphi_0\}} \rho(\varphi) \right) + \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A} \setminus \{\varphi_0\}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) \end{aligned}$$

en séparant les  $K$  contenant  $\varphi_0$  et ceux ne le contenant pas

Or le terme  $\bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A} \cup \{\varphi_0\}} \rho(\varphi)$  qui intervient dans la première somme vaut  $\bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \cap \rho(\varphi_0) = \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi)$  puisque  $\bigcap_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho(\varphi) \subseteq \rho(\varphi_0)$ . Mais alors :

$$P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) = \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A} \setminus \{\varphi_0\}} (-1)^{|K|+1} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) + \sum_{K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A} \setminus \{\varphi_0\}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) = 0$$

En effet, les termes de la première somme s'annulent deux à deux avec ceux de la seconde.

Supposons maintenant que  $\llbracket F \rrbracket \rho = \emptyset$ . Par le lemme 7.3.6,  $\llbracket F \rrbracket \rho = \bigcup_{\mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho$ , donc  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\mathcal{V}} \rho = \emptyset$  pour toute affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$  telle que  $\mathcal{A} \models F$ . Par l'argument ci-dessus,  $P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V})$  est nul pour toute affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$  telle que  $\mathcal{A} \models F$ , donc leur somme  $P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$  est nulle elle aussi.  $\square$

**Lemme 7.3.13**  $P_{\nu}^1$  est modulaire, au sens où  $P_{\nu}^1(F \wedge F', \rho) + P_{\nu}^1(F \vee F', \rho) = P_{\nu}^1(F, \rho) + P_{\nu}^1(F', \rho)$ .

*Démonstration.* Par définition, en prenant  $\mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F) \cup \text{vars}(F')$ ,

$$\begin{aligned} P_{\nu}^1(F \vee F', \rho) &= \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F \vee F'} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) \\ &= \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) + \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F'} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) - \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F \text{ et } \mathcal{A} \models F'} P_{\nu}^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) \\ &= P_{\nu}^1(F, \rho) + P_{\nu}^1(F', \rho) - P_{\nu}^1(F \wedge F', \rho) \end{aligned}$$

□

Notons  $F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$  la formule  $\perp$  si  $n = 0$ ,  $F_1$  si  $n = 1$ , et par récurrence  $F_1 \vee (F_2 \vee \dots \vee F_n)$  sinon.

**Corollaire 7.3.14** *Soit  $X$  un espace localement compact.  $P_\nu^1$  est additive, au sens où, si  $F_1, \dots, F_n$  sont  $n$  formules propositionnelles telles que les  $\llbracket F_i \rrbracket \rho$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont deux à deux disjoints, alors  $P_\nu^1(F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n, \rho) = \sum_{i=1}^n P_\nu^1(F_i, \rho)$ .*

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . Lorsque  $n = 0$ , c'est évident. C'est aussi clair lorsque  $n = 1$ . Lorsque  $n = 2$ ,  $P_\nu^1(F_1 \vee F_2, \rho) = \sum_{i=1}^2 P_\nu^1(F_i, \rho) - P_\nu^1(F_1 \wedge F_2, \rho)$  par le lemme 7.3.13. Or  $\llbracket F_1 \wedge F_2 \rrbracket \rho = \llbracket F_1 \rrbracket \rho \cap \llbracket F_2 \rrbracket \rho = \emptyset$ , donc  $P_\nu^1(F_1 \wedge F_2, \rho) = 0$  par le lemme 7.3.12. Pour  $n \geq 3$ ,  $P_\nu^1(F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n, \rho) = P_\nu^1(F_1) + P_\nu^1(F_2 \vee \dots \vee F_n, \rho)$  en utilisant le cas  $n = 2$ , sachant que  $\llbracket F_1 \rrbracket \rho$  et  $\llbracket F_2 \vee \dots \vee F_n \rrbracket \rho = \llbracket F_2 \rrbracket \rho \cup \dots \cup \llbracket F_n \rrbracket \rho$  sont disjoints ; et l'on conclut par hypothèse de récurrence. □

**Lemme 7.3.15** *Soit  $X$  un espace localement compact, et  $\nu$  une estimation sur  $X$ . Si  $\llbracket F \rrbracket \rho = \llbracket F' \rrbracket \rho$ , alors  $P_\nu^1(F, \rho) = P_\nu^1(F', \rho)$ .*

*Démonstration.* Fixons un ensemble fini  $\mathcal{V}$  contenant  $\text{vars}(F)$  et  $\text{vars}(F')$ . Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux formules propositionnelles telles que  $\text{vars}(F_1), \text{vars}(F_2) \subseteq \mathcal{V}$ , disons que  $F_1$  implique  $F_2$  si et seulement si, pour toute affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$  telle que  $\mathcal{A} \models F_1$ , on a  $\mathcal{A} \models F_2$ . Clairement,  $P_\nu^1(F_1, \rho) = \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F_1} P_\nu^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) \leq \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \models F_2} P_\nu^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V})$  (car cette dernière somme n'a que des termes supplémentaires positifs ou nuls par rapport à la précédente, par le lemme 7.3.9) =  $P_\nu^1(F_2, \rho)$ .

Disons que  $F_1$  est équivalente à  $F_2$  si et seulement si  $F_1$  implique  $F_2$  et  $F_2$  implique  $F_1$ . Alors  $P_\nu^1(F_1, \rho) = P_\nu^1(F_2, \rho)$ .

On vérifie que  $F \vee F'$  est équivalente à  $(F \wedge \neg F') \vee (F' \wedge \neg F) \vee (F \wedge F')$ . Les ensembles  $\llbracket F \wedge \neg F' \rrbracket \rho$ ,  $\llbracket F' \wedge \neg F \rrbracket \rho$ , et  $\llbracket F \wedge F' \rrbracket \rho$  sont disjoints deux à deux. En effet, par exemple,  $\llbracket F \wedge \neg F' \rrbracket \rho \cap \llbracket F' \wedge \neg F \rrbracket \rho = \llbracket F \rrbracket \rho \cap \llbracket F' \rrbracket \rho \setminus \llbracket F' \rrbracket \rho \setminus \llbracket F \rrbracket \rho = \emptyset$ . Par le corollaire 7.3.14,  $P_\nu^1(F \vee F', \rho) = P_\nu^1(F \wedge \neg F', \rho) + P_\nu^1(F' \wedge \neg F, \rho) + P_\nu^1(F \wedge F', \rho)$ . Or, puisque  $\llbracket F \rrbracket \rho \subseteq \llbracket F' \rrbracket \rho$ ,  $\llbracket F \wedge \neg F' \rrbracket \rho = \llbracket F \rrbracket \rho \setminus \llbracket F' \rrbracket \rho = \emptyset$ . Par le lemme 7.3.12,  $P_\nu^1(F \wedge \neg F', \rho) = 0$ . De même,  $P_\nu^1(F' \wedge \neg F, \rho) = 0$ . Donc  $P_\nu^1(F \vee F', \rho) = P_\nu^1(F \wedge F', \rho)$ .

Maintenant  $F \wedge F'$  implique  $F$ , ainsi que  $F'$ , et  $F$  autant que  $F'$  impliquent  $F \vee F'$ . Donc  $P_\nu^1(F \wedge F', \rho) \leq P_\nu^1(F, \rho)$ ,  $P_\nu^1(F', \rho) \leq P_\nu^1(F \vee F', \rho)$ . Donc toutes ces quantités sont égales, en particulier  $P_\nu^1(F, \rho) = P_\nu^1(F', \rho)$ . □

**Corollaire 7.3.16** *Soit  $\nu$  une estimation sur un espace localement compact  $X$ .*

*La fonction qui à tout élément  $\mathcal{C}$  de la pré-tribu engendrée par les ouverts élémentaires associe  $P_\nu^1(F, \rho)$ , où  $F$  et  $\rho$  sont tels que  $\mathcal{C} = \llbracket F \rrbracket \rho$ , est bien définie, à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , stricte et additive. Notons cette fonction  $P_\nu^1$ .*

*Sa restriction, que nous noterons  $P_\nu$ , aux unions finies d'ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , stricte ( $P_\nu(\emptyset) = 0$ ), monotone (si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  alors  $P_\nu(\mathcal{U}) \leq P_\nu(\mathcal{V})$ ) et modulaire ( $P_\nu(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) + P_\nu(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = P_\nu(\mathcal{U}) + P_\nu(\mathcal{V})$ ).*

*De plus, pour tout croissant  $C = U \setminus V$  de  $X$ ,  $\nu(C) = P_\nu^1(\square C) = P_\nu(\square U) - P_\nu(\square U \cap \diamond V) = P_\nu(\square U \cup \diamond V) - P_\nu(\diamond V)$ .*

*Démonstration.* D'abord, tout élément  $\mathcal{C}$  de la pré-tribu engendrée par les ouverts élémentaires s'exprime sous la forme  $\llbracket F \rrbracket \rho$  pour une certaine formule propositionnelle  $F$  et un certain environnement  $\rho$ . La quantité  $P_\nu^1(F, \rho)$  ne dépend que de  $\mathcal{C} = \llbracket F \rrbracket \rho$  par le lemme 7.3.15. La fonction ainsi définie est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  par le lemme 7.3.9, stricte par le lemme 7.3.12 et additive par le corollaire 7.3.14. Par des arguments standard, sa restriction aux unions finies d'ouverts élémentaires est donc à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , stricte, monotone (car si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , alors  $P_\nu(\mathcal{V}) = P_\nu^1(\mathcal{U} \cup (\mathcal{V} \setminus \mathcal{U})) = P_\nu^1(\mathcal{U}) + P_\nu^1(\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}) \geq P_\nu(\mathcal{U}) = P_\nu(\mathcal{U})$ ), et modulaire (car tant  $P_\nu(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) + P_\nu(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  que  $P_\nu(\mathcal{U}) + P_\nu(\mathcal{V})$  égale  $P_\nu^1(\mathcal{U} \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})) + P_\nu^1(\mathcal{V} \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})) + P_\nu^1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ , par additivité).

Enfin, pour tout croissant  $C = U \setminus V$  de  $X$ ,  $P_\nu^1(\square C) = P_\nu^1(\square U \setminus \diamond V)$  (par le lemme 7.1.2)  $= P_\nu^1(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \rho)$ , où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux variables distinctes, et  $\rho$  est l'environnement qui à  $\varphi_1$  associe  $U$ , et à  $\varphi_2$  associe  $X \setminus V$ . Posons  $\mathcal{V} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ . La seule affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$  qui satisfait  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  est  $\mathcal{V}$  elle-même, et  $P_\nu^0(\mathcal{A}, \rho, \mathcal{V}) = \sum_{K \subseteq \mathcal{V}, \mathcal{A}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) = \nu(\rho(\varphi_1) \cap \rho(\varphi_2)) = \nu(C)$ , en utilisant les définitions du lemme 7.3.8. Donc  $P_\nu^1(\square C) = \nu(C)$ . Le fait que  $P_\nu^1(\square C) = P_\nu(\square U) - P_\nu(\square U \cap \diamond V) = P_\nu(\square U \cup \diamond V) - P_\nu(\diamond V)$  est une conséquence facile de l'additivité de  $P_\nu^1$ .  $\square$

### ▷ Exercice 7.1

Soit  $X$  un espace localement compact,  $C$  et  $C'$  deux croissants de  $X$ ,  $G_1, \dots, G_m, G'_1, \dots, G'_n$  des ouverts ou fermés de  $X$ . Montrer que, dans  $\mathcal{P}_\nu(X)$  ou  $\mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i \subseteq \square C' \cap \bigcap_{j=1}^n \diamond G'_j$  si et seulement si :

1. pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tel que  $C \cap G_i \subseteq G'_j$ ,
2. et soit  $C \subseteq C'$ , soit il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tel que  $C \cap G_i = \emptyset$ .

Notons que par le lemme 7.3.11, le deuxième cas  $C \cap G_i = \emptyset$  n'arrive que si le côté gauche  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i$  est vide. On peut donc ne demander  $C \subseteq C'$  que lorsque ce côté gauche est non vide.

### ▷ Exercice 7.2

En déduire que, si  $X$  est un espace localement compact,  $C$  et  $C'$  sont deux croissants de  $X$ ,  $G_1, \dots, G_m, G'_1, \dots, G'_n$  sont des ouverts ou fermés de  $X$ , alors, dans  $\mathcal{P}_\nu(X)$  ou  $\mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i = \square C' \cap \bigcap_{j=1}^n \diamond G'_j$  si et seulement si :

1. soit il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$  tel que  $C$  n'intersecte pas  $G_i$  et  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tel que  $C'$  n'intersecte pas  $G'_j$ , auquel cas les deux côtés de l'égalité sont vides ;
2. soit  $C = C'$  et  $\{C \cap G_i | 1 \leq i \leq m\} = \{C' \cap G'_j | 1 \leq j \leq n\}$ , auquel cas les deux côtés de l'égalité sont non vides.

## 7.3.3 La touche finale à la construction de $(\nu)$

Le corollaire 7.3.16 énonce presque ce que nous cherchons. Mais  $P_\nu$  ne prend ses arguments que parmi les unions *finies* d'ouverts élémentaires. Nous devons l'étendre à toutes les unions, finies ou infinies, ou de façon équivalente, aux unions dirigées de telles unions finies. Ceci s'opérera par continuité de Scott. Pour ceci, nous utiliserons le fait que l'espace  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_\nu(X))$  des ouverts

de  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est un cpo continu, et appliquerons la formule de Scott. Ceci fonctionne bien avec l'espace  $\mathcal{P}_\nu(X)$  des  $\mathbf{A}$ -valuations continues sur  $X$  : lorsque  $X$  est stablement relativement compact,  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est stablement compact par la proposition 3.6.21, donc  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_\nu(X))$  est un cpo continu par le lemme 3.4.10 et le lemme 3.4.11. Pour utiliser le même argument avec l'espace des lentilles  $\mathcal{P}\ell_\nu(X)$ , nous devrions invoquer le théorème 3.5.30, qui requiert l'hypothèse beaucoup plus forte que  $X$  soit un cpo continu, cohérent et compact.

Avant de procéder, nous faisons la remarque suivante.

**Lemme 7.3.17** *Soit  $X$  un espace stablement relativement compact. Les unions finies d'ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_\nu(X)$  forment une base du cpo continu  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_\nu(X))$ . Notons  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_\nu(X))$  cette base.*

*Démonstration.* D'abord, redisons-le : par la proposition 3.6.21,  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est stablement compact. Donc  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_\nu(X))$  est un cpo continu par le lemme 3.4.10 et le lemme 3.4.11. Soit  $B$  la famille des unions finies d'ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ . Pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , la famille  $B_{\mathcal{U}}$  des  $\mathcal{V} \in B$  tels que  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  est dirigée. En effet, d'abord elle est non vide, puisque le vide en fait partie ; ensuite, si  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B_{\mathcal{U}}$  alors  $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \in B_{\mathcal{U}}$  par le lemme 3.4.9. Il ne reste qu'à montrer que  $\mathcal{U}$  est l'union des  $\mathcal{V} \in B_{\mathcal{U}}$ . Or, par définition,  $\mathcal{U}$  est une union, possiblement infinie, d'ouverts élémentaires, donc une union dirigée d'éléments de  $B$ , notons-les  $\mathcal{U}_i, i \in I$ . Puisque  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_\nu(X))$  est un cpo continu,  $\mathcal{U}$  est aussi l'union de la famille dirigée des ouverts  $\mathcal{W}$  tels que  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ . Puisque  $\subseteq$  est la relation "bien en-dessous" de  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , pour tout  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ , comme  $\mathcal{U} = \bigcup_{\mathcal{V} \in B_{\mathcal{U}}} \mathcal{V}$ , il existe un  $\mathcal{V} \in B_{\mathcal{U}}$  tel que  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ . En prenant les bornes supérieures,  $\mathcal{U} = \sup_{\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}} \mathcal{W} \subseteq \bigcup_{\mathcal{V} \in B_{\mathcal{U}}} \mathcal{V}$ . On conclut à l'égalité, car  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  pour tout  $\mathcal{V} \in B_{\mathcal{U}}$ .  $\square$

**Lemme 7.3.18** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact, et  $\nu$  une estimation sur  $X$ . Posons, pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ ,*

$$\langle \nu \rangle(\mathcal{U}) = \sup_{\substack{\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_\nu(X)) \\ \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}}} P_\nu(\mathcal{V})$$

où  $P_\nu$  est définie au corollaire 7.3.16. Alors  $\langle \nu \rangle$  est une valuation continue sur  $\mathcal{P}_\nu(X)$ .

*Démonstration.* D'abord,  $X$  étant stablement localement compact, est aussi stablement localement relativement compact. (Voir la remarque suivant la définition 3.6.18.) On peut donc utiliser le lemme 7.3.17. En posant  $B$  la base  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , on peut ensuite appliquer le lemme 3.6.16. Notons que nous avons défini  $\langle \nu \rangle$  comme valant  $\mathfrak{r}(P_\nu)$ , où  $P_\nu$  une fonction de  $B$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $\langle \nu \rangle$  est continue, et en particulier monotone. Elle est stricte, puisque  $P_\nu(\emptyset) = 0$ . Il ne reste qu'à vérifier que  $\langle \nu \rangle$  est modulaire. La démonstration est essentiellement celle du lemme 4.5.9. Notons que :

1. pour tous ouverts  $\mathcal{V}, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , pour tout  $\mathcal{V} \in B$ ,  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$  si et seulement si il existe  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B$  tels que  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ ,  $\mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1$ , et  $\mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2$ .

En effet, si  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ , alors par le lemme 3.4.12, deuxième partie, il existe des ouverts  $\mathcal{V}'_1$  et  $\mathcal{V}'_2$  tels que  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'_1 \cup \mathcal{V}'_2$ ,  $\mathcal{V}'_1 \in \mathcal{U}_1$ , et  $\mathcal{V}'_2 \in \mathcal{U}_2$ . Il suffit maintenant de choisir  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B$  tels que  $\mathcal{V}'_1 \in \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{V}'_2 \in \mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2$ , par la propriété d'interpolation raffinée. La réciproque est par la première partie du lemme 3.4.12.

2. pour tous ouverts  $\mathcal{V}, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , pour tout  $\mathcal{V} \in B, \mathcal{V} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  si et seulement s'il existe  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B$  tels que  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1$ , et  $\mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2$ . C'est le même argument que ci-dessus, en utilisant le lemme 3.4.12 à la place du lemme 3.4.12.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\nu)(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) + \mathcal{C}(\nu)(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) &= \sup_{\substack{\mathcal{V} \in B \\ \mathcal{V} \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2}} P_\nu(V) + \sup_{\substack{\mathcal{V} \in B \\ \mathcal{V} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2}} P_\nu(V) \\
&= \sup_{\substack{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B \\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2}} P_\nu(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2) + \sup_{\substack{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B \\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2}} P_\nu(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \\
&\quad \text{par les points 1 et 2 ci-dessus} \\
&= \sup_{\substack{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B \\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2}} (P_\nu(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2) + P_\nu(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)) \\
&= \sup_{\substack{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B \\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2}} P_\nu(\mathcal{V}_1) + \sup_{\substack{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in B \\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2}} P_\nu(\mathcal{V}_2) \\
&= \sup_{\substack{\mathcal{V}_1 \in B \\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{U}_1}} P_\nu(\mathcal{V}_1) + \sup_{\substack{\mathcal{V}_2 \in B \\ \mathcal{V}_2 \in \mathcal{U}_2}} P_\nu(\mathcal{V}_2) = \mathcal{C}(\nu)(\mathcal{U}_1) + \mathcal{C}(\nu)(\mathcal{U}_2)
\end{aligned}$$

où l'on utilise que  $P_\nu$  est elle-même modulaire, en utilisant le corollaire 7.3.16, qui s'applique car  $X$  est localement compact.  $\square$

Paradoxalement, et bien que  $\nu(C) = P_\nu(\square C)$  pour tout croissant  $C$  (corollaire 7.3.16), il n'est pas immédiat que  $\nu(C) = \mathcal{C}(\nu)(\square C)$ , même lorsque  $\nu$  est une estimation sesqui-continue. Nous devons d'abord raffiner notre analyse de la relation  $\Subset$ , au travers des deux lemmes suivants.

**Lemme 7.3.19** *Soit  $X$  un espace topologique,  $Q$  un compact saturé de  $X$ . Notons  $\square Q$  l'ensemble des lentilles  $L$  sur  $X$  telles que  $L \subseteq Q$ . Alors  $\square Q$  est compact dans  $\mathcal{P}l_\nu(X)$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $Q$ ,  $\square \overset{\circ}{Q} \Subset \square U$  dans  $\mathcal{P}l_\nu(X)$ .*

*Notons de même  $\square Q$  l'ensemble des  $\mathbf{A}$ -valuations continues  $\alpha$  telles que  $\alpha(V) = 1$  pour tout ouvert  $V$  contenant  $Q$ . Alors  $\square Q$  est compact dans  $\mathcal{P}_\nu(X)$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $Q$ ,  $\square \overset{\circ}{Q} \Subset \square U$  dans  $\mathcal{P}_\nu(X)$ .*

*Démonstration.* On rappelle que la topologie de  $\mathcal{P}l_\nu(X)$  est engendrée par les  $\square V$  et les  $\diamond V$ ,  $V$  ouvert de  $X$ . Considérons un recouvrement de  $\square Q$  par des ouverts de cette forme, disons  $\square Q \subseteq \bigcup_{i \in I} \square U_i \cup \bigcup_{j \in J} \diamond V_j$ . Posons  $L_0$  la lentille  $Q \cap \bigcap_{j \in J} (X \setminus V_j)$ . Clairement  $L_0 \in \square Q$ . Il est impossible que  $L_0 \in \diamond V_j$  pour aucun  $j \in J$ , car  $L_0 \subseteq X \setminus V_j$ . Donc il existe  $i \in I$  tel que  $L_0 \in \square U_i$ , c'est-à-dire  $L_0 \subseteq U_i$ . Ceci est équivalent à  $Q \cap \bigcap_{j \in J} (X \setminus V_j) \subseteq U_i$ , c'est-à-dire à  $Q \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J} V_j$ . Puisque  $Q$  est compact, il existe une partie finie  $J_0$  de  $J$  telle que  $Q \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j$ . Pour tout  $L \in \square Q$ ,  $L \subseteq Q$ , donc soit  $L \subseteq U_i$ , c'est-à-dire  $L \in \square U_i$ , soit  $L$  intersecte l'un des  $V_j$ ,  $j \in J_0$ . Autrement dit,  $\square Q \subseteq \square U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$ . Invoquons le lemme d'Alexander :  $\square Q$  est compact dans  $\mathcal{P}l_\nu(X)$ .

Pour tout ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $Q$ , on a donc  $\square\overset{\circ}{Q} \subseteq \square Q \subseteq \square U$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$ , donc  $\square\overset{\circ}{Q} \in \square U$  par le lemme 3.4.11.

Passons au cas de  $\mathcal{P}_V(X)$ . Considérons un recouvrement ouvert  $\bigcup_{i \in I} \square U_i \cup \bigcup_{j \in J} \diamond V_j$  de  $\square Q$ , et soit  $L_0$  la lentille définie comme plus haut :  $L_0 = Q \cap \bigcap_{j \in J} (X \setminus V_j)$ . Pour tout ouvert  $V$  contenant  $Q$ ,  $L_0^*(V) = 1$  puisque  $L_0 \subseteq Q$ . Donc  $L_0^* \in \square Q$ . Pour tout  $j \in J$ ,  $L_0^*(V_j) = 0$ , donc  $L_0^* \notin \diamond V_j$  pour aucun  $j \in J$ . On en déduit que  $L_0^* \in \bigcup_{i \in I} \square U_i$  : il existe  $i \in I$  tel que  $L_0^*(U_i) = 1$ , c'est-à-dire  $L_0 \subseteq U_i$ , autrement dit  $Q \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J} V_j$ . Puisque  $Q$  est compact, il existe une partie finie  $J_0$  de  $J$  telle que  $Q \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j$ .

Pour toute  $\mathbf{A}$ -valuation continue  $\alpha \in \square Q$ , si  $\alpha(V_j) = 0$  pour tout  $j \in J_0$ , alors  $\alpha(U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j) = \alpha(U_i)$ , par récurrence sur le cardinal de  $J_0$ , en utilisant la propriété 4 de la définition 3.6.1. Comme  $\alpha \in \square Q$  et  $Q \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j$ , en particulier  $\alpha(U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j) = 1$ , donc  $\alpha(U_i) = 1$ . Par contraposée, on en déduit que toute  $\alpha \in \square Q$  est telle que  $\alpha(U_i) = 1$ , ou bien telle que  $\alpha(V_j) \neq 0$  pour un certain  $j \in J_0$ , autrement dit  $\alpha \in \square U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$ . Donc  $\square Q$  est compact. On conclut, comme plus haut, que si  $U$  contient  $Q$ , alors  $\square\overset{\circ}{Q} \in \square U$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$ .  $\square$

**Lemme 7.3.20** *Pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$ , notons  $\diamond Q$  l'ensemble des lentilles  $L$  qui intersectent  $Q$  (dans  $\mathcal{P}_V(X)$ ), resp. l'ensemble des  $\mathbf{A}$ -valuations continues  $\alpha$  telles qu'il n'existe aucun ouvert  $V \supseteq Q$  tel que  $\alpha(V) = 0$  (dans  $\mathcal{P}_V(X)$ ).*

*Soit  $X$  un espace compact. Alors  $\diamond Q$  est compact dans  $\mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_V(X)$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $Q$ ,  $\diamond\overset{\circ}{Q} \in \diamond U$  dans  $\mathcal{P}_V(X)$ , resp.  $\mathcal{P}_V(X)$ .*

*Démonstration.* Supposons  $\diamond Q \subseteq \bigcup_{i \in I} \square U_i \cup \bigcup_{j \in J} \diamond V_j$ , où les  $U_i$  et les  $V_j$  sont des ouverts de  $X$ . Montrons qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Par le lemme d'Alexander, ceci impliquera que  $\diamond Q$  est compact. On en conclura que  $Q \subseteq U$  implique  $\diamond\overset{\circ}{Q} \in \diamond U$  par le lemme 3.4.11.

Posons  $L_0 = \bigcap_{j \in J} (X \setminus V_j)$ , ceci dénotant  $X$  tout entier si  $J$  est vide.  $L_0$  est un fermé, donc une lentille car  $L_0 = X \cap L_0$  et  $X$  est compact saturé. Nous examinons deux cas.

Supposons, dans le premier cas, que  $L_0$  n'intersecte pas  $Q$ . Alors  $Q$  est inclus dans le complémentaire  $\bigcup_{j \in J} V_j$  de  $L_0$ . Comme  $Q$  est compact, il existe un sous-ensemble  $J_0$  fini de  $J$  tel que  $Q \subseteq \bigcup_{j \in J_0} V_j$ . Montrons alors que  $\diamond Q$  est inclus dans le sous-recouvrement fini  $\bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$ . Dans  $\mathcal{P}_V(X)$ , montrons que toute lentille  $L$  qui n'est pas dans  $\bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$  n'est pas non plus dans  $\diamond Q$  : si  $L \notin \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$ , alors  $L$  n'intersecte pas  $\bigcup_{j \in J_0} V_j \supseteq Q$ , donc  $L \notin \diamond Q$ . Dans  $\mathcal{P}_V(X)$ , montrons de même que toute  $\mathbf{A}$ -valuation continue  $\alpha$  qui n'est pas dans  $\bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$  n'est pas non plus dans  $\diamond Q$  : si  $\alpha \notin \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$ , alors pour tout  $j \in J_0$   $\alpha(V_j) = 0$ , donc  $\alpha(\bigcup_{j \in J_0} V_j) = 0$  par récurrence sur le cardinal de  $J_0$ , en utilisant la propriété 4 de la définition 3.6.1 ; puisque  $Q \subseteq \bigcup_{j \in J_0} V_j$ , par définition  $\alpha \notin \diamond Q$ .

Dans le second cas,  $L_0$  intersecte  $Q$ . Dans  $\mathcal{P}_V(X)$ , ceci implique que  $L_0 \in \diamond Q$ . L'hypothèse  $\diamond Q \subseteq \bigcup_{i \in I} \square U_i \cup \bigcup_{j \in J} \diamond V_j$  implique donc qu'il existe  $i \in I$  tel que  $L_0 \subseteq U_i$ . Il est en effet impossible que  $L_0$  intersecte  $V_j$  pour aucun  $j \in J$ , par définition de  $L_0$ . Comme  $L_0 = \bigcap_{j \in J} (X \setminus V_j)$  est inclus dans  $U_i$ , c'est que  $X \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J} V_j$ . Puisque  $X$  est compact, il en existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble  $J_0$  fini de  $J$  tel que

$X \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j$ . Mais alors toute lentille  $L$  est dans  $\square U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$  : si  $L$  n'est pas incluse dans  $U_i$ , alors elle intersecte nécessairement  $\bigcup_{j \in J_0} V_j$ , donc l'un des  $V_j$ . On en déduit donc trivialement l'inclusion  $\diamond Q \subseteq \square U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$ . Le sous-recouvrement fini cherché est formé de  $\square U_i$  et des  $\diamond V_j, j \in J_0$ .

Dans  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , la démonstration est similaire. Comme  $L_0$  intersecte  $Q$ ,  $L_0$  intersecte tout ouvert  $V$  contenant  $Q$ , donc  $L_0^*(V) \neq 0$ . On en déduit que  $L_0^*$  est dans  $\diamond Q$ . Par hypothèse, on a donc  $L_0^* \in \bigcup_{i \in I} \square U_i \cup \bigcup_{j \in J} \diamond V_j$ . Il est impossible que  $L_0^*$  soit dans  $\diamond V_j$ , c'est-à-dire  $L_0^*(V_j) \neq 0$ , car  $L_0 \subseteq X \setminus V_j$ . Donc il existe un  $i \in I$  tel que  $L_0^* \in \square U_i$ , c'est-à-dire  $L_0 \subseteq U_i$ . Comme plus haut, on en déduit  $X \subseteq U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j$  pour un certain sous-ensemble  $J_0$  fini de  $J$ . Mais alors toute  $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$  est dans  $\square U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$  : si l'on pouvait en trouver une qui n'y soit pas, on aurait  $\alpha(U_i) \neq 1$ , et  $\alpha(V_j) = 0$  pour tout  $j \in J_0$ ; par récurrence sur le cardinal de  $J_0$ , en utilisant la propriété 4 de la définition 3.6.1, on aurait  $\alpha(X) \leq \alpha(U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} V_j) = \alpha(U_i) \neq 1$ , contredisant  $\alpha(X) = 1$ . Donc, de nouveau on a trivialement  $\diamond Q \subseteq \square U_i \cup \bigcup_{j \in J_0} \diamond V_j$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant en déduire :

**Lemme 7.3.21** *Soit  $X$  un espace stablement compact,  $\nu$  une estimation sesqui-continue sur  $X$ , et  $\langle \nu \rangle$  définie comme au lemme 7.3.18. Alors, pour tout croissant  $C$  sur  $X$ ,  $\nu(C) = \langle \nu \rangle^{\%}(\square C)$ .*

*Démonstration.* D'abord, rappelons que  $\langle \nu \rangle$  est donné par la formule d'extension de Scott, donc  $\langle \nu \rangle(\mathcal{U}) \leq P_\nu(\mathcal{U})$  pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , en utilisant la dernière partie du lemme 3.6.16.

Lorsque  $\mathcal{U}$  est de la forme  $\square U$ , où  $U$  est un ouvert de  $X$ , on note que  $U$  est l'union dirigée des  $U' \in U$ . En effet,  $X$  est localement compact, donc par le lemme 3.4.11, on peut appliquer le lemme 3.4.10. De plus,  $U' \in U$  si et seulement s'il existe un compact saturé  $Q$  tel que  $U' \subseteq Q \subseteq U$ . En particulier, si  $U' \in U$  alors  $U' \subseteq \overset{\circ}{Q}$ . Par le lemme 7.3.19,  $\square U' \subseteq \square \overset{\circ}{Q} \in \square U$ , dès que  $U' \in U$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle \nu \rangle(\square U) &= \sup_{\substack{U' \in \mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_\nu(X)) \\ U' \in \square U}} P_\nu(U') \\ &\geq \sup_{U' \in U} P_\nu(\square U') \\ &= \sup_{U' \in U} \nu(U') \quad \text{par le corollaire 7.3.16 appliqué à } C = U' \\ &= \nu(U) \end{aligned}$$

puisque  $\nu$  est sesqui-continue. On a donc : (a)  $\langle \nu \rangle(\square U) = \nu(U)$ .

En utilisant le fait que  $X$  est compact, on déduit du lemme 7.3.20 que si  $V' \in V$  alors  $\diamond V' \in \diamond V$ , par un raisonnement similaire à ci-dessus. Donc, si  $U' \in U$  et  $V' \in V$ , alors  $\square U' \cap \diamond V' \subseteq \square U' \in \square U$  et  $\square U' \cap \diamond V' \subseteq \diamond V' \in \diamond V$ . Rappelons que,  $X$  étant stablement localement compact,  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est stablement compact par la proposition 3.6.21, en particulier cohérent et localement compact, donc relativement cohérent. (Voir la définition 3.6.17 et les remarques qui suivent.) Donc  $\square U' \cap \diamond V' \in \square U \cap \diamond V$ , dès que  $U' \in U$  et  $V' \in V$ . On en

déduit :

$$\begin{aligned}
\llbracket \nu \rrbracket(\Box U \cap \Diamond V) &= \sup_{\substack{U' \in \mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)) \\ U' \subseteq \Box U \cap \Diamond V}} P_{\nu}(U') \\
&\geq \sup_{\substack{U' \subseteq U \\ V' \subseteq V}} P_{\nu}(\Box U' \cap \Diamond V') \\
&= \sup_{\substack{U' \subseteq U \\ V' \subseteq V}} (P_{\nu}(\Box U') - \nu(U' \setminus V'))
\end{aligned}$$

car  $\nu(U' \setminus V') = P_{\nu}(\Box U') - P_{\nu}(\Box U' \cap \Diamond V')$  par le corollaire 7.3.16. Puisque  $\nu$  est monotone,  $\nu(U' \setminus V') \leq \nu(U \setminus V')$  pour tout  $U' \subseteq U$ . Comme  $\nu$  est sesqui-continue, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $V' \subseteq V$  tel que  $\nu(U \setminus V') \leq \nu(U \setminus V) + \epsilon/2$ , donc  $\nu(U' \setminus V') \leq \nu(U \setminus V) + \epsilon/2$ . D'autre part, il existe  $U' \subseteq U$  tel que  $P_{\nu}(\Box U') = \nu(U') \geq \nu(U) - \epsilon/2$ . Donc  $\llbracket \nu \rrbracket(\Box U \cap \Diamond V) \geq \nu(U) - \nu(U \setminus V) - \epsilon$ . Comme  $\epsilon > 0$  est quelconque,  $\llbracket \nu \rrbracket(\Box U \cap \Diamond V) \geq \nu(U) - \nu(U \setminus V)$ . Or, toujours par le corollaire 7.3.16,  $\llbracket \nu \rrbracket(\Box U \cap \Diamond V) \leq P_{\nu}(\Box U \cap \Diamond V) = P_{\nu}(\Box U) - \nu(U \setminus V) = \nu(U) - \nu(U \setminus V)$ , donc : (a)  $\llbracket \nu \rrbracket(\Box U \cap \Diamond V) = \nu(U) - \nu(U \setminus V)$ .

En soustrayant (b) de (a), on obtient ainsi  $\llbracket \nu \rrbracket(\Box U) - \llbracket \nu \rrbracket(\Box U \cap \Diamond V) = \nu(U \setminus V)$ , ce qui est exactement l'égalité demandée.  $\square$

**Lemme 7.3.22** *Soit  $X$  un espace stablement compact,  $\nu$  une estimation sesqui-continue sur  $X$ , et  $\llbracket \nu \rrbracket$  définie comme au lemme 7.3.18. Alors  $\llbracket \nu \rrbracket^{\%}$  coïncide avec  $P_{\nu}^1$  sur la pré-tribu engendrée par les ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ ; et  $\llbracket \nu \rrbracket$  coïncide avec  $P_{\nu}$  sur  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ .*

*Démonstration.*  $P = \llbracket \nu \rrbracket$  est une valuation continue sur  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$  telle que  $\nu(C) = P^{\%}(\Box C)$  pour tout croissant  $C$ , par le lemme 7.3.18 et le lemme 7.3.21. Par le lemme 7.3.8,  $P^{\%}$  coïncide donc avec  $P_{\nu}^1$  sur la pré-tribu engendrée par les ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ . La seconde partie du lemme est une conséquence immédiate de la première.  $\square$

Ceci nous permet d'énoncer, finalement, le théorème principal de ce chapitre.

**Théorème 7.3.23** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute estimation continue  $\nu$  sur  $X$ ,  $\llbracket \nu \rrbracket$  est l'unique valuation continue  $P$  sur  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$  telle que, pour tout croissant  $C$  sur  $X$ ,  $\nu(C) = P^{\%}(\Box C)$ .*

*La fonction  $\nu \mapsto \llbracket \nu \rrbracket$  est une bijection de l'ensemble des estimations continues sur  $X$  sur l'ensemble des valuations continues sur  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , d'inverse qui à  $P$  associe l'estimation  $\nu$  telle que  $\nu(C) = P^{\%}(\Box C)$  pour tout croissant  $C$  de  $X$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 7.3.18 et le lemme 7.3.21,  $\llbracket \nu \rrbracket$  est une valuation continue sur  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$  telle que  $\nu(C) = \llbracket \nu \rrbracket^{\%}(\Box C)$  pour tout  $C$ . Si  $P$  est une autre valuation continue telle que  $\nu(C) = P^{\%}(\Box C)$  pour tout croissant  $C$ , le lemme 7.3.8 nous indique que  $P^{\%}(\llbracket F \rrbracket \rho) = P_{\nu}^1(F, \rho, \mathcal{V})$  pour toute formule  $F$ , tout environnement  $\rho$ , et tout ensemble fini  $\mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F)$ . Autrement dit,  $P^{\%}(\llbracket F \rrbracket \rho) = P_{\nu}^1(\llbracket F \rrbracket \rho)$ . Comme tout élément de la pré-tribu engendrée par les ouverts élémentaires est de la forme  $\llbracket F \rrbracket \rho$ ,  $P^{\%} = P_{\nu}^1$ . En particulier,  $P$  coïncide avec  $P_{\nu}$  sur  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ . Par le lemme 7.3.22,  $P$  coïncide donc avec  $\llbracket \nu \rrbracket$  sur  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ . Comme  $P$  et

$\llbracket \nu \rrbracket$  sont toutes les deux continues, elles coïncident donc sur tout  $\mathcal{O}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ . Ainsi  $\llbracket \nu \rrbracket$  est bien unique.

La deuxième partie du théorème est évidente, eu égard à la proposition 7.1.11.  $\square$

## 7.4 Espaces d'estimations continues

Nous souhaitons maintenant étudier l'espace des estimations continues sur  $X$ . Nous souhaitons que cet espace soit un cpo, et le théorème 7.3.23 nous suggère qu'il soit isomorphe à  $\mathbf{V}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ . Cherchons l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$  qui correspond à l'ordre  $\leq$  sur  $\mathbf{V}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$  par cet isomorphisme. Malheureusement, la description de cet ordre est complexe, et peu esthétique.

Notons déjà que l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$  ne peut pas être l'ordre évident, donné par  $\nu \leq \nu'$  si et seulement si  $\nu(C) \leq \nu'(C)$  pour tout croissant. En effet, si  $\nu \leq \nu'$  alors  $\llbracket \nu \rrbracket^{\%}(\square C) \leq \llbracket \nu' \rrbracket^{\%}(\square C)$ . Si, lorsque  $C$  est un ouvert  $U$ , ceci entraîne  $\llbracket \nu \rrbracket(\square U) \leq \llbracket \nu' \rrbracket(\square U)$ , comme on peut s'y attendre, en revanche, lorsque  $C$  est un fermé  $X \setminus V$ , cette inéquation a des conséquences inattendues. Elle s'écrit en effet  $\llbracket \nu \rrbracket(\square X) - \llbracket \nu \rrbracket(\diamond V) \leq \llbracket \nu' \rrbracket(\square X) - \llbracket \nu' \rrbracket(\diamond V)$ . Si l'on se restreint aux estimations continues normalisées, c'est-à-dire telles qui envoient  $X$  vers 1, cette inéquation implique  $\llbracket \nu \rrbracket(\diamond V) \geq \llbracket \nu' \rrbracket(\diamond V)$ , qui est dans le sens inverse de ce à quoi on s'attendrait.

La définition adéquate est, comme promise, horrible.

**Définition 7.4.1** ( $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$ ) *Un ouvert syntaxique est un couple  $(F, \rho)$  formé d'une formule propositionnelle  $F$  de la forme  $\bigvee_{i=1}^m (\varphi_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n_i} \neg \varphi_{ij})$ , et d'un environnement tel que  $\rho(\varphi_i)$  soit ouvert pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , et tel que  $\rho(\varphi_{ij})$  soit fermé pour tous  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , et  $j$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ .*

*On définit la relation  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$  sur l'ensemble des estimations sur  $X$  par  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$  si et seulement si  $P_{\nu}^1(F, \rho) \leq P_{\nu'}^1(F, \rho)$  pour tout ouvert syntaxique  $(F, \rho)$ , c'est-à-dire :*

$$\sum_{\substack{\mathcal{A} \text{ affectation sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F \\ K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}}} (-1)^{|K|} \nu \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right) \leq \sum_{\substack{\mathcal{A} \text{ affectation sur } \mathcal{V}/\mathcal{A} \models F \\ K \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}}} (-1)^{|K|} \nu' \left( \bigcap_{\varphi \in K \cup \mathcal{A}} \rho(\varphi) \right)$$

pour n'importe quel ensemble fini  $\mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F)$ .

**Lemme 7.4.2** *Les éléments de  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$  sont exactement les ensembles de la forme  $\llbracket F \rrbracket \rho$ , où  $(F, \rho)$  est un ouvert syntaxique.*

*Démonstration.* En réutilisant les notations de la définition 7.4.1, et en posant  $U_i$  l'ouvert  $\rho(\varphi_i)$ , et  $V_{ij}$  le complémentaire du fermé  $\rho(\varphi_{ij})$ ,  $\llbracket F \rrbracket \rho = \bigcup_{i=1}^m \left( \square \rho(\varphi_i) \cap \bigcap_{j=1}^{n_i} (\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X) \setminus \square \rho(\varphi_{ij})) \right) = \bigcup_{i=1}^m \left( \square U_i \cap \bigcap_{j=1}^{n_i} \diamond V_{ij} \right)$  est dans  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ . Réciproquement, tout élément de  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ , disons  $\bigcup_{i=1}^m \left( \square U_i \cap \bigcap_{j=1}^{n_i} \diamond V_{ij} \right)$ , s'écrit  $\llbracket F \rrbracket \rho$ , où  $F$  est la formule  $\bigvee_{i=1}^m (\varphi_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n_i} \neg \varphi_{ij})$ ,  $\rho(\varphi_i) = U_i$  et  $\rho(\varphi_{ij}) = X \setminus V_{ij}$ .  $\square$

**Lemme 7.4.3** *Soit  $X$  un espace localement compact. Alors  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$  si et seulement si  $P_{\nu}(\mathcal{U}) \leq P_{\nu'}(\mathcal{U})$  pour tout  $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 7.4.2 et le corollaire 7.3.16.  $\square$

**Proposition 7.4.4** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toutes estimations continues  $\nu$ ,  $\nu'$  sur  $X$ ,  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$  si et seulement si  $\langle \nu \rangle \leq \langle \nu' \rangle$ .*

*Démonstration.* Supposons  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$ . Par le lemme 7.3.18,  $\langle \nu \rangle$  et  $\langle \nu' \rangle$  sont des valuations continues sur  $\mathcal{P}_\nu(X)$ . Par le lemme 7.3.22,  $\langle \nu \rangle$  coïncide avec  $P_\nu$  sur  $\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , ainsi que  $\langle \nu' \rangle$  avec  $P_{\nu'}$ . Or  $P_\nu(\mathcal{U}) \leq P_{\nu'}(\mathcal{U})$  pour tout  $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_\nu(X))$  par le lemme 7.4.3. Donc  $\langle \nu \rangle \leq \langle \nu' \rangle$ , par continuité.

Réciproquement, si  $\langle \nu \rangle \leq \langle \nu' \rangle$ , en particulier  $\langle \nu \rangle(\mathcal{U}) \leq \langle \nu' \rangle(\mathcal{U})$  pour tout  $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , c'est-à-dire  $P_\nu(\mathcal{U}) \leq P_{\nu'}(\mathcal{U})$ ; autrement dit,  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$ .  $\square$

**Définition 7.4.5 (Espace d'estimations)** *On note  $\mathbf{Est}(X)$  l'espace des estimations sesqui-continues sur  $X$ ,  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  le sous-espace des estimations  $\nu$  qui sont sous-normalisées, c'est-à-dire telles que  $\nu(X) \leq 1$ , et  $\mathbf{Est}_1(X)$  celui des estimations normalisées, c'est-à-dire telles que  $\nu(X) = 1$ .*

*Ces espaces sont ordonnés par l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$  (définition 7.4.1).*

On équipe comme d'habitude ces espaces de leur topologie de Scott.

**Proposition 7.4.6** *Soit  $X$  un espace stablement compact.  $\mathbf{Est}(X)$  est un ensemble ordonné isomorphe à  $\mathbf{V}(\mathcal{P}_\nu(X))$ .  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{Est}_1(X)$ , est un cpo isomorphe à  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , resp.  $\mathbf{V}_1(\mathcal{P}_\nu(X))$ . Dans tous les cas, l'isomorphisme est la fonction qui à  $\nu$  associe  $\langle \nu \rangle$ .*

*Si  $X$  est un cpo continu cohérent et compact, alors  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  est un cpo continu, cohérent et compact. Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , alors  $\mathbf{Est}_1(X)$  est un cpo continu, cohérent et compact, de plus petit élément  $\mathfrak{e}_{\langle \perp \rangle}$ .*

*Démonstration.* La fonction  $\nu \mapsto \langle \nu \rangle$  est une bijection par le théorème 7.3.23. C'est un isomorphisme d'ordre par la proposition 7.4.4. Vu que  $\langle \nu \rangle(\mathcal{P}_\nu(X)) = \langle \nu \rangle(\square X) = \nu(X)$ , il est clair que  $\langle \nu \rangle$  est sous-normalisée, resp. normalisée, si et seulement si  $\nu$  l'est.

Enfin, si  $X$  est un cpo continu, cohérent et compact, en particulier  $X$  est stablement compact, donc la première partie du théorème s'applique. Par le corollaire 3.6.22,  $\mathcal{P}_\nu(X) = \mathcal{P}(X)$  est un cpo continu, cohérent et compact. Par le théorème 4.5.12,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , qui est isomorphe à  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$ , est un cpo continu, cohérent et compact. Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ ,  $\mathcal{P}_\nu(X)$  a un plus petit élément,  $\langle \perp \rangle^*$ . Par le théorème 4.5.13,  $\mathbf{V}_1(\mathcal{P}_\nu(X))$  est un cpo continu, cohérent et compact, de plus petit élément  $\delta_{\langle \perp \rangle^*}$ . Il est facile de vérifier que  $\mathfrak{e}_{\langle \perp \rangle}$  est le plus petit élément de  $\mathbf{Est}_1(X)$ , soit par image inverse de  $\delta_{\langle \perp \rangle^*}$  par l'isomorphisme  $\nu \mapsto \langle \nu \rangle$ , soit par calcul direct.  $\square$

On obtient aussi que  $\mathcal{P}(X)$  se plonge dans les espaces d'estimations continues sur  $X$ . La proposition 7.4.7 ci-dessous est relativement facile à démontrer, sous des hypothèses fortes. On démontrera presque autant sans aucune hypothèse au théorème 7.4.19.

**Proposition 7.4.7** *Soit  $X$  un espace stablement compact. La fonction qui à  $\alpha \in \mathcal{P}(X)$  associe  $\mathfrak{u}_\alpha$  est un plongement d'ordre de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $\mathbf{Est}(X)$ , resp.  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\mathbf{Est}_1(X)$ .*

*Si  $X$  est un cpo continu, cohérent et compact, alors cette même fonction est un plongement d'espaces topologiques de surcroît de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $\mathbf{Est}(X)$ , resp.  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$ . C'est aussi un plongement d'espaces topologiques de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $\mathbf{Est}_1(X)$  si  $X$  est un cpo continu, cohérent, et avec un plus petit élément.*

*Démonstration.* Soit  $f$  la fonction qui à  $\alpha \in \mathcal{P}(X)$  associe  $\delta_\alpha$ , dans  $\mathbf{V}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , resp.  $\mathbf{V}_1(\mathcal{P}_\nu(X))$ . Le préordre de spécialisation de  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est  $\sqsubseteq_{\mathbf{A}}$  par le lemme 3.6.6, qui est le préordre de  $\mathcal{P}(X)$ . En tant qu'ensembles ordonnés,  $\mathcal{P}(X)$  coïncide donc avec  $\mathcal{P}_\nu(X)$ , donc  $f$ , en tant que fonction d'espaces préordonnés, coïncide avec  $\eta_{\mathbf{V}}$ , laquelle est un plongement d'ordre par le lemme 3.9.4.

Si  $X$  est un cpo continu, cohérent et compact, alors  $\mathcal{P}_\nu(X) = \mathcal{P}(X)$  est un cpo continu par le corollaire 3.6.22. La fonction  $\eta_{\mathbf{V}}$  est un plongement d'espaces topologiques de  $\mathcal{P}_\nu(X) = \mathcal{P}(X)$  dans  $\mathbf{V}_{wk}(\mathcal{P}(X))$ , resp.  $\mathbf{V}_{\leq 1\ wk}(\mathcal{P}(X))$ , resp.  $\mathbf{V}_{1\ wk}(\mathcal{P}(X))$ . Par la proposition 3.6.10 ou le corollaire 3.6.22,  $\mathcal{P}(X)$  est un cpo continu. De plus, il a un plus petit élément  $\langle \perp \rangle^*$ , dès que  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ . Par la proposition 3.7.12,  $\mathbf{V}_{wk}(\mathcal{P}(X)) = \mathbf{V}(\mathcal{P}(X))$ ,  $\mathbf{V}_{\leq 1\ wk}(\mathcal{P}(X)) = \mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}(X))$ ; et  $\mathbf{V}_{1\ wk}(\mathcal{P}(X)) = \mathbf{V}_1(\mathcal{P}(X))$  si  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ .

La fonction  $\alpha \mapsto \mathfrak{u}_\alpha$  est alors la composée de  $f$  avec la fonction  $\nu \mapsto \langle \nu \rangle$ , par le lemme 7.2.7. Comme  $\nu \mapsto \langle \nu \rangle$  est un isomorphisme par la proposition 7.4.6, on conclut.  $\square$

**Lemme 7.4.8** *Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $\nu$  l'estimation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathfrak{u}_{\alpha_i}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}^+$ , et  $\alpha_i \in \mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Alors  $\langle \nu \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\alpha_i}$ .*

*Démonstration.* Par unicité (théorème 7.3.23), il suffit de vérifier que  $(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\alpha_i})^{\%}(\square C) = \nu(C)$  pour tout  $C$ . Or, par le lemme 7.2.7,  $\nu(C) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\alpha_i}^{\%}(\square C) = (\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\alpha_i})^{\%}(\square C)$ .  $\square$

**Proposition 7.4.9** *Soit  $X$  un cpo continu, cohérent et compact. Toute estimation continue sur  $X$  est la borne supérieure, pour  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$ , d'une famille dirigée d'estimations simples.*

*Les estimations simples sous-normalisées forment une base du cpo continu  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$ . Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , les estimations simples normalisées forment une base du cpo continu  $\mathbf{Est}_1(X)$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 7.4.6,  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  est un cpo continu, isomorphe via la fonction  $\nu \mapsto \langle \nu \rangle$  à  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$ . Par le théorème de Jones, et comme  $\mathcal{P}_\nu(X) = \mathcal{P}(X)$  est un cpo continu par le corollaire 3.6.22, une base de  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$  est formée des valuations simples sous-normalisées. Ces dernières correspondent aux estimations simples sous-normalisées, par le lemme 7.4.8. Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , on invoque le théorème d'Edalat, en utilisant le fait que  $\mathcal{P}_\nu(X) = \mathcal{P}(X)$  a alors un plus petit élément  $\langle \perp \rangle^*$ . Ceci démontre les deux dernières parties du lemme.

Pour la première partie du lemme, toute valuation continue  $\nu$  sur  $\mathcal{P}_\nu(X) = \mathcal{P}(X)$  est la borne supérieure d'une famille dirigée : en effet, soit  $\nu(X) = 0$  et c'est évident, soit  $1/\nu(X)$ .  $\nu$  est une valuation continue sous-normalisée, et est donc la borne supérieure d'une famille dirigée de

valuations simples sous-normalisées  $(\nu_i)_{i \in I}$ . On en déduit que  $\nu$  elle-même est borne supérieure de la famille dirigée  $(\nu(X) \cdot \nu_i)_{i \in I}$ . Ceci se transporte aux cas des estimations continues et des estimations simples via l'isomorphisme  $\nu \mapsto \langle \nu \rangle$ .  $\square$

Les théorèmes et propositions ci-dessus utilisent avantageusement l'isomorphisme  $\nu \mapsto \langle \nu \rangle$ . Cependant, l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$  est horrible, et il est difficile de voir concrètement ce que peut bien être la borne supérieure d'une famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$  d'estimations continues dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$ .

Commençons par définir un ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$  moins fin que  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$ .

**Définition 7.4.10** *On définit la relation  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$  sur l'ensemble des estimations sur  $X$  par  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu'$  si et seulement si, pour tous ouverts  $U$  et  $V$  de  $X$  :*

$$\nu(U) - \nu(U \setminus V) \leq \nu'(U) - \nu'(U \setminus V) \quad (7.8)$$

$$\nu(U \setminus V) + \nu(X) - \nu(X \setminus V) \leq \nu'(U \setminus V) + \nu'(X) - \nu'(X \setminus V) \quad (7.9)$$

Rappelons la crédibilité  $\nu^\uparrow$  et la plausibilité  $\nu^\downarrow$  associées à  $\nu$  :  $\nu^\uparrow(U) = \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$ ,  $\nu^\downarrow(V) = \nu(X) - \nu(X \setminus V)$  pour tout ouvert  $V$ . Les inégalités (7.8) et (7.9) s'écrivent de façon plus symétrique sous la forme :

$$\nu^\uparrow(U) - \nu(U \setminus V) \leq \nu'^\uparrow(U) - \nu'(U \setminus V)$$

$$\nu(U \setminus V) + \nu^\downarrow(V) \leq \nu(U \setminus V) + \nu'^\downarrow(V)$$

**Proposition 7.4.11** *La relation  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$  est une relation d'ordre. Si  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu'$ , alors pour tout ouvert  $U$ ,  $\nu^\uparrow(U) \leq \nu'^\uparrow(U)$ ; pour tout ouvert  $V$ ,  $\nu^\downarrow(V) \leq \nu'^\downarrow(V)$ .*

*Démonstration.* La relation  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$  est clairement réflexive et transitive. L'équation (7.8) avec  $U = V$  implique : (a)  $\nu(U) \leq \nu'(U)$ . L'équation (7.9) avec  $U = V$  implique : (b)  $\nu(X) - \nu(X \setminus V) \leq \nu'(X) - \nu'(X \setminus V)$ . Supposons maintenant  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu'$  et  $\nu' \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu$ . Par (a),  $\nu$  et  $\nu'$  coïncident sur tous les ouverts  $U$ , en particulier  $\nu(X) = \nu'(X)$ . Par (b), on en déduit que  $\nu$  et  $\nu'$  coïncident sur tous les fermés  $X \setminus V$ . Puisque  $\nu(U) = \nu'(U)$  dans (7.8) on en tire  $\nu(U \setminus V) \geq \nu'(U \setminus V)$ . Puisque  $\nu(X) = \nu'(X)$  et  $\nu(X \setminus V) = \nu'(X \setminus V)$  dans (7.9) on obtient  $\nu(U \setminus V) \leq \nu'(U \setminus V)$ . Donc  $\nu(U \setminus V) = \nu'(U \setminus V)$  :  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$  est antisymétrique, et donc bien une relation d'ordre.  $\square$

**Lemme 7.4.12** *Si  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$ , alors  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu'$ . La réciproque est fausse.*

*Démonstration.* Supposons  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$ . Considérons l'ouvert syntaxique  $(F, \rho)$ , où  $F = \varphi_1 \wedge \neg \varphi_2$ ,  $\rho(\varphi_1)$  est l'ouvert  $U$  et  $\rho(\varphi_2)$  est le fermé  $X \setminus V$ . L'unique affectation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  telle que  $\mathcal{A} \models F$  est  $\{\varphi_1\}$ , donc  $P_\nu^1(F, \rho) = \nu(U) - \nu(U \setminus V)$ ; et de même pour  $P_{\nu'}^1(F, \rho)$ . Puisque  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu'$ , on en déduit l'inégalité (7.8). Considérons maintenant l'ouvert syntaxique  $(F, \rho)$ , où  $F = \varphi_1 \vee \neg \varphi_2$ , et  $\rho$  est comme ci-dessus. Les affectations  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{V}$  telles que  $\mathcal{A} \models F$  sont  $\emptyset$ ,  $\{\varphi_1\}$ , et  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ , donc :

$$\begin{aligned} P_\nu^1(F, \rho) &= \nu(X) - \nu(U) - \nu(X \setminus V) + \nu(U \setminus V) & (\mathcal{A} = \emptyset) \\ &+ \nu(U) - \nu(U \setminus V) & (\mathcal{A} = \{\varphi_1\}) \\ &+ \nu(U \setminus V) & (\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}) \\ &= \nu(X) - \nu(X \setminus V) + \nu(U \setminus V) \end{aligned}$$

Puisque  $\nu \sqsubseteq_{\text{Est}} \nu'$ , on en déduit l'inégalité (7.9). Donc  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu'$ .

La réciproque est fautive : donnons un contre-exemple. Soit  $X$  l'espace  $\{1, 2\}$ , muni de la topologie discrète. Les lentilles de  $X$  sont tous ses sous-ensembles non vides,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ , et  $X$  tout entier, et elles sont toutes incomparables. Posons  $\nu = 1/2\mathbf{1}_X$ ,  $\nu' = 1/2\mathbf{1}_{\{1\}} + 1/2\mathbf{1}_{\{2\}}$ . Par le lemme 7.4.8,  $\mathcal{C}(\nu) = 1/2\delta_X$  et  $\mathcal{C}(\nu') = 1/2\delta_{\{1\}} + 1/2\delta_{\{2\}}$ . ( $X$  est trivialement un cpo continu, cohérent et compact.) Il est clair que  $\mathcal{C}(\nu) \not\leq \mathcal{C}(\nu')$ , par exemple  $\mathcal{C}(\nu)(\{X\}) = 1/2 > 0 = \mathcal{C}(\nu')(\{X\})$ , donc  $\nu \not\sqsubseteq_{\text{Est}} \nu'$ , par la proposition 7.4.4. Mais pourtant  $\nu \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu'$ . On vérifie pour ceci les inégalités (7.8) et (7.9) sur tous les couples possibles d'ouverts  $U$  et  $V$  de  $X$ .

Commençons par l'inégalité (7.8). Le côté gauche  $\nu(U) - \nu(U \setminus V)$  vaut 0 si  $U = X$  et  $V = \emptyset$ ,  $1/2$  si  $U = X$  et  $V \neq \emptyset$ , et 0 si  $U \neq X$ . Nous devons donc montrer que, si  $U = X$  et  $V \neq \emptyset$ , alors  $\nu'(U) - \nu'(U \setminus V) \geq 1/2$ . Or, dans ce cas,  $\nu'(U) = 1/2 + 1/2 = 1$ , et  $\nu'(U \setminus V)$  vaut au plus  $1/2$ , car  $V$  ne contient pas 1 ou bien ne contient pas 2. Donc  $\nu'(U) - \nu'(U \setminus V) \geq 1/2$ .

Pour l'inégalité (7.9), le côté gauche vaut  $1/2$  si  $U = X$ , ou si  $V \neq \emptyset$ , et 0 si  $U \neq X$  et  $V = \emptyset$ . Si  $U = X$ , le côté droit vaut  $\nu'(X) = 1$ . Si  $V = \emptyset$ ,  $\nu'(X \setminus V) \leq 1/2$ , et  $\nu'(U \setminus V) \geq 0$ , donc le côté droit vaut  $\nu'(X) - \nu'(X \setminus V) + \nu'(U \setminus V) \geq 1/2$ . Dans tous les cas, le côté droit est supérieur ou égal au côté gauche.  $\square$

Nous examinons ensuite quelques propriétés de la relation d'inclusion entre croissants.

**Lemme 7.4.13** *Soient  $U, V, U', V'$  quatre ouverts. Supposons  $U \setminus V \subseteq U' \setminus V'$ . Alors les croissants  $U \setminus V, (U \cap U') \setminus (V \cup V'), U \setminus (V \cup V')$ , et  $(U \cap U') \setminus V$  sont identiques.*

*Démonstration.* Par le lemme 7.1.1,  $U \subseteq U' \cup V$  et  $U \cap V' \subseteq V$ . Par la première inégalité,  $U \setminus V \subseteq (U' \cup V) \setminus V = U' \setminus V$ . Par la seconde,  $U \setminus V \subseteq U \setminus (U \cap V') = U \setminus V'$ . Comme  $U \setminus V$  est inclus dans  $U' \setminus V$  et dans  $U \setminus V'$ , il est inclus dans leur intersection  $(U \cap U') \setminus (V \cup V')$ . Ce dernier croissant est inclus à la fois dans  $U \setminus (V \cup V')$  et dans  $(U \cap U') \setminus V$ , qui sont tous les deux inclus dans  $U \setminus V$ . On a donc la suite circulaire d'inclusions :

$$U \setminus V \subseteq (U \cap U') \setminus (V \cup V') \subseteq \left\{ \begin{array}{l} U \setminus (V \cup V') \\ (U \cap U') \setminus V \end{array} \right\} \subseteq U \setminus V$$

Donc tous les termes de cette suite sont égaux.  $\square$

Ceci nous permet d'établir le lemme technique suivant. Celui-ci sert à définir des fonctions  $\nu$  sur les croissants  $C = U \setminus V$  à partir de fonctions  $f$  et  $g$  qui dépendent a priori non seulement de  $C$ , mais aussi de  $U$  ou de  $V$ .

**Lemme 7.4.14** *Soit  $f$  une fonction qui à tout ouvert  $U$  et tout croissant  $C$  de la forme  $U \setminus V$  pour un certain ouvert  $V$  associe un réel  $f(U, C)$ . Soit  $g$  une fonction qui à tout ouvert  $V$  et tout croissant  $C$  de la forme  $U \setminus V$  pour un certain ouvert  $U$  associe un réel  $g(C, V)$ . Supposons de plus que :*

1. si  $V \supseteq V'$ , alors  $f(U, U \setminus V) \leq f(U, U \setminus V')$ ;
2. si  $U \subseteq U'$ , alors  $g(U \setminus V, V) \leq g(U' \setminus V, V)$ ;
3. pour tous ouverts  $U$  et  $V$ ,  $f(U, U \setminus V) = g(U \setminus V, V)$ .

Alors  $f(U, C)$  et  $g(C, V)$  ne dépendent que de  $C$  : il existe une fonction  $\nu$  des croissants vers les réels telle que  $f(U, C) = g(C, V) = \nu(C)$  pour tout croissant  $C$ , et tous ouverts  $U, V$  tels que  $C = U \setminus V$ . De plus,  $\nu$  est monotone : si  $C \subseteq C'$  alors  $\nu(C) \leq \nu(C')$ .

*Démonstration.* Supposons  $U \setminus V \subseteq U' \setminus V'$ . Alors :

$$\begin{aligned}
f(U, U \setminus V) &= f(U, U \setminus (V \cup V')) \quad \text{par le lemme 7.4.13} \\
&= g(U \setminus (V \cup V'), V \cup V') \quad \text{par l'hypothèse 3} \\
&= g((U \cap U') \setminus (V \cup V'), V \cup V') \quad \text{par le lemme 7.4.13} \\
&= f(U \cap U', (U \cap U') \setminus (V \cup V')) \quad \text{par l'hypothèse 3} \\
&\leq f(U \cap U', (U \cap U') \setminus V') \quad \text{par l'hypothèse 1} \\
&= g((U \cap U') \setminus V', V') \quad \text{par l'hypothèse 3} \\
&\leq g(U' \setminus V', V') \quad \text{par l'hypothèse 2} \\
&= f(U', U' \setminus V')
\end{aligned}$$

On en déduit, premièrement, que si  $U \setminus V = U' \setminus V'$ , alors  $f(U, U \setminus V) = f(U', U' \setminus V')$ , c'est-à-dire  $f(U, C) = f(U', C)$ , où  $C$  est le croissant  $U \setminus V$ . Donc  $f(U, C)$  ne dépend que de  $C$ , pas de  $U$ . Notons  $\nu(C) = f(U, C)$  pour un ouvert quelconque  $U$  tel que  $C$  s'écrive  $U \setminus V$ . On a d'autre part  $\nu(C) = g(C, V)$  par l'hypothèse 3. En second, l'inégalité  $f(U, U \setminus V) \leq f(U', U' \setminus V')$  ci-dessus, valable dès que  $U \setminus V \subseteq U' \setminus V'$ , entraîne donc  $\nu(U \setminus V) \leq \nu(U' \setminus V')$ . Donc  $\nu$  est monotone.  $\square$

**Proposition 7.4.15** Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'estimations, dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ . Posons, pour tous ouvert  $U$  et  $V$ ,

$$\nu(U \setminus V) = \sup_{i \in I} \nu_i^\uparrow(U) - \sup_{i \in I} (\nu_i^\uparrow(U) - \nu_i(U \setminus V)) \quad (7.10)$$

Si la famille  $(\nu_i(X))_{i \in I}$  est bornée, alors  $\nu$  est bien définie, et l'on a aussi :

$$\nu(U \setminus V) = \sup_{i \in I} (\nu_i^\downarrow(V) + \nu_i(U \setminus V)) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) \quad (7.11)$$

De plus,  $(\nu_i(U \setminus V))_{i \in I}$  converge vers  $\nu(U \setminus V)$  dans la topologie métrique usuelle de  $\mathbb{R}^+$ .

Finalement,  $\nu$  est une estimation, est sesqui-continue dès que toutes les  $\nu_i$ ,  $i \in I$ , sont sesqui-continues ; et  $\nu$  est la borne supérieure de la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$  dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ .

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert. Lorsque  $C$  est un croissant de la forme  $U \setminus V$  pour un certain ouvert  $V$ , posons  $f(U, C) = \sup_{i \in I} \nu_i^\uparrow(U) - \sup_{i \in I} (\nu_i^\uparrow(U) - \nu_i(C))$ . Ceci est bien défini dès que la famille  $(\nu_i(X))_{i \in I}$  est bornée, car  $\nu_i^\uparrow(U) = \nu_i(U) \leq \nu_i(X)$  pour tout  $i \in I$ , donc  $\sup_{i \in I} \nu_i^\uparrow(U)$  existe. Puisque  $\nu_i^\uparrow(U) - \nu_i(C) \leq \nu_i^\uparrow(U)$ ,  $\sup_{i \in I} (\nu_i^\uparrow(U) - \nu_i(C))$  existe aussi.

De même, pour tout croissant  $C = U \setminus V$ , posons  $g(C, V) = \sup_{i \in I} (\nu_i^\downarrow(V) + \nu_i(U \setminus V)) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V)$ . Montrons maintenant que  $f(U, C) = g(C, V)$ . On note d'abord que, par la proposition 7.4.11, les familles  $(\nu_i^\uparrow(U))_{i \in I}$  et  $(\nu_i^\downarrow(V))_{i \in I}$  sont dirigées dans  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ . Comme l'addition sur  $\mathbb{R}$  est Scott-continue,

$$\sup_{i \in I} \nu_i^\uparrow(U) + \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) = \sup_{i \in I} (\nu_i^\uparrow(U) + \nu_i^\downarrow(V))$$

Par définition de  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ , les familles  $(\nu_i^\uparrow(U) - \nu_i(C))_{i \in I}$  et  $(\nu_i(C) + \nu_i^\downarrow(V))_{i \in I}$  sont dirigées. Comme l'addition sur  $\mathbb{R}$  est Scott-continue de nouveau,

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I} (\nu_i^\uparrow(U) - \nu_i(C)) + \sup_{i \in I} (\nu_i(C) + \nu_i^\downarrow(V)) &= \sup_{i \in I} (\nu_i^\uparrow(U) - \nu_i(C) + \nu_i(C) + \nu_i^\downarrow(V)) \\ &= \sup_{i \in I} (\nu_i^\uparrow(U) + \nu_i^\downarrow(V)) \\ &= \sup_{i \in I} \nu_i^\uparrow(U) + \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) \end{aligned}$$

par (7.12). Donc  $f(U, C) = g(C, V)$ .

Remarquons que  $f$  et  $g$  sont croissantes en leur argument  $C$ . Plus précisément, si  $C = U \setminus V \subseteq U \setminus V' = C'$  (avec le même  $U$ ), alors  $f(U, C) \leq f(U, C')$ ; si  $C = U \setminus V \subseteq U' \setminus V = C'$  (avec le même  $V$ ), alors  $g(C, V) \leq g(C', V)$ . On peut donc appliquer le lemme 7.4.14 : on peut définir  $\nu(C) = f(U, C) = g(C, V)$ , où  $U$  et  $V$  sont deux ouverts quelconques tels que  $C = U \setminus V$ , et  $\nu$  est alors monotone.

Il est clair que  $\nu$  est stricte, car  $f(\emptyset, \emptyset) = 0$ . De plus, les égalités (7.10) et (7.11) sont les conséquences directes de la définition de  $\nu(U \setminus V)$  comme valant  $f(U, U \setminus V)$ , resp.  $g(U \setminus V, V)$ .

Montrons que  $\nu$  est la borne supérieure de la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$  dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ . On vérifie que, pour tout ouvert  $U$ ,  $\nu(U) = \sup_{i \in I} \nu_i(U)$ , par l'équation (7.10) avec  $V = \emptyset$ . En réutilisant l'équation (7.10), on en déduit que : (a)  $\nu(U) - \nu(U \setminus V) = \sup_{i \in I} (\nu_i(U) - \nu_i(U \setminus V))$ . De même, en utilisant (7.11) d'abord avec  $U = X$ , on obtient  $\nu(X \setminus V) = \sup_{i \in I} \nu_i(X) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V)$ , donc  $\nu^\downarrow(V) = \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V)$ , puisque  $\nu(X) = \sup_{i \in I} \nu_i(X)$ ; puis : (b)  $\nu(U \setminus V) + \nu^\downarrow(V) = \sup_{i \in I} (\nu_i^\downarrow(V) + \nu_i(U \setminus V))$ . De (a) et (b) on déduit directement que  $\nu$  est la borne supérieure de la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$ , dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ .

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour montrer que  $\nu_i(U \setminus V)$  tend vers  $\nu(U \setminus V)$  dans  $\mathbb{R}^+$  muni de sa topologie métrique usuelle — et non de sa topologie de Scott. (Voir la section 2.4 pour la notion de limite.) On peut voir  $(\nu_i)_{i \in I}$  comme un philtre monotone, où  $I$  est équipé du préordre  $\sqsubseteq$  défini par  $i \sqsubseteq i'$  si et seulement si  $\nu_i \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu_{i'}$ . On remarque que, pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $\nu_i(U) \leq \nu(U) \leq \nu_i(U) + \epsilon$  pour  $i$  suffisamment grand. Ceci est parce que  $\nu(U) = \sup_{i \in I} \nu_i(U)$ . Par (7.10),  $\nu(U) - \nu(U \setminus V)$  est aussi la borne supérieure des  $\nu_i(U) - \nu_i(U \setminus V)$ . On a donc  $\nu_i(U) - \nu_i(U \setminus V) \leq \nu(U) - \nu(U \setminus V) \leq \nu_i(U) - \nu_i(U \setminus V) + \epsilon$  pour  $i$  suffisamment grand. En soustrayant ceci de l'encadrement précédent, on en déduit  $\nu_i(U \setminus V) - \epsilon \leq \nu(U \setminus V) \leq \nu_i(U \setminus V) + \epsilon$  pour  $i$  suffisamment grand. Autrement dit,  $(\nu_i(U \setminus V))_{i \in I}$  converge vers  $\nu(U \setminus V)$  dans la topologie métrique usuelle de  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $\nu_i$  est une estimation pour tout  $i \in I$ , alors il est clair que  $\nu$  aussi. Ceci est parce que l'addition et la soustraction sont continues pour la topologie métrique usuelle de  $\mathbb{R}^+$ . Par exemple, pour vérifier (7.2), on note que pour tout  $i \in I$ , on a :

$$\sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, m\} \\ K \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|J|+|K|} \nu_i \left( \bigcap_{j \in J} [U]_j \setminus \bigcup_{k \in K} [V]_k \right) \geq 0$$

puisque  $\nu_i$  est une estimation. Donc la limite du côté gauche est positive ou nulle elle aussi. Or, l'addition et la soustraction étant continues pour la topologie métrique de  $\mathbb{R}^+$ , la limitité du côté

gauche est aussi la somme alternée correspondante des limites, c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, m\} \\ K \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|J|+|K|} \nu \left( \bigcap_{j \in J} [U] U_j \setminus \bigcup_{k \in K} [V] V_k \right) \geq 0$$

Le fait que  $\nu$  soit monotone, ou envoie  $\emptyset$  vers 0, est encore plus facile à vérifier, en utilisant un argument similaire.

Finalement, si chaque  $\nu_i$  est sesqui-continue, montrons que  $\nu$  aussi. Pour toute famille dirigée d'ouverts  $(U_j)_{j \in J}$ , pour tout ouvert  $V$ , on a :

$$\begin{aligned} \nu \left( \bigcup_{j \in J} U_j \setminus V \right) &= \sup_{i \in I} \left( \nu_i^\downarrow(V) + \nu_i \left( \bigcup_{j \in J} U_j \setminus V \right) \right) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) \quad \text{par (7.11)} \\ &= \sup_{i \in I} \left( \nu_i^\downarrow(V) + \sup_{j \in J} \nu_i(U_j \setminus V) \right) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) \\ &\quad \text{puisque } \nu_i \text{ est sesqui-continue} \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} (\nu_i^\downarrow(V) + \nu_i(U_j \setminus V)) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) \\ &= \sup_{j \in J} \sup_{i \in I} (\nu_i^\downarrow(V) + \nu_i(U_j \setminus V)) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) \\ &= \sup_{j \in J} \left( \sup_{i \in I} (\nu_i^\downarrow(V) + \nu_i(U_j \setminus V)) - \sup_{i \in I} \nu_i^\downarrow(V) \right) \\ &= \sup_{j \in J} \nu(U_j \setminus V) \end{aligned}$$

On montre de même que, pour tout ouvert  $U$ , pour toute famille dirigée d'ouverts  $(V_j)_{j \in J}$ ,  $\nu \left( U \setminus \bigcup_{j \in J} V_j \right) = \inf_{j \in J} \nu(U \setminus V_j)$ , en utilisant cette fois-ci (7.10).  $\square$

**Théorème 7.4.16** Soit  $(\nu_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'estimations sesqui-continues, dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$ . Si la famille  $(\nu_i(X))_{i \in I}$  est bornée, alors la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$  a une borne supérieure  $\nu$  dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$ , définie par l'équation (7.10), ou de façon équivalente par l'équation (7.11).

Pour tout croissant  $C$  de  $X$ ,  $(\nu_i(C))_{i \in I}$  converge vers  $\nu(C)$  dans la topologie métrique usuelle de  $\mathbb{R}^+$ .

$\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  et  $\mathbf{Est}_1(X)$  sont des cpos.

Notons que ce théorème énonce que  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  et  $\mathbf{Est}_1(X)$  sont des cpos, sans aucune hypothèse sur  $X$ . Nous avons déjà obtenu ce résultat à la proposition 7.4.6, mais en supposant  $X$  stablement compact.

*Démonstration.* Par le lemme 7.4.12,  $(\nu_i)_{i \in I}$  est aussi dirigée dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ . L'équation (7.10), resp. (7.11), définit alors une estimation sesqui-continue  $\nu$ , par la proposition 7.4.15.

Pour tous  $i, j \in I$ , posons  $i \sqsubseteq j$  si et seulement si  $\nu_i \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \nu_j$ , et  $i \sqsubseteq' j$  si et seulement si  $\nu_i \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \nu_j$ . Par le lemme 7.4.12,  $i \sqsubseteq' j$  implique  $i \sqsubseteq j$ . Par la proposition 7.4.15, pour

tout croissant  $C$ , la famille  $(\nu_i(C))_{i \in I}$  converge vers  $\nu(C)$ , selon le philtre  $(I, \sqsubseteq)$ . Nous devons montrer qu'elle converge aussi vers  $\nu(C)$  selon le philtre  $(I, \sqsubseteq')$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $i_0 \in I$  tel que  $\nu(C) - \epsilon \leq \nu_i(C) \leq \nu(C) + \epsilon$  pour tout  $i$  tel que  $i_0 \sqsubseteq i$ . C'est donc en particulier le cas pour tout  $i$  tel que  $i_0 \sqsubseteq' i$ , d'où la convergence selon le philtre  $(I, \sqsubseteq')$ .

Pour tout ouvert syntaxique  $(F, \rho)$ , pour toute estimation  $\nu'$ ,  $P_{\nu'}^1(F, \rho)$  est une combinaison linéaire de quantités de la forme  $\nu'(C)$ , pour certains croissants  $C$ . En particulier,  $P_{\nu'}^1(F, \rho)$  dépend de façon continue (pour la topologie métrique usuelle sur  $\mathbb{R}$ ) des quantités  $\nu'(C)$ . Donc  $P_{\nu_i}^1(F, \rho)$  converge vers  $P_{\nu}^1(F, \rho)$  selon le philtre  $(I, \sqsubseteq')$ . Or, par définition de  $\sqsubseteq_{\text{Est}}$ ,  $(P_{\nu_i}^1(F, \rho))_{i \in I}$  est une famille dirigée de réels. Sa limite est donc aussi sa borne supérieure. Du fait que  $P_{\nu}^1(F, \rho) = \sup_{i \in I} P_{\nu_i}^1(F, \rho)$ , pour tout ouvert syntaxique  $(F, \rho)$ , on déduit immédiatement que  $\nu$  est la borne supérieure de la famille  $(\nu_i)_{i \in I}$  dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\text{Est}}$ .

Finalement, tout ceci implique que  $\text{Est}_{\leq 1}(X)$  et  $\text{Est}_1(X)$  sont des cpos.  $\square$

Le lemme technique 7.4.14 implique aussi que l'on peut se dispenser de vérifier la condition de monotonie pour toute fonction  $\nu$  des croissants vers les réels positifs ou nuls vérifiant l'inégalité (7.3).

**Lemme 7.4.17** *Soit  $\nu$  une fonction stricte de  $\mathcal{C}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  vérifiant l'inégalité (7.3). Alors  $\nu$  est monotone, donc est une estimation.*

*Démonstration.* On pose  $f(U, C) = g(C, V) = \nu(C)$ . On a déjà vu plus haut que l'inégalité (7.3) entraînait : (a)  $\nu(U \setminus V) \geq \nu(U_1 \setminus V)$  dès que  $U_1 \subseteq U$  (le cas  $m = 1$  et  $n = 0$ ), et que : (b)  $\nu(U \setminus V) \geq \nu(U \setminus V_1)$  dès que  $V_1 \supseteq V$  (le cas  $m = 0$  et  $n = 1$ ). Le lemme 7.4.14 entraîne alors que  $\nu$  est monotone.  $\square$

**Lemme 7.4.18** *Soit  $\alpha$  une  $\mathbf{A}$ -évaluation sur  $X$ ,  $F$  une formule propositionnelle et  $\rho$  un environnement. Alors  $P_{\mathbf{w}_\alpha}^1(F, \rho)$  vaut 1 si  $\alpha \in \llbracket F \rrbracket \rho$ , et 0 sinon.*

*Démonstration.* Soit  $\nu = \mathbf{w}_\alpha$ ,  $P = \delta_\alpha$ . Pour tout croissant  $C = U \setminus V$ ,  $\nu(C)$  vaut 1 si  $\alpha(U) = 1$  et  $\alpha(V) = 0$ , c'est-à-dire si  $\alpha \in \square C$ ; 0 sinon. Par le lemme 7.2.6,  $\nu(C)$  égale donc  $\delta_\alpha^\%(\square C) = P^\%(\square C)$ . Par le lemme 7.3.8,  $P^\%(\llbracket F \rrbracket \rho) = P_\nu^1(F, \rho, \mathcal{V})$  pour toute formule propositionnelle  $F$ , tout environnement  $\rho$ , et tout ensemble fini  $\mathcal{V} \supseteq \text{vars}(F)$ . Donc  $P_{\mathbf{w}_\alpha}^1(F, \rho) = P_\nu^1(F, \rho, \mathcal{V})$  (lemme 7.3.10) vaut  $\delta_\alpha^\%(\llbracket F \rrbracket \rho)$ , qui vaut 1 si et seulement si  $\alpha \in \llbracket F \rrbracket \rho$  et 0 sinon, par le lemme 7.2.6.  $\square$

On comparera le théorème suivant à la proposition 7.4.7, qui démontre un peu plus, sous des hypothèses bien plus fortes.

**Théorème 7.4.19** *Soit  $X$  un espace topologique. La fonction de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $\text{Est}(X)$ , resp.  $\text{Est}_{\leq 1}(X)$ , resp.  $\text{Est}_1(X)$ , qui à  $\alpha$  associe  $\mathbf{w}_\alpha$ , est un plongement d'ordre, et est Scott-continue.*

*Démonstration.* Nous devons d'abord montrer que la fonction  $\mathbf{w}_\cdot$ , qui à  $\alpha$  associe  $\mathbf{w}_\alpha$ , est croissante. Supposons  $\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha'$ , et soit  $(F, \rho)$  un ouvert syntaxique. Par le lemme 7.4.18, si  $P_{\mathbf{w}_\alpha}^1(F, \rho) = 1$  alors  $\alpha \in \llbracket F \rrbracket \rho$ . Puisque  $\llbracket F \rrbracket \rho$  est ouvert (par le lemme 7.4.2), il est clos par le haut, donc  $\alpha' \in \llbracket F \rrbracket \rho$ ; donc  $P_{\mathbf{w}_{\alpha'}}^1(F, \rho) = 1$ . Donc  $P_{\mathbf{w}_\alpha}^1(F, \rho) \leq P_{\mathbf{w}_{\alpha'}}^1(F, \rho) = 1$ . Comme  $(F, \rho)$  est un ouvert syntaxique quelconque,  $\mathbf{w}_\alpha \sqsubseteq_{\text{Est}} \mathbf{w}_{\alpha'}$ .

Montrons que  $\mathfrak{u}_-$  est Scott-continue. Soit donc  $(\alpha_i)_{i \in I}$  une famille dirigée, pour  $\sqsubseteq_{\mathbf{A}}$ , d'valuations continues, et  $\alpha = \bigsqcup_{i \in I} \alpha_i$  sa borne supérieure dans  $\mathcal{P}(X)$ , par le lemme 3.6.9. Puisque  $\mathfrak{u}_-$  est croissante,  $(\mathfrak{u}_{\alpha_i})_{i \in I}$  forme une famille dirigée. Soit  $\nu_0$  sa borne supérieure, qui existe par le théorème 7.4.16. De plus, pour tout croissant  $C$ ,  $\nu_0(C)$  est la limite de la famille  $(\mathfrak{u}_{\alpha_i}(C))_{i \in I}$ . Pour tout ouvert syntaxique  $(F, \rho)$ , pour tout  $\nu$ ,  $P_\nu^1(F, \rho)$  dépend de façon continue (en fait, linéaire) de quantités de la forme  $\nu(C)$ , où  $C$  est un croissant. Donc  $P_{\nu_0}^1(F, \rho)$  est la limite des  $P_{\mathfrak{u}_{\alpha_i}}^1(F, \rho)$ ,  $i \in I$ . Comme  $P_{\mathfrak{u}_{\alpha_i}}^1(F, \rho) \leq P_{\nu_0}^1(F, \rho)$  pour tout  $i \in I$ ,  $P_{\nu_0}^1(F, \rho)$  est la borne supérieure des  $P_{\mathfrak{u}_{\alpha_i}}^1(F, \rho)$ ,  $i \in I$ . L'ouvert syntaxique  $(F, \rho)$  étant quelconque, on en déduit que  $\nu_0$  est la borne supérieure selon  $\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$  de la famille  $(\mathfrak{u}_{\alpha_i})_{i \in I}$ .

Montrons maintenant que la fonction  $f$  qui à  $\mathfrak{u}_\alpha$  associe  $\alpha$  est croissante. Supposons  $\mathfrak{u}_\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{Est}} \mathfrak{u}_{\alpha'}$ . Par le lemme 7.4.12,  $\mathfrak{u}_\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{E}} \mathfrak{u}_{\alpha'}$ . Par la proposition 7.4.11, pour tout ouvert  $U$ ,  $(\mathfrak{u}_\alpha)^\uparrow(U) \leq (\mathfrak{u}_{\alpha'})^\uparrow(U)$ , donc si  $\alpha(U) = 1$  alors  $\alpha'(U) = 1$ ; et pour tout ouvert  $V$ ,  $(\mathfrak{u}_\alpha)^\downarrow(V) \leq (\mathfrak{u}_{\alpha'})^\downarrow(V)$ , c'est-à-dire  $1 - \mathfrak{u}_\alpha(X \setminus V) \leq 1 - \mathfrak{u}_{\alpha'}(X \setminus V)$ , donc si  $\alpha'(V) = 0$ , alors  $1 - \mathfrak{u}_{\alpha'}(X \setminus V) = 1 - 1 = 0$ , donc  $1 - \mathfrak{u}_\alpha(X \setminus V) = 0$ , donc  $\alpha(V) = 0$ . Ceci suffit pour montrer  $\alpha \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \alpha'$ . La fonction  $\mathfrak{u}_-$  est donc un plongement d'ordre.  $\square$

## 7.5 Relation entre $\nu$ , $\nu^\uparrow$ , et $\nu^\downarrow$

On ne peut pas dire que le concept d'estimation soit des plus naturels a priori. Les conditions de la définition 7.1.8 sont étranges, surtout l'inégalité (7.2). De plus, le fait que les estimations  $\nu$  mesurent des croissants, et non pas ni des ouverts ni des unions disjointes de croissants, est baroque.

On peut donc se demander si l'on ne pourrait pas simplifier la présentation des estimations  $\nu$ . Par exemple, on peut penser que les deux seules composantes essentielles d'une estimation  $\nu$  sont la crédibilité  $\nu^\uparrow$  (rappelons que  $\nu^\uparrow(U) = \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$ ) et la plausibilité  $\nu^\downarrow$  (où  $\nu^\downarrow(V) = \nu(X) - \nu(X \setminus V)$  pour tout ouvert  $V$ ). Ce n'est en fait pas le cas :

**Proposition 7.5.1** *Les estimations  $\nu$  ne sont pas en général déterminées de façon unique par la donnée de  $\nu^\uparrow$  et de  $\nu^\downarrow$ . Plus précisément, il existe un espace  $X$ , et deux estimations  $\nu$  et  $\nu'$  telles que  $\nu^\uparrow = \nu'^\uparrow$  et  $\nu^\downarrow = \nu'^\downarrow$ , mais  $\nu \neq \nu'$ .*

*On peut même prendre  $X$  fini, demander à trouver une infinité d'estimations continues  $\nu$  distinctes dont toutes les crédibilités associées  $\nu^\uparrow$  soient égales, ainsi que toutes les plausibilités associées  $\nu^\downarrow$ .*

*Démonstration.* L'idée est que la donnée de  $\nu^\uparrow$  et de  $\nu^\downarrow$  ne contraint la valeur de la valuation continue  $\langle \nu \rangle$  que sur les ouverts de la forme  $\square U$  et  $\diamond V$ , mais seulement eux.

Soit  $X$  l'espace  $\{1 < 2 < \dots < n\}$ . C'est trivialement un cpo continu, cohérent et compact.  $X$  a  $n + 1$  ouverts : les intervalles  $[i, n]$  avec  $1 \leq i \leq n$ , et le vide.  $X$  a  $n(n + 1)/2$  lentilles : les intervalles  $[i, j]$  avec  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Donc  $\nu$  s'écrit comme une somme  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} \mathfrak{u}_{[i,j]}$ . Considérons les  $a_{ij}$  comme des inconnues. Dire que  $\nu^\uparrow$  nous est donné, c'est dire que nous connaissons les valeurs des  $n$  sommes  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ [i,j] \subseteq U}} a_{ij}$  pour chacun des  $n$  ouverts non vides  $U$  de  $X$ . (Le cas de l'ouvert vide est trivial, sachant que  $\nu(\emptyset) = 0$  par définition.) De même, dire que  $\nu^\downarrow$

est donné, c'est dire que nous connaissons les valeurs des  $n$  sommes  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ [i,j] \cap V \neq \emptyset}} a_{ij}$  pour chacun des  $n$  ouverts non vides  $V$  de  $X$ . Ceci nous fournit donc  $2n$  équations en  $n(n+1)/2$  inconnues. Dès que  $n \geq 4$ , il y a donc strictement plus d'inconnues que d'équations, et la solution en  $a_{ij}$  ne sera pas unique.

L'argument n'est pas complet, car nous avons ignoré le fait que les inconnues  $a_{ij}$  sont soumises à des contraintes de la forme  $a_{ij} \geq 0$  notamment. Donnons donc un contre-exemple explicite, obtenu en résolvant les contraintes ci-dessus pour  $n = 4$ , de sorte à trouver toutes les estimations continues  $\nu$  dont les  $\nu^\uparrow$  et  $\nu^\downarrow$  coïncident avec les  $\nu_0^\uparrow$  et  $\nu_0^\downarrow$  de l'estimation, fixée,  $\nu_0 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} \frac{1}{10} \mathbf{u}_{[i,j]}$ . Pour tous réels  $a, b$  tels que  $0 \leq a, b \leq 2/10$  et  $-1/10 \leq b - a \leq 1/10$ , soit :

$$\begin{aligned} \nu_{a,b} = & \frac{1}{10} \mathbf{u}_{[1,1]} + \frac{1}{10} \mathbf{u}_{[1,2]} + a \mathbf{u}_{[1,3]} + \left(\frac{2}{10} - a\right) \mathbf{u}_{[1,4]} \\ & + \frac{1}{10} \mathbf{u}_{[2,2]} + \left(\frac{2}{10} - b\right) \mathbf{u}_{[2,3]} + b \mathbf{u}_{[2,4]} \\ & + \left(\frac{1}{10} + b - a\right) \mathbf{u}_{[3,3]} + \left(\frac{1}{10} - b + a\right) \mathbf{u}_{[3,4]} \\ & + \frac{1}{10} \mathbf{u}_{[3,4]} \end{aligned}$$

Nous avons arrangé la somme ci-dessus en lignes et en colonnes pour une meilleure lisibilité. On vérifie que :

$$\begin{aligned} \nu_{a,b}^\uparrow([1,4]) &= 1 \\ \nu_{a,b}^\uparrow([2,4]) &= \frac{6}{10} && \text{(somme des coefficients de toutes les lignes sauf la première)} \\ \nu_{a,b}^\uparrow([3,4]) &= \frac{3}{10} && \text{(toutes les lignes sauf la première et la deuxième)} \\ \nu_{a,b}^\uparrow([4,4]) &= \frac{1}{10} \\ \nu_{a,b}^\uparrow(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

et aussi que :

$$\begin{aligned} \nu_{a,b}^\downarrow([1,4]) &= 1 \\ \nu_{a,b}^\downarrow([2,4]) &= \frac{9}{10} && \text{(somme des coefficients de toutes les colonnes sauf la première)} \\ \nu_{a,b}^\downarrow([3,4]) &= \frac{7}{10} && \text{(toutes les colonnes sauf la première et la deuxième)} \\ \nu_{a,b}^\downarrow([4,4]) &= \frac{4}{10} \\ \nu_{a,b}^\downarrow(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

(La formule de  $\nu_{a,b}$  est une forme de "triangle magique", analogue des carrés magiques.) Donc  $\nu_{a,b}^\uparrow$  et  $\nu_{a,b}^\downarrow$  sont indépendants de  $a$  et  $b$  tels que  $0 \leq a, b \leq 2/10$  et  $-1/10 \leq b - a \leq 1/10$ .  $\square$

On peut, à l'opposé, tenter de trouver à quelles conditions un couple  $(\nu^-, \nu^+)$  formé d'une crédibilité continue  $\nu^-$  et d'une plausibilité continue  $\nu^+$  est de la forme  $(\nu^\uparrow, \nu^\downarrow)$  pour une certaine estimation continue (en général non unique, donc)  $\nu$ .

En premier, on observe que  $\nu^-$  doit être en-dessous de  $\nu^+$ . C'est l'inégalité (i) du lemme 7.1.13. On observe aussi que l'on doit avoir  $\nu^-(X) = \nu^+(X)$ . On a aussi la contrainte suivante :

**Lemme 7.5.2** *Pour toute estimation  $\nu$  sur  $X$ , pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$ ,*

$$\begin{aligned} \nu^\uparrow(U) + \nu^\uparrow(V) &\leq \nu^\uparrow(U \cup V) + \nu^\uparrow(U \cap V) \\ &\leq \nu^\uparrow(U) + \nu^\downarrow(V) \\ &\leq \nu^\downarrow(U \cup V) + \nu^\downarrow(U \cap V) \leq \nu^\downarrow(U) + \nu^\downarrow(V) \end{aligned}$$

*Démonstration.* La première inégalité vient du fait que  $\nu^\uparrow$  est une crédibilité et  $\nu^\downarrow$  une plausibilité (lemme 7.1.12), et que toute crédibilité est un jeu convexe, toute plausibilité est un jeu concave. Il reste donc à démontrer les deux inégalités du milieu, impliquant  $\nu^\uparrow(U) + \nu^\downarrow(V)$ . La première s'obtient en sommant terme à terme les inégalités (ii) et (iii) du lemme 7.1.13, la deuxième en sommant (iv) et (v).  $\square$

▷ **Exercice 7.3**

*Le contre-exemple  $X$  de la proposition 7.5.1 est muni d'un ordre  $\leq$  non trivial. Montrer qu'à l'opposé, si  $X$  est un ensemble fini muni de la topologie discrète (c'est-à-dire avec l'égalité comme ordre), alors il existe au plus une estimation  $\nu$  telle que  $\nu^\uparrow = \nu^-$  et  $\nu^\downarrow = \nu^+$ . Plus précisément, montrer que si l'on écrit  $\nu^- = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} a_A \mathbf{u}_A$ ,  $\nu^+ = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} b_A \mathbf{e}_A$ , et si*

$$\begin{aligned} \nu^-(U \cup V) + \nu^-(U \cap V) &\leq \nu^-(U) + \nu^+(V) \\ &\leq \nu^+(U \cup V) + \nu^+(U \cap V) \end{aligned}$$

*pour tous ouverts  $U, V$ , alors il existe une estimation  $\nu$  telle que  $\nu^\uparrow = \nu^-$  et  $\nu^\downarrow = \nu^+$  si et seulement si  $a_A = b_A$  pour toute partie  $A$  non vide de  $X$ , et alors  $\nu = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} a_A \mathbf{u}_A$ ;  $\nu$  existe donc, et est unique. (Indication : prendre  $V = X \setminus U$  dans les formules du lemme 7.5.2, et penser à la formule d'inversion de Möbius.)*

On peut en fait dire un peu mieux, ce sera le contenu de la proposition 7.5.9 ci-dessous. En attendant, on observe quelques propriétés de l'intégration par rapport à  $(\nu)$ . La première, exprimée à la proposition 7.5.4, est une forme d'extensibilité linéaire par le bas, au sens de la définition 5.4.1.

**Lemme 7.5.3** *Soit  $X$  un espace sobre. Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , pour toute  $\mathbf{A}$ -évaluation continue  $\alpha$  sur  $X$ , notons  $\min_\alpha f = \min_{x \in L} f(x) = \min_{x \in Q} f(x)$ , où  $L = Q \cap F$  est la lentille définie par  $(Q, F)^* = \alpha$ .*

*Alors, pour tout réel  $t$ ,  $\alpha \in \square f^{-1}]t, +\infty[$  si et seulement si  $\min_\alpha f > t$ .*

*Démonstration.* D'abord, rappelons que par la proposition 3.6.3, comme  $X$  est sobre (en particulier), la fonction qui à  $(Q, F) \in \mathcal{P}_\nu(X)$  associe  $(Q, F)^* \in \mathcal{P}_\nu(X)$  est un homéomorphisme.  $L = Q \cap F$  est alors une lentille, et donc un compact de  $X$ . L'image de  $L$  par  $f$  est donc un compact de  $\mathbb{R}$ , muni de sa topologie de Scott. Ce compact a un plus petit élément, par le fait 5.4.2 :  $\min_\alpha f = \min_{x \in L} f(x)$  est donc bien défini. De plus, comme  $Q = \uparrow L$  et  $f$  est croissante,  $\min_{x \in L} f(x) = \min_{x \in Q} f(x)$ .

On a  $\min_\alpha f > t$  si et seulement si, pour tout  $x \in Q$  (où  $(Q, F)^* = \alpha$ ),  $f(x) > t$ , autrement dit si et seulement si  $Q \subseteq f^{-1}]t, +\infty[$ . Cette dernière condition est équivalente à  $\alpha(f^{-1}]t, +\infty[) = 1$ , de nouveau par la proposition 3.6.3.  $\square$

**Proposition 7.5.4** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow = \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \min_\alpha f d\mathcal{L}(\nu)$$

*Démonstration.* La fonction qui à  $\alpha$  associe  $\min_\alpha f$  est continue, car l'image réciproque par cette fonction de l'ouvert de Scott  $]t, +\infty[$  est  $\square f^{-1}]t, +\infty[$ , par le lemme 7.5.3. Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \min_\alpha f d\mathcal{L}(\nu) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(\nu)(\square f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 [\mathcal{L}(\nu)(\square f^{-1}]t, +\infty[) - \mathcal{L}(\nu)(\square X)] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] dt \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow \end{aligned}$$

par le théorème 7.3.23.  $\square$

La seconde propriété de l'intégration par rapport à  $\mathcal{L}(\nu)$  est une forme d'extensibilité linéaire par le haut, au sens de la définition 6.3.1. Ce sera la proposition 7.5.6 ci-dessous.

**Lemme 7.5.5** *Soit  $X$  un espace sobre. Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , pour toute  $\mathbf{A}$ -valuation continue  $\alpha$  sur  $X$ , notons  $\sup_\alpha f = \sup_{x \in F} f(x)$ , où  $L = Q \cap F$  est la lentille définie par  $(Q, F)^* = \alpha$ .*

*Alors, pour tout réel  $t$ ,  $\alpha \in \diamond f^{-1}]t, +\infty[$  si et seulement si  $\sup_\alpha f > t$ .*

*Démonstration.* L' $\mathbf{A}$ -valuation continue  $\alpha$  est telle que  $\sup_{x \in F} f(x) > t$ , où  $(Q, F)^* = \alpha$ , si et seulement s'il existe  $x \in F$  tel que  $f(x) > t$ , c'est-à-dire si et seulement si  $F$  intersecte  $f^{-1}]t, +\infty[$ , autrement dit  $\alpha(f^{-1}]t, +\infty[) \neq 0$  (par la proposition 3.6.3), c'est-à-dire  $\alpha \in \diamond f^{-1}]t, +\infty[$ .  $\square$

**Proposition 7.5.6** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu^\downarrow = \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \sup_\alpha f d\mathcal{L}(\nu)$$

*Démonstration.* La fonction qui à  $\alpha$  associe  $\sup_\alpha f$  est continue, car l'image réciproque par cette fonction de  $]t, +\infty[$  est  $\diamond f^{-1}]t, +\infty[$ , par le lemme 7.5.5. On peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \sup_\alpha f \, d\mathcal{L}(\nu) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(\nu) (\diamond f^{-1}]t, +\infty[) \, dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 [\mathcal{L}(\nu) (\diamond f^{-1}]t, +\infty[) - \mathcal{L}(\nu)(\square X)] \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \nu^\downarrow(f^{-1}]t, +\infty[) \, dt + \int_{-\infty}^0 [\nu^\downarrow(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu^\downarrow(X)] \, dt \\ &= \int_{x \in X} f(x) \, d\nu^\downarrow \end{aligned}$$

En effet, pour tout ouvert  $V$ ,  $\mathcal{L}(\nu)(\diamond V) = \mathcal{L}(\nu)^\circ(\square X) - \mathcal{L}(\nu)^\circ(\square X \setminus \diamond V) = \mathcal{L}(\nu)^\circ(\square X) - \mathcal{L}(\nu)^\circ(\square(X \setminus V))$  (par le lemme 7.1.2)  $= \nu(X) - \nu(X \setminus V)$  (par le théorème 7.3.23)  $= \nu^\downarrow(V)$ . D'autre part,  $\mathcal{L}(\nu)(\square X) = \mathcal{L}(\nu)(\diamond X) = \nu^\downarrow(X)$ , puisque  $\square X = \diamond X$ .  $\square$

**Définition 7.5.7** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ , et  $\nu$  une fonction de  $\mathcal{C}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$ . L'image directe  $f[\nu]$  de  $\nu$  par  $f$  est la fonction de  $\mathcal{C}(Y)$  vers  $\mathbb{R}^+$  qui à tout croissant  $C$  de  $Y$  associe  $\nu(f^{-1}(C))$ .

On remarque que ceci est bien défini, car pour tout croissant  $C = U \setminus V$ ,  $f^{-1}(C) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$  est encore un croissant.

**Lemme 7.5.8** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ . Pour toute estimation, resp. continue, sur  $X$ ,  $f[\nu]$  est une estimation, resp. continue, sur  $Y$ . De plus,  $f[\nu]^\uparrow = f[\nu^\uparrow]$  et  $f[\nu]^\downarrow = f[\nu^\downarrow]$ .

*Démonstration.* D'abord,  $f[\nu]$  est clairement stricte et monotone. Ensuite, pour tout ouvert  $U$ , pour tous ouverts  $U_1, \dots, U_m$  inclus dans  $U$  ( $m \geq 0$ ), pour tout ouvert  $V$ , pour tous ouverts  $V_1, \dots, V_n$  contenant  $V$  ( $n \geq 0$ ), on note que  $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} {}^{[U]}U_i \setminus \bigcup_{j \in J} {}^{[V]}V_j) = \bigcap_{i \in I} {}^{[f^{-1}(U)]}f^{-1}(U_i) \setminus \bigcup_{j \in J} {}^{[f^{-1}(V)]}f^{-1}(V_j)$ , donc  $f[\nu]$  vérifie l'inégalité (7.2) dès que  $\nu$  la vérifie. De même, pour toute famille  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts, pour tout ouvert  $V$ ,  $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i \setminus V) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \setminus f^{-1}(V)$ ; et pour tout ouvert  $U$ , pour toute famille d'ouverts  $(V_j)_{j \in J}$ ,  $f^{-1}(U \setminus \bigcup_{j \in J} V_j) = f^{-1}(U) \setminus \bigcup_{j \in J} f^{-1}(V_j)$ , d'où le fait que  $f[\nu]$  est continue dès que  $\nu$  l'est. Enfin, pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ ,  $f[\nu]^\uparrow(U) = \nu(f^{-1}(U)) = \nu^\uparrow(f^{-1}(U)) = f[\nu^\uparrow](U)$  (voir la définition 4.2.8); et  $f[\nu]^\downarrow(U) = f[\nu](Y) - f[\nu](Y \setminus U) = \nu(f^{-1}(Y)) - \nu(f^{-1}(Y \setminus U)) = \nu(X) - \nu(X \setminus f^{-1}(U)) = \nu^\downarrow(f^{-1}(U)) = f[\nu^\downarrow](U)$ .  $\square$

▷ **Exercice 7.4**

Soit  $X$  un espace stablement compact,  $f$  une fonction continue de  $X$  dans  $Y$ . Montrer que, pour toute estimation continue,  $\mathcal{L}f[\nu] = \mathcal{P}_\nu(f)[\mathcal{L}(\nu)]$ , où  $\mathcal{P}_\nu(f)$  est la fonction image directe définie à l'exercice 3.2.

La condition suivante, qui nous sera utile au chapitre 11, n'est pas sans rappeler la condition (c) de Walley (1991, section 2).

**Proposition 7.5.9** *Pour toute estimation  $\nu$  sur  $X$ , pour toutes fonctions continues bornées  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow + \int_{x \in X} g(x) d\nu^\uparrow &\leq \int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^\uparrow \\ &\leq \int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow + \int_{x \in X} g(x) d\nu^\downarrow \\ &\leq \int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^\downarrow \leq \int_{x \in X} f(x) d\nu^\downarrow + \int_{x \in X} g(x) d\nu^\downarrow \end{aligned}$$

*Démonstration.* La première et la dernière inégalité sont des conséquences de la proposition 4.3.1 et de la proposition 4.3.2, sachant que  $\nu^\uparrow$  est une crédibilité, donc un jeu convexe, et  $\nu^\downarrow$  une plausibilité, donc un jeu concave.

Lorsque  $X$  est stablement compact, les deux autres inégalités se démontrent relativement facilement, comme suit. Pour la deuxième inégalité,

$$\int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^\uparrow = \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \min_\alpha (f + g) d\mathcal{Q}(\nu)$$

par la proposition 7.5.4. Or, pour tout  $\alpha = (Q, F)^* \in \mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $\min_\alpha (f + g) = \min_{x \in L} (f(x) + g(x))$  est inférieur ou égal à  $\min_{x \in L} f(x) + \sup_{x \in L} g(x) = \min_\alpha f + \sup_\alpha g$ , car pour tout  $x \in L$ ,  $g(x) \leq \sup_{x \in L} g(x)$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^\uparrow &\leq \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \min_\alpha f + \sup_\alpha g d\mathcal{Q}(\nu) \\ &= \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \min_\alpha f d\mathcal{Q}(\nu) + \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \sup_\alpha g d\mathcal{Q}(\nu) \\ &\quad \text{car } \mathcal{Q}(\nu) \text{ est une valuation} \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow + \int_{x \in X} g(x) d\nu^\downarrow \end{aligned}$$

par la proposition 7.5.4 et la proposition 7.5.6. Pour la troisième inégalité,

$$\int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^\downarrow = \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \sup_\alpha (f + g) d\mathcal{Q}(\nu)$$

par la proposition 7.5.6. Or, pour tout  $\alpha = (Q, F)^* \in \mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $\sup_\alpha (f + g) = \sup_{x \in F} (f(x) + g(x)) \geq \min_{x \in L} f(x) + \sup_{x \in F} g(x) = \min_\alpha f + \sup_\alpha g$ . En effet, rappelons que pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ ,  $F \subseteq cl(U \cap F)$ , par la proposition 3.6.3. Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $x \in F$  tel que  $g(x) > \sup_\alpha g - \epsilon/2$ . Donc l'ouvert  $V = g^{-1}[\sup_\alpha g - \epsilon/2, +\infty[$  intersecte  $F$ . Soit  $U$  l'ouvert  $f^{-1}[\min_\alpha f - \epsilon/2, +\infty[$ . Par définition,  $U$  contient  $Q$ , donc  $V$  intersecte  $cl(U \cap F)$ , donc aussi  $U \cap F$ . On en déduit qu'il existe un élément  $x$  dans  $V \cap U \cap F$ , c'est-à-dire tel que  $g(x) >$

$\sup_\alpha g - \epsilon/2$ ,  $f(x) > \min_\alpha f - \epsilon/2$ , et  $x \in F$ . En particulier,  $f(x) + g(x) > \min_\alpha f + \sup_\alpha g - \epsilon$ , donc  $\sup_\alpha (f + g) = \sup_{x \in F} (f(x) + g(x)) \geq \min_\alpha f + \sup_\alpha g - \epsilon$ , et l'on conclut car  $\epsilon > 0$  est arbitraire. Ceci étant acquis,

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^\downarrow &\geq \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \min_\alpha f + \sup_\alpha g d\langle \nu \rangle \\
&= \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \min_\alpha f d\langle \nu \rangle + \int_{\alpha \in \mathcal{P}_\nu(X)} \sup_\alpha g d\langle \nu \rangle \\
&\quad \text{car } \langle \nu \rangle \text{ est une valuation} \\
&= \int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow + \int_{x \in X} g(x) d\nu^\downarrow
\end{aligned}$$

par la proposition 7.5.4 et la proposition 7.5.6.

Passons au cas général, où  $X$  n'est plus nécessairement stablement compact. Comme lors de la démonstration du lemme 6.2.12, considérons l'espace de Sierpiński  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$  muni, rappelons-le, de la topologie formée des ouverts  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ , et  $\mathbb{S}$ . La fonction  $\eta_{\mathbb{S}} : X \rightarrow \mathbb{S}^{\theta(X)}$  est continue et  $\mathbb{S}^{\theta(X)}$  est stablement compact. (Voir les propositions 3.9.5 et 3.9.6.)

Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut étendre  $f$  en une fonction  $\widehat{f}$  continue bornée de  $\mathbb{S}^{\theta(X)}$  vers  $\mathbb{R}$ , telle que  $\widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) = f(x)$  pour tout  $x \in X$ , par la proposition 3.9.8. On a maintenant :

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow + \int_{x \in X} g(x) d\nu^\downarrow &= \int_{x \in X} \widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) d\nu^\uparrow + \int_{x \in X} \widehat{g}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) d\nu^\downarrow \\
&= \int_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\theta(X)}} \widehat{f}(\vec{b}) d\eta_{\mathbb{S}}[\nu^\uparrow] + \int_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\theta(X)}} \widehat{g}(\vec{b}) d\eta_{\mathbb{S}}[\nu^\downarrow] \\
&\quad \text{par la proposition 4.2.11} \\
&= \int_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\theta(X)}} \widehat{f}(\vec{b}) d\eta_{\mathbb{S}}[\nu]^\uparrow + \int_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\theta(X)}} \widehat{g}(\vec{b}) d\eta_{\mathbb{S}}[\nu]^\downarrow \\
&\quad \text{par le lemme 7.5.8} \\
&\geq \int_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\theta(X)}} \widehat{f}(\vec{b}) + \widehat{g}(\vec{b}) d\eta_{\mathbb{S}}[\nu]^\uparrow
\end{aligned}$$

en utilisant la deuxième inégalité de la proposition, que nous pouvons appliquer car  $\mathbb{S}^{\theta(X)}$  est

stablement compact. Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow + \int_{x \in X} g(x) d\nu^\downarrow &= \int_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\circ(X)}} \widehat{f}(\vec{b}) + \widehat{g}(\vec{b}) d\eta_{\mathbb{S}}[\nu^\uparrow] \\
&= \int_0^{+\infty} \nu^\uparrow(\eta_{\mathbb{S}}^{-1}\{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\circ(X)} | \widehat{f}(\vec{b}) + \widehat{g}(\vec{b}) > t\}) dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} [\nu^\uparrow(\eta_{\mathbb{S}}^{-1}\{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\circ(X)} | \widehat{f}(\vec{b}) + \widehat{g}(\vec{b}) > t\}) - \nu^\uparrow(X)] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \nu^\uparrow\{x \in X | \widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) + \widehat{g}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) > t\} dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} [\nu^\uparrow\{x \in X | \widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) + \widehat{g}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) > t\} - \nu^\uparrow(X)] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \nu^\uparrow\{x \in X | f(x) + g(x) > t\} dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} [\nu^\uparrow\{x \in X | f(x) + g(x) > t\} - \nu^\uparrow(X)] dt \\
&= \int_{x \in X} f(x) + g(x) d\nu^\uparrow
\end{aligned}$$

On démontre de même la troisième inégalité.  $\square$

La proposition 7.5.9 généralise le lemme 7.5.2. On retrouve ce dernier en prenant  $f = \chi_U$  et  $g = \chi_V$ . La démonstration de la proposition 7.5.9 est cependant bien plus technique que celle du lemme 7.5.2. Nous conjecturons que la proposition 7.5.9 est strictement plus forte que le lemme 7.5.2, au sens où il existe des couples  $(\nu^-, \nu^+)$  formés d'une crédibilité continue  $\nu^-$  et d'une plausibilité continue  $\nu^+$  vérifiant :

$$\begin{aligned}
\nu^-(U \cup V) + \nu^-(U \cap V) &\leq \nu^-(U) + \nu^+(V) \\
&\leq \nu^+(U \cup V) + \nu^+(U \cap V)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

pour tous ouverts  $U, V$ , et  $\nu^-(X) = \nu^+(X)$ , mais pourtant les inégalités :

$$\begin{aligned}
\int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^- &\leq \int_{x \in X} f(x) d\nu^- + \int_{x \in X} g(x) d\nu^+ \\
&\leq \int_{x \in X} (f + g)(x) d\nu^+
\end{aligned} \tag{7.13}$$

ne sont pas vérifiées pour toutes les fonctions continues  $f, g$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ .

Les inégalités (7.13), de plus, ne sont pas suffisantes non plus pour garantir l'existence d'une estimation  $\nu$  telle que  $\nu^\uparrow = \nu^-$  et  $\nu^\downarrow = \nu^+$ .

**Lemme 7.5.10** *Il existe un espace  $X$ , une crédibilité continue  $\nu^-$  sur  $X$ , une plausibilité continue  $\nu^+$  sur  $X$ , telles que  $\nu^-(X) = \nu^+(X)$  et vérifiant les inégalités (7.13) pour toutes fonctions*

continues  $f, g$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , mais telles que pourtant il n'existe aucune estimation  $\nu$  telle que  $\nu^\uparrow = \nu^-$  et  $\nu^\downarrow = \nu^+$ .

On peut même demander que  $X$  soit fini, et que  $\nu^-$  et  $\nu^+$  soient des probabilités continues.

*Démonstration.* Notons que, si  $\nu^-$  et  $\nu^+$  sont deux probabilités telles que  $\nu^- \leq \nu^+$ , alors les inégalités (7.13) sont toujours vérifiées. C'est parce que l'intégrale de Choquet par rapport à une valuation est additive (elle est à la fois sur-additive par la proposition 4.3.1 et sous-additive par la proposition 4.3.2), et croissante en le jeu normalisé (proposition 4.2.4). Prenons donc par exemple  $X = \{\perp, \top\}$ , avec  $\perp \leq \top$ ,  $\nu^- = \delta_\perp$ , et  $\nu^+$  n'importe quelle autre probabilité, par exemple  $\delta_\top$ . Pour toute estimation  $\nu$  sur  $X$ ,  $\nu$  est nécessairement continue. Comme  $X$  est stablement compact,  $\langle \nu \rangle$  existe, et est nécessairement de la forme  $a_\perp \delta_{\langle \perp \rangle} + a_\top \delta_{\langle \top \rangle} + a_X \delta_X$ . Donc  $\nu = a_\perp \mathbf{e}_{\langle \perp \rangle} + a_\top \mathbf{e}_{\langle \top \rangle} + a_X \mathbf{e}_X$ . Si l'on avait  $\nu^\uparrow = \nu^-$  et  $\nu^\downarrow = \nu^+$ , on aurait  $\nu^- = \delta_\perp = a_\perp \mathbf{e}_{\langle \perp \rangle} + a_\top \mathbf{e}_X + a_X \mathbf{e}_X$  d'une part, et d'autre part  $\nu^+ = \delta_\top = a_\perp \mathbf{u}_X + a_\top \mathbf{u}_{\langle \top \rangle} + a_X \mathbf{u}_X$ . En appliquant ceci à l'ouvert  $\{\top\}$ , on obtient  $0 = a_\top + a_X$  d'une part,  $1 = a_\top$  d'autre part. Mais ceci implique  $a_X = -1$ , ce qui est impossible.  $\square$

De nouveau, l'exercice 7.3 montre que le fait que l'ordre choisi sur le contre-exemple  $X$  soit non trivial est essentiel.

## 7.6 L'intégrale mixte

Il semble donc qu'il y ait en général plus d'information dans la donnée d'une estimation continue  $\nu$  que dans la donnée de la crédibilité continue  $\nu^\uparrow$  et de la plausibilité continue  $\nu^\downarrow$ . La question se pose alors de savoir s'il existerait une notion d'intégration qui soit propre aux estimations, et qui se fonde notamment sur la partie de l'estimation qui n'est pas capturée par  $\nu^\uparrow$  ou  $\nu^\downarrow$ . Il y a plusieurs possibilités. La plus immédiate est la suivante. Nous nous limiterons, par souci de lisibilité, à n'intégrer que des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . On peut toujours étendre la notion aux fonctions continues bornées à valeurs dans  $\mathbb{R}$  en intégrant  $a + f$  par rapport à  $\nu$ , pour une constante  $a$  telle que  $a + f$  soit à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , puis en soustrayant de l'intégrale la valeur  $a\nu(X)$ .

**Définition 7.6.1 ( $\beta$ -Intégrale)** Soit  $X$  un espace topologique,  $\nu$  une estimation sur  $X$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , pour tout réel  $\beta \in ]0, 1[$ , on définit la  $\beta$ -intégrale :

$$\int_{x \in X}^\beta f(x) d\nu = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \left[ \nu^\uparrow \left( (f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[ \right) - \nu \left( (f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[ \right) \right] dt \right] ds$$

Vérifions que la  $\beta$ -intégrale est bien définie. Soit  $a$  un majorant de  $f(x)$ ,  $x \in X$ . Pour tout  $t \geq a^\beta$ ,  $f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[$  est vide, donc  $\nu^\uparrow(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[) = 0$ . L'intégrale interne, sur  $t$ , est donc une intégrale de 0 à  $a^\beta$ . La fonction qui à  $t$  associe la quantité  $\nu^\uparrow(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[)$  est de plus décroissante, donc l'intégrale interne est bien définie. Pour tout  $s \geq a^{1-\beta}$ ,  $\nu^\uparrow(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) = 0 =$

$\nu(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[)$ , donc l'intégrale externe, sur  $s$ , est en fait une intégrale de 0 à  $a^{1-\beta}$ . Il reste à vérifier que la fonction qui à  $s$  associe :

$$\int_0^{+\infty} \left[ \nu^\uparrow \left( f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[ \right) - \nu \left( f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[ \right) \right] dt$$

est décroissante, ce qui impliquera que l'intégrale externe est bien définie. Soit  $s \leq s'$ , de sorte que  $f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[\subseteq f^{-1}]s'^{1/(1-\beta)}, +\infty[$ , et utilisons l'inégalité (7.2) avec  $m = n = 1$ ,  $U = f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[$ ,  $U_1 = f^{-1}]s'^{1/(1-\beta)}, +\infty[$ ,  $V = \emptyset$ ,  $V_1 = f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[$ . On obtient  $\nu(U \setminus V) - \nu(U_1 \setminus V) - \nu(U \setminus V_1) + \nu(U_1 \setminus V_1) \geq 0$ , donc  $\nu(U_1) - \nu(U_1 \setminus V_1) \leq \nu(U) - \nu(U \setminus V_1)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \nu \left( f^{-1}]s'^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[ \right) - \nu \left( f^{-1}]s'^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[ \right) \\ & \leq \nu \left( f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[ \right) - \nu \left( f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[ \right) \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité désirée.

La définition 7.6.1, qui semble sortie d'un chapeau, est justifiée par les propositions suivantes.

**Proposition 7.6.2** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute estimation continue  $\nu$  sur  $X$ , pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ ,*

$$\begin{aligned} \iint_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \langle \nu \rangle \left( \square f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\cap \diamond f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[ \right) dt \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \langle \nu \rangle \{ \alpha \in \mathcal{P}_\nu(X) \mid \min_\alpha f > s^{\frac{1}{1-\beta}} \text{ et } \sup_\alpha f > t^{\frac{1}{\beta}} \} dt \right] ds \end{aligned}$$

*Démonstration.* Rappelons que  $\langle \nu \rangle$  est bien défini par le théorème 7.3.23. De plus,

$$\begin{aligned} \nu(f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[) &= \langle \nu \rangle^\% \left( \square \left( f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[ \right) \right) \\ &= \langle \nu \rangle \left( \square f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[ \right) \\ &\quad - \langle \nu \rangle \left( \square f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\cap \diamond f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[ \right) \\ \nu^\uparrow(f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[) &= \langle \nu \rangle \left( \square f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[ \right) \end{aligned}$$

Donc  $\nu^\uparrow(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[) = \langle \nu \rangle(\square f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[\cap \diamond f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[)$ , ce qui fournit la première égalité. Pour la seconde, on utilise le lemme 7.5.3 et le lemme 7.5.5.  $\square$

**Proposition 7.6.3** *Soit  $X$  un espace sobre, et  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{\alpha_i}$  une estimation simple sur  $X$ . Alors, pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$\iint_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^{\beta} f \quad (7.14)$$

*Démonstration.* Pour tout  $i$ ,  $\mathbf{u}_{\alpha_i}^\uparrow(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[)$  vaut 1 si  $\alpha_i(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) = 1$ , et 0 sinon. Or, par définition,  $\alpha_i(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) = 1$  si et seulement si  $\alpha_i \in \square f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[$ , si et seulement si  $\min_{\alpha_i} f > s^{1/(1-\beta)}$ , par le lemme 7.5.3. Ceci est équivalent à  $s < \min_{\alpha_i}^{1-\beta} f$ .

Ensuite,  $\mathbf{u}_{\alpha_i}(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[-f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[)$  vaut 1 si et seulement si  $\alpha_i(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) = 1$  et  $\alpha_i(f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[) = 0$ , si et seulement si  $\alpha_i$  appartient à  $\square f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[$  mais pas à  $\diamond f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[$ , si et seulement si  $\min_{\alpha_i} f > s^{1/(1-\beta)}$  et  $\sup_{\alpha_i} f$  n'est pas strictement supérieur à  $t^{1/\beta}$ , par le lemme 7.5.5. Donc  $\mathbf{u}_{\alpha_i}^\uparrow(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[) - \mathbf{u}_{\alpha_i}(f^{-1}]s^{1/(1-\beta)}, +\infty[\setminus f^{-1}]t^{1/\beta}, +\infty[)$  vaut 1 si  $\min_{\alpha_i}^{1-\beta} f > s$  et  $\sup_{\alpha_i}^\beta f > t$ , 0 sinon. On en déduit :

$$\oint_{x \in X}^\beta f(x) d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int_0^{\min_{\alpha_i}^{1-\beta} f} \int_0^{\sup_{\alpha_i}^\beta f} 1 dt ds = \sum_{i=1}^n a_i \min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^\beta f$$

□

Une façon d'interpréter cette formule est de réaliser que  $\min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^\beta f$  est une forme de moyenne géométrique de  $\min_{\alpha_i} f$  et de  $\sup_{\alpha_i} f$ . En particulier, lorsque  $\beta = 1/2$ , c'est la moyenne géométrique de  $\min_{\alpha_i} f$  et de  $\sup_{\alpha_i} f$ . En assimilant  $\alpha_i$  à une lentille  $L_i$ , et en supposant pour les besoins de l'illustration que  $\min_{\alpha_i} f = f(x_i)$  et que la borne supérieure  $\sup_{\alpha_i} f$  est atteinte en  $y_i$ , le joueur probabiliste P tire au hasard  $L_i$  avec probabilité  $a_i$ , puis C joue en parallèle le coup le pire  $x_i \in L_i$  et le coup le meilleur  $y_i \in L_i$ . Le gain obtenu après ces deux coups est la moyenne (ordinaire, arithmétique, pondérée par les coefficients  $a_i$ ) des moyennes géométriques  $\sqrt{f(x_i)f(y_i)}$  des gains dans les pires et les meilleurs cas.

Lorsque  $\beta \neq 1/2$ , le coefficient  $\beta$  représente un biais. Nous appellerons  $\beta$  la *bonté* de C. Lorsque  $\beta$  tend vers 1,  $\min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^\beta f$  tend vers  $\sup_{\alpha_i} f$  (à condition que  $\min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \neq 0$ ), et l'intégrale (7.14) tend vers

$$\sum_{i=1}^n a_i \sup_{\alpha_i} f = \oint_{x \in X} f(x) d\nu^\downarrow$$

ce qui représente un comportement angélique, tendant à maximiser le gain moyen. A l'opposé, lorsque  $\beta$  tend vers 0,  $\min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^\beta f$  tend vers  $\min_{\alpha_i} f$ , et l'intégrale (7.14) tend vers

$$\sum_{i=1}^n a_i \min_{\alpha_i} f = \oint_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow$$

ce qui représente un comportement démoniaque, tendant à minimiser le gain moyen.

La définition de la  $\beta$ -intégrale est en fait maladroite, et les exercices qui suivent le démontrent certainement d'une certaine façon : les résoudre demande une certaine ingéniosité. De plus, l'interprétation intuitive de la moyenne géométrique opérée par C entre un comportement démoniaque  $\min_{\alpha_i} f$  et un comportement angélique  $\sup_{\alpha_i} f$  est relativement peu claire.

### ▷ Exercice 7.5

Montrer que plus C est bon, plus le gain de P est grand en moyenne. Autrement dit, montrer que la  $\beta$ -intégrale est croissante en la bonté  $\beta$  : si  $\beta \leq \beta'$ , alors pour toute estimation continue  $\nu$  sur

$X$ ,

$$\int\!\!\int_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu \leq \int\!\!\int_{x \in X}^{\beta'} f(x) d\nu$$

À titre d'indication, on pourra le montrer d'abord lorsque  $\nu$  est une estimation simple, puis le démontrer pour toute estimation continue lorsque  $X$  est un cpo continu, cohérent et compact, et enfin passer au cas général grâce à un plongement adéquat de  $X$  dans  $\mathbb{S}^{0(X)}$ .

▷ **Exercice 7.6**

Montrer que la  $\beta$ -intégrale est patch-continue en la bonté  $\beta$  : pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , pour toute estimation continue  $\nu$  sur  $X$ , pour tout philtre  $(\beta_i)_{i \in I}$  de réels dans  $]0, 1[$  convergeant vers  $\beta \in ]0, 1[$ ,

$$\int\!\!\int_{x \in X}^{\beta_i} f(x) d\nu \text{ converge vers } \int\!\!\int_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu$$

En particulier, la  $\beta$ -intégrale est à la fois Scott-continue et Scott-cocontinue en la bonté  $\beta$ . On pourra de nouveau commencer par le montrer lorsque  $\nu$  est une estimation simple.

▷ **Exercice 7.7**

Soit  $\nu$  une estimation simple sur  $X$ . Montrer que lorsque la bonté  $\beta$  tend vers 0, la  $\beta$ -intégrale de  $f$  par rapport à  $\nu$  tend vers l'intégrale de  $f$  par rapport à la crédibilité  $\nu^\uparrow$ , et elle tend vers celle de  $f$  par rapport à la plausibilité  $\nu^\downarrow$  lorsque  $\beta$  tend vers 1. Plus précisément, si  $f$  est continue et bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , alors :

$$\inf_{\beta \in ]0, 1[} \int\!\!\int_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu = \int\!\!\int_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow$$

Si de plus  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in X$ , alors :

$$\sup_{\beta \in ]0, 1[} \int\!\!\int_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu = \int\!\!\int_{x \in X} f(x) d\nu^\downarrow$$

Montrer que, dans ce dernier cas, l'hypothèse que  $f$  ne s'annule pas sur  $X$  est nécessaire, en exhibant un contre-exemple.

Les exercices ci-dessus sont compliqués à démontrer, et à vrai dire, leurs démonstrations cachent le véritable objet mathématique dont il est question : une intégrale double de Riemann-Stieltjes. Faisons donc un long détour pour définir cette construction, et en établir les principales propriétés.

**Définition 7.6.4 (Intégrale double de Riemann-Stieltjes)** Soient  $f$  et  $G$  deux fonctions de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ . La somme double de Darboux-Stieltjes indexée par deux subdivisions pointées,

$D_1 = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m$  de  $[a, a']$  et  $D_2 = b_0, t_1, b_1, \dots, b_{n-1}, t_n, b_n$  de  $[b, b']$ , est la somme :

$$\iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} f(s_i, t_j) (G(a_i, b_j) - G(a_{i-1}, b_j) - G(a_i, b_{j-1}) + G(a_{i-1}, b_{j-1}))$$

On dit que  $f$  est  $G$ -intégrable sur  $[a, a'] \times [b, b']$  si et seulement si le philtre des sommes doubles de Darboux-Stieltjes, où les couples  $(D_1, D_2)$  de subdivisions pointées sont ordonnées par  $\triangleleft \times \triangleleft$ , converge vers une limite dans  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie métrique usuelle. Cette limite est la  $G$ -intégrale de  $f$ , et est notée

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t)$$

Pour retrouver une somme double de Darboux (sans Stieltjes), prendre  $G(s, t) = st$ . La quantité mystérieuse  $G(a_i, b_j) - G(a_{i-1}, b_j) - G(a_i, b_{j-1}) + G(a_{i-1}, b_{j-1})$  vaut alors l'aire  $(a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1})$  du rectangle  $[a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$ . Dans le cas général,  $G(s, t)$  représentera la mesure par la distribution  $G$  du rectangle  $[a, s] \times [b, t]$ . La quantité  $G(a_i, b_j) - G(a_{i-1}, b_j)$  est alors intuitivement la mesure du rectangle  $[a_{i-1}, a_i] \times [b, b_j]$ , et la quantité  $G(a_i, b_{j-1}) - G(a_{i-1}, b_{j-1})$  est celle du rectangle  $[a_{i-1}, a_i] \times [b, b_{j-1}]$ . Leur différence  $G(a_i, b_j) - G(a_{i-1}, b_j) - G(a_i, b_{j-1}) + G(a_{i-1}, b_{j-1})$  est alors la mesure du rectangle  $[a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$ . D'ailleurs :

**Lemme 7.6.5** Soit  $G$  une fonction quelconque de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ . Notons  $[G(s, t)]_{s=s'}^{s''} \big|_{t=t'}$  la quantité  $G(s'', t'') - G(s', t'') - G(s'', t') + G(s', t')$ .

Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  est  $G$ -intégrable ; pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} c d^2 G(s, t) = c [G(s, t)]_{s=a}^{a'} \big|_{t=b}^{b'}$$

*Démonstration.* Notons que, si  $D_1 = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m$  et  $D_2 = b_0, t_1, b_1, \dots, b_{n-1}, t_n, b_n$  sont deux subdivisions pointées de  $[a, a']$  et de  $[b, b']$  respectivement,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} [G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} \big|_{t=b_{j-1}}^{b_j} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} G(a_i, b_j) - G(a_{i-1}, b_j) - G(a_i, b_{j-1}) + G(a_{i-1}, b_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n G(a', b_j) - G(a, b_j) - G(a', b_{j-1}) + G(a', b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n G(a', b_j) - G(a', b_{j-1}) - G(a, b_j) + G(a', b_j) \\ &= G(a', b') - G(a', b) - G(a, b') + G(a, b) \\ &= [G(s, t)]_{s=a}^{a'} \big|_{t=b}^{b'} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Les sommes de Darboux-Stieltjes de  $c d^2 G(s, t)$  sont donc constantes et égales au résultat annoncé dans le lemme.  $\square$

**Proposition 7.6.6** Soient  $a < a'$ ,  $b < b'$ . Soit  $G$  une fonction de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ . On dit que  $G$  est de densité positive si et seulement si, pour tous  $s', t', s'', t''$  tels que  $a \leq s' \leq s'' \leq a'$ ,  $b \leq t' \leq t'' \leq b'$ , on a  $[G(s, t)]_{s=s'}^{s''}{}_{t=t'}^{t''} \geq 0$ .

Si  $f$  est patch-continue de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ , et  $G$  est de densité positive, alors  $f$  est  $G$ -intégrable. De plus,

$$\begin{aligned} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) &= \sup_{D_1, D_2} \iint_{D_1^- [f], D_2^- [f]} f(s, t) d^2 G(s, t) \\ &= \inf_{D_1, D_2} \iint_{D_1^+ [f], D_2^+ [f]} f(s, t) d^2 G(s, t) \end{aligned}$$

où  $D_1, D_2$  parcourent respectivement les subdivisions pointées de  $[a, a']$  et de  $[b, b']$ , et  $D_1^- [f], D_2^- [f], D_1^+ [f],$  et  $D_2^+ [f]$  sont des subdivisions pointées ne dépendant que de  $D_1, D_2,$  et  $f$ .

*Démonstration.* D'abord, on observe que  $f$  est uniformément continue, c'est-à-dire que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tous  $(s, t), (s', t') \in [a, a'] \times [b, b']$  tels que  $|s' - s| \leq \delta$  et  $|t' - t| \leq \delta$ , alors  $|f(s', t') - f(s, t)| < \epsilon$ . Supposons, par l'absurde, qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $(s, t), (s', t') \in [a, a'] \times [b, b']$  tels que  $|s' - s| \leq \delta$  et  $|t' - t| \leq \delta$ , mais  $|f(s', t') - f(s, t)| \geq \epsilon$ . L'ensemble  $F_\delta$  des quadruplets  $(s, t, s', t')$  de  $[a, a'] \times [b, b'] \times [a, a'] \times [b, b']$  tels que  $|s' - s| \leq \delta, |t' - t| \leq \delta,$  et  $|f(s', t') - f(s, t)| \geq \epsilon,$  est patch-fermé, parce que  $f$  est patch-continue. De plus, la famille  $F_{1/n}$  décroît dans l'ordre d'inclusion lorsque  $n$  croît dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Si l'intersection des  $F_{1/n}$  était vide, c'est que l'un des  $F_{1/n}$  serait vide, par compacité de  $[a, a'] \times [b, b'] \times [a, a'] \times [b, b']$  dans sa topologie patch : contradiction. Donc il existe un quadruplet  $(s, t, s', t')$  dans  $\bigcap_{n>0} F_{1/n}$ . Autrement dit, pour tout  $n > 0,$   $|s' - s| \leq 1/n, |t' - t| \leq 1/n,$  et  $|f(s', t') - f(s, t)| \geq \epsilon.$  Les deux premières conditions entraînent  $s = s', t = t',$  ce qui contredit la troisième.

Rappelons la sommation (7.15). Si  $[G(s, t)]_{s=a}^{a'}{}_{t=b}^{b'} = 0,$  puisque  $G$  est de densité positive, toutes les quantités  $[G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i}{}_{t=b_{j-1}}^{b_j}$  sont nulles aussi, toutes les sommes doubles de Darboux-Stieltjes sont nulles, et convergent donc vers 0. Supposons donc  $[G(s, t)]_{s=a}^{a'}{}_{t=b}^{b'} > 0.$

Fixons  $\epsilon > 0.$  Puisque  $f$  est uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que pour tous  $(s, t), (s', t') \in [a, a'] \times [b, b']$  tels que  $|s' - s| \leq \delta$  et  $|t' - t| \leq \delta,$  alors  $|f(s', t') - f(s, t)| < \epsilon/[G(s, t)]_{s=a}^{a'}{}_{t=b}^{b'}$ . Fixons deux subdivisions pointées,  $D_1^0$  de  $[a, a']$  et  $D_2^0$  de  $[b, b']$  de diamètres au plus  $\delta.$  Pour toutes subdivisions pointées  $D_1$  et  $D_2$  telles que  $D_1^0 \trianglelefteq D_1$  et  $D_2^0 \trianglelefteq D_2,$   $D_1$  et  $D_2$  sont aussi de diamètres au plus  $\delta.$  Notons  $D_1 = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m$  et  $D_2 = b_0, t_1, b_1, \dots, b_{n-1}, t_n, b_n.$  Alors, puisque  $G$  est de densité positive :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \min_{\substack{s \in [a_{i-1}, a_i] \\ t \in [b_{j-1}, b_j]}} f(s, t) [G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i}{}_{t=b_{j-1}}^{b_j} &\leq \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \max_{\substack{s \in [a_{i-1}, a_i] \\ t \in [b_{j-1}, b_j]}} f(s, t) [G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i}{}_{t=b_{j-1}}^{b_j} \end{aligned}$$

De plus,  $f$  étant continue sur les (patch-)compacts  $[a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$ , les minima et maxima impliqués dans les sommes ci-dessus sont atteints. La somme de gauche est donc une somme double de Darboux-Stieltjes sur un couple de subdivisions pointées  $D_1^-[f], D_2^-[f]$ , et de même la somme de droite est une somme double de Darboux-Stieltjes sur un couple de subdivisions pointées  $D_1^+[f], D_2^+[f]$ . Toutes ces subdivisions pointées sont, de plus, de diamètre au plus  $\delta$ . Donc  $\max_{\substack{s \in [a_{i-1}, a_i] \\ t \in [b_{j-1}, b_j]}} f(s, t) - \min_{\substack{s \in [a_{i-1}, a_i] \\ t \in [b_{j-1}, b_j]}} f(s, t) < \epsilon / [G(s, t)]_{s=a}^{a'} \big|_{t=b}^{b'}$ . En sommant, et en utilisant l'égalité (7.15), on obtient :

$$\iint_{D_1^+[f], D_2^+[f]} f(s, t) d^2 G(s, t) - \iint_{D_1^-[f], D_2^-[f]} f(s, t) d^2 G(s, t) < \epsilon$$

Comme  $\epsilon$  est arbitraire,

$$\sup_{D_1, D_2} \iint_{D_1^-[f], D_2^-[f]} f(s, t) d^2 G(s, t) = \inf_{D_1, D_2} \iint_{D_1^+[f], D_2^+[f]} f(s, t) d^2 G(s, t)$$

et la valeur commune est donc la  $G$ -intégrale de  $f$ .  $\square$

**Lemme 7.6.7** *L'intégrale double de Riemann-Stieltjes est linéaire en la fonction intégrée : si  $f$  et  $g$  sont  $G$ -intégrables, alors  $\lambda f(s, t) + \mu g(s, t)$  aussi, et*

$$\begin{aligned} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} (\lambda f(s, t) + \mu g(s, t)) d^2 G(s, t) &= \lambda \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) \\ &\quad + \mu \iint_{[a, a'] \times [b, b']} g(s, t) d^2 G(s, t) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Car le philtre des sommes doubles de Darboux-Stieltjes

$$\iint_{D_1, D_2} (\lambda f(s, t) + \mu g(s, t)) d^2 G(s, t) = \lambda \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) + \mu \iint_{D_1, D_2} g(s, t) d^2 G(s, t)$$

converge vers la combinaison linéaire indiquée, l'addition et le produit par un scalaire étant patch-continues.  $\square$

**Lemme 7.6.8** *L'intégrale double de Riemann-Stieltjes est linéaire en la distribution : si  $f$  est  $G$ -intégrable et  $G'$ -intégrable, alors  $f$  est aussi  $(\lambda G + \mu G')$ -intégrable, et*

$$\begin{aligned} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 (\lambda G(s, t) + \mu G'(s, t)) &= \lambda \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) \\ &\quad + \mu \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G'(s, t) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Car le philtre des sommes doubles de Darboux-Stieltjes

$$\iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 (\lambda G(s, t) + \mu G'(s, t)) = \lambda \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) + \mu \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G'(s, t)$$

converge vers la combinaison linéaire indiquée, l'addition et le produit par un scalaire étant patch-continues.  $\square$

**Lemme 7.6.9** Si  $G$  est de densité positive sur  $[a, a'] \times [b, b']$ , alors la  $G$ -intégrale double est croissante en la fonction intégrée : si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $G$ -intégrables telles que  $f \leq g$ , alors :

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) \leq \iint_{[a, a'] \times [b, b']} g(s, t) d^2 G(s, t)$$

*Démonstration.* Car les sommes doubles de Darboux-Stieltjes sont des combinaisons linéaires à coefficients positifs ou nuls (de la forme  $[G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} [G(t, t)]_{t=b_{j-1}}^{b_j}$ ) de valeurs de  $f$ , resp.  $g$  à certains points  $(s_i, t_i)$ .  $\square$

**Lemme 7.6.10** Soit  $f$  une fonction patch-continue de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ . L'intégrale double de Riemann-Stieltjes de  $f$  par rapport à  $G$  est Scott-continue en la fonction de densité positive  $G$  : pour toute famille dirigée  $(G_i)_{i \in I}$  de fonctions de densité positive de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ , de borne supérieure  $G$ , alors  $G$  est de densité positive, et :

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) = \sup_{i \in I} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G_i(s, t)$$

Elle est aussi Scott-cocontinue en la fonction de densité positive  $G$  : pour toute famille filtrante  $(G_i)_{i \in I}$  de fonctions de densité positive de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ , de borne inférieure  $G$ , alors  $G$  est de densité positive, et :

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) = \inf_{i \in I} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G_i(s, t)$$

*Démonstration.* Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de fonctions de densité positive de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ , de borne supérieure  $G$ . Pour tous  $s \leq s', t \leq t'$ , on a :

$$\begin{aligned} G(s', t') + G(s, t) &= \sup_{i \in I} G_i(s', t') + \sup_{i \in I} G_i(s, t) \\ &= \sup_{i \in I} (G_i(s', t') + G_i(s, t)) \quad \text{car l'addition est Scott-continue} \\ &\geq \sup_{i \in I} (G_i(s, t') + G_i(s', t)) \quad \text{car } G_i \text{ est de densité positive} \\ &= \sup_{i \in I} G_i(s, t') + \sup_{i \in I} G_i(s', t) = G(s, t') + G(s', t) \end{aligned}$$

Donc  $G$  est de densité positive.

Par la proposition 7.6.6,  $f$  est  $G$ -intégrable et  $G_i$ -intégrable pour tout  $i \in I$ , et :

$$\begin{aligned} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 \sup_{i \in I} G_i(s, t) &= \sup_{D_1, D_2} \iint_{D_1^- [f], D_2^- [f]} f(s, t) d^2 \sup_{i \in I} G_i(s, t) \\ &= \sup_{D_1, D_2} \sup_{i \in I} \iint_{D_1^- [f], D_2^- [f]} f(s, t) d^2 G_i(s, t) \end{aligned}$$

En effet, la somme double de Darboux-Stieltjes  $\iint_{D_1^-, D_2^-} f(s, t) d^2 G_i(s, t)$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de valeurs de  $f$ , puisque  $G_i$  est de densité positive. L'addition et la multiplication par un réel positif étant Scott-continues,  $\sup_{i \in I} \iint_{D_1^-, D_2^-} f(s, t) d^2 G_i(s, t) = \iint_{D_1^-, D_2^-} f(s, t) d^2 \sup_{i \in I} G_i(s, t)$ . Par permutation des bornes supérieures,

$$\begin{aligned} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 \sup_{i \in I} G_i(s, t) &= \sup_{i \in I} \sup_{D_1, D_2} \iint_{D_1^-, D_2^-} f(s, t) d^2 G_i(s, t) \\ &= \sup_{i \in I} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 \sup_{i \in I} G_i(s, t) \end{aligned}$$

La deuxième partie du lemme se démontre en utilisant le fait que :

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 \sup_{i \in I} G_i(s, t) = \inf_{D_1, D_2} \iint_{D_1^+, D_2^+} f(s, t) d^2 \sup_{i \in I} G_i(s, t)$$

et l'argument est analogue.  $\square$

**Lemme 7.6.11 (Relation de Chasles)** *Si  $f$  est  $G$ -intégrable sur  $[a, a'] \times [b, b']$  et sur  $[a', a''] \times [b, b']$ , alors  $f$  est  $G$ -intégrable sur  $[a, a''] \times [b, b']$ , et :*

$$\iint_{[a, a''] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) = \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) + \iint_{[a', a''] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t)$$

*Si  $f$  est  $G$ -intégrable sur  $[a, a'] \times [b, b']$  et sur  $[a, a'] \times [b', b'']$ , alors  $f$  est  $G$ -intégrable sur  $[a, a'] \times [b, b'']$ , et :*

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b'']} f(s, t) d^2 G(s, t) = \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) + \iint_{[a, a'] \times [b', b'']} f(s, t) d^2 G(s, t)$$

*Démonstration.* Démontrons la première partie du lemme, la seconde étant analogue. Notons  $I$  la  $G$ -intégrale de  $f$  sur  $[a, a'] \times [b, b']$ ,  $I'$  la  $G$ -intégrale de  $f$  sur  $[a', a''] \times [b, b']$ . Fixons  $\epsilon > 0$ . Il existe un couple de subdivisions pointées  $D_{11}, D_{21}$  de  $[a, a']$  et de  $[b, b']$  respectivement, telles que  $\left| \iint_{D_{11}, D_{21}} f(s, t) d^2 G(s, t) - I \right| < \epsilon/2$  dès que  $D_{11} \trianglelefteq D_1$  et  $D_{21} \trianglelefteq D_2$ . De même, il existe un couple de subdivisions pointées  $D_{12}, D_{22}$  de  $[a', a'']$  et de  $[b, b']$  respectivement, telles que  $\left| \iint_{D_{12}, D_{22}} f(s, t) d^2 G(s, t) - I' \right| < \epsilon/2$  dès que  $D_{12} \trianglelefteq D'_1$  et  $D_{22} \trianglelefteq D'_2$ . Soit  $D_{10}$  la subdivision pointée de  $[a, a'']$  obtenue en collant bout à bout la subdivision pointée  $D_{11}$  de  $[a, a']$  avec celle,  $D_{12}$  de  $[a', a'']$ . Autrement dit, si l'on écrit  $D_{11} = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m$  avec  $a_0 = a$ ,  $a_m = a'$ , et si l'on écrit  $D_{12} = a_m, s_{m+1}, a_{m+1}, \dots, a_{m+n-1}, s_{m+n}, a_{m+n}$  avec  $a_{m+n} = a''$ , on pose  $D_{10} = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m, s_{m+1}, a_{m+1}, \dots, a_{m+n-1}, s_{m+n}, a_{m+n}$ . Soit  $D_{20}$  une subdivision pointée quelconque de  $[b, b']$  telle que  $D_{21} \trianglelefteq D_{20}$ ,  $D_{22} \trianglelefteq D_{20}$ . Il est alors clair que si  $D_{10} \trianglelefteq D_1$  et  $D_{20} \trianglelefteq D_2$ , alors  $D_1$  s'écrit comme la mise bout à bout d'une subdivision pointée  $D'_1$  de  $[a, a']$  avec  $D_{11} \trianglelefteq D'_1$  et d'une subdivision pointée  $D''_1$  de  $[a', a'']$  avec  $D_{12} \trianglelefteq D''_1$ , et :

$$\iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) = \iint_{D'_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) + \iint_{D''_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t)$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) - (I + I') \right| &\leq \left| \iint_{D'_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) - I \right| \\ &+ \left| \iint_{D''_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) - I' \right| < \epsilon \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure.  $\square$

Nous allons ensuite démontrer que, intuitivement, si  $fd^2G = 0$ , alors l'intégrale de  $fd^2G$  est nulle, sous quelques conditions. Que  $fd^2G$  soit nulle signifie qu'en tout point  $(s, t)$ , soit  $f(s, t) = 0$ , soit  $(s, t)$  est sur le plateau de  $G$ , que nous définissons comme suit.

**Définition 7.6.12 (Plateau)** Soit  $G$  une fonction de densité positive de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ . Le plateau de  $G$  est l'union des patch-intérieurs des rectangles  $[s', s''] \times [t', t'']$  dans  $[a, a'] \times [b, b']$  tels que  $a \leq s' < s'' \leq a'$ ,  $b \leq t' < t'' \leq b'$ , et  $[G(s, t)]_{s=s'}^{s''}{}_{t=t'}^{t''} = 0$ .

Un point subtil dans cette définition suivante est la notion de patch-intérieur d'un rectangle  $[s', s''] \times [t', t'']$  dans  $[a, a'] \times [b, b']$ . Les patch-ouverts de  $[a, a'] \times [b, b']$ , c'est-à-dire les ouverts de la topologie induite par la topologie patch de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sur  $[a, a'] \times [b, b']$ , sont par définition les intersections de patch-ouverts de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avec  $[a, a'] \times [b, b']$ . Si  $a < s'$ ,  $s'' < a'$ ,  $b < t'$  et  $t'' < b'$ , alors le patch-intérieur de  $[s', s''] \times [t', t'']$  est  $]s', s''[ \times ]t', t''[$ . Mais si par exemple  $s' = a$ ,  $s'' < a'$ ,  $b < t'$  et  $t'' < b'$ , alors c'est  $[a, s''[ \times ]t', t''[$ . Si  $s' = a$ ,  $s'' = a'$ ,  $b < t'$  et  $t'' < b'$ , c'est  $[a, a'] \times ]t', t''[$ . Si  $s' = a$ ,  $s'' = a'$ ,  $t' = b$ , et  $t'' < b'$ , c'est  $[a, a'] \times [b, t''[$ . Et si  $s' = a$ ,  $s'' = a'$ ,  $t' = b$ , et  $t'' = b'$ , c'est  $[a, a'] \times [b, b']$  tout entier.

**Lemme 7.6.13** Soit  $G$  une fonction de densité positive de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ , et  $[a^-, a^+] \times [b^-, b^+]$  un rectangle inclus dans  $[a, a'] \times [b, b']$ . Si  $[a^-, a^+] \times [b^-, b^+]$  est inclus dans le plateau de  $G$ , alors  $[G(s, t)]_{s=a^-}^{a^+}{}_{t=b^-}^{b^+} = 0$ .

*Démonstration.* Le plateau de  $G$  est par définition une union de patch-ouverts, à savoir les patch-intérieurs de rectangles décrits à la définition 7.6.12. S'il contient le patch-compact  $[a^-, a^+] \times [b^-, b^+]$ , ce dernier est inclus dans une union finie de tels rectangles. De façon précise, il existe une famille finie de rectangles  $[a_i^-, a_i^+] \times [b_i^-, b_i^+]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , inclus dans  $[a, a'] \times [b, b']$ , tels que  $[G(s, t)]_{s=a_i^-}^{a_i^+}{}_{t=b_i^-}^{b_i^+} = 0$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et dont l'union contient  $[a^-, a^+] \times [b^-, b^+]$ .

On peut supposer que tous ces rectangles sont non vides sans perdre en généralité. Collectons tous les  $a_i^-$  et tous les  $a_i^+$ , ainsi que  $a$  et  $a'$ , et trions-les en une suite croissante  $a_0 < a_1 < \dots < a_m$ . Faisons de même avec les  $b_i^-$ , les  $b_i^+$ ,  $b$  et  $b'$ , obtenant ainsi une suite croissante  $b_0 < b_1 < \dots < b_n$ . On peut alors écrire, pour tout  $i$ , le rectangle (non vide)  $[a_i^-, a_i^+] \times [b_i^-, b_i^+]$  comme une union  $\bigcup_{\substack{m_i^- \leq j < m_i^+ \\ n_i^- \leq k < n_i^+}} [a_j, a_{j+1}] \times [b_k, b_{k+1}]$ , où  $m_i^-, m_i^+, n_i^-, n_i^+$  sont tels que

$$a_i^- = a_{m_i^-}, a_i^+ = a_{m_i^+}, b_i^- = b_{n_i^-}, b_i^+ = b_{n_i^+}. \text{ Par la sommation (7.15), } [G(s, t)]_{s=a_i^-}^{a_i^+}{}_{t=b_i^-}^{b_i^+} =$$

$\sum_{\substack{m_i^- \leq j < m_i^+ \\ n_i^- \leq k < n_i^+}} [G(s, t)]_{s=a_j}^{a_{j+1}} \bigg|_{t=b_k}^{b_{k+1}}$ . Comme  $[G(s, t)]_{s=a_i^-}^{a_i^+} \bigg|_{t=b_i^-}^{b_i^+} = 0$ , et  $G$  est de densité positive,  $[G(s, t)]_{s=a_j}^{a_{j+1}} \bigg|_{t=b_k}^{b_{k+1}} = 0$  pour tous  $j, k$  tels que  $m_i^- \leq j < m_i^+, n_i^- \leq k < n_i^+$ .

Puisque les rectangles  $[a_i^-, a_i^+] \times [b_i^-, b_i^+]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , recouvrent  $[a^-, a^+] \times [b^-, b^+]$ , il en est de même des rectangles  $[a_j, a_{j+1}] \times [b_k, b_{k+1}]$  tels qu'il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , avec  $m_i^- \leq j < m_i^+, n_i^- \leq k < n_i^+$ . Or, par construction,  $a^-$  s'écrit  $a_{m_0^-}$  pour un certain indice  $m_0^-$ ,  $a^+$  s'écrit  $a_{m_0^+}$  pour un certain indice  $m_0^+ \geq m_0^-$ , et de même  $b^- = b_{n_0^-}$ ,  $b^+ = b_{n_0^+}$ . Donc, pour tous  $j, k$  tels que  $m_0^- \leq j < m_0^+$  et  $n_0^- \leq k < n_0^+$ ,  $[a_j, a_{j+1}] \times [b_k, b_{k+1}]$  est tel qu'il existe un  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , avec  $m_i^- \leq j < m_i^+, n_i^- \leq k < n_i^+$ , donc  $[G(s, t)]_{s=a_j}^{a_{j+1}} \bigg|_{t=b_k}^{b_{k+1}} = 0$ . Comme  $[a^-, a^+] \times [b^-, b^+] = \bigcup_{\substack{m_0^- \leq j < m_0^+ \\ n_0^- \leq k < n_0^+}} [a_j, a_{j+1}] \times [b_k, b_{k+1}]$ , par la sommation (7.15) on

déduit  $[G(s, t)]_{s=a^-}^{a^+} \bigg|_{t=b^-}^{b^+} = \sum_{\substack{m_0^- \leq j < m_0^+ \\ n_0^- \leq k < n_0^+}} [G(s, t)]_{s=a_j}^{a_{j+1}} \bigg|_{t=b_k}^{b_{k+1}} = 0$ . □

**Lemme 7.6.14** *Pour toute fonction patch-continue  $f$  de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$  qui s'annule hors du plateau de  $G$ ,*

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) = 0$$

*Démonstration.* Si  $[G(s, t)]_{s=a}^{a'} \bigg|_{t=b}^{b'} = 0$ , alors toute somme double de Darboux-Stieltjes est nulle, d'où le résultat. Sinon, comme au début de la démonstration de la proposition 7.6.6, on commence par observer que  $f$  est uniformément continue sur  $[a, a'] \times [b, b']$ . Fixons  $\epsilon > 0$ . Il existe donc  $\delta > 0$  tel que pour tous  $(s, t), (s', t') \in [a, a'] \times [b, b']$  tels que  $|s' - s| \leq \delta$  et  $|t' - t| \leq \delta$ , alors  $|f(s', t') - f(s, t)| < \epsilon / [G(s, t)]_{s=a}^{a'} \bigg|_{t=b}^{b'}$ . Considérons un couple quelconque de subdivisions pointées  $D_1 = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m$  de  $[a, a']$  et  $D_2 = b_0, t_1, b_1, \dots, b_{n-1}, t_n, b_n$  de  $[b, b']$  de diamètres au plus  $\delta$ .

Pour tous  $i, j$ , on considère deux cas, selon que  $[a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$  est inclus dans le plateau de  $G$  ou non. S'il est inclus dans le plateau de  $G$ , alors  $[G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} \bigg|_{t=b_{j-1}}^{b_j} = 0$  par le lemme 7.6.13. Sinon, il existe un point  $(s', t')$  dans  $[a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$  hors du plateau de  $G$ , donc tel que  $f(s', t') = 0$ ; mais alors  $|f(s_i, t_j)| < \epsilon / [G(s, t)]_{s=a}^{a'} \bigg|_{t=b}^{b'}$ , puisque  $(s_i, t_j)$  et  $(s', t')$  sont tous les deux dans  $[a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$ , et sont donc tels que  $|s' - s_i| \leq \delta$  et  $|t' - t_j| \leq \delta$ . Dans

tous les cas,  $\left| f(s_i, t_j)[G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} \bigg|_{t=b_{j-1}}^{b_j} \right| \leq \epsilon [G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} \bigg|_{t=b_{j-1}}^{b_j} / [G(s, t)]_{s=a}^{a'} \bigg|_{t=b}^{b'}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \left| \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) \right| &= \left| \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} f(s_i, t_j) [G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} \bigg|_{t=b_{j-1}}^{b_j} \right| \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \left| f(s_i, t_j) [G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} \bigg|_{t=b_{j-1}}^{b_j} \right| \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \epsilon \frac{[G(s, t)]_{s=a_{i-1}}^{a_i} \bigg|_{t=b_{j-1}}^{b_j}}{[G(s, t)]_{s=a}^{a'} \bigg|_{t=b}^{b'}} = \epsilon \end{aligned}$$

en utilisant la sommation (7.15). □

On en déduit :

**Proposition 7.6.15** *Soit  $G$  une fonction de densité positive de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction  $G$ -intégrable de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ , et  $f'$  une fonction de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$  qui coïncide avec  $f$  sauf éventuellement sur le plateau de  $G$ , et telle que  $f - f'$  est patch-continue.*

*Alors  $f'$  est  $G$ -intégrable, et :*

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) = \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f'(s, t) d^2 G(s, t)$$

*Démonstration.* Par le lemme 7.6.14, la  $G$ -intégrale de  $f - f'$  est nulle. On conclut par linéarité de l'intégrale double de Riemann-Stieltjes (lemme 7.6.7). □

À l'aide de ce résultat, on peut raffiner le lemme 7.6.9 :

**Proposition 7.6.16** *Soit  $G$  une fonction de densité positive de  $[a, a'] \times [b, b']$  vers  $\mathbb{R}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions patch-continues telles que  $f(s, t) \leq g(s, t)$  pour tout  $(s, t)$  hors du plateau de  $G$ . Alors :*

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) \leq \iint_{[a, a'] \times [b, b']} g(s, t) d^2 G(s, t)$$

*Démonstration.* Posons  $g'(s, t) = \max(f(s, t), g(s, t))$ . La fonction  $g'$  est patch-continue. Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $g'$  sont  $G$ -intégrables par la proposition 7.6.6. Comme  $g'$  coïncide avec  $g$  hors du plateau de  $G$ , sa  $G$ -intégrale coïncide avec celle de  $g$ , par la proposition 7.6.15. De plus, la  $G$ -intégrale de  $g'$  est supérieure ou égale à celle de  $f$  par le lemme 7.6.9. □

On a de plus une forme, faible mais qui nous suffira, du théorème de Fubini :

**Proposition 7.6.17 (Fubini)** *Soit  $G(s, t)$  une fonction de la forme  $G_1(s)G_2(t)$ , où  $G_1$  et  $G_2$  sont croissantes, et  $f$  une fonction  $G$ -intégrable sur  $[a, a'] \times [b, b']$ . Si, pour tout  $s \in [a, a']$ , la fonction*

qui à  $t$  associe  $f(s, t)$  est  $G_2$ -intégrable, alors la fonction qui à  $s$  associe  $\int_b^{b'} f(s, t) dG_2(t)$  est  $G_1$ -intégrable et :

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) = \int_a^{a'} \left[ \int_b^{b'} f(s, t) dG_2(t) \right] dG_1(s)$$

De même, si pour tout  $t \in [b, b']$ , la fonction qui à  $s$  associe  $f(s, t)$  est  $G_1$ -intégrable, alors la fonction qui à  $t$  associe  $\int_a^{a'} f(s, t) dG_1(s)$  est  $G_2$ -intégrable et :

$$\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t) = \int_b^{b'} \left[ \int_a^{a'} f(s, t) dG_1(s) \right] dG_2(t)$$

*Démonstration.* Démontrons la première partie de la proposition, la seconde étant démontrée par des moyens similaires. Si  $G_1(a') = G_1(a)$ , alors  $G_1$  est constante, et l'intégrale de droite est nulle ; d'autre part, les sommes doubles de Darboux-Stieltjes définissant l'intégrale double de gauche valent  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} f(s_i, t_j) (G_1(a_i) - G_1(a_{i-1})) (G_2(b_j) - G_2(b_{j-1})) = 0$ , donc les deux côtés sont identiquement nuls. Supposons donc  $G_1(a') > G_1(a)$ .

Pour tout couple de subdivisions pointées  $D_1 = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m$  de  $[a, a']$  et  $D_2 = b_0, t_1, b_1, \dots, b_{n-1}, t_n, b_n$  de  $[b, b']$ , on a :

$$\begin{aligned} \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 G(s, t) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} f(s_i, t_j) (G_1(a_i) - G_1(a_{i-1})) (G_2(b_j) - G_2(b_{j-1})) \\ &= \int_{D_1} \left[ \int_{D_2} f(s, t) dG_2(t) \right] dG_1(s) \end{aligned}$$

Supposons  $D_1$  et  $D_2$  assez grandes dans l'ordre  $\leq$ , de sorte que cette somme de Darboux soit écartée d'au plus  $\epsilon/2$  de la  $G$ -intégrale  $\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t)$  de  $f$ . Quitte à subdiviser encore  $D_2$ , on peut supposer que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $\int_{D_2} f(s_i, t) dG_2(t)$  soit écartée d'au plus  $\epsilon/(2(G_1(a') - G_1(a)))$  de  $\int_{a'}^{b'} f(s_i, t) dG_2(t)$ . Donc l'écart entre  $\int_{D_1} \left[ \int_{D_2} f(s, t) dG_2(t) \right] dG_1(s)$  et  $\int_{D_1} \left[ \int_{a'}^{b'} f(s, t) dG_2(t) \right] dG_1(s)$  est d'au plus  $\sum_{i=1}^m \epsilon/(2(G_1(a') - G_1(a))(G_1(a_i) - G_1(a_{i-1}))) = \epsilon/2$ . On en déduit que l'écart entre  $\iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 G(s, t)$  et  $\int_{D_1} \left[ \int_{a'}^{b'} f(s, t) dG_2(t) \right] dG_1(s)$  est d'au plus  $\epsilon$ , ce qui nous permet de conclure.  $\square$

Finalement, on dispose d'une forme de la formule d'intégration par parties. Notons  $g(a, \_)$  la fonction qui à  $t$  associe  $g(a, t)$ ,  $f(\_, b')$  celle qui à  $s$  associe  $f(s, b')$ , et ainsi de suite.

**Proposition 7.6.18 (Intégration par parties)** Si  $f$  est  $g$ -intégrable sur  $[a, a'] \times [b, b']$ ,  $g(a, \_)$  est  $f(a, \_)$ -intégrable et  $g(a', \_)$  est  $f(a', \_)$ -intégrable sur  $[b, b']$ ,  $g(\_, b)$  est  $f(\_, b)$ -intégrable et

$g(\_, b')$  est  $f(\_, b')$ -intégrable sur  $[a, a']$ , alors  $g$  est  $f$ -intégrable sur  $[a, a'] \times [b, b']$  et :

$$\begin{aligned} \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 g(s, t) &= \iint_{[a, a'] \times [b, b']} g(s, t) d^2 f(s, t) \\ &+ \int_a^{a'} g(s, b) df(s, b) - \int_a^{a'} g(s, b') df(s, b') \\ &+ \int_b^{b'} g(a, t) df(a, t) - \int_b^{b'} g(a', t) df(a', t) + [f(s, t)g(s, t)]_{s=a}^{a'} \Big|_{t=b}^{b'} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Posons  $I = \iint_{[a, a'] \times [b, b']} f(s, t) d^2 g(s, t)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux subdivisions pointées  $D_{10} = a_0, s_1, a_1, \dots, a_{m-1}, s_m, a_m$  de  $[a, a']$  et  $D_{20} = b_0, t_1, b_1, \dots, b_{n-1}, t_n, b_n$  de  $[b, b']$  telles que : (a)  $\left| \iint_{D_1, D_2} f(t) dg(t) - I \right| < \epsilon/5$  pour toutes subdivisions pointées  $D_1$  et  $D_2$  telles que  $D_{10} \leq D_1$  et  $D_{20} \leq D_2$ . On peut supposer de plus que :

$$(b) \left| \int_{D_1} g(s, b) df(s, b) - \int_a^{a'} g(s, b) df(s, b) \right| < \epsilon/5,$$

$$(c) \left| \int_{D_1} g(s, b') df(s, b') - \int_a^{a'} g(s, b') df(s, b') \right| < \epsilon/5,$$

$$(d) \left| \int_{D_2} g(a, t) df(a, t) - \int_b^{b'} g(a, t) df(a, t) \right| < \epsilon/5,$$

$$(e) \left| \int_{D_2} g(a', t) df(a', t) - \int_b^{b'} g(a', t) df(a', t) \right| < \epsilon/5.$$

Quitte à remplacer  $D_{10}, D_{20}$  par un tel couple  $D_1, D_2$ , on peut supposer  $m, n \geq 2, s_1 = a_0 = a, s_m = a_m = a', t_1 = b_0 = b$ , et  $t_n = b_n = b'$ . On peut de plus supposer  $s_i < s_{i+1}$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq m-1$  et  $t_j < t_{j+1}$  pour tout  $j, 1 \leq j \leq n-1$ . Soit  $D'_{10}$  la subdivision pointée  $s_1, a_1, s_2, \dots, s_{m-1}, a_{m-1}, s_m$  de  $[a, a']$  et  $D'_{20}$  la subdivision pointée  $t_1, b_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b_{n-1}, t_n$  de  $[b, b']$ . Pour tout couple de subdivisions pointées  $D'_1, D'_2$  telles que  $D'_{10} \leq D'_1$  et  $D'_{20} \leq D'_2$ , disons  $D'_1 = s'_1, a'_1, s'_2, \dots, s'_{p-1}, a'_{p-1}, s'_p$  et  $D'_2 = t'_1, b'_1, t'_2, \dots, t'_{q-1}, b'_{q-1}, t'_q$ , on note que la subdivision pointée  $D_1$  obtenue à partir de  $a = a'_0, s'_1, a'_1, s'_2, \dots, s'_{p-1}, a'_{p-1}, s'_p, a'_p = a'$  en éliminant les sous-intervalles vides (c'est-à-dire les  $s'_i, a'_i$  tels que  $a'_i = a'_{i-1}$ ) et la subdivision pointée  $D_2$  obtenue à partir de  $b = b'_0, t'_1, b'_1, t'_2, \dots, t'_{q-1}, b'_{q-1}, t'_q, b'_q = b'$  en éliminant les sous-intervalles vides sont telles que  $D_{10} \leq D_1, D_{20} \leq D_2$ , et :

$$\iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 g(s, t) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} f(s'_i, t'_j) (g(a'_i, b'_j) - g(a'_{i-1}, b'_j) - g(a'_i, b'_{j-1}) + g(a'_{i-1}, b'_{j-1}))$$

Le coefficient de  $g(a'_i, b'_j)$  dans cette somme est  $f(s'_i, t'_j) - f(s'_{i+1}, t'_j) - f(s'_i, t'_{j+1}) + f(s'_{i+1}, t'_{j+1})$  si  $1 \leq i \leq p-1$  et  $1 \leq j \leq q-1$ . Si  $i = 0$ , le coefficient de  $g(a'_0, b'_j)$  est  $-f(s'_1, t'_j) + f(s'_1, t'_{j+1})$  si  $1 \leq j \leq q-1, f(s'_1, t'_1)$  si  $j = 0$ , et  $-f(s'_1, t'_q)$  si  $j = q$ . Si  $i = p$ , le coefficient de  $g(a'_p, b'_j)$  est  $f(s'_p, t'_j) - f(s'_p, t'_{j+1})$  si  $1 \leq j \leq q-1, -f(s'_p, t'_1)$  si  $j = 0$ , et  $f(s'_p, t'_q)$  si  $j = q$ . Si  $1 \leq i \leq p-1$  et  $j = 0$ , le coefficient de  $g(a'_i, b'_0)$  est  $-f(s'_i, t'_1) + f(s'_{i+1}, t'_1)$ . Si  $1 \leq i \leq p-1$  et  $j = q$ , le

coefficient de  $g(a'_i, b'_q)$  est  $f(s'_i, t'_q) - f(s'_{i+1}, t'_q)$ . Donc :

$$\begin{aligned}
& \iint_{D_1, D_2} f(s, t) d^2 g(s, t) \\
= & \sum_{\substack{1 \leq i \leq p-1 \\ 1 \leq j \leq q-1}} g(a'_i, b'_j) (f(s'_i, t'_j) - f(s'_{i+1}, t'_j) - f(s'_i, t'_{j+1}) + f(s'_{i+1}, t'_{j+1})) \\
& + \sum_{j=1}^{q-1} g(a'_0, b'_j) (-f(s'_1, t'_j) + f(s'_1, t'_{j+1})) + g(a'_0, b'_0) f(s'_1, t'_1) - g(a'_0, b'_q) f(s'_1, t'_q) \\
& + \sum_{j=1}^{q-1} g(a'_p, b'_j) (f(s'_p, t'_j) - f(s'_p, t'_{j+1})) - g(a'_p, b'_0) f(s'_p, t'_1) + g(a'_p, b'_q) f(s'_p, t'_q) \\
& + \sum_{i=1}^{p-1} g(a'_i, b'_0) (-f(s'_i, t'_1) + f(s'_{i+1}, t'_1)) \\
& + \sum_{i=1}^{p-1} g(a'_i, b'_q) (f(s'_i, t'_q) - f(s'_{i+1}, t'_q)) \\
= & \iint_{D'_1, D'_2} g(s, t) d^2 f(s, t) + \int_{D'_2} g(a, t) df(a, t) - \int_{D'_2} g(a', t) df(a', t) \\
& + \int_{D'_1} g(s, b) df(s, b) - \int_{D'_1} g(s, b') df(s, b') + [f(s, t)g(s, t)]'_{s=a} b'_{t=b}
\end{aligned}$$

On conclut maintenant en utilisant (a)-(e).  $\square$

**Définition 7.6.19 (Intégrale mixte)** Soit  $M$  une fonction patch-continue de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , pour toute estimation  $\nu$  sur  $X$ , on définit l'intégrale mixte :

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu_M = \iint_{[0, a] \times [0, b]} M(s, t) d^2 F_{f, \nu}(s, t)$$

où  $a, b > \sup_{x \in X} f(x)$ , et  $F_{f, \nu}$  est la fonction définie par  $F_{f, \nu}(s, t) = \nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)$ .

Pour que ceci ait un sens, encore faut-il montrer que  $F_{f, \nu}$  est de densité positive, ce qui nous permettra d'appliquer la proposition 7.6.6. Nous devons aussi observer que l'intégrale double de Riemann-Stieltjes ci-dessus est indépendante de  $a, b \geq \sup_{x \in X} f(x)$  : ceci est une conséquence simple de la relation de Chasles, et du fait que  $F_{f, \nu}(s, t) = \nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)$  est nul dès que  $s \geq a$  ou  $t \geq b$ .

**Lemme 7.6.20** Soit  $\nu$  une estimation sur  $X$ ,  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $F_{f, \nu}$  est de densité positive.

*Démonstration.* Posons  $W_s = f^{-1}]s, +\infty[$  pour tout  $s \geq 0$ , de sorte que  $F_{f,\nu}(s, t) = \nu(W_s) - \nu(W_s \setminus W_t)$ . Fixons  $0 \leq s \leq s', 0 \leq t \leq t'$ . Notons que  $W_{s'} \subseteq W_s$  et  $W_{t'} \subseteq W_t$ .

Lorsque  $\nu$  est une estimation continue et  $X$  est stablement compact, on peut utiliser le théorème 7.3.23. Alors  $\nu(W_s) - \nu(W_s \setminus W_t) = \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s) - \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s \setminus \diamond W_t) = \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s \cap \diamond W_t)$ . Donc :

$$\begin{aligned} & F_{f,\nu}(s', t') - F_{f,\nu}(s, t') - F_{f,\nu}(s', t) + F_{f,\nu}(s, t) \\ &= \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_{s'} \cap \diamond W_{t'}) - \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s \cap \diamond W_{t'}) - \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_{s'} \cap \diamond W_t) + \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s \cap \diamond W_t) \\ &= -\mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s \setminus \square W_{s'} \cap \diamond W_{t'}) + \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s \setminus \square W_{s'} \cap \diamond W_t) \quad \text{puisque } W_{s'} \subseteq W_s \\ &= \mathcal{C}(\nu)^\%(\square W_s \setminus \square W_{s'} \cap \diamond W_t \setminus \diamond W_{t'}) \quad \text{puisque } W_{t'} \subseteq W_t \\ &= \mathcal{C}(\nu)^\%(\square(W_s \setminus W_{s'}) \cap \diamond(X \setminus W_{s'}) \cap \diamond W_t) \geq 0 \end{aligned}$$

Notons que cette dernière quantité se réexprime sous forme de

$$\nu(W_s \setminus W_{t'}) - \nu(W_s \setminus W_{t'} \cap W_{s'}) - \nu(W_s \setminus W_{t'} \setminus W_t) + \nu(W_s \setminus W_{t'} \cap W_{s'} \setminus W_t)$$

par le lemme 7.1.6.

Dans le cas général, ceci suggère d'utiliser l'inégalité (7.2) avec  $m = n = 1, U = W_s, V = W_{t'}, U_1 = W_{s'}, V_1 = W_t$  :

$$\nu(W_s \setminus W_{t'}) - \nu(W_{s'} \setminus W_{t'}) - \nu(W_s \setminus W_t) + \nu(W_{s'} \setminus W_t) \geq 0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & F_{f,\nu}(s', t') - F_{f,\nu}(s, t') - F_{f,\nu}(s', t) + F_{f,\nu}(s, t) \\ &= \nu(W_{s'}) - \nu(W_{s'} \setminus W_{t'}) - \nu(W_s) + \nu(W_s \setminus W_{t'}) \\ &\quad - \nu(W_{s'}) + \nu(W_{s'} \setminus W_t) + \nu(W_s) - \nu(W_s \setminus W_t) \\ &= -\nu(W_{s'} \setminus W_{t'}) + \nu(W_s \setminus W_{t'}) + \nu(W_{s'} \setminus W_t) - \nu(W_s \setminus W_t) \geq 0 \end{aligned}$$

□

**Lemme 7.6.21** Soit  $[a_1, b_1]$  un intervalle inclus dans  $[a, b]$ . Pour toute fonction  $f$  qui est  $\chi_{[a_1, b_1[}$ -intégrable sur  $[a, b]$ , et dont ni  $a_1$  ni  $b_1$  n'est un point de discontinuité,

$$\int_a^b f(s) d\chi_{[a_1, b_1[}(s) = \begin{cases} f(a_1) - f(b_1) & \text{si } a < a_1 \\ -f(b_1) & \text{si } a = a_1 \end{cases}$$

*Démonstration.* La formule d'intégration par parties pour les intégrales de Riemann-Stieltjes donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s) d\chi_{[a_1, b_1[}(s) &= [f\chi_{[a_1, b_1[}]_{s=a}^b - \int_a^b \chi_{[a_1, b_1[}(s) df(s) \\ &= [f\chi_{[a_1, b_1[}]_{s=a}^b - \int_a^{a_1} \chi_{[a_1, b_1[}(s) df(s) - \int_{a_1}^{b_1} \chi_{[a_1, b_1[}(s) df(s) \\ &\quad - \int_{b_1}^b \chi_{[a_1, b_1[}(s) df(s) \end{aligned}$$

par la relation de Chasles, où si  $a = a_1$ , une intégrale de  $a$  à  $a_1$  dénote juste 0, et de même pour l'intégrale de  $b_1$  à  $b$  si  $b_1 = b$ . Comme  $\chi_{[a_1, b_1[}$  ne diffère de la fonction nulle que sur un nombre fini de points sur  $[a, a_1]$ , à savoir  $a_1$ , et qu'aucun de ces points n'est un point de discontinuité de  $f$ , leurs  $f$ -intégrales coïncident ; de même pour  $\chi_{[a_1, b_1[}$  et la fonction constante égale à 1 sur  $[a_1, b_1]$ , et pour  $\chi_{[a_1, b_1[}$  et la fonction nulle sur  $[b_1, b]$ . Donc :

$$\int_a^b f(s) d\chi_{[a_1, b_1[}(s) = [f\chi_{[a_1, b_1[}]_{s=a}^b + f(a_1) - f(b_1)$$

D'où la conclusion.  $\square$

▷ **Exercice 7.8**

Soit  $[a_1, b_1]$  un intervalle inclus dans  $[a, b]$ . Pour toute fonction  $f$  qui est  $\chi_{[a_1, b_1]}$ -intégrable sur  $[a, b]$ , et dont ni  $a_1$  ni  $b_1$  n'est un point de discontinuité, montrer que :

$$\int_a^b f(s) d\chi_{[a_1, b_1]}(s) = \begin{cases} f(a_1) - f(b_1) & \text{si } a < a_1, b_1 < b \\ -f(b_1) & \text{si } a = a_1, b_1 < b \\ f(a_1) & \text{si } a < a_1, b_1 = b \\ 0 & \text{si } a = a_1, b_1 = b \end{cases}$$

**Proposition 7.6.22** Soit  $\nu$  l'estimation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{\alpha_i}$ , et  $M$  une fonction patch-continue de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$ . Alors :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M = \sum_{i=1}^n a_i M(\min_{\alpha_i} f, \sup_{\alpha_i} f)$$

*Démonstration.* Par le lemme 7.6.8, il suffit de démontrer que si  $\nu = \mathbf{u}_{\alpha}$ , alors :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M = M(\min_{\alpha} f, \sup_{\alpha} f)$$

Considérons la distribution  $F_{f, \nu}(s, t) = \nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)$ . D'abord,  $\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[)$  vaut soit 0 soit 1, et vaut 1 si et seulement si  $\alpha(f^{-1}]s, +\infty[) = 1$ , si et seulement si  $\alpha \in \square f^{-1}]s, +\infty[$ , si et seulement si  $\min_{\alpha} f > s$  par le lemme 7.5.3.

Ensuite,  $\nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)$  vaut aussi soit 0 soit 1, et vaut 1 si et seulement si  $\alpha(f^{-1}]s, +\infty[) = 1$  et  $\alpha(f^{-1}]t, +\infty[) = 0$ . Or  $\alpha(f^{-1}]t, +\infty[) = 0$  si et seulement si  $\alpha \notin \diamond f^{-1}]t, +\infty[$ , si et seulement si  $\sup_{\alpha} f \leq t$ , par le lemme 7.5.5. Donc  $\nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)$  vaut 1 si et seulement si  $\min_{\alpha} f > s$  et  $\sup_{\alpha} f \leq t$ . On en déduit que  $F_{f, \nu}(s, t) = 1$  si  $\min_{\alpha} f > s$  et  $\sup_{\alpha} f > t$ , et  $F_{f, \nu}(s, t) = 0$  sinon. Donc  $F_{f, \nu}(s, t) = \chi_{[0, \min_{\alpha} f]}(s) \chi_{[0, \sup_{\alpha} f]}(t)$ . En utilisant la proposition 7.6.17, avec  $a, b > \sup_{x \in X} f(x)$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{x \in X} f(x) d\nu_M &= \iint_{[0, a] \times [0, b]} M(s, t) d^2 F_{f, \nu}(s, t) \\ &= \int_0^a \left[ \int_0^b M(s, t) d\chi_{[0, \sup_{\alpha} f]}(t) \right] d\chi_{[0, \min_{\alpha} f]}(s) \\ &= \int_0^a -M(s, \sup_{\alpha} f) d\chi_{[0, \min_{\alpha} f]}(s) = M(\min_{\alpha} f, \sup_{\alpha} f) \end{aligned}$$

en utilisant deux fois le lemme 7.6.21, deuxième cas. Notons en effet que  $M$ , étant patch-continue, n'a aucun point de discontinuité.  $\square$

En appliquant la formule d'intégration par parties (proposition 7.6.18), on peut réécrire l'intégrale mixte comme suit :

$$\begin{aligned}
\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M &= \iint_{[0,a] \times [0,b]} M(s,t) d^2 [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] \\
&= \iint_{[0,a] \times [0,b]} [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] d^2 M(s,t) \\
&\quad + \int_0^a [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]0, +\infty[]] dM(s,0) \\
&\quad - \int_0^a [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]b, +\infty[]] dM(s,b) \\
&\quad + \int_0^b [\nu^\uparrow(f^{-1})0, +\infty[] - \nu(f^{-1})0, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] dM(0,t) \\
&\quad + \int_0^b [\nu^\uparrow(f^{-1})a, +\infty[] - \nu(f^{-1})a, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] dM(a,t) \\
&\quad + [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[] M(s,t)]_{s=0}^a \Big|_{t=0}^b \\
&= \iint_{[0,a] \times [0,b]} [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] d^2 M(s,t) \\
&\quad + \int_0^a [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]0, +\infty[]] dM(s,0) \\
&\quad + \int_0^b [\nu^\uparrow(f^{-1})0, +\infty[] - \nu(f^{-1})0, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] dM(0,t) \\
&\quad + \nu^\uparrow(f^{-1})0, +\infty[] M(0,0) \tag{7.16}
\end{aligned}$$

puisque  $\nu^\uparrow(f^{-1})a, +\infty[] = \nu(f^{-1})a, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[] = 0$ , et  $\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]b, +\infty[] = 0$ , vu que  $f^{-1}a, +\infty[] = f^{-1}b, +\infty[] = \emptyset$ .

En particulier,

**Fait 7.6.23** Si  $M(s,0) = M(0,t) = 0$  pour tous  $s, t \geq 0$ , alors :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M = \iint_{[0,a] \times [0,b]} [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] d^2 M(s,t)$$

Lorsque de plus  $M(s,t)$  s'écrit sous forme d'un produit  $M_1(s)M_2(t)$  de deux fonctions patch-continues  $M_1$  et  $M_2$ , avec  $M_1(0) = M_2(0) = 0$ , le théorème de Fubini (proposition 7.6.17) nous fournit :

$$\begin{aligned}
\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M &= \int_0^a \left[ \int_0^b [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] dM_2(t) \right] dM_1(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} [\nu^\uparrow(f^{-1})s, +\infty[] - \nu(f^{-1})s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[]] dM_2(t) \right] dM_1(s)
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier, enfin, où  $M_1(s) = s^{1-\beta}$  et  $M_2(t) = t^\beta$ , on obtient, en utilisant la formule de changement de variables de l'intégrale de Riemann-Stieltjes :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \left[ \nu^\uparrow(f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty[\backslash f^{-1}]t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty[) \right] dt \right] ds$$

Autrement dit :

**Fait 7.6.24** La  $\beta$ -intégrale est un cas particulier d'intégrale mixte : Pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ , posons  $M_\beta(s, t) = s^{1-\beta}t^\beta$ , alors pour toute estimation  $\nu$  sur  $X$ ,

$$\iint_{x \in X}^\beta f(x) d\nu = \iint_{x \in X} f(x) d\nu_{M_\beta}$$

Rappelons que l'intégrale mixte est définie comme une  $F_{f,\nu}$ -intégrale double de Riemann-Stieltjes.

**Lemme 7.6.25** Soit  $\nu$  une estimation sur  $X$ ,  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Le plateau de la fonction  $F_{f,\nu}$  définie par  $F_{f,\nu}(s, t) = \nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\backslash f^{-1}]t, +\infty[)$  contient tous les points  $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  tels que  $s > t$ , ou  $s > \sup_{x \in X} f(x)$ , ou  $t > \sup_{x \in X} f(x)$ , ou  $s < \inf_{x \in X} f(x)$ , ou  $t < \inf_{x \in X} f(x)$ .

*Démonstration.* Montrons que tous les points  $s, t \geq 0$  tels que  $s > t$  sont sur le plateau de  $F_{f,\nu}$ . Fixons  $\epsilon > 0$  avec  $\epsilon < (s - t)/2$ , et considérons le rectangle  $[s - \epsilon, s + \epsilon] \times [\max(t - \epsilon, 0), t + \epsilon]$ . Pour tout point  $(s', t')$  de ce rectangle, on a  $s' \geq 0$ ,  $t' \geq 0$ , et  $s' > t'$ . Alors  $f^{-1}]s', +\infty[ \subseteq f^{-1}]t', +\infty[$ , donc  $F_{f,\nu}(s', t') = \nu^\uparrow(f^{-1}]s', +\infty[)$  ne dépend pas de  $t'$ . On en déduit que  $F_{f,\nu}(s + \epsilon, t + \epsilon) = F_{f,\nu}(s + \epsilon, \max(t - \epsilon, 0))$  et  $F_{f,\nu}(s - \epsilon, t + \epsilon) = F_{f,\nu}(s - \epsilon, \max(t - \epsilon, 0))$ , donc  $[F_{f,\nu}(s', t')]_{s'=s-\epsilon}^{s+\epsilon} \Big|_{t'=\max(t-\epsilon, 0)}^{t+\epsilon} = F_{f,\nu}(s + \epsilon, t + \epsilon) - F_{f,\nu}(s - \epsilon, t + \epsilon) - F_{f,\nu}(s + \epsilon, \max(t - \epsilon, 0)) + F_{f,\nu}(s - \epsilon, \max(t - \epsilon, 0)) = 0$ . On en déduit que  $(s, t)$ , qui est dans le patch-intérieur de  $[s - \epsilon, s + \epsilon] \times [\max(t - \epsilon, 0), t + \epsilon]$  dans  $[0, a] \times [0, b]$  (pour n'importe quels  $a, b > \sup_{x \in X} f(x)$ ), est dans le plateau de  $G$  ;

Lorsque  $s > \sup_{x \in X} f(x)$  ou  $t > \sup_{x \in X} f(x)$ , on note que  $F_{f,\nu}(s', t') = 0$  pour tout point  $(s', t')$  dans le rectangle  $[s - \epsilon, s + \epsilon] \times [t - \epsilon, t + \epsilon]$ , où  $\epsilon < (\min(s, t) - \sup_{x \in X} f(x))/2$ , donc  $[F_{f,\nu}(s', t')]_{s'=s-\epsilon}^{s+\epsilon} \Big|_{t'=t-\epsilon}^{t+\epsilon} = 0$  ; et  $(s, t)$  est dans le patch-intérieur de  $[s - \epsilon, s + \epsilon] \times [t - \epsilon, t + \epsilon]$ .

Lorsque  $s < \inf_{x \in X} f(x)$ , fixons  $\epsilon > 0$  tel que  $\epsilon < \inf_{x \in X} f(x) - s$ . Pour tout point  $(s', t')$  du rectangle  $[\max(s - \epsilon, 0), s + \epsilon] \times [\max(t - \epsilon, 0), t + \epsilon]$ , on a  $s' < \inf_{x \in X} f(x)$ , donc  $f^{-1}]s', +\infty[ = X$ , ce qui implique que  $F_{f,\nu}(s', t')$  ne dépend pas de  $s'$ . En particulier,  $F_{f,\nu}(\max(s - \epsilon, 0), t + \epsilon) = F_{f,\nu}(s + \epsilon, t + \epsilon)$  et  $F_{f,\nu}(\max(s - \epsilon, 0), \max(t - \epsilon, 0)) = F_{f,\nu}(s + \epsilon, \max(t - \epsilon, 0))$ , donc  $[F_{f,\nu}(s', t')]_{s'=\max(s-\epsilon, 0)}^{s+\epsilon} \Big|_{t'=\max(t-\epsilon, 0)}^{t+\epsilon} = F_{f,\nu}(s + \epsilon, t + \epsilon) - F_{f,\nu}(\max(s - \epsilon, 0), t + \epsilon) - F_{f,\nu}(s + \epsilon, \max(t - \epsilon, 0)) + F_{f,\nu}(\max(s - \epsilon, 0), \max(t - \epsilon, 0)) = 0$ . On raisonne de même lorsque  $t < \inf_{x \in X} f(x)$ , auquel cas  $F_{f,\nu}(s', t')$  ne dépend pas de  $t'$ .  $\square$

**Lemme 7.6.26** Soit  $\nu$  une estimation sur  $X$ ,  $M$  une fonction patch-continue de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $c$  un réel et  $U$  un ouvert de  $X$ . Alors :

$$\begin{aligned} \iint_{x \in X} \chi_U(x) d\nu_M &= \nu^\uparrow(U) M(1, 1) \\ \iint_{x \in X}^\beta \chi_U(x) d\nu &= \nu^\uparrow(U) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Posons  $f(x) = \chi_U(x)$ . Alors  $f^{-1}]s, +\infty[$  vaut  $U$  si  $s < 1$ , et est vide sinon. On en déduit que  $\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)$  vaut  $\nu^\uparrow(U)$  si  $s < 1$  et  $t < 1$ , 0 sinon. Utilisons l'égalité (7.16), où  $a, b > 1$  :

$$\begin{aligned} \iint_{x \in X} \chi_U(x) d\nu_M &= \iint_{[0, a] \times [0, b]} \nu^\uparrow(U) \chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) d^2 M(s, t) \\ &+ \int_0^a \nu^\uparrow(U) \chi_{[0, 1]}(s) dM(s, 0) + \int_0^b \nu^\uparrow(U) \chi_{[0, 1]}(t) dM(0, t) \\ &+ \nu^\uparrow(U) M(0, 0) \\ &= \end{aligned}$$

On peut voir directement, à l'aide de sommes doubles de Darboux-Stieltjes, que l'intégrale double  $\iint_{[0, a] \times [0, b]} \nu^\uparrow(U) \chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) d^2 M(s, t)$  vaut  $[M(s, t)]_{s=0}^1 \Big|_{t=0}^1$ . On peut sinon le démontrer à l'aide de théorèmes vus précédemment. Par la proposition 7.6.18,

$$\begin{aligned} \iint_{[0, a] \times [0, b]} \chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) d^2 M(s, t) &= \iint_{[0, a] \times [0, b]} M(s, t) d^2 \chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) \\ &+ \int_0^a M(s, 0) d\chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, 0) - \int_0^a M(s, b) d\chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, b) \\ &+ \int_0^b M(0, t) d\chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(0, t) - \int_0^b M(a, t) d\chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(a, t) \\ &+ [\chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) M(s, t)]_{s=0}^a \Big|_{t=0}^b \end{aligned}$$

Par la proposition 7.6.17, et puisque  $\chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) = \chi_{[0, 1]}(s) \chi_{[0, 1]}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{[0, a] \times [0, b]} M(s, t) d^2 \chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) &= \int_0^a \left[ \int_0^b M(s, t) d\chi_{[0, 1]}(t) \right] d\chi_{[0, 1]}(s) \\ &= \int_0^a -M(s, 1) d\chi_{[0, 1]}(s) = M(1, 1) \end{aligned}$$

en utilisant deux fois le lemme 7.6.21, deuxième cas. Ensuite,

$$\int_0^a M(s, 0) d\chi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, 0) = \int_0^a M(s, 0) d\chi_{[0, 1]}(s) = -M(1, 0)$$

toujours par le lemme 7.6.21,

$$\int_0^a \mathbf{M}(s, b) d\chi_{[0,1[ \times [0,1[}(s, b) = 0$$

puisque  $b > 1$ , donc  $\chi_{[0,1[ \times [0,1[}(s, b)$  est identiquement nulle. On démontre de même que :

$$\begin{aligned} \int_0^b \mathbf{M}(0, t) d\chi_{[0,1[ \times [0,1[}(0, t) &= -\mathbf{M}(0, 1) \\ \int_0^b \mathbf{M}(a, t) d\chi_{[0,1[ \times [0,1[}(a, t) &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \iint_{[0,a] \times [0,b]} \chi_{[0,1[ \times [0,1[}(s, t) d^2 \mathbf{M}(s, t) &= \mathbf{M}(1, 1) - \mathbf{M}(1, 0) - 0 - \mathbf{M}(0, 1) - 0 + \mathbf{M}(0, 0) \\ &= [\mathbf{M}(s, t)]_{s=0}^1 \Big|_{t=0}^1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} \chi_U(x) d\nu_M &= \nu^\uparrow(U) [\mathbf{M}(s, t)]_{s=0}^1 \Big|_{t=0}^1 \\ &\quad + \nu^\uparrow(U) [\mathbf{M}(s, 0)]_{s=0}^1 + \nu^\uparrow(U) [\mathbf{M}(0, t)]_{t=0}^1 + \nu^\uparrow(U) \mathbf{M}(0, 0) \\ &= \nu^\uparrow(U) \mathbf{M}(1, 1) \end{aligned}$$

On en déduit que la  $\beta$ -intégrale de  $\chi_U$  vaut  $\nu^\uparrow(U)$ , par le fait 7.6.24 et comme  $\mathbf{M}_\beta(1, 1) = 1$ .  $\square$

**Lemme 7.6.27** Posons  $\mathbf{M}_1(s, t) = t$ . Si  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in X$ , alors :

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu_{\mathbf{M}_1} = \oint_{x \in X} f(x) d\nu^\downarrow$$

*Démonstration.* Par l'équation (7.16),

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x) d\nu_{\mathbf{M}_1} &= \iint_{[0,a] \times [0,b]} [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] d^2 \mathbf{M}_1(s, t) \\ &\quad + \int_0^a [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]0, +\infty[)] d\mathbf{M}_1(s, 0) \\ &\quad + \int_0^b [\nu^\uparrow(f^{-1}]0, +\infty[) - \nu(f^{-1}]0, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] d\mathbf{M}_1(0, t) \\ &\quad + \nu^\uparrow(f^{-1}]0, +\infty[) \mathbf{M}_1(0, 0) \end{aligned}$$

Or, par la proposition 7.6.17,

$$\begin{aligned} &\iint_{[0,a] \times [0,b]} [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] d^2 \mathbf{M}_1(s, t) \\ &= \int_0^b \left[ \int_0^a [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] d1 \right] dt \\ &= \int_0^b 0 dt = 0 \end{aligned}$$

La deuxième intégrale s'annule elle aussi car  $M_1(s, 0) = 0$ . La quantité  $M_1(0, 0)$  est elle aussi nulle. Quant à la troisième intégrale, on remarque que  $f^{-1}]0, +\infty[ = X$  puisque  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in X$ . Dans ces conditions, cette intégrale vaut :

$$\int_0^b [\nu^\uparrow(X) - \nu(X \setminus f^{-1}]t, +\infty[)] dt = \int_0^b \nu^\downarrow(f^{-1}]t, +\infty[) dt = \oint_{x \in X} f(x) d\nu^\downarrow$$

et l'on conclut.  $\square$

**Lemme 7.6.28** *Posons  $M_0(s, t) = s$ . Alors :*

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu_{M_0} = \oint_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow$$

*Démonstration.* Par l'équation (7.16),

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x) d\nu_{M_0} &= \iint_{[0, a] \times [0, b]} [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] d^2M_0(s, t) \\ &\quad + \int_0^a [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]0, +\infty[)] dM_0(s, 0) \\ &\quad + \int_0^b [\nu^\uparrow(f^{-1}]0, +\infty[) - \nu(f^{-1}]0, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] dM_0(0, t) \\ &\quad + \nu^\uparrow(f^{-1}]0, +\infty[)M_0(0, 0) \end{aligned}$$

Or, par la proposition 7.6.17,

$$\begin{aligned} &\iint_{[0, a] \times [0, b]} [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] d^2M_0(s, t) \\ &= \int_0^a \left[ \int_0^b [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]t, +\infty[)] d1 \right] ds \\ &= \int_0^a 0 ds = 0 \end{aligned}$$

La troisième intégrale et  $M_0(0, 0)$  s'annulent. Reste la deuxième intégrale, qui vaut :

$$\begin{aligned} \int_0^a [\nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) - \nu(f^{-1}]s, +\infty[\setminus f^{-1}]0, +\infty[)] ds &= \int_0^a \nu^\uparrow(f^{-1}]s, +\infty[) ds \\ &= \oint_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow \end{aligned}$$

$\square$

L'exercice 7.5 est maintenant la simplicité même à démontrer, et ce dans un cadre plus général :

**Proposition 7.6.29** Soient  $M$  et  $M'$  deux fonctions patch-continues de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $M(s, t) \leq M'(s, t)$  pour tous  $s, t$  tels que  $0 \leq s \leq t$ . Alors, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , pour toute estimation  $\nu$  sur  $X$  :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M \leq \iint_{x \in X} f(x) d\nu_{M'}$$

En particulier, la  $\beta$ -intégrale est croissante en la bonté  $\beta$ .

*Démonstration.* Par la proposition 7.6.16, en utilisant le fait que le plateau de  $F_{f,\nu}$  contient tous les points  $s, t \geq 0$  tels que  $s > t$  (lemme 7.6.25), donc que  $M(s, t) \leq M'(s, t)$  pour tous les couples  $(s, t)$  hors du plateau de  $F_{f,\nu}$ .

Pour la  $\beta$ -intégrale, on note que, lorsque  $0 \leq s \leq t$ ,  $M_\beta(s, t) = s^{1-\beta}t^\beta$  est croissante en  $\beta$ , puisque son logarithme est  $(1 - \beta) \log s + \beta \log t = \log s + \beta \log(t/s)$ , et  $\log(t/s) \geq 0$ .  $\square$

De même, l'exercice 7.6 se traite maintenant simplement :

**Proposition 7.6.30** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $a = \inf_{x \in X} f(x)$ ,  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ . Soit  $M$  une fonction patch-continue de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $(M_i)_{i \in I}$  un philtre de fonctions patch-continues de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  qui converge uniformément vers  $M$  sur  $T_f = \{(s, t) \in [a, b] \times [a, b] \mid s \leq t\}$  : si  $I$  est préordonné par  $\sqsubseteq$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $i_0 \in I$  tel que pour tout  $i \in I$  avec  $i_0 \sqsubseteq i$ , pour tout  $(s, t) \in T_f$ ,  $|M_i(s, t) - M(s, t)| < \epsilon$ . Alors :

$$\left( \iint_{x \in X} f(x) d\nu_{M_i} \right)_{i \in I} \text{ converge vers } \iint_{x \in X} f(x) d\nu_M$$

En particulier, la  $\beta$ -intégrale est patch-continue en la bonté  $\beta \in ]0, 1[$ . Lorsque  $a = \inf_{x \in X} f(x) > 0$ , elle converge vers :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu^\uparrow$$

lorsque  $\beta$  tend vers 0, et vers :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu^\downarrow$$

lorsque  $\beta$  tend vers 1.

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$  quelconque. Par hypothèse, il existe  $i_0 \in I$  tel que pour tout  $i \in I$  avec  $i_0 \sqsubseteq i$ , pour tout  $(s, t) \in T_f$ ,  $|M_i(s, t) - M(s, t)| < \epsilon'$ , où  $\epsilon' < \epsilon/F_{f,\nu}(0, 0)$  si  $F_{f,\nu}(0, 0) \neq 0$ ,  $\epsilon'$  est un réel positif arbitraire sinon. Notons que  $F_{f,\nu}(0, 0) = \nu^\uparrow(f^{-1}]0, +\infty[)$  est dans tous les cas un réel positif ou nul.

On peut réécrire ceci en disant que  $M(s, t) - \epsilon' < M_i(s, t) < M(s, t) + \epsilon'$  pour tout  $(s, t) \in T_f$ . Par le lemme 7.6.25, le plateau de  $F_{f,\nu}$  contient le complémentaire de  $T_f$ . Par la proposition 7.6.16, appliquée aux  $F_{f,\nu}$ -intégrales de  $M_i$  et de  $M$ , on en déduit :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_M - \iint_{x \in X} f(x) d\nu_H \leq \iint_{x \in X} f(x) d\nu_{M_i} \leq \iint_{x \in X} f(x) d\nu_M + \iint_{x \in X} f(x) d\nu_H$$

où  $H$  est la fonction constante définie par  $H(s, t) = \epsilon'$ . Or, en posant  $c$  quelconque tel que  $c > b$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{x \in X} f(x) d\nu_H &= \iint_{[0, c] \times [0, c]} \epsilon' dF_{f, \nu}(s, t) \\ &= \epsilon' [F_{f, \nu}(s, t)]_{s=0}^c \Big|_{t=0}^c \quad \text{par le lemme 7.6.5} \\ &= \epsilon' (F_{f, \nu}(c, c) - F_{f, \nu}(0, c) - F_{f, \nu}(c, 0) + F_{f, \nu}(0, 0)) \end{aligned}$$

Or  $F_{f, \nu}(s, c) = 0$  pour tout  $s \geq 0$ ,  $F_{f, \nu}(c, t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ , donc :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_H = \epsilon' F_{f, \nu}(0, 0) < \epsilon$$

Donc

$$\left| \iint_{x \in X} f(x) d\nu_{M_i} - \iint_{x \in X} f(x) d\nu_M \right| < \epsilon$$

et l'intégrale mixte converge donc bien.

Appliquons ceci à la  $\beta$ -intégrale. Si  $a = b$ , c'est que  $f$  est une fonction constante :  $f = c\chi_X$  pour une certaine constante  $c$ . Par la proposition 7.6.22, son intégrale mixte vaut  $c\nu^\uparrow(X)$ . Les intégrales de  $f$  par rapport à  $\nu^\uparrow$  et  $\nu^\downarrow$  valent respectivement  $c\nu^\uparrow(X)$  et  $c\nu^\downarrow(X)$ , et le résultat est trivial puisque  $\nu^\uparrow(X) = \nu(X) = \nu^\downarrow(X)$ .

Supposons donc  $b > a$ . La fonction  $M_\beta(s, t) = s^{1-\beta}t^\beta$  est non seulement continue en  $\beta$ , à  $s$  et  $t$  fixés, mais encore dérivable et même de classe  $C^1$ . Si  $s, t > 0$ , on remarque en effet que  $M_\beta(s, t) = e^{(1-\beta)\log s + \beta\log t}$ , dont la dérivée en  $\beta$  vaut  $\log(t/s)M_\beta(s, t)$ . Si  $s = 0$  ou  $t = 0$ ,  $M_\beta(s, t) = 0$  et sa dérivée en  $\beta$  est donc elle aussi nulle. Convenons que  $\log(t/s)M_\beta(s, t)$  dénote 0 si  $s = 0$  ou  $t = 0$ . La quantité  $\log(t/s)M_\beta(s, t) = \log(t/s)s^{1-\beta}t^\beta = \log t s^{1-\beta}t^\beta - \log s s^{1-\beta}t^\beta$  est positive ou nulle lorsque  $s \leq t$ , en particulier lorsque  $(s, t) \in T_f$ . Trouvons-en un majorant sur  $[a, b] \times [a, b]$ . D'une part,  $\log t s^{1-\beta}t^\beta \leq b \log b$ . D'autre part, la fonction qui à  $s$  associe  $-\log s s^{1-\beta}$  tend vers 0 lorsque  $s$  tend vers 0, et a pour dérivée en  $s$  la quantité  $-(1-\beta)\log s - 1$ . Elle croît donc de  $s = 0$  à  $s = e^{-1/(1-\beta)}$ , puis décroît pour  $s > e^{-1/(1-\beta)}$ . Donc  $-\log s s^{1-\beta}$  atteint son maximum en  $e^{-1/(1-\beta)}$ , qui vaut donc  $1/(e(1-\beta))$ . On en déduit que  $\log(t/s)M_\beta(s, t)$  est majorée par  $b^\beta/(e(1-\beta)) + b \log b$ , pour tous  $(s, t) \in T_f$ . Cette dernière quantité a peu d'importance, notons-la  $A_{b, \beta}$ . Ce qui est important, c'est que pour tous  $\beta_1, \beta_2 \in ]0, 1[$ ,  $\beta_1 \leq \beta_2$ , on aura  $M_{\beta_2}(s, t) - M_{\beta_1}(s, t) \leq B_{b, \beta_1, \beta_2}$ , où  $B_{b, \beta_1, \beta_2} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} A_{b, \beta} d\beta$  tend vers 0 lorsque  $\beta_2 - \beta_1$  tend vers 0.

Soit  $(\beta_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $]0, 1[$  convergeant vers  $\beta \in ]0, 1[$ . L'argument ci-dessus, et en particulier le fait que  $B_{b, \beta_1, \beta_2}$  ne dépende pas de  $s, t$ , implique que  $M_{\beta_i}$  converge uniformément vers  $M_\beta$ . En utilisant la première partie de la proposition, on conclut que la  $\beta$ -intégrale est patch-continue en la bonté.

Lorsque  $\beta$  tend vers 1, et  $a > 0$ , on note que  $s^{1-\beta}t^\beta$  converge uniformément vers  $M_1(s, t) = t$  lorsque  $b \geq t \geq s \geq a$ , en particulier lorsque  $(s, t) \in T_f$ . En effet,  $|s^{1-\beta}t^\beta - t| = t[1 - (s/t)^{1-\beta}] \leq b[1 - (a/b)^{1-\beta}]$ , qui tend vers 0 lorsque  $\beta$  tend vers 1, et est indépendant de  $s$  et  $t$ . On en déduit que la  $\beta$ -intégrale de  $f$  converge vers l'intégrale de  $f$  par rapport à  $\nu^\downarrow$ , par le lemme 7.6.27.

Lorsque  $\beta$  tend vers 0,  $s^{1-\beta}t^\beta$  converge uniformément vers  $M_0(s, t) = s$  lorsque  $b \geq t \geq s \geq a$ . En effet,  $|s^{1-\beta}t^\beta - s| = s((t/s)^\beta - 1) \leq b((b/a)^\beta - 1)$ , qui tend vers 0 indépendamment de  $s$  et  $t$ , et l'on conclut comme ci-dessus, en utilisant cette fois le lemme 7.6.28.  $\square$

▷ **Exercice 7.9**

Montrer que l'hypothèse  $a > 0$  n'est pas nécessaire pour montrer que la  $\beta$ -intégrale de  $f$  par rapport à  $\nu$  tend vers l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\nu^\uparrow$  lorsque  $\beta$  tend vers 0. Autrement dit, montrer que ceci est toujours valable lorsque  $a = 0$ .



# **Troisième partie**

## **Systemes de transitions ludiques**



# Chapitre 8

## Systèmes de transition ludiques

### 8.1 Introduction

On peut définir les chaînes de Markov comme étant définis par un espace  $X$  d'états — que nous prendrons topologique —, et une *fonction de transition*  $\theta : X \rightarrow P(X)$ , que nous choisirons continue, qui à chaque état de  $X$  associe l'ensemble de ses successeurs, avec une loi de probabilité associée. Plus précisément, si  $P(X)$  est l'espace  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$  des valuations continues normalisées sur  $X$ , et  $\theta$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$  muni de sa topologie faible, nous dirons que  $\theta$  définit une *chaîne de Markov* continue sur  $X$ . (Le choix de la topologie faible plutôt que la topologie de Scott facilite certains raisonnements dans la suite. Pour l'instant, remarquons que ceci définit une classe plus large de systèmes de transitions que si l'on s'était restreint à  $\mathbf{V}_1(X)$ , et sa topologie de Scott. Nous aurons besoin de considérer la topologie de Scott à la section 9.6.)

Il est intéressant de raffiner un peu cette notion, et de se donner une notion de transitions paramétrées par un espace  $L$  d'actions possibles. Une famille de fonctions continues  $\theta_\ell : X \rightarrow \mathbf{V}_{\leq 1\ wk}(X)$ ,  $\ell$  variant parmi un ensemble d'*étiquettes* ou *actions*  $L$ , sera appelée *processus de Markov étiqueté*. Si  $\theta_\ell$  est à valeur dans  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$ , on parlera de *processus de décision de Markov*.

Notre but est d'étudier des notions similaires, dans lesquelles l'espace  $P(X)$  dénote un espace de jeux continus adéquat, dans le but de modéliser des systèmes de transition mêlant tirage probabiliste *et* non-déterminisme. Un point subtil, mentionné par C. Palamidessi, est le suivant. Le fait que l'on dispose d'un ensemble  $L$  d'actions dans les processus de Markov étiquetés, resp. les processus de décision de Markov, est déjà une forme de non-déterminisme : à partir d'un état  $x$ , on choisit l'action  $\ell \in L$  de façon non déterministe, ce qui fournit une valuation continue, resp. une loi de probabilité  $\theta_\ell(x)$ . L'action  $\ell$  est ici observable par le joueur non déterministe C. Le remplacement de  $\mathbf{V}_{\leq 1\ wk}(X)$  ou  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$  par un espace de jeux continus adéquat nous permettra de modéliser des situations où le non-déterminisme n'est pas entre différentes actions  $\ell \in L$ , mais entre différents états successeurs pour une même action (observable)  $\ell$ .

**Définition 8.1.1** *Un système de transitions ludique  $\theta$  sur un espace topologique  $X$ , avec actions prises dans l'ensemble  $L$ , est donné par une famille de fonctions de transition  $\theta_\ell$ ,  $\ell \in L$ , continues de  $X$  dans l'espace  $\mathbf{J}_{\leq 1\ wk}(X)$  des jeux continus sous-normalisés sur  $X$ .*

On dit que  $\theta$  est normalisé si et seulement si  $\theta_\ell(x) = 1$  pour tous  $\ell \in L$ ,  $x \in X$ .

On dit que  $\theta$  est un système de transitions crédibiliste si et seulement si  $\theta_\ell(x)$  est une crédibilité sur  $X$  pour tous  $\ell \in L$ ,  $x \in X$ ; il est convexe si et seulement si  $\theta_\ell(x)$  est un jeu convexe pour tous  $\ell$ ,  $x$ ; il est plausibiliste si et seulement si  $\theta_\ell(x)$  est une plausibilité pour tous  $\ell$ ,  $x$ ; il est concave si et seulement si  $\theta_\ell(x)$  est concave pour tous  $\ell$ ,  $x$ ; il est de Markov si et seulement si  $\theta_\ell(x)$  est une valuation pour tous  $\ell$ ,  $x$ .

Il est de Scott si et seulement si  $\theta_\ell$  est continu de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$  (avec sa topologie de Scott).

## 8.2 Logiques temporelles

On définit de façon classique des logiques temporelles interprétées sur les systèmes de transitions ludiques. Le but est d'exprimer des propriétés des états  $x \in X$ , au travers des préprobabilités d'arriver à d'autres états, et ce récursivement.

Le traitement de la négation sera un peu particulier dans notre cas. L'idée sous-jacente à la sémantique de la logique ci-dessous est que l'ensemble  $\llbracket F \rrbracket_\theta$  des états  $x$  où la formule  $F$  est vraie sera toujours un ouvert. La raison est profonde. On peut voir la formule  $F$  comme fournissant une fonction de test  $\chi_F : \chi_F(x) = 1$  si  $F$  est vraie à l'état  $x$ , et  $\chi_F(x) = 0$  si  $F$  est fausse à l'état  $x$ . Dans le cadre topologique où nous nous plaçons, il est raisonnable de supposer que  $\chi_F$  est une fonction continue de  $X$  dans l'espace de Sierpiński  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$ .  $\mathbb{S}$  est le cpo  $\{0, 1\}$  muni de l'ordre  $0 \leq 1$ . En tant que cpo, et suivant les intuitions de Scott,  $\mathbb{S}$  manifeste notre volonté de découvrir si  $F$  est vraie par approximations successives. On peut imaginer un processus calculatoire qui accumule des indices quant à la véracité de la formule  $F$ , grim pant dans le cpo  $\mathbb{S}$ . Autrement dit,  $\chi_F(x)$  serait la borne supérieure d'une suite  $b_n$  de résultats d'expériences, dans  $\{0, 1\}$ , avec  $\chi_F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$ . Si l'un des  $b_n$  vaut 1, alors le test réussit. Si aucun des  $b_n$  ne vaut 1, alors le test échoue. De la sorte, les tests sont l'équivalent des ensembles récursivement énumérables, pour lesquels on a une réponse positive d'appartenance à l'ensemble en temps fini, mais en général on ne peut espérer aucune réponse négative.

Les ouverts de  $\mathbb{S}$  sont  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ , et  $\{0, 1\}$ . Donc l'ensemble  $\llbracket F \rrbracket_\theta$  des états  $x$  où la formule  $F$  est vraie sera  $\chi_F^{-1}\{1\}$ , qui est par construction un ouvert. De façon équivalente, nous définirons la relation de satisfaction  $\models$  de sorte que  $x \models F$  ( $F$  est vraie en  $x$ , c'est-à-dire  $x \in \llbracket F \rrbracket_\theta$ ) si et seulement si  $F$  reste vraie sur un voisinage du point  $x$ .

Nous souhaitons donc que la sémantique de chaque formule soit ouverte. Mais, comme le complémentaire  $X \setminus U$  d'un ouvert  $U$  n'est pas nécessairement un ouvert, on ne peut pas définir  $\llbracket \neg F \rrbracket_\theta$  comme  $X \setminus \llbracket F \rrbracket_\theta$ . En revanche, la définir comme l'intérieur de  $X \setminus \llbracket F \rrbracket_\theta$  produira un ouvert. De plus, c'est sensé : ceci exprime que  $x \models \neg F$  si et seulement si  $F$  est fausse non seulement en  $x$  mais sur un voisinage de  $x$ .

Ceci fait de notre logique une logique qui est en général intuitionniste et non classique, à moins que  $X$  soit *extrêmement discontinu* (Bourbaki, 1971, Exercice 21, I.11, p. I.118), c'est-à-dire que tout ouvert soit fermé.

Ceci dit, notre logique est très riche, elle contient de nombreux opérateurs, y compris des opérateurs infinitaires  $\bigwedge$ ,  $\bigvee$  et  $\Rightarrow$ . Nous nous intéresserons dans la suite à divers fragments de

cette logique, et notamment à la restriction sans les opérateurs infinitaires, et même sans certains opérateurs de point fixe.

La raison profonde qui a présidé à l'inclusion des opérateurs infinitaires est qu'ils nous permettront d'obtenir des résultats de complétude pour des fragments contenant l'opérateur de plus grand point fixe  $\nu$  (section 9.2) et l'implication  $\Rightarrow$  (section 9.3).

**Définition 8.2.1** Soit  $\mathcal{V}$  un ensemble infini dénombrable disjoint de variables  $\varphi, \psi, \dots$ . Fixons un ensemble  $L$  d'actions. Fixons aussi un sous-ensemble  $Q$  dénombrable et partout dense de  $\mathbb{R}$ , typiquement  $Q = \mathbb{Q}$ .

Pour tout ensemble dénombrable  $\mathcal{A}$  de formules dites atomiques  $A, B, C, \dots$ , les formules de la logique  $\mathcal{L}_{open}(\mathcal{A})$  sont définies par la grammaire :

$F ::=$	$A$	formules atomiques
	$\varphi$	variables
	$\top$	vrai
	$F \wedge F$	conjonction (et)
	$\bigwedge_{i \in I} F_i$	conjonction infinie
	$\perp$	faux
	$F \vee F$	disjonction (ou)
	$\bigvee_{i \in I} F_i$	disjonction infinie
	$F \Rightarrow F$	implication
	$(F_i)_{i \in I} \Rightarrow F$	implication infinie
	$[\ell]_{>r} F$	modalité
	$\nu \varphi \cdot F$	plus grand point fixe
	$\mu \varphi \cdot F$	plus petit point fixe

où  $r$  est un nombre de  $Q \cap [0, 1]$  et  $\ell \in L$  dans la formule  $[\ell]_{>r} F$ , et le cardinal de  $I$  est borné par celui de  $\mathcal{O}(X)$  dans les conjonctions et disjonctions infinies.

La sémantique de  $\mathcal{L}_{open}(\mathcal{A})$  sur un système de transition ludique  $\theta$  sur un espace topologique  $X$ , avec actions dans  $L$ , est définie comme suit. Un environnement  $\rho$  est une fonction qui à toute variable  $\varphi \in \mathcal{V}$  associe un ouvert de  $X$ . Une interprétation  $I$  sur  $\mathcal{A}$  est une fonction qui à toute formule atomique  $A \in \mathcal{A}$  associe un ouvert de  $X$ . On définit la relation  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  par récurrence structurelle sur  $F$  :

$\rho, x \models_{\theta}^I A$	<i>ssi</i>	$x \in I(A)$
$\rho, x \models_{\theta}^I \varphi$	<i>ssi</i>	$x \in \rho(\varphi)$
$\rho, x \models_{\theta}^I \top$		<i>toujours</i>
$\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \wedge F_2$	<i>ssi</i>	$\rho, x \models_{\theta}^I F_1$ et $\rho, x \models_{\theta}^I F_2$
$\rho, x \models_{\theta}^I \bigwedge_{i \in I} F_i$	<i>ssi</i>	<i>il existe un voisinage ouvert <math>U</math> de <math>x</math> tel que pour tout <math>y \in U</math> on a <math>\rho, y \models_{\theta}^I F_i</math> pour tout <math>i \in I</math></i>
$\rho, x \models_{\theta}^I \perp$		<i>jamais</i>
$\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \vee F_2$	<i>ssi</i>	$\rho, x \models_{\theta}^I F_1$ ou $\rho, x \models_{\theta}^I F_2$
$x \models_{\theta}^I \bigvee_{i \in I} F_i$	<i>ssi</i>	$x \models_{\theta}^I F_i$ pour au moins un $i \in I$
$\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \Rightarrow F_2$	<i>ssi</i>	<i>il existe un voisinage ouvert <math>U</math> de <math>x</math> tel que pour tout <math>y \in U</math> avec <math>\rho, y \models_{\theta}^I F_1</math>, alors <math>\rho, y \models_{\theta}^I F_2</math></i>
$\rho, x \models_{\theta}^I (F_i)_{i \in I} \Rightarrow G$	<i>ssi</i>	<i>il existe un voisinage ouvert <math>U</math> de <math>x</math> tel que pour tout <math>y \in U</math> avec <math>\rho, y \models_{\theta}^I F_i</math> pour tout <math>i \in I</math>, alors <math>\rho, y \models_{\theta}^I G</math></i>
$\rho, x \models_{\theta}^I [\ell]_{>r} F$	<i>ssi</i>	$\theta_{\ell}(x)(\{y \in X \mid \rho, y \models_{\theta}^I F\}) > r$
$\rho, x \models_{\theta}^I \nu\varphi \cdot F$	<i>ssi</i>	$x \in \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ U \subseteq \{y \in X \mid \rho[\varphi \mapsto U], y \models_{\theta}^I F\}}} U$
$\rho, x \models_{\theta}^I \mu\varphi \cdot F$	<i>ssi</i>	$x$ est dans l'intérieur de $\bigcap_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ \{y \in X \mid \rho[\varphi \mapsto U], y \models_{\theta}^I F\} \subseteq U}} U$

où  $\rho[\varphi \mapsto U]$  dénote l'environnement qui à  $\varphi$  associe  $U$  et à toute autre variable  $\psi$  associe  $\rho(\psi)$ .

Les formules intéressantes ici sont celles de la forme  $[\ell]_{>r} F$ . et les points fixes  $\nu\varphi \cdot F$  et  $\mu\varphi \cdot F$ .

La formule  $[\ell]_{>r} F$  est vraie à l'état  $x$  si et seulement si, en franchissant une transition étiquetée par l'action  $\ell$ , la préprobabilité de passer dans un des états où  $F$  est vraie est strictement supérieure à  $r$ .

La sémantique de  $\nu\varphi \cdot F$  définit l'ensemble des états  $x$  où  $\nu\varphi \cdot F$  est vraie comme un plus grand point fixe. Soit  $h$  la fonction qui à tout ouvert  $U$  associe l'ensemble des  $y \in X$  tels que  $\rho[\varphi \mapsto U], y \models_{\theta}^I F$ . On verra (lemme 8.2.2 ci-dessous) que ce dernier ensemble est toujours ouvert ;  $h$  est donc une fonction de  $\mathcal{O}(X)$  dans  $\mathcal{O}(X)$ , qui est clairement croissante.  $\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ U \subseteq h(U)}} U$

est le plus grand pré-point fixe de  $h$ , donc son plus grand point fixe par le théorème de Tarski. Rappelons en effet que l'ensemble  $\mathcal{O}(X)$  des ouverts de  $X$  est un treillis complet : toute famille

$(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts a une borne supérieure  $\bigcup_{i \in I} U_i$ , et donc aussi une borne inférieure  $\bigcap_{i \in I} U_i$ .

Le plus petit point fixe de  $h$  est, de façon symétrique, la borne inférieure des post-points fixes de  $h$ , c'est-à-dire la borne inférieure de la famille des ouverts  $U$  tels que  $h(U) \subseteq U$ , d'où la formule définissant la sémantique de  $\mu\varphi \cdot F$ .

En présence des opérateurs infinitaires  $\bigwedge$ ,  $\bigvee$  et  $\Rightarrow$ , on peut définir la plupart des autres opérateurs. D'abord,  $F_1 \vee F_2 = \bigvee_{i \in \{1,2\}} F_i$ , et  $\perp = \bigvee_{i \in \emptyset} F_i$ . De même, on peut définir  $\bigwedge$  et  $\top$  en terme de  $\bigwedge$  ; c'est difficile à voir pour l'instant, mais sera immédiat une fois que nous aurons établi que la sémantique de toute formule est ouverte (lemme 8.2.2 ci-dessous). On peut aussi définir  $F_1 \Rightarrow F_2$  comme  $(F_1) \Rightarrow F_2$ .

Notons  $\neg F$  la formule  $F \Rightarrow \perp$ . En général  $\neg\neg F$  ne signifie par la même chose que  $F$  : si

$A$  est l'ensemble des points  $x$  tels que  $\rho, x \models_{\theta}^I F_i$ , alors  $\neg\neg F$  est vraie sur l'intérieur  $\overset{\circ}{cl}(A)$  de l'adhérence de  $A$ . Alors même que  $A$  sera toujours ouvert, il n'y a aucune raison que  $\overset{\circ}{cl}(A)$  égale  $A$ .

Il n'y a pas non plus en général de relation entre  $(F_i)_{i \in I} \Rightarrow G$  et  $\bigwedge_{i \in I} F_i \Rightarrow G$ . Si  $A_i$  est l'ensemble des points où  $F_i$  est vraie, et  $A$  celui où  $G$  est vraie, la première formule est vraie aux

points de  $\overset{\circ}{(X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i) \cup A}$ , la seconde aux points de  $\overset{\circ}{(X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i) \cup A} = \overset{\circ}{cl(X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i) \cup A}$ .

Il n'y a pas plus de relation entre  $\bigwedge_{i \in I} F_i$  et  $((F_i)_{i \in I} \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$ . Soit  $A_i$  l'ensemble des points  $x$  tels que  $\rho, x \models_{\theta}^I F_i$ . L'ensemble des points où  $(F_i)_{i \in I} \Rightarrow \perp$  est vrai est l'intérieur du complémentaire de  $\bigcap_{i \in I} A_i$ , c'est-à-dire le complémentaire de  $cl(\bigcap_{i \in I} A_i)$ . Donc l'ensemble des points où  $((F_i)_{i \in I} \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$  est vrai est l'intérieur de l'adhérence de  $\bigcap_{i \in I} A_i$ , alors que c'est l'intérieur de  $\bigcap_{i \in I} A_i$  qui est l'ensemble des points où  $\bigwedge_{i \in I} F_i$  est vraie.

En revanche, si  $A_i$  est l'ensemble des points où  $F_i$  est vraie, l'ensemble des points où  $\bigwedge_{i \in I} \neg F_i$

sera vraie est  $\overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)}$ . Ceci est égal à  $\overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)} = \overset{\circ}{X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i}$ , qui est exactement l'ensemble des points où  $\neg \bigvee_{i \in I} F_i$  est vraie.

Le fait que notre logique soit intuitionniste peut rebuter les habitués du model-checking. Cependant, on peut remarquer que lorsque l'espace sous-jacent  $X$  est discret, la sémantique des formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  interprétée sur  $X$  est classique. Par exemple, dans ce cas,  $\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \Rightarrow F_2$  si et seulement si  $x$  est dans l'intérieur de  $(X \setminus I \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta} \rho) \cup I \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta} \rho$ ; mais dans la topologie discrète, l'intérieur de toute partie  $A$  est  $A$  elle-même : donc  $\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \Rightarrow F_2$  si et seulement si  $x$  est dans  $(X \setminus I \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta} \rho) \cup I \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta} \rho$ , si et seulement si  $\rho, x \models_{\theta}^I F_1$  implique  $\rho, x \models_{\theta}^I F_2$ .

En ce sens, notre logique généralise le cas des logiques temporelles classiques usuelles.

Le fait d'utiliser une logique comme  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  est donc une forme généralisée des logiques classiques usuelles, qui s'adapte bien au cas topologique.

**Lemme 8.2.2** *La sémantique de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  est bien définie. Pour toute formule  $F$  de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$ , soit*

$$I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \{x \in X \mid \rho, x \models_{\theta}^I F\}$$

Alors  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$  est un ouvert de  $X$  pour toute interprétation  $I$ , tout environnement  $\rho$ , et tout système de transitions ludique  $\theta$  sur  $X$ .

*Démonstration.* Par récurrence structurale sur  $F$ . Les cas  $A$ ,  $\varphi$ ,  $\top$ ,  $F_1 \wedge F_2$ ,  $\perp$ ,  $F_1 \vee F_2$ ,  $\bigvee_{i \in I} F_i$ ,  $\nu \varphi \cdot F$ , et  $\mu \varphi \cdot F$  sont évidents. Dans le cas  $F_1 \Rightarrow F_2$ , notons que

$$I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \overset{\circ}{(X \setminus I \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta} \rho) \cup I \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta} \rho}$$

est nécessairement ouvert. De même, si  $F = (F_i)_{i \in I} \Rightarrow G$ ,

$$I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \overbrace{\left( X \setminus \bigcap_{i \in I} I \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \rho \right) \cup I \llbracket G \rrbracket_{\theta} \rho}^{\circ}$$

Et si  $F = \bigwedge_{i \in I} F_i$ , alors

$$I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \overbrace{\bigcap_{i \in I} I \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \rho}^{\circ}$$

est aussi nécessairement ouvert.

Dans le cas  $[\ell]_{>r} F$ ,  $I \llbracket [\ell]_{>r} F \rrbracket_{\theta}$  est défini comme étant l'ensemble  $\{x \in X \mid \theta_{\ell}(x)(I \llbracket F \rrbracket_{\theta}) > r\} = \{x \in X \mid \theta_{\ell}(x) \in [I \llbracket F \rrbracket_{\theta} > r]\} = \theta_{\ell}^{-1}[I \llbracket F \rrbracket_{\theta} > r]$ , qui est ouvert parce que  $\theta_{\ell}$  est continue de  $X$  vers un espace de jeux muni de la topologie faible, engendrée par les ouverts de la forme  $[U > r]$ .  $\square$

Nous aurons besoin dans la suite de considérer plusieurs fragments de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$ . Posons donc :

**Définition 8.2.3** *Pour tout sous-ensemble  $Ops$  de  $\{\top, \wedge, \bigwedge, \perp, \vee, \bigvee, \Rightarrow, \Rightarrow, \nu, \mu\}$ , soit  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{Ops}(\mathcal{A})$  l'ensemble des formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  dont les sous-formules sont construites à partir des seuls opérateurs  $[\ell]_{>r}$  et ceux dans  $Ops$ .*

*En particulier,  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \bigwedge \perp \vee \bigvee \nu \mu}(\mathcal{A})$ , le sous-ensemble des formules sans implication, sera appelé l'ensemble des formules positives.*

Nous serons notamment intéressés dans la suite par des fragments comme  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \bigwedge \perp \vee \bigvee}(\mathcal{A})$ , l'ensemble des formules positives sans opérateur de point fixe ni opérateur infinitaire, ou bien  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \bigwedge}(\mathcal{A})$ , ou encore  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \bigvee}(\mathcal{A})$ .

En ce qui concerne les formules positives, on a un résultat de monotonie évident : si  $F$  est une formule positive, et  $\rho(\varphi) \subseteq \rho'(\varphi)$  pour toute variable  $\varphi$ , alors  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho'$ . Toutes les formules ne sont pas monotones en ce sens. Par exemple, en posant  $\neg F = F \Rightarrow \perp$ , la formule  $\neg \varphi$  n'est pas monotone en  $\varphi$ . Un critère simple et usuellement suffisant de monotonie est le suivant :

**Définition 8.2.4 (Bien formée)** *L'ensemble  $\text{vars}^+(F)$  des variables apparaissant positivement dans une formule  $F$ , et l'ensemble  $\text{vars}^-(F)$  des variables apparaissant négativement dans  $F$*

sont définis par récurrence mutuelle comme suit.

$$\begin{array}{ll}
vars^+(A) = vars^-(A) = \emptyset & vars^+(\varphi) = \{\varphi\} \quad vars^-(\varphi) = \emptyset \\
vars^+(\top) = vars^-(\top) = \emptyset & vars^+(F \wedge G) = \\
vars^+(\perp) = vars^-(\perp) = \emptyset & vars^+(F \vee G) = vars^+(F) \cup vars^+(G) \\
vars^+(F \Rightarrow G) = vars^-(F) \cup vars^+(G) & vars^-(F \wedge G) = \\
vars^+((F_i)_{i \in I} \Rightarrow G) = \bigcup_{i \in I} vars^-(F_i) \cup vars^+(G) & vars^-(F \vee G) = vars^-(F) \cup vars^-(G) \\
vars^+(\bigwedge_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^+(F_i) & vars^-(F \Rightarrow G) = vars^+(F) \cup vars^-(G) \\
vars^+(\bigvee_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^+(F_i) & vars^-(\bigwedge_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^-(F_i) \\
vars^+([\ell]_{>r} F) = vars^+(F) & vars^-(\bigvee_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^-(F_i) \\
vars^+(\nu\varphi \cdot F) = vars^+(\mu\varphi \cdot F) & vars^-(\bigwedge_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^-(F_i) \\
= vars^+(F) \setminus \{\varphi\} & vars^-(\bigvee_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^-(F_i) \\
vars^-(\nu\varphi \cdot F) = vars^-(\mu\varphi \cdot F) & vars^-(\bigwedge_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^-(F_i) \\
= vars^-(F) \setminus \{\varphi\} & vars^-(\bigvee_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} vars^-(F_i)
\end{array}$$

Une formule  $F$  de  $\mathcal{L}_{open}(\mathcal{A})$  est bien formée si et seulement si, dans toute sous-formule de la forme  $\nu\varphi \cdot G$  ou  $\mu\varphi \cdot G$ ,  $\varphi$  n'apparaît que positivement dans  $G$ ; autrement dit, si  $\varphi \notin vars^-(G)$ .

On a alors :

**Lemme 8.2.5 (Monotonie)** Soit  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{open}(\mathcal{A})$ . Si  $\varphi \notin vars^-(F)$ , alors  $F$  est monotone en  $\varphi$  : si  $\rho(\varphi) \subseteq \rho'(\varphi)$ , alors  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho'$ .

Pour toute fonction  $U \mapsto G(U)$  croissante sur un treillis complet (ici,  $\mathcal{O}(X)$ ), rappelons que le théorème de Tarski nous garantit l'existence d'un plus petit point fixe et d'un plus grand point fixe. On peut les décrire par récurrence ordinale. Soit  $U_0 = \emptyset$ ,  $U_{\alpha+1} = G(U_{\alpha})$  pour tout ordinal  $\alpha$ , et  $U_{\beta} = \bigcup_{\alpha < \beta} U_{\alpha}$  pour tout ordinal limite  $\beta$ . Alors le plus petit point fixe de  $G$  est  $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ , où  $\alpha$  parcourt tous les ordinaux. Ceci s'applique en particulier lorsque  $G(U) = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U])$ , lorsque  $\varphi \notin vars^-(F)$ , par le lemme 8.2.5. La condition  $\varphi \notin vars^-(F)$  sera automatiquement vérifiée lorsqu'on cherchera à évaluer  $\mu\varphi \cdot F$  comme sous-formule d'une formule bien formée.

On peut aussi raffiner le lemme 8.2.5 en terme de continuité, à condition de ne pas utiliser d'opérateur infinitaire ou d'opérateur de plus grand point fixe :

**Lemme 8.2.6 (Continuité)** Soit  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\mathcal{A})$ . Soit  $(U_j)_{j \in J}$  une famille dirigée d'ouverts de  $X$ , alors  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j]) = \bigcup_{j \in J} I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j])$ .

*Démonstration.* Par récurrence structurelle sur  $F$ . C'est évident lorsque  $F$  vaut  $\varphi$  elle-même, ou une autre variable, ou une formule atomique, ou  $\top$ , ou une conjonction binaire, ou  $\perp$ , ou une

disjonction binaire. Si  $F$  est de la forme  $[\ell]_{>r}G$ , alors

$$\begin{aligned}
I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j]) &= \{x \in X \mid \theta_{\ell}(x)(I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j])) > r\} \\
&= \{x \in X \mid \theta_{\ell}(x)(\bigcup_{j \in J} I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j])) > r\} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \{x \in X \mid \sup_{j \in J} \theta_{\ell}(x)(I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j])) > r\} \quad \text{puisque } \theta_{\ell}(x) \text{ est continue} \\
&= \{x \in X \mid \exists j \in J \cdot \theta_{\ell}(x)(I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j])) > r\} \\
&= \bigcup_{j \in J} \{x \in X \mid \theta_{\ell}(x)(I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j])) > r\} = \bigcup_{j \in J} I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j])
\end{aligned}$$

Si  $F$  est de la forme  $\mu\varphi' \cdot G$ , alors

$$I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j]) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}(\bigcup_{j \in J} U_j)$$

où l'union est prise sur tous les ordinaux  $\alpha$ , et l'on pose  $V_0(U) = \emptyset$ ,  $V_{\alpha+1}(U) = I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U, \varphi' \mapsto V_{\alpha}(U)])$ ,  $V_{\beta}(U) = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\alpha}(U)$  pour tout ordinal limite  $\beta$ . Notons que l'hypothèse de récurrence nous fournit les deux équations suivantes :

$$I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j, \varphi' \mapsto V]) = \bigcup_{j \in J} I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j, \varphi' \mapsto V]) \quad (8.1)$$

$$I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U, \varphi' \mapsto \bigcup_{j \in J} V_j]) = \bigcup_{j \in J} I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U, \varphi' \mapsto V_j]) \quad (8.2)$$

On observe que  $V_{\alpha}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} V_{\alpha}(U_j)$ . C'est par récurrence sur  $\alpha$ ; le seul cas intéressant est lorsque l'ordinal est de la forme  $\alpha + 1$  :

$$\begin{aligned}
V_{\alpha+1}(\bigcup_{j \in J} U_j) &= I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j, \varphi' \mapsto V_{\alpha}(\bigcup_{j \in J} U_j)]) \\
&= I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j, \varphi' \mapsto \bigcup_{j \in J} V_{\alpha}(U_j)]) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \bigcup_{j \in J} I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j, \varphi' \mapsto \bigcup_{j \in J} V_{\alpha}(U_j)]) \quad \text{par (8.1)} \\
&= \bigcup_{j \in J} \bigcup_{k \in J} I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j, \varphi' \mapsto V_{\alpha}(U_k)])
\end{aligned}$$

Puisque la famille  $(U_j)_{j \in J}$  est dirigée, et que la fonction qui à  $\rho'$  associe  $I \llbracket G \rrbracket_{\theta} \rho'$  est monotone par le lemme 8.2.5, ceci est égal à  $\bigcup_{j \in J} I \llbracket G \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j, \varphi' \mapsto V_{\alpha}(U_j)]) = \bigcup_{j \in J} V_{\alpha+1}(U_j)$ .

Comme  $V_{\alpha}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} V_{\alpha}(U_j)$  pour tout ordinal  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned}
I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto \bigcup_{j \in J} U_j]) &= \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}(\bigcup_{j \in J} U_j) \\
&= \bigcup_{\alpha} \bigcup_{j \in J} V_{\alpha}(U_j) = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}(U_j) = \bigcup_{j \in J} I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_j])
\end{aligned}$$

□

On en déduit que les plus petits points fixes se calculent par récurrence sur les entiers, plutôt que sur les ordinaux, dans le cas de formules sans  $\nu$ , sans implication, et sans opérateurs infinitaires.

**Corollaire 8.2.7** Soit  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top, \perp, \vee, \mu}(A)$ . Alors  $I \llbracket \mu\varphi \cdot F \rrbracket_{\theta} \rho = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , où  $U_0 = \emptyset$ , et pour tout entier  $n$ ,  $U_{n+1} = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_n])$ .

*Démonstration.* En effet, le point fixe est atteint en  $U_{\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , par continuité. □

Notons que la valeur de vérité de  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  ne dépend pas de  $\rho$  lorsque  $F$  est un énoncé de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(A)$ , c'est-à-dire une formule sans variable libre :

**Définition 8.2.8** L'ensemble  $\text{vars}(F)$  des variables libres d'une formule  $F$  de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(A)$  est définie par

$$\begin{aligned}
\text{vars}(A) &= \emptyset & \text{vars}(\varphi) &= \{\varphi\} \\
\text{vars}(\top) &= \emptyset & \text{vars}(F \wedge G) &= \text{vars}(F) \cup \text{vars}(G) \\
\text{vars}(\perp) &= \emptyset & \text{vars}(F \vee G) &= \text{vars}(F) \cup \text{vars}(G) \\
\text{vars}\left(\bigwedge_{i \in I} F_i\right) &= \bigcup_{i \in I} \text{vars}(F_i) & \text{vars}\left(\bigvee_{i \in I} F_i\right) &= \bigcup_{i \in I} \text{vars}(F_i) \\
\text{vars}(F \Rightarrow G) &= \text{vars}(F) \cup \text{vars}(G) & \text{vars}\left(\bigwedge_{i \in I} F_i \Rightarrow G\right) &= \bigcup_{i \in I} \text{vars}(F_i) \cup \text{vars}(G) \\
\text{vars}([\ell]_{>r} F) &= \text{vars}(F) \\
\text{vars}(\nu\varphi \cdot F) &= \text{vars}(F) \setminus \{\varphi\} & \text{vars}(\mu\varphi \cdot F) &= \text{vars}(F) \setminus \{\varphi\}
\end{aligned}$$

Une formule  $F$  est close si et seulement si  $\text{vars}(F) = \emptyset$ . On dit alors aussi que  $F$  est un énoncé.

Lorsque  $F$  est un énoncé, on note  $x \models_{\theta}^I F$  au lieu de  $\rho, x \models_{\theta}^I F$ , et  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta}$  au lieu de  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ .

Il est facile de vérifier que  $\text{vars}(F) = \text{vars}^+(F) \cup \text{vars}^-(F)$  : toute variable qui apparaît dans  $F$  y apparaît positivement, négativement, ou les deux.

Notons ensuite que  $x \models_{\theta}^I F$  ne dépend pas de  $I$  lorsque  $F$  est une formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\emptyset)$ . Nous noterons donc  $x \models_{\theta} F$  dans ce cas. On notera aussi  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  au lieu de  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta}$ .

### 8.3 Model-checking

L'usage principal d'une logique telle que  $\mathcal{L}_{\text{open}}(A)$  est la vérification qu'un système de transition ludique donné  $\theta$  satisfait un énoncé donné  $F$  de cette logique en un ou plusieurs états  $x \in X$ . Algorithmiquement, ceci revient à calculer  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta}$ .

### 8.3.1 Sur des bases effectivement décrites d'ouverts

De même, nous souhaitons pouvoir généraliser le problème du calcul de  $I \llbracket F \rrbracket_\theta$ , qui est facile lorsque  $X$  est fini, au cas d'espaces topologiques infinis.

La difficulté dans ce cadre est la façon de présenter les ouverts de  $X$ . Il est exclu de simplement énumérer leurs éléments. En revanche, on peut souvent donner une description concise d'ouverts qui approchent les ouverts qui nous intéressent. Par exemple, dans un espace métrique, on peut encadrer, par le haut et par le bas, n'importe quel ouvert par une union finie d'intersections finies de boules ouvertes.

Dans un cadre suffisamment général, il existe différentes propositions de présentation des ouverts d'un espace topologique qui se prêtent à un traitement informatique. L'une des premières est celle des domaines effectivement décrits de Smyth (1977).

La définition 8.3.1 ci-dessous est adaptée de Taylor (2006, définition 1.15), qui reprend la définition de Smyth. Nous la spécialisons au cas du treillis distributif continu des ouverts d'un espace localement relativement compact. On rappelle qu'informellement, un ensemble  $A$  est *récurusif* si et seulement s'il existe un algorithme qui, prenant en entrée un élément  $x$ , termine en répondant "oui" si  $x \in A$ , et en répondant "non" si  $x \notin A$ .  $A$  est *récurсивement énumérable* si et seulement s'il existe une procédure  $P$  qui, prenant en entrée un élément  $x$ , termine en répondant "oui" si  $x \in A$ , mais ne termine pas nécessairement sinon. Cette définition est informelle : elle n'a en réalité de sens que si  $A$  est une partie d'un ensemble "canoniquement calculable"  $N$ , celui  $\mathbb{N}$  des entiers naturels, celui  $\mathcal{A}^*$  des mots sur un alphabet fini  $\mathcal{A}$  par exemple. On peut alors énumérer tous les éléments d'un ensemble récurсивement énumérable en énumérant ceux de  $N$  ; pour chacun,  $x$ , en parallèle, on applique la procédure  $P$  et l'on décide d'afficher  $x$  si  $P$  retourne "oui" sur l'entrée  $x$ .

Dans la suite, nous utiliserons tacitement quelques propriétés bien connues des ensembles récurсивement énumérables. La première est que toute intersection finie d'ensemble récurсивement énumérables est récurсивement énumérable : pour savoir si  $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ , on initialise un compteur  $k$  à 0, et on lance en parallèle les machines testant si  $x \in A_i$ . Lorsqu'une de ces machines s'arrête, soit elle répond "non", et nous nous arrêtons en répondant "non", soit elle répond "oui", et nous ajoutons 1 à  $k$ . Lorsque  $k$  atteint la valeur  $n$  (toutes les machines ont répondu), on répond "oui". Il se peut qu'une des machines ne s'arrête pas, auquel cas notre calcul ne s'arrête pas non plus, et  $x$  n'est alors pas dans  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

Nous avons déjà mentionné deux fois l'utilisation de calculs "en parallèle". Par le fait de calculer  $M_1, \dots, M_n$  en parallèle, nous entendons la construction classique suivante : simuler  $K$  étapes de calcul de  $M_1$ , puis  $K$  de  $M_2, \dots$ , puis  $K$  de  $M_n$ , puis de nouveau  $K$  de  $M_1$ , et ainsi de suite, où  $K$  est un entier positif fixé. Cette construction, qui admet de nombreuses variantes, revient à construire un ordonnanceur des tâches  $M_1, \dots, M_n$ .

La seconde propriété est que toute union récurсивement énumérable d'ensembles récurсивement énumérables est récurсивement énumérable. Pour tester si  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , où  $I$  et les  $A_i$  sont récurсивement énumérables, nous lançons les tests  $x \in A_i, i \in I$ , en parallèle, encore une fois. Comme  $I$  peut être infini, ceci demande à prendre quelques précautions. La technique s'appelle l'*exécution en queue d'aronde* ("dovetailing" en anglais). Puisque  $I$  est récurсивement énumérable, on peut supposer que  $I \subseteq \mathbb{N}$ , et qu'il existe une machine de Turing  $M$  qui, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

présenté en entrée de  $M$ , répond “oui” si et seulement si  $n \in I$ . Pour tester si  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , on initialise un compteur  $N$  à 0, et  $c$  à la liste vide, ce sera la liste des configurations courantes des  $N$  machines de Turing testant si  $i \in I$ ,  $0 \leq i < N$ . Notons  $c(i)$  l’élément numéro  $i$  de la liste  $c$ . Simuler  $K$  étapes de calcul de la machine numéro  $i$  s’effectue en remplaçant la configuration  $c(i)$  par la configuration successeur de la machine testant  $i \in I$ , et ceci jusqu’à  $K$  fois, ou jusqu’à ce que la machine s’arrête. Lorsque la machine s’arrête, on dit que  $c(i)$  est une configuration arrêtée, et l’on peut lire la réponse de la machine, “oui” ou “non”, sur  $c(i)$ . On initialise aussi  $\ell$  à la liste vide  $[]$ , ce sera à tout moment la liste des configurations courantes des machines testant  $x \in A_i$ , pour les  $i$  dont on sait qu’ils sont dans  $I$ , c’est-à-dire pour les  $i$  tels que  $c(i)$  a répondu “oui”. Notons  $|\ell|$  la longueur de  $\ell$ . On exécute donc :

pour toujours :

  pour  $i = 1$  à  $N$

    si  $c(i)$  n’est pas arrêtée, simuler  $K$  étapes de calcul de  $c(i)$  ;

      si  $c(i)$  s’arrête sur “oui”, ajouter la configuration initiale  
de la machine testant  $x \in A_i$  à  $\ell$  ;

  ajouter 1 à  $N$ .

  pour tout  $j = 1$  à  $|\ell|$

    si  $\ell(j)$  n’est pas arrêtée, simuler  $K$  étapes de calcul de  $\ell(j)$  ;

      si  $\ell(j)$  s’arrête sur “oui”, stop : répondre “oui”.

La seule façon de terminer ici est de répondre “oui” en dernière ligne. Intuitivement, dans le cas simple où  $I = \mathbb{N}$ , on teste si  $x \in A_1$ . Si c’est le cas, et on arrive à le découvrir en au plus  $K$  étapes, alors on répond “oui”. Sinon, si on arrive à découvrir que  $x \in A_1$  en au plus  $2K$  étapes, ou que  $x \in A_2$  en au plus  $K$  étapes, on répond “oui”. Sinon, on teste si  $x \in A_1$  en au plus  $3K$  étapes, ou  $x \in A_2$  en au plus  $2K$  étapes, ou  $x \in A_3$  en au plus  $K$  étapes. Et ainsi de suite.

**Définition 8.3.1 (Base effectivement décrite)** Soit  $X$  un espace localement relativement compact. Une base effectivement décrite d’ouverts de  $X$  est un septuplet  $(N, \mathcal{O}[\_], 0, 1, +, \star, \preccurlyeq)$  tel que :

- $N$  est un ensemble dénombrable récursivement énumérable, dit de codes ;
- $\mathcal{O}[\_]$  est une fonction de  $N$  vers l’espace  $\mathcal{O}(X)$  des ouverts de  $X$  ; lorsque  $U = \mathcal{O}[u]$ , on dira que  $u$  est un code de l’ouvert  $U$  ;
- $0 \in N$  est un code de l’ouvert vide  $\emptyset$  ;
- $1 \in N$  est un code de l’ouvert  $X$  ;
- $+$  est une fonction de  $N \times N$  dans  $N$ , telle que  $\mathcal{O}[u + v] = \mathcal{O}[u] \cup \mathcal{O}[v]$  pour tous  $u, v \in N$  ;
- $\star$  est une fonction de  $N \times N$  dans  $N$ , telle que  $\mathcal{O}[u \star v] = \mathcal{O}[u] \cap \mathcal{O}[v]$  pour tous  $u, v \in N$  ;
- $\preccurlyeq$  est une relation binaire, récursivement énumérable, entre éléments de  $N$ , telle que  $u \preccurlyeq v$  si et seulement si  $\mathcal{O}[u] \subseteq \mathcal{O}[v]$  ;
- on demande finalement que  $(\mathcal{O}[u])_{u \in N}$  engendre la topologie de  $X$ , ceci revenant à dire que tout ouvert  $U$  de  $X$  est union d’une famille dirigée de la forme  $(\mathcal{O}[u_i])_{i \in I}$ , ou encore que  $(\mathcal{O}[u])_{u \in N}$  forme une base du cpo continu  $\mathcal{O}(X)$ .

Par abus de langage, nous dirons que  $N$  lui-même est une base effectivement décrite d'ouverts de  $X$  ;

Autrement dit,  $N$  définit un langage permettant de décrire tous les ouverts de  $X$ , comme limites d'éléments *définissables*  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket$ . On notera que le seul prédicat permettant de comparer des codes d'ouverts est  $\preccurlyeq$ . Aucun prédicat n'est fourni pour tester l'inclusion ou l'égalité d'ouverts, ce qui serait une propriété indécidable en général.

Dans  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie métrique usuelle, par exemple, une base effectivement décrite typique est celle des unions finies disjointes d'intervalles ouverts à bornes rationnelles :  $]a_1, b_1[ \cup ]a_2, b_2[ \cup \dots \cup ]a_k, b_k[$ , avec  $k \geq 0$ ,  $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$ , et  $a_i, b_i \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Plus formellement,  $N$  serait l'espace des listes strictement croissantes de longueurs paires  $\ell = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k)$  d'éléments de  $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , et  $\mathcal{O} \llbracket \ell \rrbracket = ]a_1, b_1[ \cup ]a_2, b_2[ \cup \dots \cup ]a_k, b_k[$ . 0 est la liste vide, 1 est la liste  $(-\infty, +\infty)$ . Le codage de + et de  $\star$  est un exercice de programmation. Finalement, on a  $(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k) \preccurlyeq (a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_{k'}, b'_{k'})$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , il existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq k'$ , tel que  $a_i > a'_j$  et  $b_i < b'_j$ .

Il existe d'autres bases effectivement décrites de  $\mathbb{R}$  : les unions finies disjointes d'intervalles ouverts à bornes dyadiques, c'est-à-dire de la forme  $p/2^k$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ; ou à bornes  $q$ -adiques, c'est-à-dire de la forme  $p/q^k$ ,  $q$  étant un entier premier ; par exemple. En général, si  $\mathbb{Q}$  est un sous-ensemble dénombrable récursivement énumérable partout dense de  $\mathbb{R}$ , la famille des unions finies disjointes d'intervalles ouverts à bornes dans  $\mathbb{Q}$  forme une base effectivement décrite d'ouverts de  $\mathbb{R}$ , muni de sa topologie métrique usuelle.

Dans la plupart des espaces métriques  $X$ , on pourra produire une base effectivement décrite à condition de disposer d'une famille de codes  $p \in \mathbb{N}$  dénotant des points  $X \llbracket p \rrbracket$  de  $X$ , et telle que  $\{X \llbracket p \rrbracket \mid p \in \mathbb{N}\}$  soit partout dense dans  $X$ . Ceci implique en particulier que  $X$  soit séparable, c'est-à-dire qu'il contienne un ensemble dénombrable partout dense. Soit  $d$  la distance sur  $X$ . Étant donnée une telle famille, une base effectivement décrite typique sera formée de listes finies de listes finies de couples  $(p, r)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Q}$  (où  $\mathbb{Q}$  est un sous-ensemble dénombrable récursivement énumérable partout dense de  $\mathbb{R}$ ), dénotant des unions finies d'intersections finies de boules ouvertes  $B_r(p) = \{x \in X \mid d(x, p) < r\}$ . L'élément 0 sera la liste vide  $()$ , l'élément 1 sera la liste  $(())$  ne contenant que la liste vide  $()$ . Les opérations + et  $\star$  sont un peu plus compliquées à définir. L'opération  $\preccurlyeq$  est nettement plus complexe à définir, et dépend en toute généralité des propriétés de la distance  $d$ .

Notons au passage que, dans le cas où  $X$  est un espace fini discret — le cadre le plus courant des techniques de model-checking traditionnelles —, alors  $X$  a une base effectivement décrite *canonique*. Les codes sont juste les parties (finies) de  $X$ , autrement dit  $N = \mathbb{P}(X)$ . On a alors  $0 = \emptyset$ ,  $1 = X$ ,  $+$  =  $\cup$ ,  $\star$  =  $\cap$ , et  $\preccurlyeq$  est juste le test d'inclusion  $\subseteq$ . (Dans un espace discret, tout ouvert fini est compact.) On retrouvera dans ce cadre les méthodes habituelles de model-checking, fondées sur les calculs d'ensembles d'états à l'aide des opérations  $\emptyset$ ,  $X$ ,  $\cup$ ,  $\cap$ , et de tests d'inclusion.

Notons que, dans ce dernier cas, ainsi que dans le cas des bases effectivement décrites de  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie usuelle,  $\preccurlyeq$  est non seulement récursivement énumérable, mais récursive.

En général, de même que nous notons  $\leq$  la relation d'ordre de (pratiquement) n'importe

quel ensemble ordonné, nous noterons  $0, 1, +, *, \ll, \mathcal{O}[\_]$  les objets correspondants, quelles que soient les bases effectivement décrites considérées. Ceci n'entraînera pas de confusion dans l'usage que nous ferons. On dira alors que  $N$  est une base effectivement décrite d'ouverts de  $X$ , plutôt que le septuplet  $(N, \mathcal{O}[\_], 0, 1, +, *, \ll)$ .

Se donner une base effectivement décrite n'est pas suffisant. Il faut encore que les fonctions continues que nous allons manipuler soient présentées de sorte à ce que leur continuité soit manifeste au vu des bases effectivement décrites choisies. Nous continuons de suivre Taylor et Smyth. L'idée fondamentale, puisque la notion de base effectivement décrite n'inclut pas de symbole permettant de décrire les points de  $x$ , est de réaliser qu'une fonction continue  $f : X \rightarrow Y$  donne naissance à une fonction  $\text{Pre } f : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ , qui préserve les intersections finies, et toutes les unions. De plus, si  $X$  et  $Y$  sont sobres, la donnée de  $\text{Pre } f$  caractérise en fait  $f$ ; c'est une conséquence de (Abramsky and Jung, 1994, corollaire 7.2.8), par exemple. La fonction  $\text{Pre } f$  est usuellement appelée la fonction de *précondition* de  $f$ , en vérification.

Il serait tenter de coder la fonction  $f$  en demandant de représenter directement  $\text{Pre } f$  comme une fonction qui à un code  $v$  d'ouvert de  $Y$  associe un code  $u$  d'ouvert de  $X$ . Ceci ne sera en général pas possible : il n'y a aucune raison que l'image réciproque d'un ouvert définissable  $\mathcal{O}[v]$  soit encore définissable. En revanche, on peut coder la fonction  $f$  comme la relation  $R$  entre codes  $u$  d'un ouvert  $U$  de  $X$  et  $v$  d'un ouvert  $V$  de  $Y$  tels que  $U \subseteq f^{-1}(V)$ . Nous demanderons de plus que cette relation  $R$  soit récursivement énumérable. Nous noterons  $u R v$  lorsque  $u$  et  $v$  sont reliées par  $R$ .

**Définition 8.3.2 (Fonction effectivement continue)** Soit  $N_1$  une base effectivement décrite d'ouverts de l'espace localement relativement compact  $X_1$ ,  $N_2$  une base effectivement décrite d'ouverts de l'espace localement relativement compact  $X_2$ . Une fonction effectivement continue de  $N_1$  vers  $N_2$  est un couple  $(f, R_f)$  formé d'une fonction continue  $f : X_1 \rightarrow X_2$  et d'une relation binaire  $R_f \subseteq N_1 \times N_2$  telles que :

- $R_f$  est récursivement énumérable ;
- $f^{-1}(\mathcal{O}[v]) = \bigcup_{u \in N_1, u R_f v} \mathcal{O}[u]$ .

Par abus de langage, nous dirons que  $f$ , ou la relation  $R_f$  elle-même est une fonction effectivement continue de  $X_1$  vers  $X_2$ .

Étant donnée une fonction continue  $f : X_1 \rightarrow X_2$ , il existe une plus grande relation  $R_f$  telle que  $(f, R_f)$  soit une fonction effectivement continue de  $N_1$  vers  $N_2$  : pour tous  $u \in N_1, v \in N_2$ ,  $u R_f v$  si et seulement  $\mathcal{O}[u] \subseteq f^{-1}(\mathcal{O}[v])$ , pour tous codes  $u \in N_1$  et  $v \in N_2$ . Pour que ceci définisse effectivement une fonction effectivement continue, il faut et il suffit que cette relation  $R_f$  soit récursivement énumérable. Nous pourrions donc nous contenter de dire que  $f$ , à elle seule, est effectivement continue.

Dans les applications informatiques, cependant, c'est  $R_f$  qui sera le véritable objet à manipuler, et  $f$  ne sera que secondaire. Mais  $f$  est elle aussi déterminée de façon unique par la donnée de  $R_f$ . En effet, si  $f$  existe, alors nécessairement  $\text{Pre } f(V) = \bigcup_{\substack{v \in N_2, \mathcal{O}[v] \in V \\ u \in N_1, u R_f v}} \mathcal{O}[u]$ . On peut s'en convaincre par l'argument suivant. D'abord,  $V$  est l'union des  $\mathcal{O}[v] \in V, v \in N_2$ . Or  $\text{Pre } f$  commute avec les unions, donc  $\text{Pre } f(V) = \bigcup_{v \in N_2, \mathcal{O}[v] \in V} f^{-1}(\mathcal{O}[v])$ , et l'on conclut par définition de  $R_f$ .

On peut de même décrire un système de transitions ludique  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$ , par une famille de préconditions. Pour chaque réel  $r$ , et pour chaque ouvert  $V$  de  $X$ ,  $\theta_\ell^{-1}[V > r]$  est un ouvert  $U$  de  $X$ . C'est l'ensemble des points  $x$  tels que la préprobabilité de tomber dans  $V$  après avoir suivi une transition étiquetée  $\ell$  est strictement supérieure à  $r$ .

On ne sait pas décrire tous les ouverts de la forme  $[V > r]$ , juste ceux tels que  $V$  a un code, et tels que  $r$  est dans une partie  $Q$  fixée, dénombrable, récursive, et partout dense dans  $\mathbb{R}$ . Mais c'est largement suffisant, comme le montre la proposition 8.3.5 ci-dessous. On commence par caractériser la relation d'inclusion entre ouverts de la forme  $[V > r]$ .

**Lemme 8.3.3** *Soit  $Y$  un espace de jeux sur  $X$ , muni de la topologie faible, et contenant le jeu nul et tous les  $a\delta_x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in X$ .*

*Étant donnés deux ouverts faibles de la forme  $[U > r]$  et  $[V > s]$  de  $Y$ , on a  $[U > r] \subseteq [V > s]$  si et seulement si : (a)  $s < 0$  (auquel cas  $[V > s] = Y$ ), ou bien (b)  $U = \emptyset$  et  $r \geq 0$  (auquel cas  $[U > r] = \emptyset$ ), ou bien (c)  $U \subseteq V$  et  $r \geq s$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $[U > r] \subseteq [V > s]$ . En particulier, pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$  et tout  $x \in X$ , si  $a\delta_x \in [U > r]$  alors  $a\delta_x \in [V > s]$ . Ceci signifie que pour tout  $x \in U$ , et  $a > r$ , alors  $a\delta_x(V) > s$ , donc soit  $s < 0$ , soit  $x \in V$  et  $a > s$ .

Examinons d'abord le cas où  $U$  est non vide, et fixons  $x \in U$ . Si  $s < 0$ , on est dans le cas (a). Sinon,  $s \geq 0$ . Alors pour tout  $a > r$ ,  $a > s$ . Comme  $a$  est positif ou nul quelconque,  $r \geq s$ . À  $a > r$  fixé, pour tout  $x \in U$ , alors  $x \in V$ , donc  $U \subseteq V$ , et nous obtenons (c).

Si en revanche  $U$  est vide, alors soit nous sommes dans le cas (b), soit  $r < 0$ . Dans ce dernier cas,  $[U > r]$  est  $Y$  tout entier, donc  $[V > s] = Y$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , et tout  $x \in X$ ,  $a\delta_x$  est donc dans  $[V > s]$ . Si  $s \geq 0$ , posons  $a = s$ . Si  $X$  est non vide, fixons  $x \in X$ , alors  $a\delta_x \in [V > s]$ , c'est-à-dire  $a\delta_x(V) > a$ , ce qui est impossible. Si  $X$  est vide, alors il n'existe aucun jeu  $\nu$  dans  $Y = [V > s]$ , sinon  $\nu(V) = \nu(\emptyset) = 0 > s$ , ce qui contredirait  $s \geq 0$  : donc  $Y$  serait vide, ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle  $Y$  contient le jeu nul. Nous aboutissons à une contradiction dans les deux cas, donc  $s$  est en fait strictement négatif.

Réciproquement, distinguons trois cas. Si (a)  $s < 0$ , alors  $[V > s] = Y$ , et l'inclusion  $[U > r] \subseteq [V > s]$  est triviale. Si (b)  $U = \emptyset$  et  $r \geq 0$ , alors  $[U > r] = \emptyset$  est l'inclusion est de nouveau triviale. Supposons finalement (c)  $U \subseteq V$  et  $r \geq s$ . Pour tout  $\nu \in [U > r]$ , on a  $\nu(U) > r$ . Comme  $\nu$  est monotone et que  $U \subseteq V$ , on a  $\nu(V) \geq \nu(U) > r \geq s$ , donc  $\nu \in [V > s]$ .  $\square$

**Lemme 8.3.4** *Soit  $Y$  un espace de jeux continus sur  $X$ , muni de la topologie faible, et contenant le jeu nul et tous les  $a\delta_x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in X$ .*

*Considérons une famille dirigée d'ouverts faibles de la forme  $([U_i > r_i])_{i \in I}$ . Alors  $\bigcup_{i \in I} [U_i > r_i] = [\bigcup_{i \in I} U_i > \inf_{i \in I} r_i]$ .*

*Démonstration.* L'inclusion  $\bigcup_{i \in I} [U_i > r_i] \subseteq [\bigcup_{i \in I} U_i > \inf_{i \in I} r_i]$  est une conséquence directe du lemme 8.3.3. En effet, posons  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $r = \inf_{i \in I} r_i$ , alors  $U_i \subseteq U$  et  $r_i \geq r$  pour tout  $i \in I$ , donc par le cas (c) du lemme 8.3.3,  $[U_i > r_i] \subseteq [U > r]$ . Donc  $\bigcup_{i \in I} [U_i > r_i] \subseteq [U > r]$ .

Réciproquement, supposons  $\nu \in [U > r]$ . Puisque  $r = \inf_{j \in I} r_j$ , si  $r < 0$ , alors il existe un  $j \in I$  tel que  $r_j < 0$ , auquel cas  $[U_j > r_j] = Y$ , donc  $\nu \in [U_j > r_j]$ . On peut donc supposer  $r \geq$

0, donc  $r_i \geq 0$  pour tout  $i \in I$ . Il est alors impossible que  $U$  soit vide, puisque  $\nu \in [U > r]$ . Donc la sous-famille  $(U_i)_{i \in J}$  des  $U_i$  qui sont non vides est elle-même non vide. Par le lemme 8.3.3, si  $i, j \in J$ , alors  $[U_i > r_i] \subseteq [U_j, r_j]$  si et seulement si  $U_i \subseteq U_j$  et  $r_i \geq r_j$ , les cas (a) et (b) ne s'appliquant pas. La sous-famille  $(U_i)_{i \in J}$  est donc en particulier dirigée, et  $U = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Comme  $\nu$  est continue et  $\nu(U) > r$ , il existe  $i \in J$  tel que  $\nu(U_i) > r$ . Comme  $r = \inf_{j \in I} r_j$ , il existe  $j \in J$  tel que  $\nu(U_i) > r_j$ . Or il existe  $k \in J$  tel que  $[U_i > r_i], [U_j > r_j] \subseteq [U_k, r_k]$ . En particulier,  $\nu(U_k) \geq \nu(U_i) > r_j \geq r_k$ , donc  $\nu \in [U_k > r_k]$ . En particulier,  $\nu \in \bigcup_{i \in I} [U_i > r_i]$ .  $\square$

**Proposition 8.3.5** *Soit  $N$  une base effectivement décrite des ouverts de  $X$ , et  $Q$  un sous-ensemble dénombrable récursivement énumérable et partout dense de  $\mathbb{R}$ . Soit  $Y$  un espace de jeux continus sur  $X$ , muni de la topologie faible, et contenant le jeu nul et tous les  $a\delta_x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in X$ .*

*Tout ouvert de la forme  $[V > r]$  de  $Y$  est l'union d'une famille dirigée d'ouverts faibles définissables, c'est-à-dire de la forme  $[\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket > q]$ ,  $u \in N$ ,  $q \in Q$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $V$  est l'union d'une famille dirigée  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket$ ,  $i \in I$ . Écrivons d'autre part  $r = \inf_{j \in J} q_j$ , où la famille  $(q_j)_{j \in J}$  est filtrante et  $q_j \in Q$  pour tout  $j \in J$ . (L'ordre sur  $\mathbb{R}$  étant total, il suffit que cette famille soit non vide.) La famille  $([\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket > q_j])_{i \in I, j \in J}$  est alors dirigée. En effet, étant donné  $[\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket > q_j]$  et  $[\mathcal{O} \llbracket u_{i'} \rrbracket > q_{j'}]$ , il existe par hypothèse  $i'' \in I$  tel que  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket, \mathcal{O} \llbracket u_{i'} \rrbracket \subseteq \mathcal{O} \llbracket u_{i''} \rrbracket$  et  $j'' \in J$  tel que  $q_{j''} \leq q_j, q_{j'}$ . On a alors  $[\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket > q_j], [\mathcal{O} \llbracket u_{i'} \rrbracket > q_{j'}] \subseteq [\mathcal{O} \llbracket u_{i''} \rrbracket > q_{j''}]$  par le lemme 8.3.3. Par le lemme 8.3.4, on conclut que  $[V > r] = [\bigcup_{i \in I} \mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket > \inf_{j \in J} q_j] = [\bigcup_{i \in I, j \in J} \mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket > \inf_{i \in I, j \in J} q_j] = \bigcup_{i \in I, j \in J} [\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket > q_j]$ .  $\square$

On en déduit que les ouverts définissables, c'est-à-dire de la forme  $[\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket > q]$ ,  $u \in N$ ,  $q \in Q$ , engendrent la topologie faible sur  $Y$ .

Il est alors tentant d'en tirer une base effectivement décrite  $(N', \mathcal{O}' \llbracket \_ \rrbracket, 0', 1', +', \star', \llcorner')$  de la topologie faible de  $Y$ . Notons  $\mathbb{P}_{\text{fin}}(A)$  l'ensemble des parties finies d'un ensemble  $A$ . On pose  $N' = \mathbb{P}_{\text{fin}}(\mathbb{P}_{\text{fin}}(N \times Q))$ , et  $\mathcal{O}' \llbracket S \rrbracket = \bigcup_{C \in S} \bigcap_{(u,q) \in C} [\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket > q]$ ; par convention, une union vide vaut  $\emptyset$ , et une intersection vide vaut  $Y$  tout entier. Autrement dit, on code toutes les unions finies d'intersections finies d'ouverts définissables  $[\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket > q]$ . Ceci suffit à engendrer toute la topologie faible de  $Y$ , et permet de définir  $0' = \emptyset$ ,  $1' = \{\emptyset\}$ ,  $S_1 + S_2 = S_1 \cup S_2$ , et  $S_1 \star S_2 = \{C_1 \cup C_2 \mid C_1 \in S_1, C_2 \in S_2\}$ .

Définir la relation  $\llcorner'$  est cependant bien moins évident. Il n'est en fait pas clair que ceci soit réalisable, et demanderait en tous cas des efforts considérables.

Rappelons cependant que notre but présent est de définir des analogues effectivement continus des fonctions de transition  $\theta_\ell$ . Et ceci ne nécessite pas de définir  $\llcorner'$  : il suffit d'associer à  $\theta_\ell$  une relation binaire  $R \subseteq N \times \mathbb{P}_{\text{fin}}(\mathbb{P}_{\text{fin}}(N \times Q))$  telle que  $\theta_\ell^{-1}(\bigcup_{C \in S} \bigcap_{(v,q) \in C} [\mathcal{O} \llbracket v \rrbracket > q])$  soit l'union des  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket$  tels que  $u R S$ .

On peut maintenant simplifier cette définition en remarquant que  $\theta_\ell^{-1}(\bigcup_{C \in S} \bigcap_{(v,q) \in C} [\mathcal{O} \llbracket v \rrbracket > q]) = \bigcup_{C \in S} \bigcap_{(v,q) \in C} \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket v \rrbracket > q]$ . Il suffit donc de décrire la partie de  $R$  qui décrit juste  $\theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket v \rrbracket > q]$ .

**Définition 8.3.6** *Soit  $N$  une base effectivement décrite d'ouverts de  $X$ , et  $Q$  un sous-ensemble dénombrable récursivement énumérable partout dense de  $\mathbb{R}$ .*

Une fonction de transition effective de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1} \text{wk}(X)$  est un couple  $(g, R_g)$  formé d'une fonction continue  $g$  de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1} \text{wk}(X)$  et d'une relation ternaire  $R_g \subseteq N \times N \times Q$  telles que :

- $R_g$  est récursivement énumérable ;
- $g^{-1}[\mathcal{O} \llbracket v \rrbracket > q] = \bigcup_{u \in N, (u, v, q) \in R_g} \mathcal{O} \llbracket u \rrbracket$ .

Un système de transitions ludique effectif  $e$  sur  $X$  est une famille  $(e_\ell)_{\ell \in L}$  de fonctions de transitions effectives, indexée par  $\ell \in L$ .

Ceci nous permet de définir une procédure de model-checking de certaines formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$ , le long de modèles décrits par des systèmes de transition effectifs : ce sera le contenu de la proposition 8.3.8 ;

Notons  $\prod_{i=1}^n u_i$  la quantité 1 si  $n = 0$ ,  $u_1$  si  $n = 1$ , sinon  $u_1 \star \prod_{i=2}^n u_i$ . De même, notons  $\sum_{i=1}^n u_i$  la quantité 0 si  $n = 0$ ,  $u_1$  si  $n = 1$ , sinon  $u_1 + \sum_{i=2}^n u_i$ . Lorsque  $I$  est un ensemble fini d'indices,  $\prod_{i \in I} u_i$  et  $\sum_{i \in I} u_i$  sont définis de façon similaire, modulo une énumération des éléments de  $I$ . Notons cependant que la sémantique  $\mathcal{O} \llbracket \prod_{i \in I} u_i \rrbracket$ , resp.  $\mathcal{O} \llbracket \sum_{i \in I} u_i \rrbracket$ , est indépendante de cette énumération. Les notations  $\prod_{i \in I} u_i$  et  $\sum_{i \in I} u_i$  formeront donc un abus de langage, qui ne prêtera cependant pas à conséquence, comme on pourra le vérifier au cas par cas.

**Lemme 8.3.7** *Soit  $X$  un espace localement relativement compact,  $N$  une base effectivement décrite des ouverts de  $X$ , et  $Q$  un sous-ensemble dénombrable récursivement énumérable partout dense de  $\mathbb{R}$ . Pour tout code  $u \in N$ , pour toute famille finie d'ouverts  $(U_{ij})_{i \in I, j \in J_i}$ ,  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$  si et seulement s'il existe une famille de codes  $u_i$ ,  $i \in I$ , tels que  $u \prec \sum_{i \in I} u_i$  et  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket \subseteq U_{ij}$  pour tous  $i \in I$ ,  $j \in J_i$ .*

*Démonstration.* Supposons  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$ . Comme  $X$  est localement relativement compact, par la propriété d'interpolation raffinée sur  $\mathcal{O}(X)$ , et le fait que les ouverts définissables en forment une base, il existe deux codes  $u'$  et  $u''$  tels que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq \mathcal{O} \llbracket u' \rrbracket \subseteq \mathcal{O} \llbracket u'' \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$ . Par le lemme 3.4.12, il existe des ouverts  $U_i$ ,  $i \in I$ , tels que  $\mathcal{O} \llbracket u'' \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  et  $U_i \subseteq \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$  pour tout  $i \in I$ . Écrivons  $U_i$  sous la forme d'une union dirigée d'ouverts  $\mathcal{O} \llbracket u_{ik} \rrbracket$ ,  $k \in K_i$ , où  $\mathcal{O} \llbracket u_{ik} \rrbracket \subseteq U_i$  pour tout  $k \in K_i$ . Alors  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est l'union dirigée des  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O} \llbracket u_{ik_i} \rrbracket$ , la famille  $(k_i)_{i \in I}$  variant dans  $\prod_{i \in I} K_i$ . Comme  $\mathcal{O} \llbracket u' \rrbracket \subseteq \mathcal{O} \llbracket u'' \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ , il existe une famille d'indices  $(k_i)_{i \in I}$  telle que  $\mathcal{O} \llbracket u' \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O} \llbracket u_{ik_i} \rrbracket$ . Notons plus simplement  $u_i$  l'élément  $u_{ik_i}$ . Alors  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket$ , c'est-à-dire  $u \prec \sum_{i \in I} u_i$ . D'autre part,  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket \subseteq U_i \subseteq \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$  pour tout  $i \in I$ . Ceci implique  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket \subseteq U_{ij}$ , pour tout  $j \in J_i$ .

Réciproquement, si  $u \prec \sum_{i \in I} u_i$  et  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket \subseteq U_{ij}$ , pour tout  $j \in J_i$ , montrons que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$ . D'abord,  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket \subseteq U_{ij}$  pour tout  $j \in J_i$ , donc  $\mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket \subseteq \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$ . Comme  $u \prec \sum_{i \in I} u_i$ ,  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O} \llbracket u_i \rrbracket \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} U_{ij}$ , et l'on conclut.  $\square$

**Proposition 8.3.8** *Soit  $X$  un espace localement relativement compact.*

*Soit  $N$  une base effectivement décrite d'ouverts de  $X$ , et  $Q$  un sous-ensemble récursivement énumérable partout dense de  $\mathbb{R}$ . Un environnement effectif  $\varrho$  est une fonction qui à toute variable  $\varphi \in \mathcal{V}$  associe un code de  $N$ . On notera  $\mathcal{O} \llbracket \varrho \rrbracket$  l'environnement qui à  $\varphi$  associe  $\mathcal{O} \llbracket \varrho(\varphi) \rrbracket$ . Une interprétation effective  $\mathcal{J}$  est une fonction qui à toute formule atomique  $A \in \mathcal{A}$  associe un code de  $N$ . On notera  $\mathcal{O} \llbracket \mathcal{J} \rrbracket$  l'interprétation qui à  $A$  associe  $\mathcal{O} \llbracket \mathcal{J}(A) \rrbracket$ .*

Soit  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\mathcal{A})$ ,  $e = (\theta_\ell, R_\ell)_{\ell \in L}$  un système de transitions effectif. La relation entre  $u, J$  et  $\varrho$  définie par  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$ , où  $I = \mathcal{O} \llbracket J \rrbracket$ ,  $\rho = \mathcal{O} \llbracket \varrho \rrbracket$ , est récursivement énumérable.

*Démonstration.* Par récurrence structurelle sur  $F$ . Si  $F$  est une variable  $\varphi$ ,  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  si et seulement si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in \mathcal{O} \llbracket \varrho(\varphi) \rrbracket$ , si et seulement si  $u \prec \varrho(\varphi)$ , ce qui est récursivement énumérable. De même si  $F$  est une formule atomique  $A$ . Si  $F = \top$ , alors  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  si et seulement si  $u \prec 1$ .

Si  $F$  est une disjonction  $F_1 \vee F_2$ , alors  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  si et seulement si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F_1 \rrbracket_\theta \rho \cup I \llbracket F_2 \rrbracket_\theta \rho$ . Ceci est équivalent à l'existence de deux codes  $u_1$  et  $u_2$  tels que  $u \prec u_1 + u_2$ ,  $\mathcal{O} \llbracket u_1 \rrbracket \in I \llbracket F_1 \rrbracket_\theta \rho$ , et  $\mathcal{O} \llbracket u_2 \rrbracket \in I \llbracket F_2 \rrbracket_\theta \rho$ , par le lemme 8.3.7. Comme les propriétés  $\mathcal{O} \llbracket u_1 \rrbracket \in I \llbracket F_1 \rrbracket_\theta \rho$  et  $\mathcal{O} \llbracket u_2 \rrbracket \in I \llbracket F_2 \rrbracket_\theta \rho$  sont récursivement énumérables,  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  aussi.

Si  $F$  est une conjonction  $F_1 \wedge F_2$ , alors  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  si et seulement si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F_1 \rrbracket_\theta \rho \cap I \llbracket F_2 \rrbracket_\theta \rho$ . Encore par le lemme 8.3.7, ceci est équivalent à l'existence d'un code  $u_1$  tel que  $u \prec u_1$ ,  $\mathcal{O} \llbracket u_1 \rrbracket \in I \llbracket F_1 \rrbracket_\theta \rho$  et  $\mathcal{O} \llbracket u_1 \rrbracket \in I \llbracket F_2 \rrbracket_\theta \rho$ . Ces deux dernières propriétés sont récursivement énumérables par hypothèse de récurrence, d'où la conclusion. (Notons que si  $X$  est stablement localement relativement compact, donc relativement cohérent, on pourrait tester si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  en testant directement si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F_1 \rrbracket_\theta \rho$  et  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F_2 \rrbracket_\theta \rho$ . Ceci économisera l'énumération des candidats  $u_1$ .)

Si  $F$  est de la forme  $[\ell]_{>r} G$ ,  $r$  un nombre de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , alors  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  si et seulement si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in \theta_\ell^{-1}[I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho > r]$ . Par le lemme 8.2.2,  $I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho$  est un ouvert de  $X$ , donc s'exprime comme l'union d'une famille dirigée  $(\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket)_{j \in J}$  d'ouverts définissables tels que  $\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket \in I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho$  pour tout  $j \in J$ . Or  $\theta_\ell^{-1}[I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho > r] = \{x \in X \mid \theta_\ell(x)(I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho) > r\} = \{x \in X \mid \exists j \in J \cdot \theta_\ell(x)(\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket) > r\} = \bigcup_{j \in J} \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket > r]$ , puisque  $\theta_\ell(x)$  est continue en tout  $x$ . Alors  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in \theta_\ell^{-1}[I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho > r]$  si et seulement s'il existe un ouvert  $U$  tel que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in U \subseteq \bigcup_{j \in J} \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket > r]$ , par la propriété d'interpolation. Ceci implique qu'il existe  $j \in J$  tel que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket > r]$ . Réciproquement, si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket > r]$ , il est clair que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in \bigcup_{j \in J} \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u_j \rrbracket > r] = \theta_\ell^{-1}[I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho > r]$ . On en déduit que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  si et seulement s'il existe un code  $u'$  ( $u_j$  ci-dessus) tel que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u' \rrbracket > r]$  et  $\mathcal{O} \llbracket u' \rrbracket \in I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho$ . Ceci est équivalent, par hypothèse, à l'existence de  $u'$  tel que  $(u, u', r) \in R_\ell$  et  $\mathcal{O} \llbracket u' \rrbracket \in I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho$ . Ce test est récursivement énumérable, parce que  $R_\ell$  l'est, et que le test  $\mathcal{O} \llbracket u' \rrbracket \in I \llbracket G \rrbracket_\theta \rho$  l'est par hypothèse de récurrence.

Si  $F$  est de la forme  $\mu\varphi \cdot G$ , alors  $I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  par le corollaire 8.2.7, où  $U_0 = \emptyset$ ,  $U_{n+1} = I \llbracket G \rrbracket_\theta (\rho[\varphi \mapsto U_n])$  pour tout entier  $n$ . De plus, la famille  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, donc dirigée. C'est une conséquence facile du lemme 8.2.5. Alors  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  si et seulement s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in U_n$ . En effet, la direction si est évidente, et réciproquement, si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  alors il existe un ouvert  $U$  tel que  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in U \subseteq I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$  par interpolation, donc  $U \subseteq U_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , d'où  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in U_n$ . D'autre part, si l'on pose  $G_0 = \perp$ , et  $G_{i+1}$  la formule  $G$  où l'on a remplacé  $\varphi$  par  $G_i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il est facile de voir que  $U_n = I \llbracket G_n \rrbracket_\theta \rho$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il suffit alors d'énumérer les entiers  $n \in \mathbb{N}$ , et pour chacun de tester si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in U_n$ , ce qui revient à tester si  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket G_n \rrbracket_\theta \rho$ . On conclut parce que  $G_n$  est calculable en fonction de  $n$ , et que le test  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \in I \llbracket G_n \rrbracket_\theta \rho$  est récursivement énumérable par hypothèse de récurrence.  $\square$

Si l'on dispose d'un codage des points de  $X$ , c'est-à-dire s'il existe un ensemble récursivement énumérable  $P$  et une fonction d'interprétation  $P \llbracket \_ \rrbracket : P \rightarrow X$ , et une *test d'appartenance*  $\epsilon$ , c'est-à-dire une relation binaire récursivement énumérable entre  $P$  et  $N$  telle que  $p \in u$  si et seulement si  $P \llbracket p \rrbracket \in \mathcal{O} \llbracket u \rrbracket$ , alors on peut tester si  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  pour tout point *définissable*  $x$ , c'est-à-dire pour tout point  $x$  de la forme  $P \llbracket p \rrbracket$ ,  $p \in P$ . Comme plus haut, ceci suppose que  $\rho$  soit définissable (de la forme  $\mathcal{O} \llbracket \varrho \rrbracket$ ), que  $I$  soit définissable (de la forme  $\mathcal{O} \llbracket \mathcal{J} \rrbracket$ ), que  $F$  soit une formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\mathcal{A})$ , que  $\theta$  soit un système de transitions effectif, et bien sûr que  $X$  soit localement relativement compact.

En effet,  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  si et seulement si  $x \in I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ , si et seulement s'il existe un ouvert  $V$  tel que  $x \in V \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ . Par la propriété d'interpolation raffinée, il existe alors un code  $u \in N$  tel que  $x \in V \subseteq \mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ , donc  $x \in \mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ . Puisque  $x$  est définissable, posons  $x = P \llbracket p \rrbracket$ , alors  $p \in u$  et  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ . Réciproquement, si  $p \in u$  et  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ , clairement  $x \in I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ . On peut donc tester si  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  en énumérant les codes  $u$  d'ouverts et en testant si  $p \in u$  et  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$  (ce dernier, par la proposition 8.3.8).

Dans le cas où  $F$  ne contient pas non plus d'opérateur de point fixe  $\mu$ , et modulo une hypothèse supplémentaire, on peut directement calculer complètement un code de l'ensemble des points satisfaisant  $F$ . C'est beaucoup plus simple que la construction ci-dessus. De plus, il n'est pas raisonnable d'écrire la construction ci-dessus sous forme de programme, pour des raisons d'efficacité. La prochaine construction sera plus réaliste, sous cet angle. L'hypothèse dont nous aurons besoin est celle d'effectivité forte, définie ci-dessous.

**Définition 8.3.9** Soit  $N$  une base effectivement décrite d'ouverts de l'espace localement relativement compact  $X$ .

Une fonction de transition fortement effective de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  est un couple  $(g, G)$  formé d'une fonction continue  $g$  de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , et d'une fonction calculable  $G$  de  $N \times \mathbb{Q}$  vers  $N$ , telle que  $\mathcal{O} \llbracket G(u, q) \rrbracket = g^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket > q]$ .

Un système de transitions ludique fortement effectif  $e$  sur  $X$  est une famille  $(e_{\ell})_{\ell \in L}$  de fonctions de transitions fortement effectives, indexée par  $\ell \in L$ .

Il est facile de voir que l'effectivité forte implique l'effectivité simple : lorsque  $e_{\ell} = (\theta_{\ell}, D_{\ell})$  est fortement effective, il suffit pour tester  $\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket \subseteq \theta_{\ell}^{-1}[\mathcal{O} \llbracket v \rrbracket > q]$  de tester  $u \ll \llcorner D_{\ell}(v, q)$ , puisque  $\llcorner$  est récursivement énumérable.

**Proposition 8.3.10** Soit  $X$  un espace localement relativement compact.

Soit  $N$  une base effectivement décrite d'ouverts de  $X$ , et  $\mathbb{Q}$  un sous-ensemble récursivement énumérable partout dense de  $\mathbb{R}$ . Soit  $e = (\theta_{\ell}, D_{\ell})_{\ell \in L}$  un système de transitions fortement effectif.

Pour toute formule  $F$  de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee}(\mathcal{A})$ , on peut calculer un code  $u_{\mathcal{J}, \varrho}(F)$  tel que  $\mathcal{O} \llbracket u_{\mathcal{J}, \varrho}(F) \rrbracket = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ , où  $I = \mathcal{O} \llbracket \mathcal{J} \rrbracket$ ,  $\rho = \mathcal{O} \llbracket \varrho \rrbracket$ . De façon explicite :

$$\begin{aligned} u_{\mathcal{J}, \rho}(A) &= \mathcal{J}(A) & u_{\mathcal{J}, \rho}(\varphi) &= (\varphi) \\ u_{\mathcal{J}, \rho}(\top) &= 1 & u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1 \wedge F_2) &= u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1) \star u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_2) \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}(\perp) &= 0 & u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1 \vee F_2) &= u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1) + u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_2) \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}([\ell]_{>r} F) &= D_{\ell}(u_{\mathcal{J}, \varrho} F, r) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par récurrence structurale sur  $F$ . Dans le cas où  $F = [\ell]_{>r}F'$ ,  $I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho = \theta_\ell^{-1}[I \llbracket F' \rrbracket_\theta \rho > r] = \theta_\ell^{-1}[\mathcal{O} \llbracket u_{\mathcal{J},\rho}(F') \rrbracket > r]$  (par hypothèse de récurrence)  $= \mathcal{O} \llbracket D_\ell(u_{\mathcal{J},\rho}(F'), r) \rrbracket$  (par définition).  $\square$

### 8.3.2 Sur des bases effectives de compacts ouverts

La théorie de la section 8.3.1 est générale, et est essentiellement une théorie de ce qui est récursivement énumérable en vérification. Ceci a un intérêt essentiellement théorique : on a alors une procédure qui répondra “oui” si et seulement si la propriété que l’on cherche à vérifier est vraie, mais si cette propriété est fausse, la procédure peut ne pas terminer. De plus, on peut remarquer que les constructions algorithmiques de la section 8.3.1 procèdent souvent par énumération aveugle de tous les codes  $u \in N$ , et sont donc extrêmement inefficaces, même lorsqu’elles terminent.

La source du problème tient au fait que nous avons supposé  $X$  localement relativement compact, c’est-à-dire que  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo qui n’est que continu. La seule relation intéressante entre ouverts était alors  $\subseteq$ . Demandons maintenant que  $\mathcal{O}(X)$  soit un cpo *algébrique*. Nous raisonnons alors non plus sur des codes d’ouverts d’une base quelconque de  $\mathcal{O}(X)$ , mais sur des codes d’ouverts qui sont des éléments finis de  $\mathcal{O}(X)$ . Un élément fini  $U$  de  $\mathcal{O}(X)$  est par définition un ouvert  $U$  tel que  $U \in U$ . Par définition de  $\subseteq$ ,  $U \in U$  si et seulement si  $U$  est compact. Donc un élément fini de  $\mathcal{O}(X)$  est un compact ouvert. En particulier,  $\mathcal{O}(X)$  est algébrique si et seulement si  $X$  est fantomatique :

**Définition 8.3.11 (Fantomatique)** *Un espace topologique  $X$  est fantomatique si et seulement si tout élément a une base de voisinages formés de compacts ouverts, autrement dit si pour tout  $x \in X$ , pour tout ouvert  $V$  de  $X$ , il existe un compact ouvert  $U \in U$  tel que  $x \in U \subseteq V$ .*

Ceci est proche de la notion d’espace *spectral* (Abramsky and Jung, 1994, section 7.2.5), qui est un espace fantomatique bien filtrant et cohérent. Tout espace fantomatique, donc aussi tout espace spectral, est localement compact.

Un exemple trivial d’espace fantomatique est donné par n’importe quel ensemble  $X$  muni de la topologie discrète. C’est le cas usuellement considéré en model-checking classique, où la topologie ne joue en général aucun rôle. Les compacts saturés de  $X$  en sont en effet les parties finies, qui sont toutes ouvertes. Comme toute partie de  $X$  s’écrit comme une union dirigée de parties finies, tout espace discret est bien fantomatique, et même spectral.

En général, tout espace *Alexandroff-discret* est fantomatique. Un espace  $X$  est dit Alexandroff-discret si et seulement si non seulement toute union, mais aussi toute intersection (finie ou pas) d’ouverts est ouverte. Il est facile de voir que la topologie de  $X$  coïncide alors avec la topologie d’Alexandroff de son préordre de spécialisation  $\leq$ . Les espaces Alexandroff-discrets sont donc juste les espaces préordonnés, munis de leur topologies d’Alexandroff. Dans un espace Alexandroff-discret, les ouverts sont les clos par le haut, et les compacts saturés sont les compacts finitaires  $\uparrow E$  ( $E \subseteq X$  fini). Les compacts saturés sont donc en particulier tous ouverts. Comme tout ouvert est union dirigée de compacts finitaires, un espace Alexandroff-discret  $X$  est fantomatique. Il est spectral si  $\leq$  est un ordre qui vérifie la propriété M (voir le corollaire 3.1.7).

Rappelons aussi que la relation  $\leq$  est un beau préordre sur  $X$  si et seulement si, réciproquement, tout ouvert d'Alexandroff est un compact finitaire. Ce genre d'espaces porte un nom Grothendieck (1960) :

**Définition 8.3.12 (Noethérien)** *Un espace noethérien  $X$  est un espace dans lequel tout ouvert est compact.*

Tout espace noethérien est automatiquement fantomatique : si  $x \in V$  et  $V$  est ouvert, alors on prend  $U = V$ , qui est aussi compact. Si  $X$  est ordonné par un beau préordre  $\leq$ , alors muni de sa topologie d'Alexandroff, il forme un espace noethérien. Un exemple typique est donné par l'espace  $\mathbb{N}^k$  des  $k$ -uplets d'entiers, ordonnés par l'ordre composante par composante  $\leq$ . Par le lemme de Dickson,  $\leq$  est un beau préordre, donc  $\mathbb{N}^k$  est noethérien.

En fait, la notion d'espace noethérien est en forte relation avec celle de beau préordre :

**Proposition 8.3.13** *Considérons les propriétés suivantes :*

1.  $X$  est noethérien ;
2.  $X$  est un espace dans lequel tout ouvert est un compact finitaire ;
3. le préordre de spécialisation  $\leq$  de  $X$  est un beau préordre.

Alors 3 implique 2, 2 implique 1, et si  $X$  est Alexandroff-discret alors 1 implique 3.

*Démonstration.* 3  $\Rightarrow$  2. Supposons que  $\leq$  soit un beau préordre. Les clos par le haut sont donc tous des compacts finitaires. On conclut parce que tout ouvert est clos par le haut.

L'implication 2  $\Rightarrow$  1 est évidente.

1  $\Rightarrow$  3 si  $X$  est Alexandroff-discret. Soit  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ , une suite infinie d'éléments de  $X$ , et considérons l'ouvert  $U = \uparrow \{x_n | n \geq 1\}$ . Par 1,  $U$  est compact. Par construction,  $(\uparrow x_n)_{n \geq 1}$  est un recouvrement ouvert de  $U$ , donc il existe une partie finie  $J$  telle que  $U \subseteq \uparrow \{x_j | j \in J\}$ . Soit  $n$  un entier strictement plus grand que tout élément de  $J$ . Par construction  $x_n \in U$ , donc  $x_n \in \uparrow \{x_j | j \in J\}$ , ce qui implique l'existence d'un indice  $j < n$  tel que  $x_j \leq x_n$ . Donc  $\leq$  est un beau préordre.  $\square$

On a une autre caractérisation des espaces noethériens :

**Proposition 8.3.14** *Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $X$  est noethérien si et seulement si le treillis  $\mathcal{O}(X)$  des ouverts de  $X$  vérifie la condition de chaîne croissante : toute chaîne croissante  $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots \subseteq U_k \subseteq \dots$  est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un indice  $N$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,  $U_k = U_N$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord  $X$  noethérien.  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  est ouvert, donc compact puisque  $X$  est noethérien. Du recouvrement ouvert dirigé  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on peut donc extraire  $U_N$  qui contient  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ . Pour tout  $k \geq N$ , on a alors  $U_k \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq U_N \subseteq U_k$ , donc  $U_k = U_N$ .

Réciproquement, supposons  $X$  non noethérien, et montrons que  $\mathcal{O}(X)$  n'a pas la condition de chaîne croissante. Soit  $U$  un ouvert non compact de  $X$ . Il existe donc un recouvrement ouvert  $(V_i)_{i \in I}$  de  $U$  dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini. On construit par récurrence sur  $i$  une suite d'ouverts  $W_1, W_2, \dots, W_k, \dots$ , comme suit. À chaque étape  $W_k$  sera une union

finie d'ouverts de la forme  $V_i$ ,  $i \in I$ . De plus, la suite  $W_1, W_2, \dots, W_k, \dots$ , sera strictement croissante. En supposant  $W_1, W_2, \dots, W_{k-1}$  construits, par hypothèse  $W_{k-1}$  ne contient pas  $U$ , sinon on aurait un sous-recouvrement fini de  $U$  par des  $V_i$ . Il existe donc un élément  $x_k$  de  $U$  hors de  $W_{k-1}$ , et qui est donc élément d'un certain  $V_{i_k}$ . Posons  $W_k = W_{k-1} \cup V_{i_k}$ . Puisque  $x_k \in W_k$  mais  $x_k \notin W_{k-1}$ ,  $W_{k-1}$  est strictement inclus dans  $W_k$ . De plus,  $W_k$  est encore une union finie d'ouverts de la forme  $V_i$ . Ceci termine la construction de la suite  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Elle n'est pas stationnaire, donc  $\mathcal{O}(X)$  n'a pas la condition de chaîne croissante.  $\square$

La théorie des espaces noethériens est riche, et nous renvoyons le lecteur à Goubault-Larrecq (2007) pour plus de détails.

Dans la définition d'une base effective ci-dessous, nous aurons besoin d'interpréter les éléments de la base comme des compacts ouverts, en particulier 1. Ceci requiert que  $X$  soit non seulement fantomatique mais compact. Or ceci semble restreindre la portée de la définition : un espace discret n'est compact que s'il est fini notamment. Ceci se répare facilement en considérant l'espace  $X_\perp$  à la place de  $X$ , au cas où  $X$  ne serait pas compact. On rappelle que  $X_\perp$  est toujours compact (lemme 6.3.8). De plus :

**Lemme 8.3.15** *Si  $X$  est fantomatique (resp. bien filtrant, cohérent, spectral, noethérien), alors  $X_\perp$  aussi.*

*Démonstration.* Si  $X$  est fantomatique, pour tout  $x \in X_\perp$  et tout ouvert  $V$  de  $X_\perp$  tel que  $x \in V$ , montrons qu'il existe un compact ouvert  $U$  de  $X_\perp$  tel que  $x \in U \subseteq V$ . Si  $V$  est un ouvert de  $X$ , alors  $x \in X$ , et il suffit de prendre un compact ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $x \in U \subseteq V$  :  $U$  est alors ouvert dans  $X_\perp$  par construction, et compact saturé de  $X_\perp$  car compact saturé de  $X$ , et en utilisant le lemme 6.3.8. L'autre cas est celui où  $V = X_\perp$ , auquel cas il suffit de prendre  $U = V$ .

Si  $X$  est bien filtrant,  $X_\perp$  aussi : nous avons déjà utilisé cet argument dans la démonstration du lemme 6.3.8. De plus, si  $X$  est cohérent, alors l'intersection de deux compacts saturés  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $X_\perp$  est, par le lemme 6.3.8, soit l'intersection de deux compacts saturés de  $X$ , soit l'intersection d'un compact saturé de  $X$  avec  $X_\perp$  tout entier, soit  $X_\perp$ . Dans tous les cas  $Q_1 \cap Q_2$  est un compact saturé de  $X_\perp$ .

Si  $X$  est noethérien, les ouverts de  $X_\perp$  sont  $X_\perp$  tout entier, qui est compact, ou des ouverts de  $X$ , qui sont par hypothèse compacts saturés dans  $X$ , donc compacts saturés dans  $X_\perp$  par le lemme 6.3.8.  $\square$

La construction de  $X_\perp$  n'est pas nécessaire dans le cas d'espaces Alexandroff-discrets dont le préordre de spécialisation est un beau préordre. En général, si  $X$  est noethérien,  $X$  est déjà compact : c'est parce que  $X$  est ouvert, donc compact.

Pour pouvoir interpréter l'intersection  $*$ , nous aurons besoin que l'intersection de deux compacts ouverts soit encore compacte ouverte.

**Définition 8.3.16** *Un espace  $X$  est faiblement cohérent si et seulement si l'intersection de deux compacts ouverts  $y$  est toujours compacte.*

*Un espace est stablement fantomatique si et seulement s'il est fantomatique, faiblement cohérent, et compact.*

**Lemme 8.3.17** *Tout espace noethérien est fantomatique. Tout espace cohérent est faiblement cohérent.*

*Démonstration.* Tout espace noethérien est fantomatique, et compact, comme on l'a remarqué plus haut. Soit  $X$  un espace noethérien, et montrons qu'il est faiblement cohérent. Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux compacts ouverts de  $X$ . Leur intersection  $V_1 \cap V_2$  est ouverte, donc compacte puisque  $X$  est noethérien. Le reste du lemme est évident.  $\square$

**Définition 8.3.18** *Un espace  $X$  est de spectre bien fondé si et seulement si toute famille filtrante  $(Q_i)_{i \in I}$  de compacts ouverts admet un plus petit élément : il existe  $j \in I$  tel que  $Q_j = \bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$ .*

On notera qu'un espace noethérien n'est pas nécessairement de spectre bien fondé. Par exemple, dans l'espace noethérien  $\mathbb{N}^k$  muni de sa topologie d'Alexandroff,  $Q_i = \{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n_1 + \dots + n_k \geq i\}$  est un compact (nécessairement finitaire), et  $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante, donc une famille filtrante de compacts. De plus,  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} Q_i = \emptyset$ , mais aucun  $Q_i$  n'est vide.

**Lemme 8.3.19** *On dit qu'un préordre  $\leq a$  la condition de chaîne croissante si et seulement si toute chaîne croissante  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq \dots$  est stationnaire, autrement dit il existe  $N$  tel que  $x_N \leq x_k$  et  $x_k \leq x_N$  pour tout  $k \geq N$ .*

*On dit que  $\leq a$  la propriété de limite finie si et seulement si toute famille dirigée  $(x_i)_{i \in I}$  a une borne supérieure prise dans la famille.*

*Soit  $X$  un espace Alexandroff-discret. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\leq a$  la condition de chaîne croissante ;
2.  $\leq a$  la propriété de limite finie ;
3.  $X$  est de spectre bien fondé.

*Démonstration.* 1  $\Rightarrow$  2. Supposons la condition de chaîne croissante vérifiée, et soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille dirigée. Supposons que cette famille n'ait pas de borne supérieure prise dans la famille. On construit une suite croissante comme suit. D'abord,  $y_1$  est un élément quelconque de la famille. Ensuite, en supposant la suite croissante non stationnaire  $y_1 \leq \dots \leq y_n$  définie, puisque  $(x_i)_{i \in I}$  n'a pas de borne supérieure prise dans la famille,  $y_n$  n'en est pas une borne supérieure. Il existe donc un élément  $x_i$  qui n'est pas inférieur ou égal à  $y_n$ . Comme  $x_i$  et  $y_n$  sont dans la famille, et que cette dernière est dirigée, il existe donc un autre élément de la famille plus grand ou égal à  $x_i$  et à  $y_n$ . Appelons-le  $y_{n+1}$ . On a donc  $y_1 \leq \dots \leq y_n \leq y_{n+1}$ . De plus, cette suite n'est pas stationnaire : si on avait  $y_{n+1} \leq y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) alors  $y_{n+1} \leq y_n$ , donc  $x_i \leq y_n$ , ce qui est impossible. On fabrique ainsi par récurrence sur  $n$  une suite infinie non stationnaire  $y_1 \leq \dots \leq y_n \leq \dots$ , ce qui contredit la condition de chaîne croissante.

2  $\Rightarrow$  3. Supposons que  $X$  ait la propriété de limite finie. En particulier,  $X$  est un cpo, et l'on rappelle que tout cpo est finitairement sobre. Comme  $X$  est Alexandroff-discret, les compacts saturés de  $X$  sont les compacts finitaires, qui sont tous ouverts. Soit donc  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de compacts ouverts d'intersection incluse dans l'ouvert  $U$ . On peut écrire  $Q_i = \uparrow E_i$ , où les  $E_i$  sont des parties finies de  $X$ . Puisque  $X$  est finitairement sobre, il existe  $i \in I$  tel

que  $Q_i \subseteq U$ , donc  $X$  est bien filtrant. Par le lemme 3.3.1, toute intersection filtrante  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  de compacts saturés (finitaires, ouverts) est un compact saturé (donc finitaire)  $Q$ . Puisque  $X$  est Alexandroff-discret,  $Q$  est aussi ouvert, donc puisque  $X$  est bien filtrant, il existe  $j \in I$  tel que  $Q_j \subseteq Q$ . Comme  $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq Q_j$ , on a  $Q_j = Q$  :  $X$  est de spectre bien fondé.

$3 \Rightarrow 1$ . Supposons  $X$  de spectre bien fondé. Soit  $x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$  une suite croissante. Posons  $Q_i$  le compact finitaire  $\uparrow x_i$ .  $Q_i$  est ouvert puisque  $X$  est Alexandroff-discret. De plus, la suite  $(Q_i)_{i \geq 1}$  est décroissante, donc filtrante. Il existe donc un  $j \geq 1$  tel que  $Q_j = \bigcap_{i \geq 1} Q_i$ . Donc  $Q_j \subseteq \bigcap_{i \geq j} Q_i$ , ce qui implique que  $x_j$  est supérieur ou égal à tout  $x_i$ ,  $i \geq j$ , autrement dit la suite est stationnaire.  $\square$

**Définition 8.3.20 (Base calculable)** Soit  $X$  un espace stablement fantomatique. Une base calculable de compacts ouverts de  $X$  est un septuplet  $(N, \mathcal{KO}[\_], 0, 1, +, \star, \preceq)$  tel que :

- $N$  est un ensemble dénombrable récursif, dit de codes ;
- $\mathcal{KO}[\_]$  est une fonction de  $N$  vers l'espace  $\mathcal{KO}(X)$  des compacts ouverts de  $X$  ; lorsque  $U = \mathcal{KO}[u]$ , on dira que  $u$  est un code du compact ouvert  $U$  ;
- $0 \in N$  est un code du compact ouvert vide  $\emptyset$  ;
- $1 \in N$  est un code du compact ouvert  $X$  ;
- $+$  est une fonction de  $N \times N$  dans  $N$ , telle que  $\mathcal{KO}[u + v] = \mathcal{KO}[u] \cup \mathcal{KO}[v]$  pour tous  $u, v \in N$  ;
- $\star$  est une fonction de  $N \times N$  dans  $N$ , telle que  $\mathcal{KO}[u \star v] = \mathcal{KO}[u] \cap \mathcal{KO}[v]$  pour tous  $u, v \in N$  ; ;
- $\preceq$  est une relation binaire, récursive, entre éléments de  $N$ , telle que  $u \preceq v$  si et seulement si  $\mathcal{KO}[u] \subseteq \mathcal{KO}[v]$  ;
- on demande finalement que  $(\mathcal{KO}[u])_{u \in N}$  engendre la topologie de  $X$ , ceci revenant à dire que tout ouvert  $U$  de  $X$  est union d'une famille dirigée de la forme  $(\mathcal{O}[u_i])_{i \in I}$ , ou encore que  $(\mathcal{O}[u])_{u \in N}$  forme une base d'éléments finis du cpo algébrique  $\mathcal{O}(X)$ .

Par imitation de la définition 8.3.2, on pose :

**Définition 8.3.21 (Fonction calculablement continue)** Soit  $N_1$  une base calculable de l'espace stablement fantomatique  $X_1$ ,  $N_2$  une base calculable de l'espace stablement fantomatique  $X_2$ . Notons  $u \cong v$  si et seulement si  $u \preceq v$  et  $v \preceq u$ .

Une fonction calculablement continue de  $N_1$  vers  $N_2$  est une fonction  $e : N_1 \rightarrow N_2$  telle que :

- $e(1) \cong 1$  ;
- $e(u \star v) \cong e(u) \star e(v)$  ;
- $e(u + v) \cong e(u) + e(v)$  ;
- la relation  $u \preceq e(v)$  est récursive.

On dira que  $e$  est fortement calculablement continue, ou calculable, si et seulement si  $e$  est elle-même une fonction récursive, auquel cas la relation  $u \preceq e(v)$  est automatiquement récursive elle aussi.

On en déduit une notion immédiate de système de transition ludique calculable, bien que les ouverts  $[U > r]$  ne forment pas en général une base de compacts ouverts, même lorsque  $U$  est compact et ouvert.

**Définition 8.3.22** Une fonction de transition calculable  $e_\ell$  de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1} \text{wk}(X)$  est une fonction calculable de  $N \times \mathbf{Q}$  vers  $N$ . On dit que  $e_\ell$  représente  $\theta_\ell$  si et seulement si  $\mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket e_\ell(v, q) \rrbracket = \theta_\ell^{-1}[\mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v \rrbracket > q]$  pour tout  $v \in N$ ,  $q \in \mathbf{Q}$ . Un système de transitions ludique calculable est une famille  $e = (e_\ell)_{\ell \in L}$  de fonctions de transitions calculables ; il représente  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  si et seulement si  $e_\ell$  représente  $\theta_\ell$  pour tout  $\ell \in L$ .

On peut alors calculer l'ensemble des points  $x$  où  $x, \rho \models_\theta^I F$ , de façon relativement évidente.

**Proposition 8.3.23** Soit  $X$  un espace stablement fantomatique.

Soit  $N$  une base effective de compacts ouverts de  $X$ , et  $\mathbf{Q}$  un sous-ensemble récursif partout dense de  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{J}$  une interprétation effective,  $\varrho$  un environnement effectif. Soit  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee}(\mathcal{A})$ , on peut calculer un code  $u_{\mathcal{J}, \varrho}(F)$  tel que  $\mathcal{O} \llbracket u_{\mathcal{J}, \varrho}(F) \rrbracket = I \llbracket F \rrbracket_\theta \rho$ , où  $I = \mathcal{O} \llbracket \mathcal{J} \rrbracket$ ,  $\rho = \mathcal{O} \llbracket \varrho \rrbracket$ . De façon explicite :

$$\begin{aligned} u_{\mathcal{J}, \varrho}(A) &= \mathcal{J}(A) \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}(\varphi) &= \varrho(\varphi) \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}(\top) &= 1 \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1 \wedge F_2) &= u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1) \star u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_2) \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}(\perp) &= 0 \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1 \vee F_2) &= u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_1) + u_{\mathcal{J}, \varrho}(F_2) \\ u_{\mathcal{J}, \varrho}([\ell]_{>r} F) &= e_\ell(u_{\mathcal{J}, \varrho} F, r) \end{aligned}$$

Si  $X$  est de plus noethérien, alors c'est encore vrai de toute formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\mathcal{A})$ . La clause supplémentaire est :

$$\begin{aligned} u_{\mathcal{J}, \varrho}(\mu\varphi \cdot F) &= v_k \\ \text{où } v_0 &= 0, v_{n+1} = u_{\mathcal{J}, \varrho[\varphi \mapsto v_n]}(F) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ \text{et } k &\text{ est l'indice le plus petit tel que } v_{k+1} \preceq v_k \end{aligned}$$

C'est encore vrai de toute formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \nu}(\mathcal{A})$  si  $X$  est de spectre bien fondé, et de toute formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu \nu}(\mathcal{A})$  si  $X$  est noethérien et de spectre bien fondé. On pose alors :

$$\begin{aligned} u_{\mathcal{J}, \varrho}(\nu\varphi \cdot F) &= w_k \\ \text{où } w_0 &= 1, w_{n+1} = u_{\mathcal{J}, \varrho[\varphi \mapsto w_n]}(F) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ \text{et } k &\text{ est l'indice le plus petit tel que } w_k \preceq w_{k+1} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Toutes les clauses sont évidentes, sauf pour le calcul de  $\mu\varphi \cdot F$  et de  $\nu\varphi \cdot F$ .

Pour  $\mu\varphi \cdot F$ , la suite  $v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est croissante dans l'ordre  $\preceq$  : on a  $v_0 \preceq v_1$ , et si  $v_i \preceq v_{i+1}$  alors  $\mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_i \rrbracket \subseteq \mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_{i+1} \rrbracket$ , donc  $\mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_{i+1} \rrbracket = I \llbracket F \rrbracket_\theta (\rho[\varphi \mapsto \mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_i \rrbracket]) \subseteq I \llbracket F \rrbracket_\theta (\rho[\varphi \mapsto \mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_{i+1} \rrbracket])$  (par le lemme 8.2.5) =  $\mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_{i+2} \rrbracket$ . L'union  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_n \rrbracket$  est un ouvert, donc un compact puisque  $X$  est ici supposé noethérien. Comme la famille  $(\mathcal{K}\mathcal{O} \llbracket v_n \rrbracket)_{n \in \mathbb{N}}$  est dirigée,

il existe donc un indice  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $U \subseteq \mathcal{KO} \llbracket v_k \rrbracket$ . Alors  $\mathcal{KO} \llbracket v_{k+1} \rrbracket \subseteq U \subseteq \mathcal{KO} \llbracket v_k \rrbracket$ , donc  $v_{k+1} \preceq v_k$ . Choisissons  $k$  minimal tel que  $v_{k+1} \preceq v_k$ . Comme la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $v_k \cong v_{k+1}$ , et il est facile de voir qu'alors  $v_n \cong v_k$  pour tout  $n \geq k$ . Donc  $U = \mathcal{KO} \llbracket v_k \rrbracket$  est le plus petit point fixe cherché, soit  $U = \mathcal{KO} \llbracket v_k \rrbracket = I \llbracket \mu\varphi \cdot F \rrbracket_{\theta} \rho$ .

Pour  $\nu\varphi \cdot F$ , un argument similaire établit que  $w_n, n \in \mathbb{N}$ , est une suite décroissante. La suite  $(\mathcal{KO} \llbracket w_n \rrbracket)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une suite décroissante de compacts ouverts. Comme  $X$  est de spectre bien fondé, son intersection est atteinte à un certain indice  $k$ . Alors  $w_k \preceq w_{k+1}$ , et  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \mathcal{KO} \llbracket w_k \rrbracket$ .  $\square$

## 8.4 Évaluation de gains

Évaluer une formule  $F$  sur un système de transitions ludique  $\theta$  est une chose, mais il peut être plus intéressant de savoir évaluer des gains le long de parties jouées sur  $\theta$ . Ceci est inspiré de la théorie des processus de décision de Markov.

Associons à chaque état  $x \in X$  et chaque action  $\ell \in L$  une *récompense*  $r_{\ell}(x) \in \mathbb{R}$ , typiquement une somme d'argent que nous gagnons si nous exécutons une action  $\ell$  à partir de  $x$ . Si  $r_{\ell}(x) < 0$ , nous perdons de l'argent, si  $r_{\ell}(x) = 0$  alors passer par l'état  $x$  est neutre : nous ne perdons ni ne gagnons d'argent.

Cherchons maintenant à évaluer notre gain moyen sur toute partie jouée sur le système de transition ludique  $\theta = (\theta_{\ell})_{\ell \in L}$ .

En premier, nous supposons que P peut contrôler en partie la stratégie d'évolution de la partie en demandant de jouer une suite  $w$  d'actions  $\ell \in L$  appartenant à un certain langage  $W$  de mots, finis ou infinis. Un cas particulièrement intéressant sera celui où  $W$  est un langage rationnel, c'est-à-dire où  $W$  est le langage reconnu en un certain sommet d'un automate, et nous nous y limiterons.

**Définition 8.4.1 (Automate)** *Un automate est un couple  $(V, E)$ , où  $E \subseteq V \times L \times V$  est l'ensemble des transitions ; on supposera que, pour tout  $q \in V$ , pour tout  $\ell \in L$ , l'ensemble des  $q'$  tels que  $(q, \ell, q') \in E$  est fini. On notera  $q \xrightarrow{\ell} q'$  si  $(q, \ell, q')$  appartient à  $E$ .*

On peut penser à  $q$  comme à un numéro de ligne dans un programme que P exécute, et  $X$  et  $\theta$  comme étant l'environnement (le reste du monde). Alors que P est au sommet  $q$ , et que l'environnement est dans l'état  $x$ , P pourra choisir une action  $\ell$  telle que  $q \xrightarrow{\ell} q'$ , pour un certain sommet  $q' \in V$  — c'est-à-dire exécuter une instruction  $\ell$ , passant au point de programme suivant  $q'$  — et alors l'environnement passera dans un état  $y \in X$  selon la préprobabilité  $\theta_{\ell}(x)$ .

Alors que P a un contrôle sur les actions  $\ell \in L$ , en revanche, P ne peut pas contrôler les actions de C, modélisées par le non-déterminisme inclus dans le fait que  $\theta_{\ell}(x)$  est un jeu, et non pas une valuation.

Nous allons ensuite supposer que P cherche à maximiser ses gains. Intuitivement, le gain de P selon un chemin d'exécution, partant de l'état  $x_0$  et du sommet  $q_0$ , passant ensuite via une action  $\ell_1 \in L$  à un état  $x_1$  et un sommet  $q_1, \dots$ , via une action  $\ell_k \in L$  à un état  $x_k$  et un sommet  $q_k, \dots$ , comme étant la somme des récompenses  $r_{\ell_1}(x_0) + r_{\ell_2}(x_1) + \dots + r_{\ell_k}(x_{k-1}) + \dots$ . On

peut généraliser un peu, et supposer que la récompense dépend aussi du sommet  $q$  où P se trouve, ce qui modélise par exemple que P puisse préférer recevoir un gain de 1 s'il est dans l'état  $q_1$  plutôt que s'il est dans l'état  $q_2$ . On peut aussi demander que le gain dépende du sommet  $q'$  où P arrive après avoir exécuté l'action  $\ell$ . Le gain selon un chemin d'exécution comme ci-dessus s'exprimera donc en général  $r_{q_0 \xrightarrow{\ell_1} q_1}(x_0) + r_{q_1 \xrightarrow{\ell_2} q_2}(x_1) + \dots + r_{q_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} q_k}(x_{k-1}) + \dots$ , où la fonction de récompense  $r_{q \xrightarrow{\ell} q'}(x)$  peut dépendre en général en  $q$ ,  $\ell$ , et  $q'$  en plus de  $x$ .

Si le chemin d'exécution est fini, ceci est bien défini, mais pas s'il est infini. Pour éviter cette difficulté, nous allons supposer que P préfère obtenir de l'argent tout de suite, plutôt que d'attendre de franchir une ou plusieurs transitions, et de gagner de l'argent plus tard : si son gain à l'état  $y$  successeur de  $x$  via l'action  $\ell$ , de  $q$  à  $q'$ , vaut  $a$ , alors il estimera équivalent si on lui donne  $a\gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'}$  tout de suite, où  $\gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'}$  est une constante dans  $]0, 1[$ , qui peut en général dépendre de  $q$ ,  $\ell$ , et  $q'$ . Il est courant de poser  $\gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'}$  égal à une constante  $\gamma$ , représentant une forme de rabais. Le gain le long d'une exécution sera alors de la forme  $\sum_{k \geq 0} \gamma_{q_0 \xrightarrow{\ell_1} q_1} \gamma_{q_1 \xrightarrow{\ell_2} q_2} \dots + \gamma_{q_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} q_k} r_{q_k \xrightarrow{\ell_{k+1}} q_{k+1}}(x_k)$ , ce qui aura un sens dès que, par exemple, toutes les récompenses sont uniformément bornées — il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq r_{q \xrightarrow{\ell} q'}(x) \leq b$  pour tous  $q, \ell, q', x$  — et que les rabais sont positifs ou nuls et majorés par une constante  $\gamma < 1$ .

Ceci étant posé, le gain moyen  $V_q(x)$  au sommet  $q$  en l'état  $x$ , s'il est défini, vérifiera l'équation suivante :

$$V_q(x) = \sup_{\ell, q' / q \xrightarrow{\ell} q'} \left[ r_{q \xrightarrow{\ell} q'}(x) + \gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'} \int_{y \in X} V_{q'}(y) d\theta_\ell(x) \right] \quad (8.3)$$

Par convention, nous supposons que la borne supérieure d'une famille vide de réels vaut zéro. En particulier, si P est à un sommet  $q$ , et ne peut exécuter aucune action  $\ell$ , nous estimerons que le système s'arrête, et que P ne gagne ni ne perd rien.

Il peut aider de voir ce que l'équation (8.3) signifie lorsque  $\theta_\ell(x)$  est une crédibilité simple  $\sum_{i=1}^{n_\ell} a_{i\ell x} u_{Q_{i\ell x}}$ , modélisant le fait que, d'une part, les choix probabilistes sont parmi un nombre fini de possibilités, de probabilités  $a_{i\ell x}$ , et d'autre part, C joue de façon non déterministe parmi des ensembles (compacts)  $Q_{i\ell x}$  :

$$V_q(x) = \sup_{\ell, q' / q \xrightarrow{\ell} q'} \left[ r_{q \xrightarrow{\ell} q'}(x) + \gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'} \sum_{i=1}^{n_\ell} a_{i\ell x} \min_{y \in Q_{i\ell x}} V_{q'}(y) \right] \quad (8.4)$$

On voit notamment comment s'organise l'alternance des choix de P, tendant à maximiser le gain (les sup), les choix probabilistes (les sommes pondérées par les coefficients  $a_{i\ell x}$ ), et les tentatives de C de minimiser le gain de P (les min).

Nous cherchons maintenant à distinguer certains cas où l'équation (8.3) a une solution, et où cette solution est unique. Classiquement, les deux cas les plus importants sont celui à *horizon fini*, où l'on ne peut pas jouer plus d'un nombre fixé à l'avance de tours ; et le cas où le rabais  $\gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'}(x)$  est une constante  $\gamma$  dans  $]0, 1[$ . Nous examinerons ces deux cas plus loin. En attendant, observons que la formule (8.3) est un cas particulier. Par exemple, on peut vouloir attribuer

des récompenses non seulement lorsque l'on franchit certaines transitions, mais aussi lorsque l'on atteint certains états (même si on ne peut pas sortir de ces états). Nous proposons donc un formalisme de systèmes d'équations fonctionnelles qui résume les constructions typiques dont nous avons besoin. Ceci s'inspire librement de Desharnais et al. (2004, définition 4.1).

**Définition 8.4.2** Soit  $X$  un espace topologique,  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un système de transitions ludique sur  $X$ , et  $(V, E)$  un automate,  $E \subseteq V \times L \times V$ . Soit  $R$  un ensemble, dit de paramètres de récompenses,  $G$  un ensemble, dit de paramètres de rabais.

On définit les grammaires des expressions fonctionnelles de sommet  $f \in \mathcal{F}(R, G, X)$  sur  $R, G$ , et l'ensemble d'inconnues  $X$ , et des expressions fonctionnelles de transitions  $f^\rightarrow \in \mathcal{F}^\rightarrow(R, G, X)$  sur  $R, G$ , et l'ensemble d'inconnues  $X$ , par :

$f ::=$	$r$	récompense ( $r \in R$ )
	$v$	variable ( $v \in X$ )
	$\max(f, f)$	maximum
	$\min(f, f)$	minimum
	$f + f$	somme
	$g \times f$	produit par une constante ( $g \in G$ )
	$\square_A f^\rightarrow$	supremum sur les transitions sortantes ( $A \in \mathbb{P}(L)$ )
	$\diamond_A f^\rightarrow$	minimum sur les transitions sortantes ( $A \in \mathbb{P}_{\text{fin}}(L)$ )
$f^\rightarrow ::=$	$r$	récompense ( $r \in R$ )
	$\max(f^\rightarrow, f^\rightarrow)$	maximum
	$\min(f^\rightarrow, f^\rightarrow)$	minimum
	$f^\rightarrow + f^\rightarrow$	somme
	$g \times f^\rightarrow$	produit par une constante ( $g \in G$ )
	$\int f$	moyenne sur l'état suivant

Un contexte  $\mathcal{C}$  est la donnée de familles de fonctions  $\mathcal{C}_q$  ( $q \in V$ ) et  $\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}$  ( $(q, \ell, q') \in E$ ) de  $R$  vers l'espace des fonctions continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ ; de familles de fonctions, encore notées  $\mathcal{C}_q$  ( $q \in V$ ) et  $\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}$  ( $(q, \ell, q') \in E$ ), de  $G$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

Un environnement  $\rho$  est une famille de fonctions  $\rho_q$ ,  $q \in V$ , qui à toute variable  $v \in X$  associe une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ .

La sémantique des expressions fonctionnelles est donnée par deux familles de fonctions continues  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  ( $q \in V$ ,  $f \in \mathcal{F}(R, G, X)$ ) et  $\mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  ( $(q, \ell, q') \in E$ ,  $f^\rightarrow \in \mathcal{F}^\rightarrow(R, G, X)$ ), définies comme suit. Les clauses les plus importantes sont :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} \llbracket \square_A f^\rightarrow \rrbracket_q \rho(x) &= \sup_{\ell \in A, q' \in V/q \xrightarrow{\ell} q'} \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \\
 \mathcal{C} \llbracket \diamond_A f^\rightarrow \rrbracket_q \rho(x) &= \min_{\ell \in A, q' \in V/q \xrightarrow{\ell} q'} \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \\
 \mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \int_{y \in X} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho(y) d\theta_\ell(x)
 \end{aligned}$$

où dans le premier et le second cas, on supposera par convention que la borne supérieure et le minimum d'une famille de réels indexée par l'ensemble vide (le cas où il n'existe aucun  $\ell \in A$  et aucun  $q' \in V$  tel que  $q \xrightarrow{\ell} q'$ ) vaut 0. Les autres sont plus triviales :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \llbracket r \rrbracket_q \rho(x) &= \mathcal{C}_q(r)(x) & (8.5) \\
\mathcal{C} \llbracket v \rrbracket_q \rho(x) &= \rho_q(v) \\
\mathcal{C} \llbracket \max(f_1, f_2) \rrbracket_q \rho(x) &= \max(\mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho(x), \mathcal{C} \llbracket f_2 \rrbracket_q \rho(x)) \\
\mathcal{C} \llbracket \min(f_1, f_2) \rrbracket_q \rho(x) &= \min(\mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho(x), \mathcal{C} \llbracket f_2 \rrbracket_q \rho(x)) \\
\mathcal{C} \llbracket f_1 + f_2 \rrbracket_q \rho(x) &= \mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho(x) + \mathcal{C} \llbracket f_2 \rrbracket_q \rho(x) \\
\mathcal{C} \llbracket g \times f \rrbracket_q \rho(x) &= \mathcal{C}_q(g) \cdot \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x)
\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \llbracket r \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(r)(x) & (8.6) \\
\mathcal{C} \llbracket \max(f_1^{\rightarrow}, f_2^{\rightarrow}) \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \max(\mathcal{C} \llbracket f_1^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x), \mathcal{C} \llbracket f_2^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x)) & (8.7) \\
\mathcal{C} \llbracket \min(f_1^{\rightarrow}, f_2^{\rightarrow}) \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \min(\mathcal{C} \llbracket f_1^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x), \mathcal{C} \llbracket f_2^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x)) \\
\mathcal{C} \llbracket f_1^{\rightarrow} + f_2^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \mathcal{C} \llbracket f_1^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) + \mathcal{C} \llbracket f_2^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \\
\mathcal{C} \llbracket g \times f^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(g) \cdot \mathcal{C} \llbracket f^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x)
\end{aligned}$$

Une équation fonctionnelle est une expression de la forme  $v \approx f$ , où  $v \in X$  et  $f$  est une expression fonctionnelle de sommet. Un système fonctionnel  $\Sigma$  est une famille finie d'équations fonctionnelles  $v_i \approx f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , où les  $v_i$  sont distinctes deux à deux.

Une solution d'un système fonctionnel  $\Sigma = \{v_i \approx f_i, 1 \leq i \leq n\}$  dans un contexte  $\mathcal{C}$  est un environnement  $\rho$  tel que  $\rho_q(v_i) = \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho$  pour tout  $q \in V$ .

On note en premier que la sémantique est bien définie, modulo quelques petites hypothèses. La première est que le système de transitions ludique  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  soit standard.

**Définition 8.4.3 (Standard)** Un système de transitions ludique  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  est dit standard si et seulement si, pour tout  $x \in X$ , pour tout  $\ell \in L$ ,  $\theta_\ell(x)(X)$  vaut soit 0 soit 1, et si de plus l'ensemble  $\{x \in X \mid \theta_\ell(x)(X) = 0\}$  des états de blocage est ouvert.

Autrement dit, soit  $\theta_\ell(x)$  est un jeu normalisé, soit  $\theta_\ell(x)$  est le jeu nul. Dans ce dernier cas, on dit que  $x$  est un état de blocage, car il n'y a aucune façon de déclencher une transition à partir de  $x$ . Notons que l'ensemble des états de blocage est le complémentaire, par exemple, de  $\theta_\ell^{-1}[X > 1/2]$ , et est donc nécessairement un fermé. On demande qu'il soit aussi ouvert. C'est le cas notamment des systèmes de transition ludiques normalisés.

**Lemme 8.4.4** Soit  $(V, E)$  un automate. Disons qu'un contexte  $\mathcal{C}$  est borné si et seulement si il existe deux constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  telles que  $a \leq \mathcal{C}_q(r)(x), \mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(r)(x), \mathcal{C}_q(g), \mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(g) \leq b$  pour tous sommets  $q \in V$ , toutes transitions  $(q, \ell, q') \in E$ , tous paramètres  $r \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{G}$ , et tout  $x \in X$ . On dit qu'il est borné positif si et seulement si l'on peut choisir  $a \in \mathbb{R}^+$ .

Disons de même qu'un environnement  $\rho$  est borné si et seulement si il existe deux constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  telles que  $a \leq \rho_q(v)(x) \leq b$  pour tout  $q \in V$ ,  $v \in X$ ,  $x \in X$ . On dit qu'il est borné positif si et seulement si l'on peut choisir  $a \in \mathbb{R}^+$ .

Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un système de transitions ludique,  $\mathcal{C}$  un contexte borné,  $\rho$  un environnement borné. Supposons que  $\theta$  soit standard, ou bien que  $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont bornés positifs. Alors, pour tous sommets  $q \in V$  et toutes transitions  $q \xrightarrow{\ell} q'$  de  $(V, E)$ , pour toute expression fonctionnelle  $f$ , resp.  $f^\rightarrow$ ,  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho$  et  $\mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho$  sont bien définies, continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , et bornées au sens où il existe deux constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  telles que  $a \leq \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x), \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \leq b$  pour tous  $q \in V$ ,  $(q, \ell, q') \in E$ ,  $x \in X$ . De plus, si  $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont bornés positifs, alors  $a \in \mathbb{R}^+$ .

*Démonstration.* Par récurrence structurelle sur  $f$ , resp.  $f^\rightarrow$ . Dans le cas  $f = \square_A f_1$ , on note que la borne supérieure d'une famille quelconque de fonctions continues de  $X$  vers  $[a, b]$  existe, et est encore trivialement bornée et continue. Posons en effet  $f = \sup_{i \in I} f_i$ . Si  $I = \emptyset$ , c'est trivial. Sinon,  $f$  est bornée par  $[a, b]$ , et pour la continuité on note que  $f^{-1}]t, +\infty[ = \{x \in X \mid \sup_{i \in I} f_i(x) > t\} = \{x \in X \mid \exists i \in I \cdot f_i(x) > t\} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}]t, +\infty[$  est ouvert.

Dans le cas  $f = \diamond_A f_1$ , on rappelle que  $A$  est supposé fini, donc à  $q$  donné, il existe un nombre fini de transitions  $(q, \ell, q')$  telles que  $\ell \in A$ . C'est la raison d'être de notre hypothèse selon laquelle il n'existe qu'un nombre fini de  $q'$  tels que  $(q, \ell, q') \in E$  (définition 8.4.1). On note ensuite que le minimum d'une famille finie de fonctions continues de  $X$  vers  $[a, b]$  est bornée et continue. Soit  $f(x) = \min_{i \in I} f_i(x)$ . Si  $I = \emptyset$ , c'est clair. Sinon,  $f$  est bornée par  $a$  et  $b$ , et continue, car  $f^{-1}]t, +\infty[ = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}]t, +\infty[$  est une intersection finie d'ouverts.

Dans le cas  $f^\rightarrow = \int f$ , on note que  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho$  est définie, continue et bornée (disons dans  $[a, b]$ , où  $a$  et  $b$  ne dépendent pas de  $q$ ) par hypothèse de récurrence, donc son intégrale de Choquet par rapport à  $\theta_\ell(x)$  existe. La fonction  $\mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho$  est donc bien définie.

Si  $\mathcal{C}$  et  $\rho$  sont bornés positifs, alors  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , donc  $\mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho$  est bornée par 0 et  $b$ , et est continue par la proposition 4.5.4.

Sinon, par hypothèse  $\theta$  est standard. En supposant, ce que l'on peut faire sans perdre en généralité, que  $a \leq 0$  et  $b \geq 0$ , la fonction  $\mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho$  prend ses valeurs dans  $[a, b]$ , puisque  $\theta_\ell(x)(X) \leq 1$  pour tout  $\ell \in L$  et tout  $x \in X$ . Soit  $F$  l'ouvert fermé des états de blocage, et  $U$  son complémentaire, qui est aussi un ouvert fermé. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \int_{y \in Y} \left( \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho(y) - a \right) d\theta_\ell(x) + a \quad \text{si } x \in U \\ \mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= 0 \quad \text{si } x \in F \end{aligned}$$

où nous remarquons que la fonction  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho - a$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . (La première égalité est par le lemme 4.1.5, sachant que  $\theta_\ell(x)(X) = 1$ .) Par la proposition 4.5.4, la fonction qui à  $\nu \in \mathbf{J}_{\leq 1} wk(X)$  associe l'intégrale de Choquet de  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho(y) - a$  par rapport à  $\nu$  est continue. Comme  $\theta_\ell$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1} wk(X)$ , la fonction  $g$  qui à  $x$  associe :

$$\int_{y \in Y} \left( \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho(y) - a \right) d\theta_\ell(x) + a$$

est donc continue. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , calculons l'image réciproque de l'ouvert  $]t, +\infty[$  par  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho$ . Si  $t \geq 0$ , elle vaut  $\{x \in X \mid g(x) > t \text{ et } x \in U\} = g^{-1}]t, +\infty[ \cap U$ , qui est ouvert. Sinon, elle vaut  $F \cup (g^{-1}]t, +\infty[ \cap U)$ , qui est aussi ouvert parce que  $F$  est ouvert.

Les autres cas sont évidents, et seront donc omis.  $\square$

À titre d'exemple, l'équation (8.3) exprime que  $(V_q)_{q \in V}$  est une solution du système fonctionnel  $\Sigma$  contenant juste l'équation :

$$v \approx \square_L \left( r + g \times \int v \right) \quad (8.8)$$

dans le contexte  $\mathcal{C}$  donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(r)(x) &= r_{q \xrightarrow{\ell} q'}(x) \\ \mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(g) &= \gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'} \end{aligned}$$

On note que l'équation (8.8), est *gardée*, c'est-à-dire que toute variable ( $v$ , ici) apparaît uniquement dans la portée d'un opérateur  $\square$ .

**Définition 8.4.5 (Gardée)** Une expression fonctionnelle  $f$  est gardée si et seulement si toute variable  $v$  apparaissant dans  $f$  n'y apparaît que dans des sous-expressions de la forme  $\square f^{\rightarrow}$  de  $f$ .

Une équation fonctionnelle  $v \approx f$  est gardée si et seulement si  $f$  est gardée. Un système fonctionnel  $\{v_i \approx f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  est gardé si et seulement si toutes les équations fonctionnelles  $v_i \approx f_i$  sont gardées.

Identifions quelques cas classiques où un système d'équations fonctionnelles a une solution unique. Le premier cas est celui dit à *horizon fini*.

Classiquement, l'hypothèse d'horizon fini demande que le nombre de coups joués par P et C soit majoré par une constante donnée  $k \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 8.4.6 (Horizon fini)** Soit  $\theta$  un système de transitions ludique,  $\mathcal{C}$  un contexte borné, et  $(V, E)$  un automate. On suppose que  $\delta$  est standard ou que  $\mathcal{C}$  est borné positif.

On dit que le sommet  $q \in V$  est de profondeur finie si et seulement s'il existe une constante  $k \in \mathbb{N}$  telle que, pour tout chemin  $q = q_0 \xrightarrow{\ell_1} q_1 \xrightarrow{\ell_2} \dots \xrightarrow{\ell_i} q_i$ , on a  $i \leq k$ . La plus petite de ces constantes  $k$  est la profondeur de  $q$  dans  $(V, E)$ . On dit que  $(V, E)$  lui-même est de profondeur finie si et seulement si tout  $q \in V$  est de profondeur finie, majorée par une constante  $k \in \mathbb{N}$ . La profondeur de  $(V, E)$  est la plus petite de ces constantes  $k$ .

Si  $(V, E)$  est de profondeur finie, alors tout système fonctionnel gardé  $\Sigma = \{v_i \approx f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  a une solution bornée  $\rho$ , qui est bornée positive si  $\mathcal{C}$  est borné positif. Si les seules variables apparaissant dans les  $f_i$  sont parmi  $v_1, \dots, v_n$ , alors cette solution est unique au sens où les fonctions  $\rho_q(v_i)$ ,  $q \in V$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont uniques.

Par exemple, c'est le cas si  $V$  est fini et l'automate n'a aucun *circuit*, c'est-à-dire aucun chemin partant d'un sommet  $q$  et y revenant après un nombre non nul de transitions. C'est encore le cas

lorsque  $V$  est infini, et l'automate est le graphe de transitions d'un programme déterministe qui termine.

*Démonstration.* Nécessairement, pour tout  $i$ ,  $\rho_q(v_i) = \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho$ . On peut alors construire  $\rho_q(v)$  pour toute variable  $v \in X$  par récurrence sur la profondeur de  $q$  dans  $(V, E)$ . Autrement dit, on peut supposer — c'est l'hypothèse de récurrence — que  $\rho_{q'}(v)$  est déjà définie (de façon unique si les seules variables apparaissant dans les  $f_i$  sont parmi  $v_1, \dots, v_n$ ) pour tout  $q'$  de profondeur strictement inférieure à celle de  $q$ . Puisque  $f_i$  est gardée, ceci implique que  $\mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho$  est elle-même bien définie (et unique si les seules variables apparaissant dans les  $f_i$  sont parmi  $v_1, \dots, v_n$ ), ce qui se démontre facilement par récurrence sur la structure de  $f_i$ . Ceci définit (de façon unique de nouveau si les seules variables apparaissant dans les  $f_i$  sont parmi  $v_1, \dots, v_n$ ) les valeurs  $\rho_q(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Pour toute variable  $v$  qui n'est pas parmi  $v_1, \dots, v_n$ , on définit  $\rho_q(v)$  de façon arbitraire, par exemple  $\rho_q(v)(x) = 0$ .

On vérifie aisément, de nouveau par récurrence sur la profondeur de  $q$ , que si  $\mathcal{C}$  est borné par  $[a, b]$ , où l'on peut supposer  $a \leq 0, b \geq 0$ , alors  $\rho_q(v)$  est borné par un intervalle ne dépendant que des expressions fonctionnelles impliquées et de la profondeur de  $q$ , mais pas de  $q$  lui-même. De plus, si  $\mathcal{C}$  est borné positif, on peut choisir  $a = 0$ , et  $\rho_q(v)$  est alors à valeurs positives.  $\square$

On peut alors calculer la solution à horizon fini dans le cas où  $X$  est un ensemble fini. On peut faire un peu plus général, en demandant non pas que  $X$  soit fini, mais que le système de transition soit simple, au sens suivant.

**Définition 8.4.7 (Simple)** *Un système de transitions ludique  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  est dit simple si et seulement si :*

- $L$  est fini ;
- pour tout  $\ell \in L$ ,  $\theta_\ell$  s'écrit  $\sum_{j=1}^{m_\ell} a_{\ell j} \mathbf{u}_{\uparrow A_{\ell j}} + \sum_{k=1}^{n_\ell} b_{\ell k} \mathbf{e}_{\downarrow A'_{\ell k}}$ , où  $a_{\ell j}, b_{\ell k}$  sont des éléments de  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$  et  $A_{\ell j}$  et  $A'_{\ell k}$  sont des parties finies de  $X$ .

**Proposition 8.4.8** *Soit  $\mathbb{Q}$  un sous-ensemble récursif de  $\mathbb{R}$ , tel que  $0 \in \mathbb{Q}$ ,  $t + t', tt' \in \mathbb{Q}$  pour tous  $t, t' \in \mathbb{Q}$  ; de plus ces quantités sont calculables en temps polynomial en les tailles de  $t, t'$ . Soit  $(V, E)$  un automate fini sans circuit,  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un système de transitions ludique simple. Soit  $\mathcal{C}$  un contexte, et supposons  $\theta$  standard ou  $\mathcal{C}$  borné positif.*

*Soit  $\Sigma = \{v_i \approx f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  un système fonctionnel gardé. Alors  $\Sigma$  a une solution bornée  $\rho$ . De plus, pour toute partie finie  $A$  de  $X$  contenant tous les  $A_{\ell j}, A'_{\ell k}$ ,  $\ell \in L$ ,  $1 \leq j \leq m_\ell$ ,  $1 \leq k \leq n_\ell$ , si l'on décrit  $\mathcal{C}$  par une collection de tables  $(\mathcal{C}_q(\mathbf{r})(x))_{\substack{q \in V \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R} \\ x \in A}}, (\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(\mathbf{r})(x))_{\substack{(q, \ell, q') \in E \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R} \\ x \in A}}$ ,*

*$(\mathcal{C}_q(\mathbf{g}))_{\substack{q \in V \\ \mathbf{g} \in \mathbb{G}}}, (\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(\mathbf{g}))_{\substack{(q, \ell, q') \in E \\ \mathbf{g} \in \mathbb{G}}}$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ , on peut calculer la table des  $\rho_q(v_i)(x)$ ,  $x \in A$ , en temps polynomial en la taille des tables décrivant  $\mathcal{C}$  et le cardinal de  $E$ .*

*Démonstration.* Comme  $V$  est fini,  $\mathcal{C}$  est toujours borné. Comme  $(V, E)$  est de plus sans circuit, il est de profondeur finie. Sa profondeur est la longueur du plus grand chemin dans  $(V, E)$ . Par la proposition 8.4.6,  $\Sigma$  a donc une solution unique  $\rho$ . Elle se calcule par programmation dynamique, c'est-à-dire comme suit. On alloue un tableau rho dont les entrées rho $[q, i, x]$  sont indexées par les éléments  $q$  de  $V$ , les variables  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $x$  de  $A$ . Ces entrées sont soit des éléments de  $\mathbb{Q}$  (et alors rho $[q, i, x]$  sera la valeur désirée de  $\rho_q(v_i)(x)$ ) soit un élément distinct  $\perp$ , signifiant

que l'on n'a pas encore calculé  $\rho_q(v_i)(x)$ . Initialement,  $\text{rho}[q, i, x]$  est mis à  $\perp$  pour tous  $q \in V$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $x \in A$ .

Posons  $\rightarrow$  la relation telle que  $q \rightarrow q'$  si et seulement s'il existe une transition  $q \xrightarrow{\ell} q'$  dans  $E$ . Notons  $\rightarrow^*$  sa clôture réflexive transitive, c'est-à-dire le plus petit préordre contenant  $\rightarrow$ . On calcule ensuite, en temps polynomial, un tri topologique du graphe  $(V, E)$ , c'est-à-dire une énumération  $q_1, q_2, \dots, q_p$  des éléments de  $V$  tels que si  $q_i \rightarrow^* q_j$  alors  $i \geq j$ . (Ceci est un grand classique de la théorie calculatoire des graphes, et se fait par un marquage récursif des états de l'automate.) Pour  $k$  variant de 1 à  $p$  (où l'on assurera l'invariant selon lequel  $\text{rho}[q_j, i, x]$  contient  $\rho(q_j)(v_i)(x)$  pour tout  $j < k$ , et tous  $i$  et  $x$ ), pour  $i$  variant de 1 à  $n$ , pour  $x$  variant dans  $E$ , on calcule  $\mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_{q_k} \rho$ . Comme  $f_i$  est gardé, ceci ne dépend de  $\rho$  qu'au travers des valeurs  $\rho(q_j)(v_{i'}) (x')$ , avec  $j < k$ ,  $1 \leq i' \leq n$ ,  $x' \in E$ , lesquelles sont déjà calculées et stockées dans les cases  $\text{rho}[q_j, i', x']$ . On stocke ensuite  $\mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_{q_k} \rho$  en  $\text{rho}[q_k, i, x]$ .  $\square$

Le second cas où un système fonctionnel a une solution est celui où les gains moyens  $\int f$  sont explicitement multipliés par un rabais  $\gamma$  strictement inférieur à 1. Ceci représente typiquement l'effet d'un taux d'intérêt en économie. Une interprétation plus probabiliste consiste à estimer que  $P$  peut décider d'arrêter de jouer et d'encaisser immédiatement ses gains, avec probabilité  $1 - \gamma$ , ou bien de continuer à jouer avec probabilité  $\gamma$ .

Mathématiquement, le but est de définir toute solution d'un système fonctionnel comme solution d'une équation de point fixe d'un opérateur contractant. Nous définissons une restriction syntaxique qui l'assure, en supposant que la valeur  $\mathcal{C}_q(\mathbf{g})$  de chaque paramètre de rabais est majorée par une constante  $\gamma < 1$ .

**Définition 8.4.9 (Facteur d'expansion)** *On définit le facteur d'expansion  $\text{Exp}_\gamma^{v_0}(f)$  de l'expression fonctionnelle  $f$  en la variable  $v_0$  par :*

$$\begin{aligned} \text{Exp}_\gamma^{v_0}(\mathbf{r}) &= 0 & \text{Exp}_\gamma^{v_0}(v) &= \begin{cases} 1 & \text{si } v = v_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f_1 + f_2) &= \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f_1) + \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f_2) & \text{Exp}_\gamma^{v_0}(\max(f_1, f_2)) &= \max(\text{Exp}_\gamma^{v_0}(f_1), \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f_2)) \\ \text{Exp}_\gamma^{v_0}(\mathbf{g} \times f) &= \gamma \cdot \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f) & \text{Exp}_\gamma^{v_0}(\min(f_1, f_2)) &= \min(\text{Exp}_\gamma^{v_0}(f_1), \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f_2)) \\ \text{Exp}_\gamma^{v_0}(\square_A f^\rightarrow) &= \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f^\rightarrow) & \text{Exp}_\gamma^{v_0}\left(\int f\right) &= \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f) \\ \text{Exp}_\gamma^{v_0}(\diamond_A f^\rightarrow) &= \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f^\rightarrow) & & \end{aligned}$$

**Lemme 8.4.10** *Soit  $(V, E)$  un automate,  $\theta = (\theta)_{\ell \in L}$  un système de transitions ludique. Soit  $\mathcal{C}$  un contexte borné,  $\rho$  et  $\rho'$  deux environnements bornés, et supposons  $\theta$  standard ou  $\mathcal{C}$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$  bornés positifs.*

*Soit  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  une constante telle que  $\mathcal{C}_q(\mathbf{g}) \leq \gamma$  pour tout  $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$  et  $q \in V$ . Supposons que  $\rho_q(v) = \rho'_q(v)$  pour toute variable  $v \neq v_0$ . Alors, pour toute expression fonctionnelle  $f$ , pour tout  $q \in V$ , tout  $(q, \ell, q') \in E$ , pour tout  $x \in X$ , on a :*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x) - \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho'(x) &\leq \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f) \cdot \max(\rho_q(v_0)(x) - \rho'_q(v_0)(x), 0) \\ \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) - \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho'(x) &\leq \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f^\rightarrow) \cdot \max(\rho_{q \xrightarrow{\ell} q'}(v_0)(x) - \rho'_{q \xrightarrow{\ell} q'}(v_0)(x), 0) \end{aligned}$$

Rappelons que  $d_{\mathbb{R}}(x, y) = \max(x - y, 0)$  (définition 3.10.8). Le lemme 8.4.10 exprime donc que la fonction d'évaluation de  $f$  est  $Exp_{\gamma}^{v_0}(f)$ -lipschitzienne en  $\rho(v_0)(x)$ .

*Démonstration.* Par récurrence structurale sur  $f, f^{\rightarrow}$ , on démontre que

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x) &\leq \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho'(x) + Exp_{\gamma}^{v_0}(f) \cdot \max(\rho_q(v_0)(x) - \rho'_q(v_0)(x), 0) \\ \mathcal{C} \llbracket f^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &\leq \mathcal{C} \llbracket f^{\rightarrow} \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho'(x) + Exp_{\gamma}^{v_0}(f^{\rightarrow}) \cdot \max(\rho_{q \xrightarrow{\ell} q'}(v_0)(x) - \rho'_{q \xrightarrow{\ell} q'}(v_0)(x), 0) \end{aligned}$$

C'est évident lorsque  $f$ , resp.  $f^{\rightarrow}$ , est un paramètre de récompense  $r$ , une variable  $v$  (qu'elle soit égale ou non à  $v_0$ ). Dans les autres cas, posons  $a_q = \max(\rho_q(v_0)(x) - \rho'_q(v_0)(x), 0)$ , et  $a_{q \xrightarrow{\ell} q'} = \max(\rho_{q \xrightarrow{\ell} q'}(v_0)(x) - \rho'_{q \xrightarrow{\ell} q'}(v_0)(x), 0)$ , ce qui nous permettra d'alléger un peu les notations.

Lorsque  $f$  est de la forme  $\max(f_1, f_2)$ , c'est une conséquence du fait que :  $(*) \max(a + b, c + d) \leq \max(a, c) + \max(b, d)$ . (Ceci se justifie par le fait que tant  $a + b$  que  $c + d$  sont inférieurs ou égaux au côté droit.) En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \llbracket \max(f_1, f_2) \rrbracket_q \rho(x) &= \max \left( \mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho(x) + \mathcal{C} \llbracket f_2 \rrbracket_q \rho(x) \right) \\ &\leq \max \left( \mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho'(x) + Exp_{\gamma}^{v_0}(f_1) \cdot a_q, \mathcal{C} \llbracket f_2 \rrbracket_q \rho'(x) + Exp_{\gamma}^{v_0}(f_2) \cdot a_q \right) \\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \max \left( \mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho'(x), \mathcal{C} \llbracket f_2 \rrbracket_q \rho'(x) \right) + \max(Exp_{\gamma}^{v_0}(f_1) \cdot a_q, Exp_{\gamma}^{v_0}(f_2) \cdot a_q) \\ &\quad \text{par } (*) \\ &= \mathcal{C} \llbracket \max(f_1, f_2) \rrbracket_q \rho'(x) + Exp_{\gamma}^{v_0}(\max(f_1, f_2)) \cdot a_q \end{aligned}$$

puisque  $a_q \geq 0$ , et par définition.

Lorsque  $f$  est de la forme  $\min(f_1, f_2)$ , on procède de même, en utilisant l'inégalité :  $\min(a + b, c + d) \leq \min(a, c) + \max(b, d)$ . Celle-ci se démontre comme suit : si  $b \geq d$ , alors  $\min(a + b, c + d) \leq \min(a + b, c + b) = \min(a, c) + b = \min(a, c) + \max(b, d)$ , et de même si  $b \leq d$ .

Lorsque  $f$  est de la forme  $f_1 + f_2$ , c'est en utilisant l'égalité  $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$ .

Lorsque  $f$  est de la forme  $g \times f_1$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \llbracket g \times f_1 \rrbracket_q \rho(x) &= \mathcal{C}_q(g) \cdot \mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho(x) \\ &\leq \mathcal{C}_q(g) \cdot (\mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho'(x) + Exp_{\gamma}^{v_0}(f_1) \cdot a_q) \quad \text{puisque } \mathcal{C}_q(g) \geq 0 \\ &= \mathcal{C}_q(g) \cdot \mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho'(x) + \mathcal{C}_q(g) \cdot Exp_{\gamma}^{v_0}(f_1) \cdot a_q \\ &\leq \mathcal{C}_q(g) \cdot \mathcal{C} \llbracket f_1 \rrbracket_q \rho'(x) + \gamma \cdot Exp_{\gamma}^{v_0}(f_1) \cdot a_q \\ &\quad \text{par hypothèse, et puisque } Exp_{\gamma}^{v_0}(f_1) \geq 0, a_q \geq 0 \\ &= \mathcal{C} \llbracket g \times f_1 \rrbracket_q \rho'(x) + Exp_{\gamma}^{v_0}(g \times f_1) \cdot a_q \end{aligned}$$

Lorsque  $f = \square_A f^\rightarrow$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \llbracket \square_A f^\rightarrow \rrbracket_q \rho(x) &= \sup_{\ell \in A, q' \in V/q \xrightarrow{\ell} q'} \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \\
&\leq \sup_{\ell \in A, q' \in V/q \xrightarrow{\ell} q'} \left[ \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho'(x) + \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f^\rightarrow).a_q \right] \\
&\leq \sup_{\ell \in A, q' \in V/q \xrightarrow{\ell} q'} \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho'(x) + \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f^\rightarrow).a_q \\
&= \mathcal{C} \llbracket \square_A f^\rightarrow \rrbracket_q \rho'(x) + \text{Exp}_\gamma^{v_0}(\square_A f^\rightarrow).a_q
\end{aligned}$$

On conclut de même lorsque  $f = \diamond_A f^\rightarrow$ . Traitons finalement du cas  $\int f$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \int_{y \in X} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho(y) d\theta_\ell(x) \\
&\leq \int_{y \in X} \left[ \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho'(y) + \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f).a_q \right] d\theta_\ell(x) \quad \text{par le lemme 4.1.2} \\
&\leq \int_{y \in X} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho'(y) d\theta_\ell(x) + \text{Exp}_\gamma^{v_0}(f).a_q \\
&\quad \text{par le lemme 4.1.5, puisque } \theta_\ell(x)(X) \leq 1 \\
&= \mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho'(x) + \text{Exp}_\gamma^{v_0} \left( \int f \right).a_q
\end{aligned}$$

□

**Théorème 8.4.11** Soit  $(V, E)$  un automate,  $\theta = (\theta)_{\ell \in L}$  un système de transitions ludique. Soit  $\mathcal{C}$  un contexte borné, et supposons  $\theta$  standard ou  $\mathcal{C}$  borné positif.

Soit  $\Sigma = \{v_i \approx f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  un système fonctionnel, où les seules variables qui apparaissent sont  $v_1, \dots, v_n$ , et supposons qu'il existe trois constantes  $a \leq 0$ ,  $b \geq 0$ , et  $\gamma \geq 0$  telles que, pour tous sommets  $q \in V$  et transitions  $(q, \ell, q') \in E$  :

- pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}_q(r)(x) \in [a, b]$  et  $\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(r)(x) \in [a, b]$  ;
- pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\sum_{j=1}^n \text{Exp}_\gamma^{v_j}(f_i) < 1$ .

Alors  $\Sigma$  a une unique solution  $\rho$ , qui est bornée positive si  $\mathcal{C}$  est borné positif.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}^\downarrow$  le contexte qui envoie tout paramètre de récompense  $r$  vers  $a$ , en tout état  $q$  et en toute transition  $q \xrightarrow{\ell} q'$ . De même, soit  $\mathcal{C}^\uparrow$  le contexte qui envoie tout paramètre de récompense  $r$  vers  $b$ . Clairement,  $\mathcal{C}^\downarrow \llbracket f \rrbracket_q \rho(x) \leq \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x) \leq \mathcal{C}^\uparrow \llbracket f \rrbracket_q \rho(x)$  et  $\mathcal{C}^\downarrow \llbracket f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \leq \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \leq \mathcal{C}^\uparrow \llbracket f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x)$ . Posons  $c = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \text{Exp}_\gamma^{v_j}(f_i) < 1$ .

Commençons par montrer que : (\*) il existe un environnement  $\rho$  tel que  $\mathcal{C}^\downarrow \llbracket f_i \rrbracket_q \rho(x) \geq \rho_q(v_i)(x)$  pour tout  $q \in V$ , tout  $x \in X$ , et tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Si  $\mathcal{C}$  est borné positif, c'est évident : il suffit de poser  $\rho_q(v_i)(x) = 0$ . Sinon, soit  $\rho[t]$  l'environnement défini par  $\rho[t]_q(v)(x) = t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et posons  $g_q(t) = \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{C}^\downarrow \llbracket f_i \rrbracket_q \rho[t](x)$ , pour  $x \in X$  arbitraire. On note en effet

que cette dernière quantité est indépendante de  $x$ . Par le lemme 8.4.10 utilisé sur  $v_0$  valant  $v_1$ , puis  $v_2$ , puis  $\dots$ , puis  $v_n$ , on a  $g_q(0) - g_q(t) \leq \text{Exp}_\gamma^{v_1}(f_i) \cdot \max(\rho[0]_q(v_1)(x) - \rho[t]_q(v_1)(x), 0) + \dots + \text{Exp}_\gamma^{v_n}(f_i) \cdot \max(\rho[0]_q(v_n)(x) - \rho[t]_q(v_n)(x), 0)$  (pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ )  $\leq c \cdot \max(-t, 0)$ . Lorsque  $t < 0$ , on a donc  $g_q(t) \geq g_q(0) + ct$ . Notons que  $g_q(0)$  est minoré, indépendamment de  $q$ , par le réel négatif ou nul  $\min_{1 \leq i \leq n} lo(f_i)$ , où  $lo(f)$  est défini par :

$$\begin{aligned} lo(\mathbf{r}) &= a \\ lo(v) &= 0 \\ lo(\max(f_1, f_2)) &= \max(lo(f_1), lo(f_2)) \\ lo(\min(f_1, f_2)) &= \min(lo(f_1), lo(f_2)) \\ lo(f_1 + f_2) &= lo(f_1) + lo(f_2) \\ lo(\mathbf{g} \times f) &= lo(f) \\ lo(\square_A f^\rightarrow) &= lo(f^\rightarrow) \\ lo(\diamond_A f^\rightarrow) &= lo(f^\rightarrow) \\ lo\left(\int f\right) &= lo(f) \end{aligned}$$

On a donc  $g_q(t) \geq t$  dès que  $t \leq \min_{1 \leq i \leq n} lo(f_i)/(1 - c)$ . Fixons un tel réel  $t$ . Alors  $\rho[t]$  répond à la question.

Posons maintenant  $\rho_0$  un environnement quelconque  $\rho$  vérifiant (\*). Définissons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  un environnement  $\rho_k$  en posant  $\rho_{(k+1)q}(v_i) = \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho_k$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ , et tout  $q \in V$ . Par (\*),  $\rho_{1q}(v_i)(x) = \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho_0(x) \geq \mathcal{C}^\downarrow \llbracket f_i \rrbracket_q \rho_0(x) \geq \rho_{0q}(v_i)(x)$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ , et tout  $x \in X$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x)$  est une fonction croissante des  $\rho(v_i)(x)$ , donc par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_{(k+1)q}(v_i) \geq \rho_{kq}(v_i)$  pour tous  $k, q, i$ . La suite  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est donc croissante.

On observe ensuite que  $\rho_k$  est majorée, en tout  $q \in V$  et tout  $x \in X$ . En effet, pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \rho_{(k+1)q}(v_i)(x) - \rho_{kq}(v_i)(x) &= \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho_k(x) - \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho_{k-1}(x) \\ &\leq \text{Exp}_\gamma^{v_1}(f_i) \cdot \max(\rho_{kq}(v_1)(x) - \rho_{(k-1)q}(v_1)(x), 0) + \\ &\quad \dots + \text{Exp}_\gamma^{v_n}(f_i) \cdot \max(\rho_{kq}(v_n)(x) - \rho_{(k-1)q}(v_n)(x), 0) \\ &\quad \text{par le lemme 8.4.10} \\ &\leq c \cdot \max_{1 \leq j \leq n} (\rho_{kq}(v_j)(x) - \rho_{(k-1)q}(v_j)(x)) \end{aligned}$$

On en déduit, par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ , que :

$$\rho_{(k+1)q}(v_i)(x) - \rho_{kq}(v_i)(x) \leq c^k \cdot \max_{1 \leq j \leq n} (\rho_{1q}(v_j)(x) - \rho_{0q}(v_j)(x))$$

En sommant, et en observant que  $1 + c + c^2 + \dots + c^{k-1} \leq 1/(1 - c)$ , on obtient :

$$\rho_{kq}(v_i)(x) \leq \rho_{0q}(v_i)(x) + \frac{\max_{1 \leq j \leq n} (\rho_{1q}(v_j)(x) - \rho_{0q}(v_j)(x))}{1 - c}$$

La suite  $(\rho_{kq}(v_i)(x))_{k \in \mathbb{N}}$  est donc une suite croissante majorée, pour tout  $x \in X$ , tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et tout  $q \in V$ . Posons  $\rho_q(v_i)(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \rho_{kq}(v_i)(x)$ . Il est facile de voir, par récurrence sur  $f, f^\rightarrow$ , que l'on a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho_k(x) \\ \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho_k(x) \end{aligned}$$

Ceci provient du fait que les opérations  $\max, \min, +, \sup_{\ell \in A, (q, \ell, q') \in E}, \min_{\ell \in A, (q, \ell, q') \in E}$  sont Scott-continues, ainsi que le fait que l'intégrale de Choquet est Scott-continue en la fonction intégrée (proposition 4.2.1). On en déduit que :

$$\begin{aligned} \rho_q(v_i)(x) &= \sup_{k \geq 1} \rho_{kq}(v_i)(x) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho_k(x) = \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho(x) \end{aligned}$$

Donc  $\rho$  est une solution de  $\Sigma$ .

Finalement, démontrons l'unicité de cette solution. Si  $\rho$  et  $\rho'$  en sont deux, alors, toujours en utilisant le lemme 8.4.10, on a :

$$\begin{aligned} \rho_q(v_i)(x) - \rho'_q(v_i)(x) &= \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho(x) - \mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho'(x) \\ &\leq c \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \max(\rho_q(v_j)(x) - \rho'_q(v_j)(x), 0) \end{aligned}$$

pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ . Comme  $c < 1$ , il s'ensuit que  $\max_{1 \leq i \leq n} (\rho_q(v_i)(x) - \rho'_q(v_i)(x)) \leq 0$ . Par symétrie,  $\max_{1 \leq i \leq n} (\rho_q(v_i)(x) - \rho'_q(v_i)(x)) = 0$ , donc  $\rho = \rho'$ .  $\square$

En particulier, l'équation (8.3), qui se ramène au système fonctionnel (8.8), a une solution unique dès que toutes les fonctions  $r_{q \xrightarrow{\ell} q'}$  et  $\gamma_{q \xrightarrow{\ell} q'}$  sont uniformément bornées, c'est-à-dire à valeurs dans un intervalle  $[a, b]$ , indépendant de  $q, \ell$  et  $q'$ , et dès que : soit  $\delta = (\delta_\ell)_{\ell \in L}$  est standard, ou  $a = 0$ . Le premier cas autorise des récompenses positives ou négatives. Le second cas ne permet que des récompenses positives, mais autorise  $\delta$  à ne pas être standard.

Terminons en mentionnant comment l'on peut calculer les solutions à un système fonctionnel possiblement récursif, dans le cas fini.

On dira qu'une fonction  $y = f(x)$  est calculable en temps *non déterministe polynomial* si et seulement s'il existe une machine de Turing non déterministe en temps polynomial qui calcule  $y$  correctement sur au moins une branche de calcul, et qui accepte ; et telle que toutes ses branches qui acceptent calculent la même valeur de  $y$ . La classe des fonctions calculables en temps non déterministe polynomial est une sous-classe de celle des fonctions calculables en temps exponentiel. Il se trouve que cette notion de calculabilité non déterministe, aux allures baroques, est la bonne notion ici, mais aussi dans la démonstration du théorème d'Immerman-Szelepcsényi, qui énonce que les classes de langages décidables en espace non déterministe  $f(n)$ , où  $f(n) \geq \log n$  est une fonction constructible en temps, sont closes par complémentaires. Voir Papadimitriou (1994).

**Proposition 8.4.12** Soit  $Q$  un sous-ensemble récursif de  $\mathbb{R}$ , tel que  $0 \in Q$ ,  $t + t', tt' \in Q$  pour tous  $t, t' \in Q$  et  $1/t \in Q$  pour tout  $t \in Q \setminus \{0\}$ ; de plus ces quantités sont calculables en temps polynomial en les tailles de  $t, t'$ . Soit  $(V, E)$  un automate fini,  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un système de transitions ludique simple. Soit  $\mathcal{C}$  un contexte, et supposons  $\theta$  standard ou  $\mathcal{C}$  borné positif.

Soit  $\Sigma = \{v_i \approx f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  un système fonctionnel, où les seules variables qui apparaissent sont  $v_1, \dots, v_n$ , et  $\gamma$  une constante réel positive ou nulle telle que  $\sum_{j=1}^n \text{Exp}_\gamma^{v_j}(f_j) < 1$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ .

Alors  $\Sigma$  a une solution unique  $\rho$ . De plus, pour toute partie finie  $A$  de  $X$  contenant tous les  $A_{\ell_j}, A'_{\ell_k}, \ell \in L, 1 \leq j \leq m_\ell, 1 \leq k \leq n_\ell$ , si l'on décrit  $\mathcal{C}$  par une collection de tables  $(\mathcal{C}_q(\mathbf{r})(x))_{\substack{q \in V, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}, \\ x \in A}}, (\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(\mathbf{r})(x))_{\substack{(q, \ell, q') \in E, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}, \\ x \in A}}, (\mathcal{C}_q(\mathbf{g}))_{\substack{q \in V, \\ \mathbf{g} \in G}}, (\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(\mathbf{g}))_{\substack{(q, \ell, q') \in E, \\ \mathbf{g} \in G}}$  à valeurs dans  $Q$ , on peut calculer la table des  $\rho_q(v_i)(x), x \in A$ , en temps non déterministe polynomial en la taille des tables  $\mathcal{C}$  et le cardinal de  $E$ .

*Démonstration.* D'abord,  $\mathcal{C}$  est un contexte borné, et il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que pour tout  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}, \mathcal{C}_q(\mathbf{r})(x) \in [a, b]$  et  $\mathcal{C}_{q \xrightarrow{\ell} q'}(\mathbf{r})(x) \in [a, b]$ . Ceci est parce qu'il n'y a qu'un nombre fini d'états  $q \in V$  et de transitions  $(q, \ell, q') \in E$ . On peut aussi supposer  $a \leq 0$  et  $b \geq 0$ , en remplaçant  $a$  par  $\min(a, 0)$  et  $b$  par  $\max(b, 0)$ .  $\Sigma$  a donc une solution unique, par le théorème 8.4.11.

La première idée pour la calculer est de retranscrire directement la sémantique. Si l'on se donne un environnement  $\rho$  sous la forme d'une table  $(\rho_q(v)(x))_{\substack{q \in V, \\ v \in X, \\ x \in A}}$ , on peut calculer la table des  $\mathcal{C} \llbracket f_i \rrbracket_q \rho(x), 1 \leq i \leq n, q \in V, x \in A$  par les formules récursives :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \llbracket \Box_A f \rrbracket_q \rho(x) &= \max_{\ell \in A, q' \in V/q \xrightarrow{\ell} q'} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \\ \mathcal{C} \llbracket \Diamond_A f \rrbracket_q \rho(x) &= \min_{\ell \in A, q' \in V/q \xrightarrow{\ell} q'} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) \\ \mathcal{C} \llbracket \int f \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x) &= \sum_{j=1}^{m_\ell} a_{\ell_j} \min_{y \in A_{\ell_j}} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho(y) + \sum_{k=1}^{n_\ell} b_{\ell_k} \max_{y \in A'_{\ell_k}} \mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_{q'} \rho(y) \end{aligned}$$

Les autres constructions étant données directement par les équations (8.5) et (8.6). Il ne reste plus ensuite qu'à itérer jusqu'à trouver le point fixe, comme au théorème 8.4.11. Mais on ne sait même pas si cette itération converge en temps fini, ce qui semble en fait improbable.

À la place, nous utilisons une technique dite d'*itération sur les politiques*. Observons pour ceci que l'on peut réécrire les équations à résoudre, en ajoutant au besoin des variables auxiliaires, sous la forme d'une collection d'équations de la forme :

$$Z \approx r \quad Z \approx \min(Z_1, Z_2) \quad Z \approx \max(Z_1, Z_2) \quad Z \approx Z_1 + Z_2 \quad Z \approx r^+ Z_1 \quad Z \approx Z_1 \quad (8.9)$$

où  $r$  désigne une constante dans  $Q$ ,  $r^+$  une dans  $Q \cap \mathbb{R}^+$ , et  $Z, Z_1, Z_2$  désignent des variables à valeurs réelles (en fait dans  $Q$ ). L'idée est d'associer à chaque sous-formule  $f$  (resp.  $f^\rightarrow$ ) qui apparaît dans  $\Sigma$ , à chaque  $q \in V$  (resp.  $(q, \ell, q') \in E$ ) et à chaque  $x \in A$  une variable  $Z_{f, q, x}$  (resp.  $Z_{f, q \xrightarrow{\ell} q', x}$ ) qui représente la valeur inconnue de  $\mathcal{C} \llbracket f \rrbracket_q \rho(x)$  (resp.  $\mathcal{C} \llbracket f^\rightarrow \rrbracket_{q \xrightarrow{\ell} q'} \rho(x)$ ), avec

$\rho$  solution de  $\Sigma$ . Par exemple, pour chaque sous-formule  $f$  de la forme  $\max(f_1, f_2)$ , on produit les équations  $Z_{f,q,x} \approx \max(Z_{f_1,q,x}, Z_{f_2,q,x})$ , pour chaque  $q \in V$  et  $x \in A$ . De même lorsque  $f$  est de la forme  $\min(f_1, f_2)$ ,  $f_1 + f_2$ , ou  $g \times f$ , et pour les cas similaires portant sur des expressions fonctionnelles de transition  $f^\rightarrow$ .

Lorsque  $f$  est de la forme  $\square_A f^\rightarrow$ , énumérons les transitions  $q \xrightarrow{\ell} q'$  avec  $\ell \in A : q \xrightarrow{\ell_1} q'_1, q \xrightarrow{\ell_2} q'_2, \dots, q \xrightarrow{\ell_k} q'_k$ . Si  $k = 0$ , alors on produit l'équation  $Z_{f,q,x} \approx 0$  pour chaque  $q \in V$  et  $x \in A$ . Si  $k = 1$ , on produit l'équation  $Z_{f,q,x} \approx \max(Z_{f^\rightarrow, q \xrightarrow{\ell_1} q'_1, x}, Z_{f^\rightarrow, q \xrightarrow{\ell_2} q'_2, x})$ . Sinon, créons de nouvelles variables  $Z_{f,q,x}^1, Z_{f,q,x}^2, \dots, Z_{f,q,x}^k$  distinctes deux à deux ainsi que des variables définies plus haut, et produisons les équations  $Z_{f,q,x}^2 = \max(Z_{f^\rightarrow, q \xrightarrow{\ell_1} q'_1, x}, Z_{f^\rightarrow, q \xrightarrow{\ell_2} q'_2, x})$ ,  $Z_{f,q,x}^3 = \max(Z_{f,q,x}^2, Z_{f^\rightarrow, q \xrightarrow{\ell_3} q'_3, x})$ ,  $\dots$ ,  $Z_{f,q,x}^k = \max(Z_{f,q,x}^{k-1}, Z_{f^\rightarrow, q \xrightarrow{\ell_k} q'_k, x})$ , et finalement  $Z_{f,q,x} \approx Z_{f,q,x}^k$ . De même si  $f = \diamond_A f^\rightarrow$ , en utilisant  $\min$  au lieu de  $\max$ . On procède de même pour les sous-formules de la forme  $\int f$ , en engendrant des équations de la forme  $Z \approx \max(Z_1, Z_2)$ ,  $Z \approx \min(Z_1, Z_2)$ , mais aussi  $Z \approx r^+ Z_1$  pour représenter les multiplications par  $a_{\ell_j}$  ou  $b_{\ell_k}$ , et  $Z \approx Z_1 + Z_2$  pour représenter la somme. Finalement, on produit les équations  $Z_{v_i,q,x} \approx Z_{f_i,q,x}$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $q \in V$ ,  $x \in A$ . On obtient ainsi en temps polynomial un ensemble fini  $\Sigma'$  d'équations de la forme (8.9), qui a une solution unique en les variables  $Z_{f,q,x}, Z_{f^\rightarrow, q \xrightarrow{\ell} q', x}$  et les variables auxiliaires.

Une *politique* est une fonction  $p$  qui à toute équation  $e$  de  $\Sigma'$  de la forme  $Z \approx \min(Z_1, Z_2)$  ou  $Z \approx \max(Z_1, Z_2)$  associe un entier valant 1 ou 2. Le système  $\Sigma'[p]$  est celui obtenu en remplaçant dans  $\Sigma'$  toute équation  $e$  de la forme  $Z \approx \min(Z_1, Z_2)$  ou  $Z \approx \max(Z_1, Z_2)$  par  $Z \approx Z_{p(e)}$ .

Puisque  $\Sigma'$  a une solution  $\rho$  (une fonction qui à chaque variable  $Z$  associe un réel), il existe au moins une politique  $p$  telle que  $\Sigma'[p]$  ait la même solution. Pour toute équation  $e$  de la forme  $Z \approx \min(Z_1, Z_2)$  ou  $Z \approx \max(Z_1, Z_2)$ , il suffit de prendre  $p(e) = 1$  si  $\rho(Z) = \rho(Z_1)$ ,  $p(e) = 2$  sinon. Or tout système de la forme  $\Sigma'[p]$  n'est rien d'autre qu'un système d'équations affines, donc on peut calculer une solution par élimination de Gauss, ce qui termine en temps polynomial Schrijver (1998).

# Chapitre 9

## Agglomérations, topologies agglomérantes

Une façon classique de ramener l'étude d'une chaîne de Markov à une chaîne de Markov plus simple consiste à trouver une relation d'équivalence  $\equiv$  sur les états de  $X$  de sorte que le quotient de la fonction de transition  $\theta : X \rightarrow P(X)$  par  $\equiv$  ne change pas les probabilités de transition.

Une telle relation d'équivalence est classiquement appelée une relation de *lumping*, d'*agglomération* en français.

Dans le cas des systèmes de transition de Markov étiquetés  $\theta_\ell : X \rightarrow P(X)$ ,  $\ell \in L$ , avec  $X$  et  $L$  des espaces finis, on peut définir une relation d'agglomération comme suit. Pour reprendre des notations classiques, observons que l'on peut définir, de façon équivalente, un système de transition de Markov étiqueté comme une famille de fonctions  $p_\ell$ , une pour chaque action  $\ell \in L$ , telles que  $p_\ell(x, y)$  est la probabilité d'aller de l'état  $x$  à l'état  $y$ .

- Si l'on connaît les  $p_\ell$ ,  $\ell \in L$ , alors on peut définir  $\theta_\ell$  comme la fonction qui à  $x \in X$  associe la valuation normalisée  $\nu = \theta_\ell(x)$  définie par  $\nu(A) = \sum_{y \in A} p_\ell(x, y)$  :  $\nu$  est la probabilité d'arriver dans l'ensemble  $A$ , partant de  $x \in X$ , lorsque l'on active l'action  $\ell \in L$ .
- Si l'on connaît  $\theta_\ell$ , on pose  $p_\ell(x, y) = \theta_\ell(x)(\{y\})$ .

Une agglomération de  $(p_\ell)_{\ell \in L}$  est alors définie comme une relation d'équivalence  $\equiv$  sur  $X$  telle que, pour toute action  $\ell \in L$ , pour tous états  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $x_1 \equiv x_2$ , pour toute classe d'équivalence  $C$  de  $X$  suivant  $\equiv$ ,

$$\sum_{y \in C} p_\ell(x_1, y) = \sum_{y \in C} p_\ell(x_2, y)$$

Autrement dit, dès que  $x_1$  et  $x_2$  sont équivalents, alors on ne peut pas distinguer  $x_1$  et  $x_2$ , au sens où il n'y a aucune différence entre les probabilités de passer de  $x_1$  vers  $C$ , ou de passer de  $x_2$  vers  $C$ , lorsque  $C$  est une classe d'équivalence. Cette notion est notamment celle utilisée par Larsen and Skou (1991) dans le cas où  $X$  est un espace fini, où elle est appelée *bisimulation*.

En utilisant une fonction de transition  $\theta_\ell : X \rightarrow P(X)$ , on peut reformuler cette définition en disant que  $\equiv$  est une agglomération de  $\theta$  si et seulement si pour tout  $\ell \in L$ , pour tous  $x_1 \equiv x_2$ , pour toute classe d'équivalence  $C$  de  $X$  suivant  $\equiv$ ,  $\theta_\ell(x_1)(C) = \theta_\ell(x_2)(C)$ .

Considérons la fonction quotient  $q_\equiv : X \rightarrow X/\equiv$  qui à tout  $x \in X$  associe sa classe d'équivalence pour  $X$ . Ici,  $X/\equiv$  est l'ensemble des classes d'équivalences pour  $\equiv$ , muni d'une certaine

topologie qui rend  $q_{\equiv}$  continue. Nous reviendrons sur le choix de la topologie en question plus loin.

On peut encore reformuler :  $\equiv$  est une agglomération de  $\theta$  si et seulement si pour tout  $\ell \in L$ , pour tous  $x_1, x_2$  tels que  $x_1 \equiv x_2$ ,  $q_{\equiv}[\theta_{\ell}(x_1)] = q_{\equiv}[\theta_{\ell}(x_2)]$ . Rappelons que la notation  $f[\nu]$  désigne l'image directe de la capacité  $\nu$  par la fonction (continue)  $f$  : on a  $f[\nu](U) = \nu(f^{-1}(U))$ , voir la définition 4.2.8.

Cette nouvelle reformulation nous permet donc de définir la notion d'agglomération non seulement pour les probabilités, mais pour les capacités en général. On pourrait donc appeler agglomération de  $\theta$  toute relation d'équivalence  $\equiv$  sur  $X$  telle que, pour tout  $\ell \in L$ , pour tous  $x_1, x_2 \in X$ , si  $x_1 \equiv x_2$  alors  $q_{\equiv}[\theta_{\ell}(x_1)] = q_{\equiv}[\theta_{\ell}(x_2)]$ .

Il ne reste qu'une inconnue dans la définition : la topologie dont l'espace quotient  $X/\equiv$  doit être équipé. Il est traditionnel d'équiper l'ensemble quotient  $X/\equiv$  de la *topologie quotient*, définie comme la plus fine telle que  $q_{\equiv} : X \rightarrow X/\equiv$  soit continue. Autrement dit, c'est la topologie dont les ouverts  $U$  sont les ensembles de classes d'équivalence tels que  $q_{\equiv}^{-1}(U) = \{x \in X \mid q_{\equiv}(x) \in U\}$  est un ouvert de  $X$  (lequel est nécessairement une union de classes d'équivalences).

En utilisant la topologie quotient, la théorie des agglomérations fonctionne de façon satisfaisante jusqu'à un certain point. On peut vérifier, par exemple, que si  $\equiv$  est une agglomération de  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\emptyset)$ , alors  $F$  ne distingue pas d'états équivalents pour  $\equiv$  : si  $x_1 \models_{\theta} F$  et  $x_1 \equiv x_2$  alors  $x_2 \models_{\theta} F$ . (Le résultat n'est plus correct si  $F$  contient des opérateurs  $\vee, \Rightarrow$  ou  $\nu$ .) De plus, pour tout  $x \in X$ ,  $x \models_{\theta} F$  si et seulement si  $q_{\equiv}(x) \models_{q_{\equiv}[\theta]} F$ , où  $q_{\equiv}[\theta]$  est le système de transitions ludique  $(q_{\equiv}[\theta_{\ell}])_{\ell \in L}$ . En d'autres termes, le système quotient  $q_{\equiv}[\theta]$  vérifie les mêmes formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\emptyset)$  de  $\theta$ . C'est un résultat de correction.

Mais la topologie quotient ne sera pas la bonne topologie en général. Notamment, un théorème de complétude, qui énoncerait qu'il existe une agglomération  $\equiv$  rendant deux états  $x$  et  $y$  équivalents si et seulement si  $x$  et  $y$  vérifient les mêmes formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\emptyset)$ , semble inaccessible. Une analyse fine du phénomène montre que la topologie quotient est trop fine en général, mais surtout qu'au lieu de définir la topologie de  $X/\equiv$  à partir de la relation  $\equiv$ , nous devons d'abord définir une topologie  $\mathcal{O}$  sur  $X$ , et seulement ensuite en déduire une relation d'équivalence  $\equiv_{\mathcal{O}}$ .

## 9.1 Topologies agglomérantes

Revenons à l'intuition, développée au début de la section 8.2, selon laquelle les seules propriétés observables soient ouvertes. Nous avons appliqué ce raisonnement pour justifier le fait que  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  devait être ouvert pour toute formule  $F$ . Le même argument permet de demander que l'on ne puisse distinguer deux états  $x$  et  $y$  dans une agglomération  $\equiv$ , c'est-à-dire d'affirmer que  $x \not\equiv y$ , que si l'on peut exhiber un ouvert  $U$  de  $X$  qui sépare  $x$  de  $y$ , c'est-à-dire tel que  $x \in U$  et  $y \notin U$ , ou  $x \notin U$  et  $y \in U$ . Dans le cas contraire, on pourrait séparer  $x$  de  $y$  par  $\equiv$  alors même qu'aucun ouvert — aucun *test* — ne permet de les distinguer.

On en vient à la notion qu'une agglomération  $\equiv$  n'est légitime que s'il existe une famille d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  telle que  $x \equiv y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  appartiennent aux mêmes ouverts

$U_i, i \in I$ . En allant plus loin, on s'aperçoit que l'objet fondamental est ici, non pas la relation d'équivalence  $\equiv$ , mais la famille de tests  $(U_i)_{i \in I}$  elle-même.

Toute famille  $\mathcal{T}st = (U_i)_{i \in I}$  de tests engendre une topologie  $\mathcal{O}$ , qui consiste en les unions d'intersections finies de  $U_i, i \in I$ . Disons qu'une famille de tests *distingue* l'état  $x$  de l'état  $y$  si et seulement s'il existe un test  $U$  de la famille tel que  $x \in U$  et  $y \notin U$ , ou bien  $x \notin U$  et  $y \in U$ . Il est facile de vérifier que la famille  $(U_i)_{i \in I}$  et la topologie  $\mathcal{O}$  qu'elle engendre distinguent exactement les mêmes états.

**Définition 9.1.1 (Quotient par une topologie)** Soit  $X$  un espace topologique, et  $\mathcal{T}st = (U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts de  $X$ . On note  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  la topologie engendrée par  $\mathcal{T}st$ ,  $\preceq_{\mathcal{T}st}$  le préordre défini par  $x \preceq_{\mathcal{T}st} y$  si et seulement si, pour tout  $i \in I$ , si  $x \in U_i$  alors  $y \in U_i$ , et  $\equiv_{\mathcal{T}st}$  la relation d'équivalence définie par  $x \equiv_{\mathcal{T}st} y$  si et seulement si, pour tout  $i \in I$ ,  $x \in U_i$  si et seulement si  $y \in U_i$ . Posons  $q_{\mathcal{T}st}$  la fonction qui à tout  $x \in X$  associe la classe d'équivalence de  $x$  pour  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ .

Notons  $X : \mathcal{T}st$  l'espace topologique  $X$  muni de la topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ .

L'espace topologique  $X/\mathcal{T}st$  est l'ensemble des classes d'équivalences de  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ , muni de la topologie la plus fine telle que  $q_{\mathcal{T}st} : X : \mathcal{T}st \rightarrow X/\mathcal{T}st$  soit continue.

En d'autres termes, la topologie de  $X/\mathcal{T}st$  est engendrée par tous les ensembles  $U' \subseteq X/\mathcal{T}st$  tels que  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(U')$  soit dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ . Comme  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}$  commute aux unions et aux intersections, les ouverts  $U'$  de  $X/\mathcal{T}st$  sont exactement les parties de  $X/\mathcal{T}st$  telles que  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(U')$  soit dans  $\mathcal{O}$ .

**Lemme 9.1.2** Pour tout  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ ,  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(q_{\mathcal{T}st}(U)) = U$ .

*Démonstration.* D'abord  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(q_{\mathcal{T}st}(U))$  contient  $U$ . Réciproquement, pour tout  $x \in q_{\mathcal{T}st}^{-1}(q_{\mathcal{T}st}(U))$ , il existe  $y \in U$  tel que  $q_{\mathcal{T}st}(x) = q_{\mathcal{T}st}(y)$ , c'est-à-dire tel que  $x \equiv_{\mathcal{T}st} y$ . Mais, par définition de  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ , comme  $y \in U$ , et  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ , on a aussi  $x \in U$ . Donc  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(q_{\mathcal{T}st}(U)) \subseteq U$ .  $\square$

Pour toute partie  $E$  de  $X$ , l'ensemble  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(q_{\mathcal{T}st}(E))$  est le plus petit ensemble contenant  $E$  qui est  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ -saturé, c'est-à-dire que si  $x$  en est un élément et  $x \equiv_{\mathcal{T}st} y$ , alors  $y$  en est aussi un élément. On appellera  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(q_{\mathcal{T}st}(E))$  le  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ -saturé de  $E$ . Le lemme 9.1.2 montre que tout ouvert de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  est  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ -saturé. Il n'y a cependant aucune raison que tout ouvert de  $X$  qui soit  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ -saturé soit dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ . Si c'était le cas, la topologie de  $X/\mathcal{T}st$  serait la topologie quotient, de  $X/\equiv_{\mathcal{T}st}$ , mais ce n'est pas le cas en général.

**Lemme 9.1.3** Les ouverts de  $X/\mathcal{T}st$  sont les images  $q_{\mathcal{T}st}(U)$  d'ouverts  $U$  de la topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ .

*Démonstration.* Soit  $U'$  un ouvert de  $X/\mathcal{T}st$ . Par définition,  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(U')$  est un ouvert de  $X : \mathcal{T}st$ , et est donc un élément  $U$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ . Comme  $q_{\mathcal{T}st}$  est surjective,  $q_{\mathcal{T}st}(U) = U'$ , donc  $U'$  est de la forme demandée. Réciproquement, les ouverts de  $X/\mathcal{T}st$  sont les parties  $U'$  de  $X/\mathcal{T}st$  telles que  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(U')$  soit dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ . Pour tout  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ , considérons  $U' = q_{\mathcal{T}st}(U)$ . Alors  $q_{\mathcal{T}st}^{-1}(U') = U$  par le lemme 9.1.2, qui est dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ . Donc  $q_{\mathcal{T}st}(U)$  est un ouvert de  $X/\mathcal{T}st$ .  $\square$

On observe facilement que :

- $\preceq_{\mathcal{T}st}$  est le préordre de spécialisation de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  ;

- $\equiv_{\mathcal{T}st}$  est la relation d'équivalence associée  $\preceq_{\mathcal{T}st} \cap \succeq_{\mathcal{T}st}$  (où  $y \succeq_{\mathcal{T}st} x$  si et seulement si  $x \preceq_{\mathcal{T}st} y$ );
- $q_{\mathcal{T}st}$  est une fonction continue et ouverte de  $X : \mathcal{T}st$  vers  $X/\mathcal{T}st$ ; le fait qu'elle soit *ouverte*, c'est-à-dire qu'elle envoie tout ouvert vers un ouvert, est par le lemme 9.1.3;
- Comme tout test  $U_i$ , et en fait tout élément de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  est  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ -saturé, c'est-à-dire est une union de classes d'équivalences de  $\equiv_{\mathcal{T}st}$ , la topologie de  $X/\mathcal{T}st$  est moins fine que la topologie quotient, c'est-à-dire la topologie de  $X/\equiv_{\mathcal{T}st}$ ;
- L'espace  $X/\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  est exactement identique à  $X/\mathcal{T}st$ .

Si  $\mathcal{O}$  est moins fine que la topologie  $\mathcal{O}(X)$  de  $X$ , alors pour toute capacité  $\nu$  sur  $X$ , notons  $\nu|_{\mathcal{O}}$  la restriction de  $\nu$  à  $\mathcal{O}$ . Il est naturel, étant donné une famille de tests  $\mathcal{T}st = (U_i)_{i \in I}$  et un système de transitions ludique  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$ , de considérer la restriction  $\theta_\ell(x)|_{\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}}$  de  $\theta_\ell(x)$  à la topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  engendrée par les tests.

Considérons maintenant l'ensemble

$$\{x \in X \mid \theta_\ell(x)(U) > r\}$$

pour  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  et  $r \in \mathbb{R}$ . Cet ensemble est un ouvert de  $X$ , puisque c'est  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$  et que  $\theta_\ell$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1} wk(X)$ . On peut voir cet ouvert comme un nouveau test, permettant de distinguer les états  $x$  tels que la probabilité de transition de  $x$  vers un état tombant dans  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  soit supérieure strictement à  $r$ . Il est donc naturel d'ajouter ce test à la famille  $\mathcal{T}st$ , et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ne puisse plus en ajouter d'autre :

**Définition 9.1.4** Une famille de tests  $\mathcal{T}st = (U_i)_{i \in I}$  sur l'espace topologique  $X$  est agglomérante pour  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  si et seulement si  $\theta_\ell^{-1}[U > r] \in \mathcal{T}st$  pour tout  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

Une famille agglomérante de tests est donc une famille complète, dans le sens où elle contient aussi tous les tests définissables en observant les transitions, c'est-à-dire en mesurant la probabilité que le successeur de  $x$  tombe dans un test  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ .

**Définition 9.1.5 (Topologie agglomérante)** Une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de l'espace  $X$  est agglomérante pour  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  si et seulement si la fonction  $\theta_\ell|_{\mathcal{O}}$  qui à tout  $x \in X$  associe  $\theta_\ell(x)|_{\mathcal{O}}$  est continue de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1} wk(X : \mathcal{O})$ .

**Lemme 9.1.6** Si la famille de tests  $\mathcal{T}st = (U_i)_{i \in I}$  est agglomérante pour  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$ , alors la topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  est agglomérante pour  $\theta$ .

Si la topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  est agglomérante pour  $\theta$ , alors  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  est une famille de tests agglomérante pour  $\theta$ .

*Démonstration.* Dire que  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  est agglomérante revient à demander que  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$  soit dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$  pour tout  $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . □

Il n'y a donc que peu de différences entre famille de tests agglomérantes et topologies agglomérantes. Pour toute topologie agglomérante  $\mathcal{O}$ , il existe en général plusieurs familles de tests

agglomérantes  $\mathcal{T}st$  telles que  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{T}st}$ . La plus grande est  $\mathcal{O}$  elle-même. Une qui est en général plus petite se construit en posant  $\mathcal{T}st_0 = \emptyset$ ,  $\mathcal{T}st_{\alpha+1} = \mathcal{T}st_\alpha \cup \{\theta_\ell^{-1}[U > r] \mid \ell \in L, r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], U \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}st_\alpha}\}$  pour tout ordinal  $\alpha$ , et  $\mathcal{T}st_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{T}st_\beta$  pour tout ordinal limite  $\alpha$ .

Nous ne raisonnerons plus que sur des topologies, et en particulier des topologies agglomérantes, dans la suite. Nous avons annoncé que la notion d'agglomération était la bonne, sauf pour le fait que la topologie à prendre sur l'espace  $X/\equiv$  n'était pas la topologie quotient. C'est le cas, et la bonne topologie est celle de  $X/\mathcal{O}$ , pour une topologie agglomérante  $\mathcal{O}$ , comme nous le verrons au lemme 9.1.7. Notons que cette topologie est en général moins fine que celle de  $X/\equiv_{\mathcal{O}}$ .

**Lemme 9.1.7** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante pour  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  sur  $X$ . Alors, pour tous  $x_1, x_2 \in X$ , pour tout  $\ell \in L$  :*

- si  $x_1 \preceq_{\mathcal{O}} x_2$ , alors  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_1)] \leq q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_2)]$  ;
- si  $x_1 \equiv_{\mathcal{O}} x_2$ , alors  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_1)] = q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_2)]$ .

*Démonstration.* Supposons  $x_1 \preceq_{\mathcal{O}} x_2$ . Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout ouvert  $q_{\mathcal{O}}(U)$ ,  $U \in \mathcal{O}$ , de  $X/\mathcal{O}$  (rappelons le lemme 9.1.3), si  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_1)](q_{\mathcal{O}}(U)) > r$ , alors par définition  $\theta_\ell(x_1)(q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(U))) > r$ , donc  $\theta_\ell(x_1)(U) > r$  par le lemme 9.1.2. Donc  $x_1$  est dans l'ouvert  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$ , qui est dans  $\mathcal{O}$  puisque  $\mathcal{O}$  est agglomérante pour  $\theta$ . Comme  $x_1 \preceq_{\mathcal{O}} x_2$ ,  $x_2$  est dans le même ouvert, donc par le même raisonnement que ci-dessus,  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_2)](q_{\mathcal{O}}(U)) > r$ . Ceci étant vrai pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_2)](q_{\mathcal{O}}(U)) \geq q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_1)](q_{\mathcal{O}}(U))$ . Par le même raisonnement, en échangeant les rôles de  $x_1$  et de  $x_2$ ,  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_2)](q_{\mathcal{O}}(U)) \leq q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_1)](q_{\mathcal{O}}(U))$ . La deuxième partie du lemme est une conséquence triviale de la première.  $\square$

**Lemme 9.1.8** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante pour  $\theta$ .*

*Alors la fonction  $\theta_\ell/\mathcal{O}$  qui à  $q_{\mathcal{O}}(x)$  associe  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x)]$  est bien définie et continue de  $X/\mathcal{O}$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1}^{wk}(X/\mathcal{O})$  pour tout  $\ell \in L$ .*

*La famille  $\theta/\mathcal{O} = (\theta_\ell/\mathcal{O})_{\ell \in L}$  est alors un système de transitions ludique sur  $X/\mathcal{O}$ , qui est crédibiliste, resp. convexe, resp. plausibiliste, resp. concave, resp. de Markov dès que  $\theta$  l'est.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante pour  $\theta$ . Par le lemme 9.1.7, pour tout  $x \in X$ ,  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x)]$  ne dépend pas de  $x$ , mais seulement de  $q_{\mathcal{O}}(x)$ . Donc la fonction  $\theta_\ell/\mathcal{O}$  est bien définie.

Montrons qu'elle est continue : pour tout ouvert  $q_{\mathcal{O}}(U)$  de  $X/\mathcal{O}$ , où  $U \in \mathcal{O}$ ,

$$\begin{aligned} \theta_\ell/\mathcal{O}^{-1}[q_{\mathcal{O}}(U) > r] &= \{q_{\mathcal{O}}(x) \mid q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x)](q_{\mathcal{O}}(U)) > r\} \\ &= \{q_{\mathcal{O}}(x) \mid \theta_\ell(x)(q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(U))) > r\} \\ &= \{q_{\mathcal{O}}(x) \mid \theta_\ell(x)(U) > r\} \quad \text{par le lemme 9.1.2} \\ &= q_{\mathcal{O}}(\theta_\ell^{-1}[U > r]) = q_{\mathcal{O}}(\theta_{\ell/\mathcal{O}}^{-1}[U > r]) \end{aligned}$$

est un ouvert de  $X/\mathcal{O}$ , puisque  $\theta_{\ell/\mathcal{O}}$  est continue, et par le lemme 9.1.3.

$\theta/\mathcal{O}$  est donc un système de transitions ludique sur  $X/\mathcal{O}$ . Par le lemme 4.2.9,  $q_{\equiv}[\theta]$  est crédibiliste, resp. convexe, resp. plausibiliste, resp. concave, resp. modulaire, dès que  $\theta$  l'est.  $\square$

On montrera à la proposition 9.1.10 que le système de transitions ludique quotient  $\theta/\mathcal{O}$  vérifie exactement les mêmes formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\emptyset)$ , ou plutôt d'un sous-ensemble de formules

pour lequel ceci a un sens. Ces formules seront celles qui ne contiennent ni implication  $\Rightarrow$ , ni conjonction infinie  $\bigwedge$ , ni plus grand point fixe  $\nu$ .

Le lemme suivant énonce que la sémantique de ces formules est un élément de  $\mathcal{O}$ , dès que  $\mathcal{O}$  est une topologie agglomérante. Nous traiterons des opérateurs manquants plus loin.

**Lemme 9.1.9 (Correction)** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé de  $\mathcal{L}_{open}^{\top\wedge\perp\nu\forall\mu}(\emptyset)$ . Alors  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\mathcal{O}$ . En particulier, si  $x_1 \models_{\theta} F$  et  $x_1 \preceq_{\mathcal{O}} x_2$  alors  $x_2 \models_{\theta} F$ .*

*Plus généralement, supposons que  $F$  soit une formule de  $\mathcal{L}_{open}^{\top\wedge\perp\nu\forall\mu}(\mathcal{A})$ . Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A) \in \mathcal{O}$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \mathcal{O}$  pour toute variable  $\varphi$ , on a  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \in \mathcal{O}$ .*

*Démonstration.* Nous montrons la deuxième partie du lemme. La première s'en déduit trivialement, en utilisant le lemme 9.1.2 pour montrer que  $x_1 \models_{\theta} F$  et  $x_1 \preceq_{\mathcal{O}} x_2$  impliquent  $x_2 \models_{\theta} F$ .

On montre le résultat par récurrence structurale sur  $F$ . Les cas où  $F$  est une formule atomique  $A$ , une variable  $\varphi$ ,  $\top$ ,  $\perp$ , une conjonction finie ou une disjonction, finie ou infinie, le résultat est évident.

Lorsque  $F$  est de la forme  $[\ell]_{>r} F'$ ,  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \theta_{\ell}^{-1}[I \llbracket F' \rrbracket_{\theta} > r]$  est dans  $\mathcal{O}$  précisément parce que  $\mathcal{O}$  est agglomérante pour  $\theta$ .

Lorsque  $F$  est de la forme  $\mu\varphi \cdot F'$ , notons que par hypothèse de récurrence : (a)  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U'])$  est dans  $\mathcal{O}$  pour tout  $U' \in \mathcal{O}$ . Construisons  $U_0 = \emptyset$ ,  $U_{\alpha+1} = I \llbracket F' \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U_{\alpha}])$  pour tout ordinal  $\alpha$ ,  $U_{\beta} = \bigcup_{\alpha < \beta} U_{\alpha}$  pour tout ordinal limite  $\beta$ , et posons  $U_{\infty} = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ . Alors  $U_{\infty} = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ , puisque nous ne raisonnons ici que sur des formules bien formées (toutes les formules positives sont bien formées). Par récurrence ordinale,  $U_{\alpha}$  est dans  $\mathcal{O}$  pour tout  $\alpha$ . C'est évident lorsque  $\alpha = 0$  ou lorsque  $\alpha$  est un ordinal limite, et c'est par (a) lorsque  $\alpha$  est un ordinal successeur. Donc  $U_{\infty} = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$  est dans  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Proposition 9.1.10 (Quotient)** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé de  $\mathcal{L}_{open}^{\top\wedge\perp\nu\forall\mu}(\emptyset)$ . Alors :*

1.  $q_{\mathcal{O}}(\llbracket F \rrbracket_{\theta}) = \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}}$ ;
2.  $\llbracket F \rrbracket_{\theta} = q_{\mathcal{O}}^{-1}(\llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}})$ ;
3.  $x \models_{\theta} F$  si et seulement si  $q_{\mathcal{O}}(x) \models_{\theta/\mathcal{O}} F$ .

*Plus généralement, soit  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{open}^{\top\wedge\perp\nu\forall\mu}(\mathcal{A})$ . Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A) \in \mathcal{O}$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , posons  $I/\mathcal{O}$  l'interprétation définie par  $(I/\mathcal{O})(A) = q_{\mathcal{O}}(I(A))$ . Pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \mathcal{O}$  pour toute variable  $\varphi$ , posons  $\rho/\mathcal{O}$  l'environnement défini par  $(\rho/\mathcal{O})(\varphi) = q_{\mathcal{O}}(\rho(\varphi))$ . Alors :*

1.  $q_{\mathcal{O}}(I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho) = (I/\mathcal{O}) \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} (\rho/\mathcal{O})$ ;
2.  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = q_{\mathcal{O}}^{-1}((I/\mathcal{O}) \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} (\rho/\mathcal{O}))$ ;
3.  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  si et seulement si  $(\rho/\mathcal{O}), q_{\mathcal{O}}(x) \models_{\theta/\mathcal{O}}^{I/\mathcal{O}} F$ .

*Démonstration.* Notons  $I' = I/\mathcal{O}$ ,  $\rho' = \rho/\mathcal{O}$ . Nous montrons 2 par récurrence structurale sur  $F$ . C'est évident si  $F$  est une formule atomique  $A$ , auquel cas le côté gauche est  $I(A)$ , et le côté droit est  $q_{\mathcal{O}}^{-1}(I'(A)) = q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(I(A))) = I(A)$ , puisque  $I(A)$  est dans  $\mathcal{O}$  par hypothèse, et en utilisant le lemme 9.1.2. Le cas où  $F$  est une variable  $\varphi$  est similaire.

Lorsque  $F$  vaut  $\top$  ou  $\perp$ , c'est évident. Lorsque  $F$  est une conjonction finie, ou une disjonction, finie ou infinie, c'est par l'hypothèse de récurrence et le fait que  $q_{\mathcal{O}}^{-1}$  commute aux unions et aux intersections.

Lorsque  $F$  est de la forme  $[\ell]_{>r}F'$ , on a :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') &= q_{\mathcal{O}}^{-1}(\theta_{\ell}/\mathcal{O}^{-1}[I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho' > r]) \\ &= q_{\mathcal{O}}^{-1}\{q_{\mathcal{O}}(x) | q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x)](I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') > r\} \\ &= q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(\theta_{\ell}^{-1}[q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') > r])) \\ &= q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(\theta_{\ell}^{-1}[I \llbracket F' \rrbracket_{\theta} \rho > r])) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho)) \\ &= I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \quad \text{par le lemme 9.1.2 et le lemme 9.1.9} \end{aligned}$$

Finalemnt, lorsque  $F$  est de la forme  $\mu\varphi \cdot F'$ , on note que : (a)  $I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} (\rho'[\varphi \mapsto q_{\mathcal{O}}(U)]) = I \llbracket F' \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U])$  pour tout  $U \in \mathcal{O}$ , par hypothèse de récurrence. Le résultat s'obtient par récurrence ordinale, en utilisant (a).

2 étant démontré, on en déduit 1 :  $q_{\mathcal{O}}(I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho) = q_{\mathcal{O}}(q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')) = I' \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho'$ , puisque  $q_{\mathcal{O}}$  est surjective. 3 est une reformulation de 2.  $\square$

Une topologie agglomérante  $\mathcal{O}$  est d'autant plus intéressante que l'espace  $X/\mathcal{O}$  est plus petit, c'est-à-dire que la topologie  $\mathcal{O}$  est moins fine.

On observe que :

**Lemme 9.1.11** *Top(X), l'espace des topologies moins fines que celles de X, ordonné par la relation "est plus fine que", est un treillis complet.*

*Démonstration.* Pour toute famille  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  de topologies moins fines que celle de  $X$ , soit  $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ , où par convention ceci dénote  $\mathcal{O}(X)$  si  $I$  est vide.  $\mathcal{O}$  est une topologie moins fine que  $\mathcal{O}(X)$ , et est clairement la plus fine parmi celles qui sont moins fines que  $\mathcal{O}(X)$  et qui soit moins fine que tous les  $\mathcal{O}_i$ . Donc  $\mathcal{O}$  est la borne supérieure de la famille  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ . Comme toutes les bornes supérieures existent, il en est de même des bornes inférieures.  $\square$

La borne inférieure de  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ , au passage, est la topologie engendrée par l'union  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ .

**Lemme 9.1.12** *Soit  $T_{\theta}$  la fonction qui à toute topologie  $\mathcal{O}$  sur  $X$  moins fine que celle de  $X$  associe la topologie  $T_{\theta}(\mathcal{O})$  la moins fine sur  $X$  rendant toutes les fonctions  $x \mapsto \theta_{\ell}(x)_{|\mathcal{O}}$  continues de  $X : T_{\theta}(\mathcal{O})$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1} \text{wk}(X : \mathcal{O})$ .*

*De façon équivalente,  $T_{\theta}(\mathcal{O})$  est la topologie engendrée par les ouverts  $\theta_{\ell}^{-1}[U > r]$  lorsque  $U \in \mathcal{O}$  et  $r \in \mathbb{R}$ .*

*$T_{\theta}$  définit une fonction croissante de  $\text{Top}(X)$  dans  $\text{Top}(X)$ .*

*Démonstration.* Puisque tout  $U \in \mathcal{O}$  est un ouvert de  $X$ , et que  $\theta_\ell$  est continue de  $X$  dans  $\mathbf{J}_{\leq 1}^{wk}(X)$ ,  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$  est un ouvert de  $X$ . Donc  $T_\theta(\mathcal{O})$  est moins fine que la topologie de  $X$ , et définit donc un élément de  $Top(X)$ . Le fait que  $T_\theta$  soit croissante est clair.  $\square$

On a, par définition :

**Fait 9.1.13** *Les topologies agglomérantes  $\mathcal{O}$  de  $\theta$  sont exactement les pré-points fixes de  $T_\theta$ .*

Par le théorème de Knaster-Tarski :

**Théorème 9.1.14** *L'ensemble des topologies agglomérantes de  $\theta$  sur  $X$  est un treillis complet. En particulier, il existe une topologie agglomérante  $\mathfrak{D}_\theta$  la moins fine pour  $\theta$  sur  $X$ .*

En d'autres termes,  $\mathfrak{D}_\theta$  est le plus grand pré-point fixe, donc aussi le plus grand point fixe de  $T_\theta$ . Il existe donc une agglomération la meilleure pour  $\theta$ , c'est-à-dire la moins fine. Cette meilleure agglomération  $\mathfrak{D}_\theta$  peut en fait être caractérisée à l'aide du fragment  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \vee}(\emptyset)$  de la logique  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\emptyset)$  :

**Théorème 9.1.15** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un langage de formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F_1 \wedge F_2$ ,  $F_1 \vee F_2$  et  $[\ell]_{>r} F_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F_1, F_2$  de  $\mathcal{L}$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , où  $\mathbb{Q}$  est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ .*

*La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$ , est agglomérante.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  la topologie engendrée par les ouverts indiqués. Par le lemme 8.2.2,  $\mathcal{O}$  est moins fine que la topologie de  $X$ .

On remarque ensuite que, lorsque  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{O}$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , alors  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r] = \{x \in X \mid \theta_\ell(x)(\llbracket F \rrbracket_\theta) > r\} = \llbracket [\ell]_{>r} F \rrbracket_\theta$  est dans  $\mathcal{O}$  pour tout  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Ceci est encore vrai pour tout réel  $r \in [0, 1]$ , car  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r] = \bigcup_{r' \in \mathbb{Q}, r' > r} \theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r']$ .

Il nous reste à montrer que  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r]$  est dans  $\mathcal{O}$  pour tout  $U \in \mathcal{O}$ , pas seulement pour les  $U$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ . Alors la fonction  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}$  qui à  $x$  associe  $\theta_\ell(x)|_{\mathcal{O}}$  sera continue de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1}^{wk}(X : \mathcal{O})$ , et  $\mathcal{O}$  sera bien une topologie agglomérante.

L'ouvert  $U \in \mathcal{O}$  est par définition une union d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , donc d'ouverts qui sont soit  $\emptyset$  soit des unions dirigées d'unions finies non vides d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ . Si  $U$  est vide,  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r]$  est vide si  $r \geq 0$ ,  $X$  tout entier si  $r < 0$ , donc de toute façon dans  $\mathcal{O}$ .

Sinon, on remarque d'abord que toute intersection finie d'ouverts  $\llbracket F_i \rrbracket_\theta$ ,  $1 \leq i \leq m$ , est de la forme  $\llbracket F_1 \wedge \dots \wedge F_m \rrbracket_\theta$ , ou bien de la forme  $\llbracket \top \rrbracket_\theta$  si  $m = 0$ . Toute union finie non vide d'ouverts  $\llbracket F_i \rrbracket_\theta$ ,  $1 \leq i \leq m$  ( $m \geq 1$ ), est de la forme  $\llbracket F_1 \vee \dots \vee F_m \rrbracket_\theta$ . Donc  $U$  est une union dirigée d'ensembles de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , disons  $U = \bigcup_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_\theta$ . Alors  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r] = \{x \in X \mid \theta_\ell(x)(\bigcup_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_\theta) > r\} = \{x \in X \mid \sup_{i \in I} \theta_\ell(x)(\llbracket F_i \rrbracket_\theta) > r\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \theta_\ell(x)(\llbracket F_i \rrbracket_\theta) > r\}$ , qui est une union d'ouverts de  $\mathcal{O}$ , donc dans  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Corollaire 9.1.16 (Complétude)** Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . La topologie agglomérante pour  $\theta$  la moins fine  $\mathfrak{D}_\theta$  est celle qui est engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge\vee}(\emptyset)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{O}$  la topologie engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ ,  $F$  variant dans  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge\vee}(\emptyset)$ . Par le théorème 9.1.15,  $\mathfrak{O}$  est agglomérante, donc plus fine que  $\mathfrak{D}_\theta$ . Par le lemme 9.1.9, tout ouvert de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , avec  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge\vee}(\emptyset)$ , est dans  $\mathfrak{D}_\theta$ . Autrement dit  $\mathfrak{O}$  est moins fine que  $\mathfrak{D}_\theta$ . Donc  $\mathfrak{O} = \mathfrak{D}_\theta$ .  $\square$

Soient deux états  $x_1, x_2 \in X$ . Disons que  $x_1$  est *similaire* à  $x_2$ , et notons  $x_1 \preceq x_2$  si et seulement s'il existe une topologie agglomérante  $\mathfrak{O}$  telle que  $x_1 \preceq_{\mathfrak{O}} x_2$ . Le corollaire 9.1.16 implique que  $x_1 \preceq x_2$  si et seulement si  $x_2$  vérifie toutes les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge\vee}(\emptyset)$  que  $x_1$  vérifie. Alors  $x_2$  vérifie aussi toutes les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge\perp\vee\vee}(\emptyset)$  que  $x_1$  vérifie.

La notion suivante est peut-être plus parlante. Disons que deux états  $x_1, x_2 \in X$  sont *semblables*, et notons  $x_1 \equiv x_2$ , si et seulement s'il existe une topologie agglomérante  $\mathfrak{O}$  telle que  $x_1 \equiv_{\mathfrak{O}} x_2$ . Le corollaire 9.1.16 implique alors que  $x_1 \equiv x_2$  si et seulement si  $x_1$  et  $x_2$  vérifient exactement les mêmes formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge\vee}(\emptyset)$ . Ils vérifient alors les mêmes formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge\perp\vee\vee}(\emptyset)$ . De plus, on peut agglomérer les états, par la proposition 9.1.10, en notant que  $\equiv = \equiv_{\mathfrak{D}}$  : on peut fusionner tous les états  $x_1$  et  $x_2$  équivalents au sens de  $\equiv$ , et munir l'espace quotient d'une topologie (celle de  $X/\mathfrak{D}$ ) telle que, pour vérifier si  $x \models_{\theta} F$ , il suffit de vérifier que l'état fusionné  $q_{\mathfrak{D}}(x)$  vérifie  $F$  dans le système  $\theta/\mathfrak{D}$ , qui est en général plus petit. C'est la technique, usuelle en théorie des chaînes de Markov, des agglomérations ("lumping" en anglais).

▷ **Exercice 9.1**

On considère le cas d'un espace fini d'états  $X$ , muni de la topologie discrète. Montrer que pour tout préordre  $\preceq$  sur  $X$ , il existe une unique topologie  $\mathfrak{O}$  sur  $X$  telle que  $\preceq = \preceq_{\mathfrak{O}}$ .

▷ **Exercice 9.2**

On dit que le préordre  $\preceq$  est une relation de simulation pour  $\theta$  sur  $X$  si et seulement si pour tous états  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $x_1 \preceq x_2$ , on a  $\theta_{\ell}(x_1)(U) \leq \theta_{\ell}(x_2)(U)$  pour tout ensemble  $U$  clos par le haut pour  $\preceq$ . Ceci n'a de sens que lorsque la topologie d'Alexandroff de  $\preceq$  est moins fine que celle de  $X$ . La relation de similarité est usuellement définie comme la plus grande simulation :  $x_1$  est similaire à  $x_2$  si et seulement s'il existe une relation de simulation  $\preceq$  telle que  $x_1 \preceq x_2$ .

Montrer que, si  $X$  est fini (muni de sa topologie discrète), alors  $x_1$  est similaire à  $x_2$  si et seulement si  $x_1 \preceq_{\mathfrak{D}} x_2$ .

▷ **Exercice 9.3**

Nous cherchons à élucider la notion de simulation lorsque  $X$  est fini et  $\theta$  est purement non déterministe, de façon angélique. Autrement dit, supposons que pour tout  $\ell \in L$ , pour tout  $x \in X$ ,  $\theta_{\ell}(x)$  vaut soit 0 soit un jeu d'exemple  $\mathfrak{e}_F$ ,  $F \subseteq X$ . Notons  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  si  $\theta_{\ell}(x_1) = \mathfrak{e}_F$  avec  $x_2 \in F$ .

Montrer que  $\preceq$  est une simulation si et seulement si, pour tous  $x_1$  et  $y_1$  tels que  $x_1 \preceq y_1$ , pour tout  $\ell \in L$ , si  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  alors il existe un état  $y_2$  tel que  $x_2 \xrightarrow{\ell} y_2$  et  $x_2 \preceq y_2$ . Ceci est la définition

usuelle d'une simulation dans le cadre non déterministe, et se note de façon plus concise sous forme du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 x_1 & \xrightarrow{\preceq} & y_1 \\
 \ell \downarrow & & \downarrow \ell \\
 x_2 & \xrightarrow{\preceq} & y_2
 \end{array} \tag{9.1}$$

où les flèches en gras sont universellement quantifiées, et celles en pointillées sont existentiellement quantifiées.

Nous revenons enfin à la notion de bisimulation dont il était question au tout début de ce chapitre.

▷ **Exercice 9.4**

Soit  $X$  un ensemble fini (muni de sa topologie discrète). On dit que la relation d'équivalence  $\equiv$  est une relation de bisimulation pour  $\theta$  sur  $X$  si et seulement si pour tous états  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $x_1 \equiv x_2$ , on a  $\theta_\ell(x_1)(C) = \theta_\ell(x_2)(C)$  pour toute classe d'équivalence  $C$  pour  $\equiv$ . La relation de bisimilarité est usuellement définie comme la plus grande bisimulation :  $x_1$  et  $x_2$  sont bisimilaires si et seulement s'il existe une relation de bisimulation  $\equiv$  telle que  $x_1 \equiv x_2$ .

Montrer que si  $x_1$  et  $x_2$  sont bisimilaires, alors ils sont semblables. Montrer que la réciproque est fautive, en exhibant un ensemble  $X$  fini et un système de transition ludique  $\theta$ . Indication : on peut choisir  $L$  de cardinal 2, et  $\theta$  purement non déterministe angélique (i.e.,  $\theta_\ell(x)$  est un jeu d'exemple). La morale est : la bisimilarité n'identifie pas tous les états semblables.

▷ **Exercice 9.5**

A contrario de l'exercice 9.3, supposons que  $X$  soit fini et  $\theta$  est purement non déterministe, mais de façon démoniaque. Autrement dit, supposons que pour tout  $\ell \in L$ , pour tout  $x \in X$ ,  $\theta_\ell(x)$  vaille soit 0 soit un jeu d'unanimité  $u_Q$ ,  $Q \subseteq X$ . Notons  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  si  $\theta_\ell(x_1) = u_Q$  avec  $x_2 \in Q$ . Disons qu'une action  $\ell \in L$  est bloquée à l'état  $x$  si et seulement si  $\theta_\ell(x) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement s'il n'existe aucun état  $x'$  tel que  $x \xrightarrow{\ell} x'$ . Dans le cas contraire, elle est activée.

Montrer que  $\preceq$  est une simulation si et seulement si, pour tous  $x_1$  et  $y_1$  tels que  $x_1 \preceq y_1$ , pour toute action  $\ell \in L$  qui est activée en  $x_1$ , on a :

- $\ell$  est aussi activée en  $y_1$  ;
- pour tout état  $y_2$  tel que  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$  alors il existe un état  $x_2$  tel que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  et  $x_2 \preceq y_2$  :

$$\begin{array}{ccc}
 x_1 & \xrightarrow{\preceq} & y_1 \\
 \ell \downarrow & & \downarrow \ell \\
 x_2 & \xrightarrow{\preceq} & y_2
 \end{array} \tag{9.2}$$

(Observez bien la différence avec le diagramme (9.1).)

Avant de continuer, donnons une autre caractérisation de la notion de topologie agglomérante, en terme d'intégration de fonctions :

**Proposition 9.1.17** Une topologie  $\mathcal{O}$  sur  $X$  est agglomérante sur  $X$  si et seulement si  $\mathcal{O}$  est moins fine que  $\mathcal{O}(X)$  et, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbb{R}^+$ , la fonction

$$x \mapsto \int_{y \in X : \mathcal{O}} f(y) d\theta_\ell(x)|_{\mathcal{O}} \tag{9.3}$$

est continue de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbb{R}^+$  pour tout  $\ell \in L$ .

*Démonstration.* La direction seulement si est par la proposition 4.5.4. Réciproquement, si la fonction (9.3) est continue pour toute fonction continue  $f$  de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbb{R}^+$ , elle l'est en particulier pour  $f = \chi_U, U \in \mathcal{O}$ . Par la proposition 4.1.4, la fonction  $x \mapsto \theta_\ell(x)(U)$  est donc continue, c'est-à-dire que  $\mathcal{O}$  est une topologie agglomérante.  $\square$

## 9.2 Topologies agglomérantes intérieures

Les théorèmes de la section 9.1 ne s'appliquent pas en présence d'implication  $\Rightarrow$ , de conjonctions infinies  $\bigwedge$ , et de plus grands points fixes  $\nu$ . Pour les prendre en compte, nous nous intéressons à certaines topologies agglomérantes particulières. La façon de procéder est dictée par la démonstration des théorèmes de correction et de complétude de la section 9.1.

Intéressons-nous d'abord aux plus grands points fixes, et aux conjonctions infinies.

**Définition 9.2.1 (Topologie intérieure)** Soit  $\mathcal{O}$  une topologie moins fine que celle de l'espace topologique  $X$ . On dit que  $\mathcal{O}$  est une topologie intérieure si et seulement si, pour tout ensemble  $A$  clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ , l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  est dans  $\mathcal{O}$ .

Notons que l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  est l'intérieur de  $A$  relativement à la topologie de  $X$  : c'est le plus grand ouvert de  $X$ , pas nécessairement de  $X : \mathcal{O}$ , inclus dans  $A$ .

**Lemme 9.2.2** Soit  $\mathcal{O}$  une topologie intérieure sur  $X$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , le plus petit ensemble  $\uparrow_{\mathcal{O}} U$  contenant  $U$  et clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$  est dans  $\mathcal{O}$ .

*Démonstration.* Comme  $\uparrow_{\mathcal{O}} U$  est clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ ,  $\overset{\circ}{\uparrow_{\mathcal{O}} U}$  est dans  $\mathcal{O}$ , puisque  $\mathcal{O}$  est intérieure. Clairement,  $U = \overset{\circ}{U} \subseteq \overset{\circ}{\uparrow_{\mathcal{O}} U}$ . De plus,  $\overset{\circ}{\uparrow_{\mathcal{O}} U} \subseteq \uparrow_{\mathcal{O}} U$ . Comme  $\overset{\circ}{\uparrow_{\mathcal{O}} U}$  est dans  $\mathcal{O}$ , il est clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ . Comme  $\uparrow_{\mathcal{O}} U$  est le plus petit ensemble clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$  contenant  $U$ , comme  $U \subseteq \overset{\circ}{\uparrow_{\mathcal{O}} U} \subseteq \uparrow_{\mathcal{O}} U$ , et comme  $\overset{\circ}{\uparrow_{\mathcal{O}} U}$  est dans  $\mathcal{O}$ , donc close par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ , on en déduit  $\overset{\circ}{\uparrow_{\mathcal{O}} U} = \uparrow_{\mathcal{O}} U$ . Donc  $\uparrow_{\mathcal{O}} U$  est dans  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Lemme 9.2.3 (Correction)** Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante intérieure pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \perp \vee \nu}(\emptyset)$ . Alors  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\mathcal{O}$ . En particulier, si  $x_1 \models_{\theta} F$  et  $x_1 \preceq_{\mathcal{O}} x_2$  alors  $x_2 \models_{\theta} F$ .

Plus généralement, supposons que  $F$  soit une formule de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \mu \nu}(A)$ . Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A) \in \mathcal{O}$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \mathcal{O}$  pour toute variable  $\varphi$ , on a  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \in \mathcal{O}$ .

*Démonstration.* On montre la deuxième partie du lemme. Tous les cas sauf  $\wedge$  et  $\nu$  sont comme au lemme 9.1.9. Lorsque  $F$  est de la forme  $\bigwedge_{i \in I} F_i$ , par hypothèse de récurrence  $I \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \rho$  est dans  $\mathcal{O}$ , donc est clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ . En particulier,  $A = \bigcap_{i \in I} I \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \rho$  est clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ . Comme  $\mathcal{O}$  est intérieure,  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \overset{\circ}{A}$  est dans  $\mathcal{O}$ . Notons que  $A$  n'est pas en général ouvert, étant une intersection possiblement infinie d'ouverts.

Lorsque  $F$  est de la forme  $\nu \varphi \cdot F'$ , notons d'abord que : (a) si  $U$  est dans  $\mathcal{O}$ , alors  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U])$  est dans  $\mathcal{O}$ , par hypothèse de récurrence. Posons  $\Phi$  la fonction qui à  $U \in \mathcal{O}$  associe  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta} (\rho[\varphi \mapsto U])$ . Alors  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$  est le plus grand point fixe de  $\Phi$  dans  $\mathcal{O}(X)$  :  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ U \subseteq \Phi(U)}} U$ .

Nous allons montrer que  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subseteq \Phi(U)}} U$ , c'est-à-dire que le point fixe peut être calculé dans  $\mathcal{O}$ . Clairement,  $\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subseteq \Phi(U)}} U \subseteq I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ . Réciproquement, pour tout ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $U \subseteq \Phi(U)$ ,  $\uparrow_{\mathcal{O}} U$  est dans  $\mathcal{O}$ , par le lemme 9.2.2. De plus,  $\Phi(U) \subseteq \Phi(\uparrow_{\mathcal{O}} U)$  parce que  $F'$  est positive, donc bien formée, et en utilisant le lemme 8.2.5. Donc  $U \subseteq \Phi(\uparrow_{\mathcal{O}} U)$ . Comme  $\Phi(\uparrow_{\mathcal{O}} U)$  est dans  $\mathcal{O}$  par (a),  $\Phi(\uparrow_{\mathcal{O}} U)$  est clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ , et contient  $U$ , donc contient  $\uparrow_{\mathcal{O}} U$ . On en déduit que  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ U \subseteq \Phi(U)}} U \subseteq \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ \uparrow_{\mathcal{O}} U \subseteq \Phi(\uparrow_{\mathcal{O}} U)}} U \subseteq \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ \uparrow_{\mathcal{O}} U \subseteq \Phi(\uparrow_{\mathcal{O}} U)}} \uparrow_{\mathcal{O}} U \subseteq \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subseteq \Phi(U)}} U$ .  
Donc  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subseteq \Phi(U)}} U$  est dans  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Proposition 9.2.4 (Quotient)** Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante intérieure pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \mu \nu}(\emptyset)$ . Alors :

1.  $q_{\mathcal{O}}(\llbracket F \rrbracket_{\theta}) = \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}}$ ;
2.  $\llbracket F \rrbracket_{\theta} = q_{\mathcal{O}}^{-1}(\llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}})$ ;
3.  $x \models_{\theta} F$  si et seulement si  $q_{\mathcal{O}}(x) \models_{\theta/\mathcal{O}} F$ .

Plus généralement, soit  $F$  une formule de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \mu \nu}(A)$ . Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A) \in \mathcal{O}$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , posons  $I/\mathcal{O}$  l'interprétation définie par  $(I/\mathcal{O})(A) = q_{\mathcal{O}}(I(A))$ . Pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \mathcal{O}$  pour toute variable  $\varphi$ , posons  $\rho/\mathcal{O}$  l'environnement défini par  $(\rho/\mathcal{O})(\varphi) = q_{\mathcal{O}}(\rho(\varphi))$ . Alors

1.  $q_{\mathcal{O}}(I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho) = (I/\mathcal{O}) \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} (\rho/\mathcal{O})$ ;
2.  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = q_{\mathcal{O}}^{-1}((I/\mathcal{O}) \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} (\rho/\mathcal{O}))$ ;
3.  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  si et seulement si  $(\rho/\mathcal{O}), q_{\mathcal{O}}(x) \models_{\theta/\mathcal{O}}^{I/\mathcal{O}} F$ .

*Démonstration.* On montre 2, comme à la proposition 9.1.10, par récurrence structurale sur  $F$ . Notons encore  $I' = I/\mathcal{O}$ ,  $\rho' = \rho/\mathcal{O}$ .

On observe que  $\preceq_{\mathcal{O}}$  induit un ordre  $\leq$  sur  $X/\mathcal{O}$  par  $q_{\mathcal{O}}(x) \leq q_{\mathcal{O}}(y)$  si et seulement si  $x \preceq_{\mathcal{O}} y$ . Cet ordre  $\leq$  est exactement l'ordre de spécialisation de  $X/\mathcal{O}$ , par le lemme 9.1.3 :  $q_{\mathcal{O}}(x)$  est inférieur ou égal à  $q_{\mathcal{O}}(y)$  dans l'ordre de spécialisation de  $X/\mathcal{O}$  si et seulement si, pour tout

$U \in \mathcal{O}$ , si  $q_{\mathcal{O}}(x) \in q_{\mathcal{O}}(U)$  alors  $q_{\mathcal{O}}(y) \in q_{\mathcal{O}}(U)$ , autrement dit si  $x \in U$  alors  $y \in U$  (en utilisant que  $q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(U)) = U$ , par le lemme 9.1.2).

Lorsque  $\mathcal{O}$  est intérieure, pour toute partie  $A$  close par le haut (pour  $\leq$ , donc) de  $X/\mathcal{O}$ , on remarque que : (\*)  $q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)}$ . Notons que l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  de  $A$  est pris dans la topologie de  $X/\mathcal{O}$ , alors que l'intérieur du côté droit est pris dans la topologie de  $X$ , pas dans  $\mathcal{O}$ . Comme  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $X/\mathcal{O}$ , on peut écrire  $\overset{\circ}{A} = q_{\mathcal{O}}(U)$ , pour un certain  $U \in \mathcal{O}$ , par le lemme 9.1.3. Par le lemme 9.1.2,  $U = q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overset{\circ}{A})$ . Donc  $U \subseteq q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)$ . Puisque  $U$  est ouvert dans  $X$ ,  $U \subseteq \overset{\circ}{q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)}$ , ce qui donne la direction  $\subseteq$  de (\*). Réciproquement, soit  $B = q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)$  :  $B$  est clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$ , puisque  $A$  l'est pour  $\leq$ , donc  $\overset{\circ}{B}$  est dans  $\mathcal{O}$  puisque  $\mathcal{O}$  est intérieure. Donc  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B})$  est un ouvert de  $X/\mathcal{O}$ . De plus,  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B}) \subseteq A$  puisque  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B}) \subseteq q_{\mathcal{O}}(B) = A$ . Donc  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B}) \subseteq \overset{\circ}{A}$ , c'est-à-dire  $\overset{\circ}{B} \subseteq q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overset{\circ}{A})$ . Mais ceci est la direction  $\supseteq$  de (\*).

Lorsque  $F$  est de la forme  $\bigwedge_{i \in I} F_i$ ,

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') &= q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} I' \llbracket F_i \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho'}) \\ &= q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overset{\circ}{\left( \bigcap_{i \in I} I' \llbracket F_i \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho' \right)}) \quad \text{par (*),} \\ &\quad \text{puisque } \bigcap_{i \in I} I' \llbracket F_i \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho' \text{ est clos par le haut pour } \preceq_{\mathcal{O}} \\ &= \overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F_i \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')} \quad \text{puisque } q_{\mathcal{O}}^{-1} \text{ commute aux intersections} \\ &= \overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} I \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \rho} = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \end{aligned}$$

Lorsque  $F$  est de la forme  $\nu\varphi \cdot F'$ , posons  $\Phi$  la fonction qui à tout ouvert  $U$  de  $X$  associe  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}(\rho[\varphi \mapsto U])$ , et  $\Phi'$  la fonction qui à tout ouvert  $U'$  de  $X/\mathcal{O}$  associe  $I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho'$ . Par hypothèse de récurrence, on sait que : (a)  $q_{\mathcal{O}}^{-1}(\Phi'(q_{\mathcal{O}}(U))) = \Phi(U)$  pour tout  $U \in \mathcal{O}$ . Nous devons montrer que l'image réciproque par  $q_{\mathcal{O}}$  du plus grand (pré-)point fixe  $I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}}$  de  $\Phi'$  est le plus grand (pré-)point fixe  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$  de  $\Phi$ . Supposons que  $U' = q_{\mathcal{O}}(U)$ ,  $U \in \mathcal{O}$ , soit un pré-point fixe de  $\Phi'$ , c'est-à-dire que  $U' \subseteq \Phi'(U')$ . Par le lemme 9.1.2,  $q_{\mathcal{O}}^{-1}(U') = U$ . Alors  $U = q_{\mathcal{O}}^{-1}(U') \subseteq q_{\mathcal{O}}^{-1}(\Phi'(U')) = \Phi(U)$  par (a), donc  $U$  est un pré-point fixe de  $\Phi$ . En prenant  $U' = I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho'$ , ceci implique  $U = q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F' \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')$  est un pré-point fixe de  $\Phi$ , donc inclus dans le plus grand,  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ . Réciproquement, posons  $U = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ , et  $U' = q_{\mathcal{O}}(U)$ .  $U$  est dans  $\mathcal{O}$  par le lemme 9.2.3. En particulier,  $U = q_{\mathcal{O}}^{-1}(U')$  par le lemme 9.1.2. Comme  $U \subseteq \Phi(U)$ , c'est que  $U \subseteq q_{\mathcal{O}}^{-1}(\Phi'(U'))$ , par (a). Donc  $U' = q_{\mathcal{O}}(U) \subseteq \Phi'(U')$ , et  $U'$  est un pré-point fixe de  $\Phi'$ ,

donc  $U' \subseteq I' \llbracket F \rrbracket_{\theta/\circ} \rho'$ . Donc  $U = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = q_{\circ}^{-1}(U') \subseteq q_{\circ}^{-1}(I' \llbracket F \rrbracket_{\theta/\circ} \rho')$ .  $\square$

Montrons que l'espace des topologies intérieures à  $X$  forme encore un treillis complet. Ceci permet d'assurer, en particulier, qu'il existe une topologie agglomérante intérieure la moins fine.

**Lemme 9.2.5**  *$Top_{int}(X)$ , l'espace des topologies intérieures sur  $X$ , ordonné par la relation "est plus fine que", est un treillis complet.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une famille de topologies intérieures sur  $X$ , et posons  $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ . Tout ensemble  $A$  qui est clos par le haut pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$  est aussi clos par le haut pour chaque  $\preceq_{\mathcal{O}_i}$ . Comme  $\mathcal{O}_i$  est intérieure,  $\overset{\circ}{A}$  est dans  $\mathcal{O}_i$ , et ce pour tout  $i \in I$ . Donc  $\overset{\circ}{A}$  est dans  $\mathcal{O}$ , et l'on conclut que  $\mathcal{O}$  est intérieure. Donc  $\mathcal{O}$  est la borne supérieure de la famille  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ . Comme toutes les bornes supérieures existent, il en est de même des bornes inférieures.  $\square$

**Lemme 9.2.6** *Soit  $T_{\theta}^{int}$  la fonction qui à toute topologie  $\mathcal{O}$  sur  $X$  moins fine que celle de  $X$  associe la topologie  $T_{\theta}^{int}(\mathcal{O})$  la moins fine sur  $X$  qui soit intérieure et qui rende toutes les fonctions  $x \mapsto \theta_{\ell}(x)_{|\mathcal{O}}$  continues de  $X : T_{\theta}(\mathcal{O})$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1}^{wk}(X : \mathcal{O})$ .*

*$T_{\theta}^{int}$  définit une fonction croissante de  $Top_{int}(X)$  dans  $Top_{int}(X)$ .*

*Démonstration.* Évident.  $\square$

**Fait 9.2.7** *Les topologies agglomérantes intérieures  $\mathcal{O}$  de  $\theta$  sont exactement les pré-points fixes de  $T_{\theta}^{int}$ .*

Par le théorème de Knaster-Tarski :

**Théorème 9.2.8** *L'ensemble des topologies agglomérantes intérieures de  $\theta$  sur  $X$  est un treillis complet. En particulier, il existe une topologie agglomérante intérieure  $\mathfrak{D}_{\theta}^{int}$  la moins fine pour  $\theta$  sur  $X$ .*

**Théorème 9.2.9** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un langage de formules de  $\mathcal{L}_{open}(\mathcal{A})$  tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F_1 \wedge F_2$ ,  $F_1 \vee F_2$  et  $[\ell]_{>r} F_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F_1, F_2$  de  $\mathcal{L}$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  (où  $\mathbb{Q}$  est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ ), et tel que  $\bigwedge_{i \in I} F_i$  et  $\bigvee_{i \in I} F_i$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de formules de  $L$  de cardinal au plus  $|\mathcal{O}(X)|$ .*

*La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$ , est agglomérante et intérieure.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  cette topologie. Elle est agglomérante, par le théorème 9.1.15. Montrons qu'elle est intérieure. D'abord, on remarque que le préordre de spécialisation  $\preceq$  de  $\mathcal{O}$  est caractérisé par :  $x \preceq y$  si et seulement si, pour toute formule  $F$  de  $\mathcal{L}$ , si  $x \models_{\theta} F$  alors  $y \models_{\theta} F$ .

Soit  $A$  un ensemble clos par le haut pour  $\preceq$ .  $A$  est l'intersection de tous les ouverts de  $\mathcal{O}$  qui contiennent  $A$ . Les ouverts de  $\mathcal{O}$  sont les unions d'ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ ,  $F \in \mathcal{L}$ , puisque l'on peut former toutes les conjonctions finies dans  $\mathcal{L}$ . En particulier, pour tout ouvert  $U \in \mathcal{O}$ ,  $U$

s'écrit comme l'union des  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ ,  $F \in \mathcal{L}$ , qui sont inclus dans  $U$ . Notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ ,  $F \in \mathcal{L}$ . Pour tout  $V \in \mathcal{B}$ , fixons une formule  $F_V$  de  $\mathcal{L}$  telle que  $V = \llbracket F_V \rrbracket_\theta$ . Donc

$$A = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \supseteq A}} \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ V \subseteq U}} \llbracket F_V \rrbracket_\theta$$

Il s'ensuit :

$$\overset{\circ}{A} = \left[ \bigwedge_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \supseteq A}} \bigvee_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ V \subseteq U}} F_V \right]_\theta$$

est dans  $\mathcal{O}$ . Notons que la formule ci-dessus est bien dans  $\mathcal{L}$ , car la disjonction infinie est prise sur au plus  $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{O}(X)|$  éléments, et la conjonction infinie est prise sur au plus  $|\mathcal{O}| \leq |\mathcal{O}(X)|$  éléments. Donc  $\mathcal{O}$  est intérieure.  $\square$

▷ **Exercice 9.6**

On peut caractériser les clos par le haut  $A$  pour  $\preceq_{\mathcal{O}}$  comme étant les complémentaires des clos par le bas  $\bar{A}$ ; et les clos par le bas comme étant les  $\bigcup_{x \in \bar{A}} \downarrow_{\mathcal{O}} x$ . Enfin,  $\downarrow_{\mathcal{O}} x = \{y \in X \mid \forall F \in \mathcal{L} \cdot y \models_\theta F \Rightarrow x \models_\theta F\}$ . Refaire la démonstration du théorème 9.2.9 avec ce codage des clos par le haut. Ceci permet-il d'utiliser des conjonctions ou disjonctions infinies plus petites que celles données au théorème 9.2.9 ?

**Corollaire 9.2.10 (Complétude)** Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . La topologie agglomérante intérieure pour  $\theta$  la moins fine  $\mathfrak{D}_\theta^{\text{int}}$  est celle qui est engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \vee \vee}(\emptyset)$ .

L'utilisation de deux opérateurs infinitaires semble nécessaire dans le cas général pour obtenir la complétude. Dans certains cas particuliers, on n'a besoin que d'un de ces deux opérateurs. C'est le cas lorsque  $X$  est un cpo continu, et en général un C-espace :

**Théorème 9.2.11** Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un langage de formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F_1 \wedge F_2$ ,  $F_1 \vee F_2$  et  $[\ell]_{>r} F_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F_1, F_2$  de  $\mathcal{L}$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  (où  $\mathbb{Q}$  est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ ), et tel que  $\bigwedge_{i \in I} F_i$  soit dans  $\mathcal{L}$  pour toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de formules de  $L$  de cardinal au plus  $|\mathcal{O}(X)|$ .

Supposons de plus que  $X$  soit un C-espace. La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$ , est agglomérante et intérieure.

*Démonstration.* Reprenons un ensemble  $A$  clos par le haut pour  $\preceq$ , comme au théorème 9.2.9.

Écrivons maintenant  $A = \bigcup_{x \in A} \uparrow x$ . Comme  $X$  est un C-espace,  $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in A} \overset{\circ}{\uparrow x}$ . Or  $\uparrow x = \{y \in X \mid x \preceq y\}$ , et  $x \preceq y$  si et seulement si, pour toute formule  $F$ ,  $x \models_\theta F$  implique  $y \models_\theta F$ .

De façon équivalente,  $x \preceq y$  si et seulement si pour tout  $V \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in V$ , on a  $y \in V$  ( $\mathcal{B}$  est  $F_V$  ont été définis au théorème 9.2.9). Comme  $V = \llbracket F_V \rrbracket_\theta$ ,  $\uparrow x = \bigcap_{V \in \mathcal{B}, x \in V} \llbracket F_V \rrbracket_\theta$ , donc  $\overset{\circ}{\uparrow} x = \left[ \bigwedge_{V \in \mathcal{B}, x \in V} F_V \right]_\theta$  est dans  $\mathcal{O}$ . Donc  $\overset{\circ}{A}$ , qui est une union d'éléments de  $\mathcal{O}$ , est aussi dans  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Corollaire 9.2.12 (Complétude, C-espaces)** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un C-espace  $X$ . La topologie agglomérante intérieure pour  $\theta$  la moins fine  $\mathfrak{D}_\theta^{\text{int}}$  est celle qui est engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \vee}(\emptyset)$ .*

### 9.3 Topologies agglomérantes ouvertes

Poursuivons le programme commencé en section 9.2, et incluons l'implication  $\Rightarrow$ .

**Définition 9.3.1** *Une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de l'espace topologique  $X$  est dite ouverte si et seulement si  $q_\mathcal{O}$  est une application ouverte de  $X$  vers  $X/\mathcal{O}$ .*

**Proposition 9.3.2** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie moins fine que celle de  $X$ .  $\mathcal{O}$  est ouverte si et seulement si, pour tout ensemble  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé  $A$ , l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  est dans  $\mathcal{O}$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{O}$  est ouverte, fixons une partie  $A \equiv_{\mathcal{O}}$ -saturée de  $X$ . Autrement dit,  $A = q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(A))$ . Comme  $q_\mathcal{O}$  est ouverte,  $q_\mathcal{O}(\overset{\circ}{A})$  est un ouvert de  $X/\mathcal{O}$ , c'est-à-dire  $q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(\overset{\circ}{A}))$  est dans  $\mathcal{O}$ . Or  $\overset{\circ}{A} \subseteq q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(\overset{\circ}{A})) \subseteq q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(A)) = A$ . Comme  $q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(\overset{\circ}{A}))$  est dans  $\mathcal{O}$ , il est ouvert. Il est inclus dans  $A$ , mais le plus grand ouvert inclus dans  $A$  est  $\overset{\circ}{A}$  par définition. Puisque  $\overset{\circ}{A} \subseteq q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(\overset{\circ}{A}))$ , c'est que  $\overset{\circ}{A} = q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(\overset{\circ}{A}))$ , donc  $\overset{\circ}{A}$  est dans  $\mathcal{O}$ .

Réciproquement, supposons que l'intérieur de toute partie  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturée soit dans  $\mathcal{O}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $X$ . Pour montrer que  $\mathcal{O}$  est ouverte, nous devons montrer que  $q_\mathcal{O}(U)$  est ouvert dans  $X/\mathcal{O}$ , c'est-à-dire que le  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé  $A = q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(U))$  de  $U$  est dans  $\mathcal{O}$ . Par hypothèse,  $\overset{\circ}{A}$  est dans  $\mathcal{O}$ . Comme  $U \subseteq A$ ,  $U \subseteq \overset{\circ}{A}$ . Et  $\overset{\circ}{A} \subseteq A = q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(U))$ . Comme  $A$  est le  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé de  $U$ , et  $\overset{\circ}{A}$  est aussi  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé, étant dans  $\mathcal{O}$ , on a  $\overset{\circ}{A} = A$ , donc  $A$  est dans  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Corollaire 9.3.3** *Toute topologie ouverte sur  $X$  est intérieure.*

**Lemme 9.3.4** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie ouverte sur  $X$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , le  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé  $q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(U))$  de  $U$  est dans  $\mathcal{O}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $q_\mathcal{O}$  est ouverte,  $q_\mathcal{O}(U)$  est un ouvert de  $X/\mathcal{O}$ , donc par définition le  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé  $q_\mathcal{O}^{-1}(q_\mathcal{O}(U))$  de  $U$  est dans  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Lemme 9.3.5 (Correction)** Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante ouverte pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé bien formé de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \Rightarrow \Rightarrow \mu \nu}(\emptyset)$ . Alors  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\mathcal{O}$ . En particulier, si  $x_1 \models_{\theta} F$  et  $x_1 \preceq_{\mathcal{O}} x_2$  alors  $x_2 \models_{\theta} F$ .

Plus généralement, supposons que  $F$  soit une formule bien formée de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \Rightarrow \Rightarrow \mu \nu}(A)$ . Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A) \in \mathcal{O}$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \mathcal{O}$  pour toute variable  $\varphi$ , on a  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \in \mathcal{O}$ .

*Démonstration.* Comme au lemme 9.2.3, on montre la deuxième partie du lemme. Tous les cas sauf les implications  $\Rightarrow$  et  $\Rightarrow$  ont déjà été traités, puisque toute topologie ouverte est en particulier intérieure (corollaire 9.3.3). Notons au passage que, dans le cas de  $\mu$  et  $\nu$ , nous avons besoin du fait que  $U \mapsto I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}(\rho[\varphi \mapsto U])$  soit croissante, ce qui est assuré ici par le fait que  $F$  est bien formée.

Lorsque  $F$  est de la forme  $F_1 \Rightarrow F_2$ ,  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$  est l'intérieur de  $A = (X \setminus I \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta} \rho) \cup I \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta} \rho$ . Or, par hypothèse de récurrence,  $I \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta} \rho$  et  $I \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta} \rho$  sont dans  $\mathcal{O}$ , donc  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturés. Donc  $A$  est aussi  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé, et puisque  $\mathcal{O}$  est ouverte,  $\overset{\circ}{A} = I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$  est dans  $\mathcal{O}$ . Le cas des implications infinies se traite de façon entièrement similaire.  $\square$

**Proposition 9.3.6 (Quotient)** Soit  $\mathcal{O}$  une topologie agglomérante ouverte pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé bien formé de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \Rightarrow \Rightarrow \mu \nu}(\emptyset)$ . Alors :

1.  $q_{\mathcal{O}}(\llbracket F \rrbracket_{\theta}) = \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}}$ ;
2.  $\llbracket F \rrbracket_{\theta} = q_{\mathcal{O}}^{-1}(\llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}})$ ;
3.  $x \models_{\theta} F$  si et seulement si  $q_{\mathcal{O}}(x) \models_{\theta/\mathcal{O}} F$ .

Plus généralement, soit  $F$  une formule bien formée de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \Rightarrow \Rightarrow \mu \nu}(A)$ . Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A) \in \mathcal{O}$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , posons  $I/\mathcal{O}$  l'interprétation définie par  $(I/\mathcal{O})(A) = q_{\mathcal{O}}(I(A))$ . Pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \mathcal{O}$  pour toute variable  $\varphi$ , posons  $\rho/\mathcal{O}$  l'environnement défini par  $(\rho/\mathcal{O})(\varphi) = q_{\mathcal{O}}(\rho(\varphi))$ . Alors

1.  $q_{\mathcal{O}}(I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho) = (I/\mathcal{O}) \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}}(\rho/\mathcal{O})$ ;
2.  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho = q_{\mathcal{O}}^{-1}((I/\mathcal{O}) \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}}(\rho/\mathcal{O}))$ ;
3.  $\rho, x \models_{\theta}^I F$  si et seulement si  $(\rho/\mathcal{O}), q_{\mathcal{O}}(x) \models_{\theta/\mathcal{O}}^{I/\mathcal{O}} F$ .

*Démonstration.* On montre 2, comme à la proposition 9.2.4, par récurrence structurale sur  $F$ . Notons encore  $I' = I/\mathcal{O}$ ,  $\rho' = \rho/\mathcal{O}$ .

On remarque que, lorsque  $\mathcal{O}$  est ouverte, pour toute partie  $A$  de  $X/\mathcal{O}$ ,  $(*) \overset{\circ}{q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)} = \overbrace{q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)}^{\circ}$ . Comme  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $X/\mathcal{O}$ , on peut écrire  $\overset{\circ}{A} = q_{\mathcal{O}}(U)$ , pour un certain  $U \in \mathcal{O}$ , par le lemme 9.1.3. Par le lemme 9.1.2,  $U = q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overset{\circ}{A})$ . Donc  $U \subseteq q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)$ . Puisque  $U$  est ouvert dans  $X$ ,  $U \subseteq \overbrace{q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)}^{\circ}$ , ce qui donne la direction  $\subseteq$  de  $(*)$ . Réciproquement, soit  $B = q_{\mathcal{O}}^{-1}(A)$  :  $B$  est toujours  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé, donc  $\overset{\circ}{B}$  est dans  $\mathcal{O}$  puisque  $\mathcal{O}$  est intérieure, par la proposition 9.3.2.

Donc  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B})$  est un ouvert de  $X/\mathcal{O}$ . De plus,  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B}) \subseteq A$  puisque  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B}) \subseteq q_{\mathcal{O}}(B) = A$ . Donc  $q_{\mathcal{O}}(\overset{\circ}{B}) \subseteq \overset{\circ}{A}$ , c'est-à-dire  $\overset{\circ}{B} \subseteq q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overset{\circ}{A})$ . Mais ceci est la direction  $\supseteq$  de (\*).

On traite du cas où  $F = F_1 \Rightarrow F_2$ . On a :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') &= q_{\mathcal{O}}^{-1}(\overbrace{((X/\mathcal{O}) \setminus I' \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') \cup I' \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho'})^{\circ} \\ &= \overbrace{q_{\mathcal{O}}^{-1}((X/\mathcal{O}) \setminus I' \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') \cup I' \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')}^{\circ} \quad \text{par (*)} \\ &= \overbrace{q_{\mathcal{O}}^{-1}((X/\mathcal{O}) \setminus I' \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho') \cup q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')}^{\circ} \\ &= \overbrace{(X \setminus q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')) \cup q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')}^{\circ} \end{aligned}$$

parce que  $I' \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho'$  est  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé, par le lemme 9.3.5. Poursuivons :

$$\begin{aligned} &\overbrace{(X \setminus q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')) \cup q_{\mathcal{O}}^{-1}(I' \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta/\mathcal{O}} \rho')}^{\circ} \\ &= \overbrace{(X \setminus I \llbracket F_1 \rrbracket_{\theta} \rho) \cup I \llbracket F_2 \rrbracket_{\theta} \rho}^{\circ} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \end{aligned}$$

Le cas  $F = (F_i)_{i \in I} \Rightarrow G$  est entièrement similaire, et utilise le fait que  $q_{\mathcal{O}}^{-1}$  commute non seulement aux unions mais aussi aux intersections infinies.  $\square$

L'espace des topologies ouvertes sur  $X$  forme encore un treillis complet :

**Lemme 9.3.7** *Top<sub>open</sub>(X), l'espace des topologies ouvertes sur X, ordonné par la relation "est plus fine que", est un treillis complet.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une famille de topologies ouvertes sur  $X$ , et posons  $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ . Tout ensemble  $A \equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé est aussi  $\equiv_{\mathcal{O}_i}$ -saturé pour tout  $i \in I$ . Par la proposition 9.3.2,  $\overset{\circ}{A}$  est donc dans  $\mathcal{O}_i$  pour tout  $i \in I$ , donc dans  $\mathcal{O}$ . Par la proposition 9.3.2 de nouveau,  $\mathcal{O}$  est donc ouverte. Donc  $\mathcal{O}$  est la borne supérieure de la famille  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ . Comme toutes les bornes supérieures existent, il en est de même des bornes inférieures.  $\square$

**Lemme 9.3.8** *Soit  $T_{\theta}^{\text{open}}$  la fonction qui à toute topologie  $\mathcal{O}$  sur  $X$  moins fine que celle de  $X$  associe la topologie  $T_{\theta}^{\text{open}}(\mathcal{O})$  la moins fine sur  $X$  qui soit ouverte et qui rende toutes les fonctions  $x \mapsto \theta_{\ell}(x)|_{\mathcal{O}}$  continues de  $X : T_{\theta}(\mathcal{O})$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X : \mathcal{O})$ .*

*$T_{\theta}^{\text{open}}$  définit une fonction croissante de Top<sub>open</sub>(X) dans Top<sub>open</sub>(X).*

*Démonstration.* Évident.  $\square$

**Fait 9.3.9** *Les topologies agglomérantes ouvertes  $\mathcal{O}$  de  $\theta$  sont exactement les pré-points fixes de  $T_{\theta}^{\text{open}}$ .*

Encore par le théorème de Knaster-Tarski :

**Théorème 9.3.10** *L'ensemble des topologies agglomérantes ouvertes de  $\theta$  sur  $X$  est un treillis complet. En particulier, il existe une topologie agglomérante ouverte  $\mathfrak{D}_\theta^{\text{open}}$  la moins fine pour  $\theta$  sur  $X$ .*

**Théorème 9.3.11** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un langage de formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F_1 \wedge F_2$ ,  $F_1 \vee F_2$  et  $[\ell]_{>r} F_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F_1, F_2$  de  $\mathcal{L}$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , où  $\mathbb{Q}$  est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ . Supposons de plus que  $(F_i)_{i \in I} \Rightarrow G$  et  $\bigvee_{i \in I} F_i$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de formules de  $L$  de cardinal au plus  $|\mathcal{O}(X)|$  et toute formule  $G$ ; et que  $\bigwedge_{i \in I} F_i$  soit dans  $\mathcal{L}$  pour toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de formules de  $L$  de cardinal au plus  $|X|$ .*

*La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$ , est agglomérante et ouverte.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  cette topologie. Elle est agglomérante et intérieure, par le théorème 9.2.9. Soit  $A$  une partie  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturée de  $X$ . Pour chaque  $x \in X$ , posons  $[x] = q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}\{x\})$  la classe d'équivalence de  $x$ . On remarque d'abord que  $A = \bigcap_{x \notin A} (X \setminus [x])$ . En effet, si  $y \in A$ , alors  $y \in X \setminus [x]$  pour tout  $x \notin A$ , sinon on aurait  $y \equiv_{\mathcal{O}} x$ , donc  $x \in A$ , puisque  $A$  est  $\equiv_{\mathcal{O}}$ -saturé. Réciproquement, si  $y \in \bigcap_{x \notin A} (X \setminus [x])$ , et si  $y$  n'était pas dans  $A$ , alors  $y$  serait dans  $X \setminus [y]$  (prendre  $x = y$ ), ce qui est impossible.

Ensuite, on observe que  $x \equiv_{\mathcal{O}} y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  vérifient les mêmes formules de  $\mathcal{L}$ . Rappelons que  $\mathcal{B}$  est l'ensemble des ouverts  $V$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , et que  $F_V$  est l'une de ces formules  $F$  pour chaque  $V$ . Donc  $X \setminus [x]$  est l'ensemble des  $y \in X$  tels qu'il existe  $V \in \mathcal{B}$  avec  $x \in V$  et  $y \notin V$ , ou  $x \notin V$  et  $y \in V$ . Donc :

$$A = \bigcap_{x \notin A} (X \setminus [x]) = \bigcap_{x \notin A} \left( \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \in V}} (X \setminus V) \cup \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \notin V}} V \right)$$

Notons maintenant que l'intérieur d'une intersection  $\bigcap_{j \in J} A_j$  est aussi celle de l'intersection  $\bigcap_{j \in J} \overset{\circ}{A}_j$ . Donc

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &= \bigcap_{x \notin A} \overbrace{\bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \in V}} (X \setminus V) \cup \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \notin V}} V}^{\circ} = \bigcap_{x \notin A} \overbrace{\bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \in V}} (X \setminus \llbracket F_V \rrbracket_\theta) \cup \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \notin V}} \llbracket F_V \rrbracket_\theta}^{\circ} \\ &= \left[ \bigwedge_{x \notin A} \left( (F_V)_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \in V}} \Rightarrow \bigvee_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \notin V}} F_V \right) \right] \end{aligned}$$

est dans  $\mathcal{O}$ . □

**Corollaire 9.3.12 (Complétude)** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . La topologie agglomérante ouverte pour  $\theta$  la moins fine  $\mathfrak{D}_\theta^{open}$  est celle qui est engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \wedge \vee \vee \Rightarrow}(\emptyset)$ .*

## 9.4 Systèmes bilatères, cotopologies coagglomérantes

L'usage de topologies, en particulier de topologies agglomérantes, permet de classifier les points  $x$  de  $X$  à l'aide de tests  $U$ , qui sont des ouverts. On a vu en section 8.2 que ceci revenait à accumuler de l'information positive sur  $x$  : pour toute formule  $F$ , avec  $U = \llbracket F \rrbracket_\theta$ ,  $\chi_F(x)$  est intuitivement la borne supérieure d'une suite de booléens  $b_n \in \mathbb{S}$ , et l'on sait que  $x$  est dans  $U$  si et seulement si l'un des  $b_n$  vaut 1. Mais si  $x$  n'est pas dans  $U$ , on ne le saura jamais — sauf à attendre, pendant un temps infini, d'avoir vu tous les booléens  $b_n$  et de réaliser qu'ils valent tous 0.

On peut aussi vouloir accumuler en parallèle des informations *négatives*, c'est-à-dire des informations permettant de nous assurer que le test  $\chi_F(x)$  échoue, après un nombre fini d'expériences.

Il y a plusieurs façons d'adapter la notion de topologie agglomérante de sorte à prendre en compte les informations tant positives que négatives.

Une première possibilité est d'abandonner, temporairement, le cadre topologique, et de rentrer dans le cadre de la théorie de la mesure. C'est ce que nous ferons en section 9.5.

Une seconde possibilité est de rester dans un cadre topologique. La notion naturelle d'information négative est alors donnée par les protocompacts  $Q$  de  $X$  : on peut savoir quand  $x$  n'est pas dans  $Q$ , en regardant si  $x$  est dans  $X \setminus Q$ , qui est un ouvert du dual de de Groot  $X^d$  de  $X$ . En général, rappelons que les ouverts de  $X^d$  sont les cocompacts de  $X$ , c'est-à-dire les complémentaires des protocompacts de  $X$ . En général, les protocompacts  $Q$  de  $X$  sont les intersections quelconques de compacts saturés  $Q_i$ ,  $i \in I$ , de  $X$ . Lorsque  $X$  est bien filtrant et cohérent, les protocompacts sont juste les compacts saturés de  $X$ .

Cette notion aura un sens à partir du moment où  $\theta_\ell^{-1}$  préserve non seulement les informations positives ( $\theta_\ell$  étant continue, l'image réciproque de tout ouvert est ouvert) mais aussi les informations négatives.

Rappelons la définition 6.4.1 : la topologie *cofaible* sur un espace  $Y$  de fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}$  est celle engendrée par les ouverts  $\langle Q < r \rangle = \{\nu \in Y \mid \nu^\dagger(Q) < r\}$ ,  $Q$  compact saturé de  $X$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

**Définition 9.4.1 (Bilatère)** *Pour tout protocompact  $Q$  de  $X$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , posons  $\langle Q < r \rangle = \{\nu \in \mathbf{J}_{\leq 1}(X) \mid \nu^\dagger(Q) < r\}$  et  $\langle Q \geq r \rangle = \{\nu \in \mathbf{J}_{\leq 1}(X) \mid \nu^\dagger(Q) \geq r\}$ .*

*Un système de transitions ludique  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  sur  $X$  est bilatère si et seulement si  $\theta_\ell^{-1}\langle Q < r \rangle$  est un ouvert de  $X^d$ , c'est-à-dire le complémentaire d'un protocompact de  $X$  pour tout  $\ell \in L$ , pour tout protocompact  $Q$  de  $X$ , et pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .*

Nous aurions pu simplifier un peu la définition, et demander seulement que  $\theta_\ell^{-1}\langle Q < r \rangle$  soit un compact saturé pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$ . Mais ceci aurait impliqué que  $X = \theta_\ell^{-1}\langle Q <$

$1 + \epsilon$ ) soit compact, pour n'importe quel compact saturé  $Q$  (par exemple  $\uparrow x$ , pour un  $x \in X$ , si  $X$  est non vide), et pour n'importe quel  $\epsilon > 0$ . La définition ci-dessus permet en particulier de faire l'économie de l'hypothèse de la compacité de  $X$ .

Dans le cas des espaces stablement compacts, on a une caractérisation élégante des systèmes de transition ludiques normalisés bilatères. Rappelons que, dans ce cas, les protocompacts sont juste les compacts saturés.

**Proposition 9.4.2** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un système de transitions ludique normalisé sur  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\theta$  est bilatère ;
2.  $\theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle$  est un compact saturé de  $X$  pour tout  $\ell \in L$ , pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$ , et pour tout  $r \in \mathbb{R}$  ;
3. la famille  $\theta^\perp = (\theta_\ell^\perp)_{\ell \in L}$  définie par  $\theta_\ell^\perp(x) = (\theta_\ell(x))^\perp$  forme un système de transitions ludique sur  $X^d$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre 1 et 3 est évidente : il suffit de prendre les complémentaires. Montrons donc l'équivalence entre 2 et 3.

Supposons  $\theta$  bilatère. En particulier,  $\theta_\ell^\perp$  est une fonction continue de  $X^d$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X^d)$ . La topologie faible sur  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X^d)$  est engendrée par les ouverts  $[X \setminus Q > r]$ ,  $Q$  compact saturé de  $X$ . Alors  $(\theta_\ell^\perp)^{-1}[X \setminus Q > 1 - r]$  est un ouvert de  $X^d$ , donc le complémentaire d'un compact saturé de  $X$ . Autrement dit,  $X \setminus (\theta_\ell^\perp)^{-1}[X \setminus Q > r]$  est un compact saturé de  $X$ . Mais

$$\begin{aligned} X \setminus (\theta_\ell^\perp)^{-1}[X \setminus Q > 1 - r] &= X \setminus \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^\dagger(Q) < r\} \\ &= \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^\dagger(Q) \geq r\} = \{x \in X \mid \theta_\ell(x) \in \langle Q \geq r \rangle\} \\ &= \theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $\theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle$  est un compact saturé de  $X$  pour tout compact saturé  $Q$  de  $X$  et tout  $r \in \mathbb{R}$ , le calcul ci-dessus montre que  $\theta_\ell^{-1}\langle Q \geq 1 - r \rangle = X \setminus (\theta_\ell^\perp)^{-1}[X \setminus Q > r]$  est compact saturé, donc que  $(\theta_\ell^\perp)^{-1}[X \setminus Q > r]$  est un ouvert de  $X^d$ . Donc  $\theta_\ell^\perp$  est continue de  $X^d$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X^d)$ .  $\square$

Il est naturel de définir deux logiques adaptées aux systèmes bilatères. La première est  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\mathcal{A})$ , et les formules de cette logique s'interprètent comme des ouverts de  $X$  — l'information positive. La seconde doit fournir des formules qui s'interprètent comme des protocompacts de  $X$  — l'information négative. Une façon simple de le faire est de reprendre juste  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \mu}(\mathcal{A}')$ , de sorte à ce que la sémantique de chacune de ses formule soit cocompacte. Il sera peut-être plus clair de définir la deuxième logique directement. Nous n'incluons aucun des opérateurs  $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Rightarrow$ .

**Définition 9.4.3** *Soit  $Q$  une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ .*

Pour tout ensemble dénombrable  $\mathcal{A}'$  de formules dites atomiques  $A', B', C', \dots$ , les formules de la logique  $\mathcal{L}_{compact}^{\top \wedge \perp \vee \nu}$ ( $\mathcal{A}'$ ) sont définies par la grammaire :

$F'$	$::=$	$A'$	formules atomiques
		$\varphi$	variables
		$\top$	vrai
		$F' \wedge F'$	conjonction (et)
		$\bigwedge_{i \in I} F'_i$	conjonction infinie
		$\perp$	faux
		$F' \vee F'$	disjonction (ou)
		$\langle \ell \rangle_{\geq r} F'$	modalité
		$\nu \varphi \cdot F'$	plus grand point fixe

où  $r$  est un nombre de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ,  $\ell \in L$  dans la formule  $\langle \ell \rangle_{\geq r} F'$ , et  $I$  est un ensemble de cardinal borné par  $|\mathcal{O}(X^d)|$ .

La sémantique de  $\mathcal{L}_{compact}^{\top \wedge \perp \vee \nu}$ ( $\mathcal{A}'$ ) sur un système de transition ludique bilatère  $\theta$  sur un espace topologique  $X$ , avec actions dans  $L$ , est définie comme suit. Un environnement  $\rho$  est une fonction qui à toute variable  $\varphi \in \mathcal{V}$  associe un protocompact de  $X$ . Une interprétation  $I$  sur  $\mathcal{A}'$  est une fonction qui à toute formule atomique  $A' \in \mathcal{A}'$  associe un protocompact de  $X$ . On définit la relation  $\rho, x \models_{\theta}^I F'$  par récurrence structurelle sur  $F'$  :

$\rho, x \models_{\theta}^I A'$	ssi	$x \in I(A)$
$\rho, x \models_{\theta}^I \varphi$	ssi	$x \in \rho(\varphi)$
$\rho, x \models_{\theta}^I \top$		toujours
$\rho, x \models_{\theta}^I F'_1 \wedge F'_2$	ssi	$\rho, x \models_{\theta}^I F'_1$ et $\rho, x \models_{\theta}^I F'_2$
$\rho, x \models_{\theta}^I \bigwedge_{i \in I} F'_i$	ssi	$\rho, x \models_{\theta}^I F'_i$ pour tout $i \in I$
$\rho, x \models_{\theta}^I \perp$		jamais
$\rho, x \models_{\theta}^I F'_1 \vee F'_2$	ssi	$\rho, x \models_{\theta}^I F'_1$ ou $\rho, x \models_{\theta}^I F'_2$
$\rho, x \models_{\theta}^I \langle \ell \rangle_{\geq r} F'$	ssi	$\theta_{\ell}(x)^{\dagger}(I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho) \geq r$
$\rho, x \models_{\theta}^I \nu \varphi \cdot F'$	ssi	$x$ est dans le plus grand protocompact $\mathcal{Q}$ tel que $\mathcal{Q} \subseteq I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger}(\rho[\varphi \mapsto \mathcal{Q}])$

où  $\rho[\varphi \mapsto \mathcal{Q}]$  dénote l'environnement qui à  $\varphi$  associe  $\mathcal{Q}$  et à toute autre variable  $\psi$  associe  $\rho(\psi)$ , et où  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho$  dénote  $\{x \in X \mid \rho, x \models_{\theta}^I F'\}$ .

Les résultats qui suivent sont alors directement des conséquences des résultats des sections précédentes, à condition de remplacer les formules de  $\mathcal{L}_{open}^{\top \wedge \perp \vee \nu \mu}$ ( $\mathcal{A}$ ) par leurs négations dans  $\mathcal{L}_{compact}^{\top \wedge \perp \vee \nu}$ ( $\mathcal{A}'$ ), et  $\theta_{\ell}$  par  $\theta_{\ell}^{\perp}$  — quand ce dernier est défini.

**Lemme 9.4.4** La sémantique de  $\mathcal{L}_{compact}^{\top \wedge \perp \vee \nu}$ ( $\mathcal{A}'$ ) est bien définie. De plus, pour toute formule  $F'$  de  $\mathcal{L}_{compact}^{\top \wedge \perp \vee \nu}$ ( $\mathcal{A}'$ ),  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho$  est un protocompact de  $X$  pour toute interprétation  $I$ , tout environnement  $\rho$ , et tout système de transitions ludique bilatère  $\theta$  sur  $X$ .

*Démonstration.* Par récurrence structurelle sur  $F'$ . Nous ne traitons pas les cas évidents. Dans le cas  $\langle \ell \rangle_{\geq r} F'$ , par hypothèse de récurrence  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho$  est un protocompact  $Q$ . Alors  $\theta_{\ell}(x)^{\dagger} (I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho) \geq r$  si et seulement si  $\theta_{\ell}(x) \in \langle Q \geq r \rangle$ . Or  $I \llbracket \langle \ell \rangle_{\geq r} F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho = \theta_{\ell}^{-1} \langle Q \geq r \rangle$  est protocompact puisque  $\theta$  est bilatère. Dans le cas  $\nu\varphi \cdot F'$ ,  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho$  est défini comme le plus grand (pré-)point fixe de la fonction qui  $G$  à  $Q$  associe  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} (\rho[\varphi \mapsto Q])$ .  $G$  est clairement croissante, et envoie des protocompacts vers des protocompacts par hypothèse de récurrence. Le point fixe en question s'obtient par récurrence ordinale comme étant  $\bigcap_{\alpha} Q_{\alpha}$ , où l'intersection est prise sur tous les ordinaux, et  $Q_0 = X$ ,  $Q_{\alpha+1} = G(Q_{\alpha})$ ,  $Q_{\alpha} = \bigcap_{\beta < \alpha} Q_{\beta}$  pour tout ordinal limite  $\alpha$ . Par récurrence ordinale, tous les  $Q_{\alpha}$  sont protocompacts, donc aussi  $\bigcap_{\alpha} Q_{\alpha}$ . Notons en particulier que  $Q_0 = X$  est protocompact en tant qu'intersection de la famille vide de compacts saturés dans  $X$  : on n'a pas besoin de supposer  $X$  compact pour cela.  $\square$

**Lemme 9.4.5 (Monotonie)** *Soit  $F'$  une formule de  $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee}(A')$ . Pour toute variable  $\varphi$ ,  $F'$  est monotone en  $\varphi$  : si  $\rho(\varphi) \subseteq \rho'(\varphi)$ , alors  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho \subseteq I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho'$ .*

On définit  $\text{vars}(F')$  comme d'habitude. Notamment,  $\text{vars}(\langle \ell \rangle_{\geq r} F') = \text{vars}(F')$ , et  $\text{vars}(\nu\varphi \cdot F') = \text{vars}(F') \setminus \{\varphi\}$ . De nouveau,  $x \models_{\theta}^I F'$  ne dépend pas de  $I$  lorsque  $F'$  est une formule de  $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee}(\emptyset)$ . Nous noterons donc  $x \models_{\theta} F'$  dans ce cas. On notera aussi  $\llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger}$  au lieu de  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger}$ .

Comme l'évaluation des formules de  $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee}(\emptyset)$  fournit naturellement des protocompacts de  $X$ , et non leurs complémentaires, c'est-à-dire les cocompacts de  $X$ , nous allons préférer raisonner sur les complémentaires des éléments de  $\mathcal{O}'$ , qui forment une *cotopologie*, c'est-à-dire l'ensemble des fermés d'un espace topologique :

**Définition 9.4.6 (Cotopologie)** *Une cotopologie sur un ensemble  $E$  est une famille  $\mathcal{F}$  de parties de  $E$  stable par unions finies et par intersections quelconques.*

*Une cotopologie  $\mathcal{F}_1$  est plus fine que  $\mathcal{F}_2$  si et seulement si tout élément de  $\mathcal{F}_2$  est dans  $\mathcal{F}_1$ .*

*Toute cotopologie  $\mathcal{F}$  a une topologie associée  $\{X \setminus Q \mid Q \in \mathcal{F}\}$ , et toute topologie  $\mathcal{O}$  a une cotopologie associée  $\{X \setminus U \mid U \in \mathcal{O}\}$ .*

*La cotopologie duale d'un espace topologique  $X$  est l'ensemble de ses protocompacts.*

**Définition 9.4.7 (Cotopologie coagglomérante)** *Une cotopologie  $\mathcal{F}'$  est coagglomérante pour  $\theta$  sur  $X$  si et seulement si tout  $\mathcal{F}'$  est moins fine que la cotopologie duale de  $X$ , et  $\theta_{\ell}^{\dagger -1} \langle Q \geq r \rangle$  est dans  $\mathcal{F}'$  pour tout  $Q \in \mathcal{F}'$ ,  $\ell \in L$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .*

**Lemme 9.4.8 (Correction)** *Soit  $\mathcal{F}'$  une cotopologie coagglomérante pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F'$  un énoncé de  $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee}(\emptyset)$ . Alors  $\llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger}$  est dans  $\mathcal{F}'$ .*

*Plus généralement, supposons que  $F'$  soit une formule de  $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee}(A')$ . Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A') \in \mathcal{F}'$  pour tout  $A' \in A'$ , pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \mathcal{F}'$  pour toute variable  $\varphi$ ,  $I \llbracket F' \rrbracket_{\theta}^{\dagger} \rho$  est dans  $\mathcal{F}'$ .*

*Démonstration.* Formellement similaire à la démonstration du lemme 9.1.9.  $\square$

On a bien sûr :

**Lemme 9.4.9** *coTop(X), l'espace des cotopologies moins fines que la cotopologie duale de X, ordonné par la relation "est plus fine que", est un treillis complet.*

*Démonstration.* La borne supérieure est encore l'intersection. □

Comme il est l'usage, la cotopologie engendrée par une famille de parties est la plus petite qui contient cette famille.

**Lemme 9.4.10** *Soit  $T_\theta^\dagger$  la fonction qui à toute cotopologie  $\mathcal{F}'$  sur X moins fine que la cotopologie duale de X associe la cotopologie  $T_\theta^\dagger(\mathcal{F}')$  engendrée par les ouverts  $(\theta_\ell^\dagger)^{-1}\langle Q \geq r \rangle$  lorsque  $Q \in \mathcal{F}'$  et  $r \in \mathbb{R}$ .*

*$T_\theta^\dagger$  définit une fonction croissante de coTop(X) dans coTop(X).*

**Fait 9.4.11** *Les cotopologies coagglomérantes  $\mathcal{F}'$  de  $\theta$  sont exactement les pré-points fixes de  $T_\theta^\dagger$ .*

Et par le théorème de Knaster-Tarski :

**Théorème 9.4.12** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique bilatère sur X. L'ensemble des cotopologies coagglomérantes de  $\theta$  sur X est un treillis complet. En particulier, il existe une cotopologie coagglomérante  $\mathfrak{D}_\theta^\dagger$  la moins fine pour  $\theta$  sur X.*

Nous n'obtiendrons la complétude de la logique que dans le cas de certains espaces :

**Lemme 9.4.13 (Fortement bien filtrant)** *Disons qu'un espace topologique X est fortement bien filtrant si et seulement si, pour toute famille filtrante  $(Q_i)_{i \in I}$  de protocompacts de X et tout ouvert U de X, si  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$  alors  $Q_i \subseteq U$  pour un certain  $i \in I$ .*

*Tout espace fortement bien filtrant est bien filtrant.*

*Tout espace bien filtrant et cohérent est fortement bien filtrant.*

*Démonstration.* La première proposition est évidente : il suffit de prendre chaque  $Q_i$  compact saturé.

Pour la deuxième, rappelons que les protocompacts sont les intersections de compacts saturés. Or, toute intersection finie non vide de compacts saturés est un compact saturé, puisque X est cohérent. Toute intersection filtrante de ces derniers est encore un compact saturé, puisque X est bien filtrant. Donc les protocompacts sont juste les compacts saturés, plus X. Supposons  $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq U$ . Si tous les  $Q_i$  valent X, alors  $X \subseteq U$ , donc il existe un  $i \in I$  tel que  $Q_i \subseteq U$ . Sinon, écartons ceux des  $Q_i$  qui valent X, alors il existe un  $i \in I$  parmi ceux tels que  $Q_i \neq X$  et tel que  $Q_i \subseteq U$ . □

**Théorème 9.4.14** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique bilatère sur un espace topologique X. Supposons que X soit fortement bien filtrant.*

*Soit  $\mathcal{L}'$  un langage de formules de  $\mathcal{L}_{compact}^{\top \wedge \perp \vee \nu}(A')$  tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F'_1 \wedge F'_2$ ,  $F'_1 \vee F'_2$  et  $\langle \ell \rangle_{\geq r} F'_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F'_1, F'_2$  de  $\mathcal{L}'$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre r dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , où Q est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ .*

*La cotopologie engendrée par les protocompacts de X de la forme  $\llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger$ , lorsque F' parcourt les formules de  $\mathcal{L}'$ , est coagglomérante.*

*Démonstration.* La démonstration est entièrement similaire à celle du théorème 9.1.15.

Soit  $\mathcal{F}'$  la cotopologie engendrée par les protocompacts indiqués. Par le lemme 9.4.4,  $\mathcal{F}'$  est moins fine que la cotopologie duale de  $X$ .

On remarque ensuite que, lorsque  $Q$  est un protocompact de  $\mathcal{F}'$  de la forme  $\llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger$ , alors  $\langle \ell \rangle_{\geq r} F' = \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^\dagger(I \llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger \rho \geq r)\} = \theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle$  est dans  $\mathcal{F}'$  pour tout  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Ceci est encore vrai pour tout réel  $r \in [0, 1]$ , car  $\theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle = \bigcap_{r' \in \mathbb{Q} \leq r} \theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r' \rangle$ .

Il nous reste à montrer que  $\theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle$  est dans  $\mathcal{F}'$  pour tout  $Q \in \mathcal{F}'$ , pas seulement pour les  $Q$  de la forme  $\llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger$ .

Le protocompact  $Q \in \mathcal{F}'$  est par définition une intersection d'unions finies de protocompacts de la forme  $\llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger$ , donc de protocompacts qui sont soit vides soit des intersections filtrantes d'intersections finies d'unions finies non vides de protocompacts de la forme  $\llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger$ .

Si  $Q$  est vide,  $\theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle$  est vide si  $r > 0$ ,  $X$  tout entier si  $r \leq 0$ . Ceci est parce que  $\theta_\ell(x)^\dagger(\emptyset) = 0$ , par définition. Donc  $\theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle$  est de toute façon dans  $\mathcal{F}'$ .

Sinon, on remarque d'abord que toute union finie non vide d'ouverts  $\llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger$ ,  $1 \leq i \leq m$ , est de la forme  $\llbracket F'_1 \vee \dots \vee F'_m \rrbracket_\theta^\dagger$ . Ensuite, toute intersection finie d'ouverts  $\llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est soit égale à  $\llbracket \top \rrbracket_\theta^\dagger$  si  $n = 0$ , soit de la forme  $\llbracket F'_1 \wedge \dots \wedge F'_n \rrbracket_\theta^\dagger$ . Donc  $Q$  est une intersection filtrante d'ensembles de la forme  $\llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger$ , disons  $= \bigcap_{i \in I} \llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \theta_\ell^{-1}\langle Q \geq r \rangle &= \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^\dagger(\bigcap_{i \in I} \llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger) \geq r\} \\
 &= \{x \in X \mid \forall U \supseteq \bigcap_{i \in I} \llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger \cdot \theta_\ell(x)(U) \geq r\} \\
 &= \{x \in X \mid \forall U \text{ ouvert tel que } \exists i \in I \cdot U \supseteq \llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger \text{ alors } \theta_\ell(x)(U) \geq r\} \\
 &\quad \text{puisque } X \text{ est fortement bien filtrant} \\
 &= \{x \in X \mid \forall U \text{ ouvert} \cdot \forall i \in I \cdot U \not\supseteq \llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger \text{ ou } \theta_\ell(x)(U) \geq r\} \\
 &= \{x \in X \mid \forall i \in I \cdot \forall U \text{ ouvert} \supseteq \llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger \cdot \theta_\ell(x)(U) \geq r\} \\
 &= \bigcap_{i \in I} \theta_\ell^{-1}\langle \llbracket F'_i \rrbracket_\theta^\dagger \geq r \rangle
 \end{aligned}$$

est donc dans  $\mathcal{F}'$ . □

**Corollaire 9.4.15 (Complétude)** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique bilatère sur un espace topologique  $X$  fortement bien filtrant. La cotopologie coagglomérante pour  $\theta$  la moins fine  $\mathfrak{D}_\theta^\dagger$  est celle qui est engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F' \rrbracket_\theta^\dagger$ , lorsque  $F'$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{compact}^{\text{TAV}}(\emptyset)$ .*

## 9.5 Topologies $\sigma$ -agglomérantes, tribus agglomérantes

Les résultats de la section 9.1 montrent que l'on peut caractériser la similarité, au sens donné par les topologies agglomérantes, par la logique  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{TAV}}(\emptyset)$ . Ceux de la section 9.4 montrent que

l'on peut caractériser une forme duale de similarité, caractérisée par les cotopologies coagglomérantes, par la logique  $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\text{T}\wedge\vee}(\emptyset)$ . Les deux formes de bisimilarité sont duales au sens où l'une caractérise les états indistingables par des tests positifs, la seconde les états indistingables par des tests négatifs.

Les résultats de Danos et al. (2006), et ceux plus anciens de Desharnais et al. (2002), laissent penser que, lorsque  $\theta$  est un système de transitions de Markov, c'est-à-dire sans non-déterminisme, on devrait pouvoir se passer de la disjonction — autrement dit, que  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\text{T}\wedge}(\emptyset)$  ou  $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\text{T}\wedge}(\emptyset)$  devrait suffire pour caractériser la bisimilarité.

Curieusement, il ne semble pas que ceci soit le cas, à moins de définir une notion plus forte de bisimilarité, mêlant étroitement tests positifs et négatifs. Nous allons demander à étendre l'espace des tests à tous les mesurables de  $X$ . Rappelons que les mesurables de  $X$  sont les éléments de la tribu engendrée par les ouverts de  $X$ .

**Définition 9.5.1 (Topologie  $\sigma$ -agglomérante)** *Une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de l'espace  $X$  est  $\sigma$ -agglomérante pour  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  si et seulement si la fonction  $\theta_{\ell|\mathcal{O}}$  qui à tout  $x \in X$  associe  $\theta_\ell(x)|_{\mathcal{O}}$  est mesurable de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1}^{\text{wk}}(X : \mathcal{O})$ . De façon équivalente, si et seulement si, pour tout  $U \in \mathcal{O}$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\ell \in L$ , l'ensemble  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$  des  $x \in X$  tels que  $\theta_\ell(x)(U) > r$  appartient à la tribu  $\sigma[\mathcal{O}]$  engendrée par  $\mathcal{O}$ .*

L'ensemble des tests possibles, étant donnée une topologie  $\sigma$ -agglomérante, consiste non seulement en l'ensemble des ouverts  $U$  de  $\mathcal{O}$ , mais aussi leurs complémentaires, les unions dénombrables de fermés, les intersections dénombrables d'ouverts, etc.

Toute topologie agglomérante est clairement  $\sigma$ -agglomérante. S'il existe une topologie  $\sigma$ -agglomérante la moins fine, elle sera donc en général moins fine que la topologie agglomérante  $\mathcal{O}_\theta$  la moins fine.

**Lemme 9.5.2** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie moins fine que celle de  $X$ , et  $\sigma[\mathcal{O}]$  la tribu engendrée par  $\mathcal{O}$ . Posons  $\equiv_{\sigma[\mathcal{O}]}$  la relation d'équivalence définie par  $x \equiv_{\sigma[\mathcal{O}]} y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  appartiennent aux mêmes éléments de  $\sigma[\mathcal{O}]$ . Alors  $\equiv_{\sigma[\mathcal{O}]}$  et  $\equiv_{\mathcal{O}}$  coïncident.*

*Démonstration.* Si  $x \equiv_{\sigma[\mathcal{O}]} y$ , clairement  $x \equiv_{\mathcal{O}} y$  puisque  $\mathcal{O} \subseteq \sigma[\mathcal{O}]$ . Réciproquement, soient  $x$  et  $y$  deux points tels que  $x \equiv_{\mathcal{O}} y$ . Considérons la famille  $T$  des parties  $E$  de  $X$  telles que  $x \in E$  si et seulement si  $y \in E$ . Puisque  $x \equiv_{\mathcal{O}} y$ ,  $T$  contient  $\mathcal{O}$ .  $T$  est clairement stable par complémentaire et par unions dénombrables (en fait quelconques). Donc  $T$  est une tribu. Comme  $T$  contient  $\mathcal{O}$ ,  $T$  contient aussi  $\sigma[\mathcal{O}]$ . Donc  $x \equiv_{\sigma[\mathcal{O}]} y$ .  $\square$

**Lemme 9.5.3** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie  $\sigma$ -agglomérante pour  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  sur  $X$ . Alors, pour tous  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $x_1 \equiv_{\mathcal{O}} x_2$ , on a  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_1)] = q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_2)]$  pour tout  $\ell \in L$ .*

*Démonstration.* Comme au lemme 9.1.7. Par le lemme 9.5.2, on peut supposer  $x_1 \equiv_{\sigma[\mathcal{O}]} x_2$ . Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout ouvert  $q_{\mathcal{O}}(U)$ ,  $U \in \mathcal{O}$ , de  $X/\mathcal{O}$  (rappelons le lemme 9.1.3), si  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_1)](q_{\mathcal{O}}(U)) > r$ , alors par définition  $\theta_\ell(x_1)(q_{\mathcal{O}}^{-1}(q_{\mathcal{O}}(U))) > r$ , donc  $\theta_\ell(x_1)(U) > r$  par le lemme 9.1.2. Donc  $x_1$  est dans  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$ . Or  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$  est dans  $\sigma[\mathcal{O}]$  puisque  $\mathcal{O}$  est  $\sigma$ -agglomérante pour  $\theta$ . Comme  $x_1 \equiv_{\sigma[\mathcal{O}]} x_2$ ,  $x_2$  est aussi dans  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$ , donc  $q_{\mathcal{O}}[\theta_\ell(x_2)](q_{\mathcal{O}}(U))$

$> r$ . Ceci étant vrai pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x_2)](q_{\mathcal{O}}(U)) \geq q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x_1)](q_{\mathcal{O}}(U))$ . Par le même raisonnement, en échangeant les rôles de  $x_1$  et de  $x_2$ ,  $q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x_2)](q_{\mathcal{O}}(U)) \leq q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x_1)](q_{\mathcal{O}}(U))$ . Donc  $q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x_2)](q_{\mathcal{O}}(U)) = q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x_1)](q_{\mathcal{O}}(U))$ .  $\square$

En général, la fonction  $\theta_{\ell}/\mathcal{O}$  qui à  $q_{\mathcal{O}}(x)$  associe  $q_{\mathcal{O}}[\theta_{\ell}(x)]$  sera donc bien définie. Elle ne sera pas en général continue de  $X/\mathcal{O}$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X/\mathcal{O})$  pour tout  $\ell \in L$ , mais elle sera au moins mesurable.

**Lemme 9.5.4 (Correction)** *Soit  $\mathcal{O}$  une topologie  $\sigma$ -agglomérante pour  $\theta$  sur  $X$ , et  $F$  un énoncé de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee}(\emptyset)$ . Alors  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\sigma[\mathcal{O}]$ . En particulier, si  $x_1 \models_{\theta} F$  et  $x_1 \equiv_{\mathcal{O}} x_2$  alors  $x_2 \models_{\theta} F$ .*

*Plus généralement, supposons que  $F$  soit une formule de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee}(\mathcal{A})$ , Pour toute interprétation  $I$  telle que  $I(A) \in \sigma[\mathcal{O}]$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , pour tout environnement  $\rho$  tel que  $\rho(\varphi) \in \sigma[\mathcal{O}]$  pour toute variable  $\varphi$ , on a  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho \in \sigma[\mathcal{O}]$ .*

*Démonstration.* Récurrence structurelle triviale sur  $F$ .  $\square$

La réciproque est plus intéressante. C'est l'analogue du théorème de complétude 9.1.15 :

**Fait 9.5.5** *Soit  $\theta$  un système de transitions ludique sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un langage de formules tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F_1 \wedge F_2$ ,  $F_1 \vee F_2$  et  $[\ell]_{>r} F_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F_1, F_2$  de  $\mathcal{L}$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , où  $\mathbb{Q}$  est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ .*

*La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$ , est  $\sigma$ -agglomérante.*

C'est une évidence : par le théorème 9.1.15, cette topologie est agglomérante, donc  $\sigma$ -agglomérante. Le seul intérêt qu'il y ait de passer des topologies agglomérantes aux topologies  $\sigma$ -agglomérantes est que, si  $\theta$  est de Markov, alors on peut se passer de la disjonction  $\vee$  :

**Théorème 9.5.6** *Soit  $\theta$  un système de transitions de Markov sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un langage de formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F_1 \wedge F_2$ , et  $[\ell]_{>r} F_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F_1, F_2$  de  $\mathcal{L}$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , où  $\mathbb{Q}$  est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ . Supposons de plus que  $\mathcal{L}$  ne contienne qu'un nombre dénombrable de formules.*

*La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$ , est  $\sigma$ -agglomérante.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  la topologie engendrée par les ouverts indiqués. Par le lemme 8.2.2,  $\mathcal{O}$  est moins fine que la topologie de  $X$ . Comme au théorème 9.1.15, on remarque que  $\theta_{\ell|\mathcal{O}}^{-1}[U > r]$  est dans  $\mathcal{O}$  lorsque  $U \in \mathcal{O}$  est de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  et  $r$  est dans  $\mathbb{Q}$ , puisqu'alors  $\theta_{\ell|\mathcal{O}}^{-1}[U > r] = \llbracket [\ell]_{>r} F \rrbracket_{\theta}$ . Ceci s'étend au cas où  $r$  est un réel quelconque de  $[0, 1]$ .

Lorsque  $U$  est une intersection finie d'ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ , il est en fait encore de cette forme, puisque  $\mathcal{L}$  contient  $\top$  et  $\wedge$ .

Puisque  $\mathcal{L}$  ne contient pas nécessairement la disjonction  $\vee$ , on ne peut pas espérer montrer que  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r]$  soit dans  $\mathcal{O}$  lorsque  $U$  est une union finie non vide d'ouverts  $\llbracket F_i \rrbracket_{\theta}$ ,  $1 \leq i \leq m$  ( $m \geq 1$ ). Nous allons montrer que  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r]$  est dans  $\sigma[\mathcal{O}]$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r] &= \left\{ x \in X \mid \theta_{\ell}(x) \left( \bigcup_{i=1}^m \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \right) > r \right\} \\
 &= \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_{\ell}(x) \left( \bigcap_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \right) > r \right\} \\
 &\quad \text{par la formule d'inclusion-exclusion} \\
 &= \left\{ x \in X \mid \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ impair}}} \theta_{\ell}(x) \left( \bigcap_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \right) > r + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ pair}}} \theta_{\ell}(x) \left( \bigcap_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \right) \right\} \\
 &= \left\{ x \in X \mid \exists (r_I)_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset} \text{ dans } \mathbb{Q} \text{ tels que } \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ impair}}} r_I > r + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ pair}}} r_I \right. \\
 &\quad \text{et } \theta_{\ell}(x) \left( \bigcap_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \right) > r_I \text{ pour tout } I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset, |I| \text{ impair} \\
 &\quad \left. \text{et } \theta_{\ell}(x) \left( \bigcap_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} \right) \leq r_I \text{ pour tout } I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset, |I| \text{ pair} \right\}
 \end{aligned}$$

En effet, en général toute inégalité de la forme  $\sum_{j \in J} x_j > r + \sum_{k \in K} y_k$ , avec  $J$  non vide, est vraie dans les réels si et seulement s'il existe une famille d'éléments  $r_j$  de  $\mathbb{Q}$ ,  $j \in J \uplus K$ , tels que  $\sum_{j \in J} r_j > r + \sum_{k \in K} r_k$ ,  $x_j > r_j$  pour tout  $j \in J$  et  $y_k \leq r_k$  pour tout  $k \in K$ . Si les  $r_j$  et les  $r_k$  existent qui vérifient ces conditions,  $\sum_{j \in J} x_j > r + \sum_{k \in K} y_k$  est évident. Réciproquement, soit  $\epsilon = \sum_{j \in J} x_j - (r + \sum_{k \in K} y_k)$ , et posons  $r_k = y_k$  pour tout  $k \in K$ , et  $r_j = x_j - \epsilon/(2|I|)$  pour tout  $j \in J$ . Ceci s'applique au cas ci-dessus, car l'ensemble  $J$  des  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  tels que  $I \neq \emptyset$  et  $|I|$  est impair est non vide, puisque  $m \geq 1$ .

Comme  $\bigcap_{i \in I} \llbracket F_i \rrbracket_{\theta} = \llbracket \bigwedge_{i \in I} F_i \rrbracket_{\theta}$  pour tout  $I \neq \emptyset$ , et que  $\theta_{\ell}(x) \llbracket \bigwedge_{i \in I} F_i \rrbracket_{\theta} \leq r_I$  si et seulement si  $\theta_{\ell}(x) \llbracket \bigwedge_{i \in I} F_i \rrbracket_{\theta} \not> r_I$ , on en déduit :

$$\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r] = \bigcup_{\substack{(r_I)_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset} \\ \text{dans } \mathbb{Q} \text{ tels que} \\ \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ impair}}} r_I > r + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ pair}}} r_I}} \left( \bigcap_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ impair}}} \theta_{\ell}^{-1} \llbracket \bigwedge_{i \in I} F_i \rrbracket_{\theta} \cap \bigcap_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset \\ |I| \text{ pair}}} \left( X \setminus \theta_{\ell}^{-1} \llbracket \bigwedge_{i \in I} F_i \rrbracket_{\theta} \right) \right)$$

Il n'y a qu'un nombre dénombrable de familles  $(r_I)_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset}$  formées d'éléments de  $\mathbb{Q}$ , donc cette quantité est une union dénombrable d'intersections finies d'ouverts et de fermés de  $\mathcal{O}$ . Donc  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r]$  est dans  $\sigma[\mathcal{O}]$ , pour tout  $U \in \mathcal{O}$  qui est une union finie non vide d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ .

Lorsque  $U$  est un élément quelconque de  $\mathcal{O}$ , il s'exprime comme l'union d'une famille dirigée d'ouverts  $U_i, i \in I$ , où chaque  $U_i$  est une union finie non vide d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ . Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de formules  $F$  dans  $\mathcal{L}$ , il n'y a qu'un nombre dénombrable d'ouverts  $U_i$ . Alors  $\theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U > r] = \bigcup_{i \in I} \theta_{\ell|_{\mathcal{O}}}^{-1}[U_i > r]$  (par continuité) est une union dénombrable d'éléments de  $\sigma[\mathcal{O}]$ , et est donc encore dans  $\sigma[\mathcal{O}]$ .  $\square$

**Corollaire 9.5.7 (Complétude)** *Soit  $\theta$  un système de transitions de Markov sur un espace topologique  $X$ . Il existe une topologie  $\mathcal{O}$  rendant  $\sigma[\mathcal{O}]$  la moins fine qui soit  $\sigma$ -agglomérante pour  $\theta$ . Elle est engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge}(\emptyset)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  la topologie engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ ,  $F$  variant dans  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge}(\emptyset)$ . Notons que, puisque les indices  $r$  dans les formules  $[\ell]_{>r}F$  sont restreints à être dans  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge}(\emptyset)$  ne contient qu'un nombre dénombrable de formules. Par le théorème 9.5.6,  $\mathcal{O}$  est  $\sigma$ -agglomérante. Par le lemme 9.5.4, pour tout topologie  $\sigma$ -agglomérante  $\mathcal{O}'$ ,  $\sigma[\mathcal{O}']$  contient  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$  pour tout  $F \in \mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge}(\emptyset)$ , donc contient  $\sigma[\mathcal{O}]$ .  $\square$

Il n'y a en réalité rien de particulier qui place la conjonction  $\wedge$  en position de préférence par rapport à la disjonction  $\vee$ . On pourrait choisir en effet une logique ne contenant que le vrai  $\top$  et la disjonction, en plus de la modalité :

**Théorème 9.5.8** *Soit  $\theta$  un système de transitions de Markov sur un espace topologique  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un langage de formules tel que  $\top \in \mathcal{L}$ ,  $F_1 \vee F_2$  et  $[\ell]_{>r}F_1$  soient dans  $\mathcal{L}$  pour toutes formules  $F_1, F_2$  de  $\mathcal{L}$ , tout  $\ell \in L$  et tout nombre  $r$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , où  $\mathbb{Q}$  est une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ . Supposons de plus que  $\mathcal{L}$  ne contienne qu'un nombre dénombrable de formules.*

*La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F \rrbracket_{\theta}$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$ , est  $\sigma$ -agglomérante.*

*Démonstration.* Comme au théorème 9.5.6, mais en remarquant que les ouverts  $U$  qui sont des unions finies non vides d'intersections finies  $\bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} \llbracket F_{ij} \rrbracket_{\theta}$  ( $m \geq 1, n_i \geq 0$ ) sont aussi des intersections finies d'unions finies non vides  $\bigcap_{f \in \prod_{i=1}^m \{1, \dots, n_i\}} \bigcup_{i=1}^m \llbracket F_{if(i)} \rrbracket_{\theta}$ . On note ici  $\prod_{i=1}^m \{1, \dots, n_i\}$  la famille des fonctions  $f$  de  $\{1, \dots, m\}$  vers  $\mathbb{N}$  telles que  $f(i) \in \{1, \dots, n_i\}$  pour tout  $i$ . Ceci se démontre comme suit. Si  $x \in \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} \llbracket F_{ij} \rrbracket_{\theta}$ , alors fixons  $i, 1 \leq i \leq m$ , tel que  $x \in \llbracket F_{ij} \rrbracket_{\theta}$  pour tout  $j, 1 \leq j \leq n_i$ . Alors  $x \in \llbracket F_{if(i)} \rrbracket_{\theta}$  pour tout fonction  $f \in \prod_{i=1}^m \{1, \dots, n_i\}$ , donc  $x \in \bigcap_{f \in \prod_{i=1}^m \{1, \dots, n_i\}} \bigcup_{i=1}^m \llbracket F_{if(i)} \rrbracket_{\theta}$ . Réciproquement, si  $x$  n'est pas dans  $\bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} \llbracket F_{ij} \rrbracket_{\theta}$ , c'est que pour chaque  $i, 1 \leq i \leq m$ , on peut trouver un indice  $j, 1 \leq j \leq n_i$ , tel que  $x \notin \llbracket F_{ij} \rrbracket_{\theta}$  : fixons  $f(i) = j$ , alors  $x$  n'est pas dans  $\bigcup_{i=1}^m \llbracket F_{if(i)} \rrbracket_{\theta}$ . En particulier,  $x \notin \bigcap_{f \in \prod_{i=1}^m \{1, \dots, n_i\}} \bigcup_{i=1}^m \llbracket F_{if(i)} \rrbracket_{\theta}$ .

On peut alors écrire  $U = \bigcap_{f \in \prod_{i=1}^m \{1, \dots, n_i\}} \llbracket \bigvee_{i=1}^m F_{if(i)} \rrbracket_{\theta}$  en utilisant la disjonction  $\vee$  de  $\mathcal{L}$ . Lorsque cette intersection est vide,  $\theta_{\ell}^{-1}[U > r]$  vaut soit  $X = \llbracket \top \rrbracket_{\theta}$  soit le vide, et est en tout cas

dans  $\sigma[\mathcal{O}]$ . Sinon, en utilisant le principe d'exclusion-inclusion (2.4), qui remplace ici le principe d'inclusion-exclusion utilisé au théorème 9.5.6, on montre de nouveau que  $\theta_\ell^{-1}[U > r]$  est dans  $\sigma[\mathcal{O}]$ .

Lorsque  $U$  est une union d'une famille dirigée d'ouverts  $U_i$  de la forme ci-dessus, à savoir des unions finies non vides d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , on conclut encore par la continuité de  $\theta_\ell(x)$  et le fait que la famille  $(U_i)_{i \in I}$  est dénombrable, car  $\mathcal{L}$  est dénombrable.  $\square$

**Corollaire 9.5.9 (Complétude, dual)** *Soit  $\theta$  un système de transitions de Markov sur un espace topologique  $X$ . Il existe une topologie  $\mathcal{O}$  rendant  $\sigma[\mathcal{O}]$  la moins fine qui soit  $\sigma$ -agglomérante pour  $\theta$ . Elle est engendrée par les ouverts de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{open}^{\top\vee}(\emptyset)$ .*

Nous avons donc en général deux topologies  $\mathcal{O}$  rendant  $\sigma[\mathcal{O}]$  la moins fine qui soient  $\sigma$ -agglomérantes pour  $\theta$ , lorsque  $\theta$  est de Markov.

Les constructions ci-dessus, qui permettent d'économiser un opérateur, soit  $\wedge$ , soit  $\vee$ , dans les théorèmes de complétude, sont pour une fois bien plus naturelles dans un cadre de théorie de la mesure pure. Nous ne le développerons pas ici, et nous contenterons d'indiquer comment ceci peut s'effectuer. Plutôt que de considérer des systèmes de transitions ludiques, considérons des systèmes de transitions  $\sigma$ -ludiques, définies comme des familles  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  de fonctions mesurables (et non plus continues)  $\theta_\ell$  d'un espace mesurable (et non plus topologique)  $X$  vers l'espace  $J_{\leq 1}(X)$  des jeux  $\omega$ -continus et  $\omega$ -cocontinus (et non plus continus)  $\nu$  sur  $X$  tels que  $\nu(X) \leq 1$ .

La notion de topologie agglomérante (ou  $\sigma$ -agglomérante) sera alors naturellement remplacée par celle de *tribu agglomérante*. Une tribu  $\mathcal{T}$  moins fine que celle de  $X$  sera agglomérante pour  $\theta$  si et seulement si  $\theta_\ell^{-1}[E > r]$  est dans  $\mathcal{T}$  pour tout  $E \in \mathcal{T}$ . C'est la notion d'"event bisimulation" de Danos et al. (2006).

La logique naturelle à considérer est la logique  $\mathcal{L}_{open}(\mathcal{A})$ , où tous les opérateurs infinitaires sont restreints à opérer sur des familles dénombrables de formules. Il est naturel de redéfinir sa sémantique de sorte à obtenir une logique classique et non plus intuitionniste. Pour toute interprétation  $I$  envoyant chaque  $A \in \mathcal{A}$  vers un mesurable de  $X$ , pour tout environnement  $\rho$  envoyant chaque variable  $\varphi$  vers un mesurable de  $X$ , poser :

$\rho, x \models_{\theta}^I A$	ssi	$x \in I(A)$
$\rho, x \models_{\theta}^I \varphi$	ssi	$x \in \rho(\varphi)$
$\rho, x \models_{\theta}^I \top$		toujours
$\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \wedge F_2$	ssi	$\rho, x \models_{\theta}^I F_1$ et $\rho, x \models_{\theta}^I F_2$
$\rho, x \models_{\theta}^I \bigwedge_{i \in I} F_i$	ssi	$\rho, x \models_{\theta}^I F_i$ pour tout $i \in I$ ( $I$ dénombrable)
$\rho, x \models_{\theta}^I \perp$		jamais
$\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \vee F_2$	ssi	$\rho, x \models_{\theta}^I F_1$ ou $\rho, x \models_{\theta}^I F_2$
$x \models_{\theta}^I \bigvee_{i \in I} F_i$	ssi	$x \models_{\theta}^I F_i$ pour au moins un $i \in I$ ( $I$ dénombrable)
$\rho, x \models_{\theta}^I F_1 \Rightarrow F_2$	ssi	$\rho, x \not\models_{\theta}^I F_1$ ou $\rho, x \models_{\theta}^I F_2$
$\rho, x \models_{\theta}^I (F_i)_{i \in I} \Rightarrow G$	ssi	$\rho, x \not\models_{\theta}^I F_i$ pour un $i \in I$ ( $I$ dénombrable), ou $\rho, y \models_{\theta}^I G$
$\rho, x \models_{\theta}^I [\ell]_{>r} F$	ssi	$\theta_{\ell}(x)(I \llbracket F \rrbracket_{\theta}^{\sigma} \rho) > r$
$\rho, x \models_{\theta}^I \nu \varphi \cdot F$	ssi	$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi^n(X)$ , où $\Phi(E) = I \llbracket F \rrbracket_{\theta}^{\sigma} (\rho[\varphi \mapsto E])$
$\rho, x \models_{\theta}^I \mu \varphi \cdot F$	ssi	$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi^n(X)$ , où $\Phi(E) = I \llbracket F \rrbracket_{\theta}^{\sigma} (\rho[\varphi \mapsto E])$

et où  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta}^{\sigma} \rho$  dénote  $\{x \in X \mid \rho, x \models_{\theta}^I F\}$ . Notons que la sémantique de  $\mu \varphi \cdot F$  n'est pas en général celle d'un plus petit point fixe, sauf quand la fonction  $\Phi$  est  $\omega$ -continue (commute aux unions de suites décroissantes), ce qui arrive notamment lorsque  $F$  est dans  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \nu}(\mathcal{A})$ . La sémantique de  $\nu \varphi \cdot F$  n'est pas en général celle d'un plus grand point fixe non plus, sauf quand la fonction  $\Phi$  est  $\omega$ -cocontinue (commute aux intersections de suites décroissantes), ce qui arrive notamment lorsque  $F$  est dans  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \perp \vee \nu}(\mathcal{A})$ .

On peut alors redémontrer des analogues de la plupart des théorèmes de ce chapitre :

- $I \llbracket F \rrbracket_{\theta}^{\sigma} \rho$  est une partie mesurable de  $X$  pour toute formule  $F$  de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  ;
- Pour toute tribu  $\mathcal{T}$  moins fine que celle de  $X$ , on peut définir une relation d'équivalence  $\equiv_{\mathcal{T}}$  sur  $X$  par :  $x \equiv_{\mathcal{T}} y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  appartiennent aux mêmes éléments de  $\mathcal{T}$ . Soit  $X/\mathcal{T}$  l'espace  $X$  muni de la tribu  $\mathcal{T}$ . Posons  $X/\mathcal{T}$  l'espace des classes d'équivalences  $q_{\mathcal{T}}(x)$  d'éléments  $x \in X$  pour la relation  $\equiv_{\mathcal{T}}$ , muni de la tribu la plus fine rendant  $q_{\mathcal{T}} : X/\mathcal{T} \rightarrow X/\mathcal{T}$  mesurable. De façon équivalente, les mesurables de  $X/\mathcal{T}$  sont les  $E' \subseteq X/\mathcal{T}$  tels que  $q_{\mathcal{T}}^{-1}(E') \in \mathcal{T}$ . Alors les éléments  $E$  de  $\mathcal{T}$  sont  $\equiv_{\mathcal{T}}$ -saturés, c'est-à-dire  $q_{\mathcal{T}}^{-1}(q_{\mathcal{T}}(E)) = E$  ; les mesurables de  $X/\mathcal{T}$  sont les images  $q_{\mathcal{T}}(E)$  de mesurables  $E$  de  $\mathcal{T}$ .
- Si  $\mathcal{T}$  est une tribu agglomérante pour  $\theta = (\theta_{\ell})_{\ell \in L}$  sur  $X$ , alors  $x_1 \equiv_{\mathcal{T}} x_2$  implique  $q_{\mathcal{T}}[\theta_{\ell}(x_1)] = q_{\mathcal{T}}[\theta_{\ell}(x_2)]$ , où la notation  $q[\nu]$  dénote le jeu tel que  $q[\nu](E) = \nu(q^{-1}(E))$  pour tout mesurable  $E$ , dès que  $q$  est mesurable.
- Si  $\mathcal{T}$  est une tribu agglomérante pour  $\theta = (\theta_{\ell})_{\ell \in L}$  sur  $X$ , alors la fonction  $\theta_{\ell}/\mathcal{T}$  qui à  $q_{\mathcal{T}}(x)$  associe  $q_{\mathcal{T}}[\theta_{\ell}(x)]$  est bien définie et mesurable de  $X/\mathcal{T}$  vers  $J_{\leq 1}(X/\mathcal{T})$  pour tout  $\ell \in L$ . La famille  $\theta/\mathcal{T} = (\theta_{\ell}/\mathcal{T})_{\ell \in L}$  est alors un système de transitions  $\sigma$ -ludique sur  $X/\mathcal{T}$ , qui est convexe, resp. concave, resp. de Markov dès que  $\theta$  l'est.
- Pour toute tribu agglomérante  $\mathcal{T}$  sur  $X$ ,  $I \llbracket F \rrbracket_{\theta}^{\sigma} \rho$  est en fait dans  $\mathcal{T}$  pour toute formule  $F$  de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$  ; en particulier, si  $F$  est une formule close de  $\mathcal{L}_{\text{open}}(\emptyset)$ , et si  $x_1 \models_{\theta} F$  et  $x_1 \equiv_{\mathcal{T}} x_2$ , alors  $x_2 \models_{\theta} F$ . De plus,  $q_{\mathcal{T}}(\llbracket F \rrbracket_{\theta}) = \llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{T}}$ ,  $\llbracket F \rrbracket_{\theta} = q_{\mathcal{T}}^{-1}(\llbracket F \rrbracket_{\theta/\mathcal{T}})$ , et  $x \models_{\theta} F$  si et seulement si  $q_{\mathcal{T}}(x) \models_{\theta/\mathcal{T}} F$ . Autrement dit, le système  $\sigma$ -ludique quotient  $\theta/\mathcal{T}$  vérifie les mêmes formules de  $\theta$  aux états adéquats.
- L'ensemble des tribus agglomérantes de  $\theta$  sur  $X$  est un treillis complet, qui est l'ensemble

des pré-points fixes de l'opérateur  $\Sigma_\theta$ . Cet opérateur envoie toute tribu  $\mathcal{T}$  moins fine que celle de  $X$  vers la tribu engendrée par les mesurables  $\theta_\ell^{-1}[E > r]$ , lorsque  $E \in \mathcal{T}$  et  $r \in \mathbb{R}$ . Il existe donc une tribu agglomérante la moins fine pour  $\theta$ , qui est celle engendrée par les mesurables de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F$  parcourt l'ensemble des formules closes de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \vee}(\emptyset)$ .

- Dans le cas où  $\theta$  est de Markov, la tribu agglomérante la moins fine est engendrée par les mesurables de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ , où  $F \in \mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge}(\emptyset)$  (resp., où  $F \in \mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \vee}(\emptyset)$ ).

▷ **Exercice 9.7**

Démontrer les affirmations ci-dessus.

Le fait que les mesurables de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ ,  $F \in \mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge}(\emptyset)$ , caractérisent la tribu agglomérante (“event bisimulation”) la moins fine est le théorème principal de Danos et al. (2006). Le fait que les mesurables de la forme  $\llbracket F \rrbracket_\theta$ ,  $F \in \mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \vee}(\emptyset)$  la caractérisent aussi est nouveau, quoique se déduisant facilement du résultat précédent par les formules d'inclusion-exclusion et d'exclusion-inclusion.

Notons maintenant que les tribus agglomérantes fournissent naturellement une théorie de la bisimulation et non de la simulation. En effet, imaginons que nous définissions la relation de simulation  $\preceq_{\mathcal{T}}$ , comme en définition 9.1.1 avec  $\mathcal{T}st = \mathcal{T} : x \preceq_{\mathcal{T}} y$  si et seulement si pour tout mesurable  $E$  de  $\mathcal{T}$ , si  $x \in E$  alors  $y \in E$ . Comme  $X \setminus E$  est lui aussi dans  $\mathcal{T}$ , si  $x \notin E$  alors  $y \notin E$ , autrement dit  $y \in E$  implique aussi  $x \in E$ .  $E$  étant arbitraire,  $x \preceq_{\mathcal{T}} y$  implique  $y \preceq_{\mathcal{T}} x$ . Donc  $\preceq_{\mathcal{T}}$  est une relation symétrique, et coïncide donc avec  $\equiv_{\mathcal{T}}$ .

▷ **Exercice 9.8**

On dit que la relation d'équivalence  $\equiv$  est une relation de bisimulation pour  $\theta$  sur  $X$  si et seulement si pour tous états  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $x_1 \equiv x_2$ , on a  $\theta_\ell(x_1)(E) \leq \theta_\ell(x_2)(E)$  pour tout ensemble  $E \equiv$ -saturé. (Ceci est la définition de Larsen and Skou (1991), lorsque  $\theta_\ell$  est de Markov.) On dit que  $x_1$  et  $x_2$  sont bisimilaires si et seulement s'il existe une bisimulation  $\equiv$  telle que  $x_1 \equiv x_2$ .

Montrer que  $x_1$  et  $x_2$  sont bisimilaires si et seulement si  $x_1 \equiv_{\mathcal{T}} x_2$ , où  $\mathcal{T}$  est la tribu agglomérante la moins fine sur  $X$ .

▷ **Exercice 9.9**

Replaçons-nous dans le cadre de l'exercice 9.3 : pour tout  $\ell \in L$ , pour tout  $x \in X$ ,  $\theta_\ell(x)$  vaut soit 0 soit un jeu d'exemple  $\epsilon_F$ ,  $F \subseteq X$ . Notons  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  si  $\theta_\ell(x_1) = \epsilon_F$  avec  $x_2 \in F$ . Supposons de plus  $X$  fini, équipé de sa tribu discrète, contenant toutes les parties de  $X$ . Montrer que  $\equiv$  est une bisimulation si et seulement si  $\equiv$  est une relation d'équivalence telle que pour tous  $x_1$  et  $y_1$  tels que  $x_1 \equiv y_1$ , alors pour tout  $\ell \in L$ , si  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ , il existe un état  $y_2$  tel que  $x_2 \xrightarrow{\ell} y_2$  et  $x_2 \equiv y_2$ . Ceci est la définition usuelle d'une bisimulation dans le cadre non déterministe. (La différence avec la notion de simulation est juste que  $\equiv$  est symétrique.)

▷ **Exercice 9.10**

Comme à l'exercice 9.5, et a contrario de l'exercice 9.3, supposons que  $X$  soit fini et  $\theta$  est purement non déterministe, mais de façon démoniaque. Autrement dit, supposons que pour tout

$\ell \in L$ , pour tout  $x \in X$ ,  $\theta_\ell(x)$  vaille soit 0 soit un jeu d'unanimité  $u_Q$ ,  $Q \subseteq X$ . Notons  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  si  $\theta_\ell(x_1) = u_Q$  avec  $x_2 \in Q$ . Disons de nouveau qu'une action  $\ell \in L$  est bloquée à l'état  $x$  si et seulement si  $\theta_\ell(x) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement s'il n'existe aucun état  $x'$  tel que  $x \xrightarrow{\ell} x'$ . Dans le cas contraire, elle est activée.

Montrer que la relation d'équivalence  $\equiv$  est une bisimulation si et seulement si, pour tous  $x_1$  et  $y_1$  tels que  $x_1 \equiv y_1$ , pour toute action  $\ell \in L$ ,

- $\ell$  est activée en  $x_1$  si et seulement si  $\ell$  est activée en  $y_1$  ;
- si  $\ell$  est activée en  $x_1$ , alors pour tout état  $y_2$  tel que  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$ , il existe un état  $x_2$  tel que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  et  $x_2 \equiv y_2$ .

En déduire que la notion de bisimulation dans le cas démoniaque fini coïncide avec celle du cas angélique fini (exercice 9.9).

Comme toute fonction continue  $\theta_\ell$  est mesurable, il peut sembler que le cadre de théorie de la mesure ci-dessus généralise le cadre topologique que nous avons affectionné jusqu'ici. Ce sera le cas, à condition de montrer que tout jeu continu  $\theta_\ell(x)$  sur l'espace topologique  $X$  s'étend en un jeu  $\omega$ -continu et  $\omega$ -cocontinu  $\theta_\ell(x)^\circ$  sur l'espace mesurable  $X$ , muni de sa tribu borélienne ; et que de plus la fonction qui à  $x$  associe  $\theta_\ell(x)^\circ$  est mesurable.

Ceci est faisable sous quelques conditions lorsque  $\theta$  est de Markov. D'après Keimel and Lawson (2005, théorème 5.3), toute valuation continue  $\nu$ , donc en particulier  $\theta_\ell(x)$ , s'étend en une mesure unique  $\nu^\circ$  sur la tribu borélienne engendrée par  $\mathcal{O}(X)$ , dès que  $X$  est sobre et localement compact — ou, de façon équivalente, dès que  $X$  est bien filtrant et localement compact. Toute mesure est un jeu à la fois  $\omega$ -continu et  $\omega$ -cocontinu. Si la fonction qui à  $x$  associe  $\theta_\ell(x)^\circ$  est mesurable, alors ceci définira un système de transitions  $\sigma$ -ludique de Markov, c'est-à-dire un processus de Markov étiqueté au sens de Desharnais et al. (2002).

**Lemme 9.5.10** Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un système de transitions de Markov sur  $X$ , et supposons que  $\theta_\ell(x)$  s'étende en une mesure  $\theta_\ell(x)^\circ$  sur  $X$  pour tout  $x \in X$ . Alors la fonction  $\theta_\ell^\circ$  qui à  $x$  associe  $\theta_\ell(x)^\circ \in J_{\leq 1}(X)$  est mesurable.

*Démonstration.* Montrons que  $\theta_\ell^{\circ-1}[E > r] = \{x \in X | \theta_\ell(x)^\circ(E) > r\}$  est mesurable, pour tout  $E$  mesurable dans  $X$  et  $r \in \mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble des parties mesurables  $E$  de  $X$  telles que  $\theta_\ell^{\circ-1}[E > r]$  soit mesurable pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . On observe que :

- Si  $E$  est un ouvert de  $X$ ,  $\theta_\ell^{\circ-1}[E > r] = \theta_\ell^{-1}[E > r]$  est ouvert, donc mesurable ; donc tout ouvert de  $X$  est dans  $\mathcal{T}$ .
- Si  $E, E' \in \mathcal{T}$ , avec  $E' \subseteq E$ , alors  $\theta_\ell^{\circ-1}[E \setminus E' > r] = \{x \in X | \theta_\ell(x)^\circ(E) > r + \theta_\ell(x)^\circ(E')\}$  est l'union, lorsque  $r_0, r_1$  parcourent l'ensemble des éléments de  $\mathbb{Q}$  tels que  $r_0 > r + r_1$ , des  $\{x \in X | \theta_\ell(x)^\circ(E) > r_0 \text{ et } \theta_\ell(x)^\circ(E') \leq r_1\}$ . Ces derniers ensembles sont les intersections de  $\theta_\ell^{\circ-1}[E > r_0]$  avec le complémentaire de  $\theta_\ell^{\circ-1}[E' > r_1]$ , et sont donc mesurables. Donc  $\theta_\ell^{\circ-1}[E \setminus E' > r]$  est mesurable, d'où  $E \setminus E' \in \mathcal{T}$ .
- Si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{T}$ , alors  $\theta_\ell^{\circ-1}[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n > r] = \{x \in X | \theta_\ell(x)^\circ(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) > r\} = \{x \in X | \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta_\ell(x)^\circ(E_n) > r\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \theta_\ell^{\circ-1}[E_n > r]$  est mesurable, donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  est dans  $\mathcal{T}$ .

Nous venons de montrer que  $\mathcal{T}$  est un système de Dynkin contenant  $\mathcal{O}(X)$ . Or  $\mathcal{O}(X)$ , en tant que topologie, est un  $\pi$ -système. Donc, par le théorème de classe monotone,  $\mathcal{T}$  contient la tribu engendrée par  $\mathcal{O}(X)$ , c'est-à-dire tous les mesurables de  $X$ . Mais ceci signifie que  $\theta_\ell^{\circ-1}[E > r] = \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^\circ(E) > r\}$  est mesurable, pour tout  $E$  mesurable dans  $X$  et  $r \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Théorème 9.5.11** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Pour tout système de transitions ludique de Markov  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  sur  $X$ , il existe un unique système de transitions  $\sigma$ -ludique de Markov  $\theta^\circ = (\theta_\ell^\circ)_{\ell \in L}$  sur  $X$  tel que  $\theta_\ell(x)^\circ(U) = \theta_\ell(x)(U)$  pour tout  $x \in X$  et tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

On peut donc définir la tribu agglomérante la moins fine pour  $\theta^\circ$ , caractérisée par les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top\wedge}(\theta)$ , resp. de  $\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top\vee}(\theta)$ . Ceci ne semble pas cependant devoir s'étendre au cas des systèmes de transitions ludiques qui ne seraient pas de Markov.

## 9.6 Crédos, plausos, estimos

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, tirer un point  $x \in X$  via une crédibilité  $\nu$ , c'est faire jouer le joueur probabiliste  $P$  de l'introduction, puis laisser l'adversaire démoniaque  $C$  essayer de le contrer. Lorsque  $\theta_\ell(x)$  est une crédibilité pour tout  $x$ ,  $\theta$  est donc une façon de coder une alternance de choix probabilistes par  $P$  et de choix démoniaques par  $C$ . Écrivons  $\theta_\ell(x)$  sous forme de la valuation continue  $\theta_\ell(x)^*$  sur  $\mathcal{Q}(X)$ , ce que nous pouvons faire par la proposition 5.4.7 sous quelques hypothèses légères sur  $X$  : partant d'un état initial  $x_0 \in X$ ,  $P$  tire un compact saturé non vide  $Q_1 \in \mathcal{Q}(X)$  au hasard avec probabilité  $\theta_\ell(x_0)^*$ , puis  $C$  choisit démoniaquement un état  $x_1 \in Q_1$ ;  $P$  tire ensuite un second compact saturé non vide  $Q_2 \in \mathcal{Q}(X)$  avec probabilité  $\theta_\ell(x_1)^*$ , et ainsi de suite. Bien entendu, le formalisme des systèmes de transitions ludique laisse les compacts  $Q_1, Q_2, \dots$ , entièrement implicites, et ne garde explicites que les états  $x_0, x_1, \dots$ .

On peut se poser la question de savoir si l'on pourrait rendre les états compacts  $Q_1, Q_2, \dots$ , explicites. Ceci nécessitera bien sûr que  $\theta_\ell(x)$  soit une crédibilité continue pour tout  $x$ . Nous aurons de plus besoin que  $\theta_\ell$  ait elle-même des propriétés de continuité plus fortes que celles demandées à la définition 8.1.1. Précisément, nous aurons besoin que  $\theta_\ell$  soit continue de  $X$  vers  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$  — c'est-à-dire avec la topologie de Scott plutôt que la topologie faible. Nous verrons au lemme 9.6.2 que cette propriété admet plusieurs autres formulations équivalentes.

**Définition 9.6.1 (Crédo)** *Un crédo<sup>1</sup> est un système de transitions crédibiliste  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  tel que  $\theta_\ell$  est une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  (avec sa topologie de Scott) pour tout  $\ell \in L$ .*

**Lemme 9.6.2** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact, et  $\theta$  un système de transitions crédibiliste sur  $X$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\theta$  est un crédo sur  $X$  ;

<sup>1</sup>Il était bien évidemment tentant de céder à la tentation du jeu de mots, étant donné que ce projet a reçu entre autres le soutien de l'ARC ProNobis.

2. pour tout  $\ell \in L$ , pour toute famille finie non vide d'ouverts  $(U_i)_{i=1}^n$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) > r \quad (9.4)$$

est ouvert dans  $X$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

3. la fonction  $\theta_\ell^*$  qui à  $x \in X$  associe  $\theta_\ell(x)^* \in \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{Q}(X))$  est continue pour tout  $\ell \in L$  ;  
 4. la fonction  $\theta_\ell^*$  qui à  $x \in X$  associe  $\theta_\ell(x)^* \in \mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{Q}(X))$  (avec sa topologie de Scott) est continue pour tout  $\ell \in L$ .

*Démonstration.* 3  $\Leftrightarrow$  4. Par le lemme 3.3.1,  $\mathcal{Q}(X)$  est un cpo continu. Par la proposition 3.7.12, on en déduit que la topologie faible et la topologie de Scott coïncident sur  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{Q}(X))$ , autrement dit  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{Q}(X)) = \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{Q}(X))$ .

4  $\Leftrightarrow$  1. La fonction qui à  $x$  associe  $\theta_\ell(x)^*$  est la composée de  $\theta_\ell$  avec  $\nu \mapsto \nu^*$ . Or cette dernière est un isomorphisme entre  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}(X)$  et  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{Q}(X))$  par le corollaire 5.5.10.

2  $\Rightarrow$  3. On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} \theta_\ell^{*-1}[\bigcup_{i=1}^n \square U_i > r] &= \left\{ x \in X \mid \theta_\ell(x)^* \left( \bigcup_{i=1}^n \square U_i \right) > r \right\} \\ &= \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x)^* \left( \bigcap_{i \in I} \square U_i \right) > r \right\} \\ &\quad \text{par la formule d'inclusion-exclusion,} \\ &\quad \text{puisque } \theta_\ell(x)^* \text{ est une valuation} \\ &= \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x)^* \left( \square \bigcap_{i \in I} U_i \right) > r \right\} \\ &\quad \text{par le lemme 3.3.5} \\ &= \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) > r \right\} \end{aligned}$$

Mais ceci est ouvert dans  $X$ , par 2. Tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{Q}(X)$  s'écrit comme une union dirigée d'ouverts de la forme  $\mathcal{U}_j = \bigcup_{i=1}^n \square U_{ij}$ ,  $j \in J$ , par le corollaire 3.3.6. Donc

$$\begin{aligned} \theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r] &= \left\{ x \in X \mid \theta_\ell(x)^* \left( \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j \right) > r \right\} \\ &= \left\{ x \in X \mid \sup_{j \in J} \theta_\ell(x)^*(\mathcal{U}_j) > r \right\} \quad \text{puisque } \theta_\ell(x)^* \text{ est continue} \\ &= \{x \in X \mid \exists j \in J \cdot \theta_\ell(x)^*(\mathcal{U}_j) > r\} \\ &= \bigcup_{j \in J} \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^*(\mathcal{U}_j) > r\} = \bigcup_{j \in J} \theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U}_j > r] \end{aligned}$$

est ouvert.

3  $\Rightarrow$  2. Réciproquement, si  $\theta_\ell^*$  est continue, alors  $\theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r]$  est un ouvert de  $X$ . Or, lorsque  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^n \square U_i$ ,

$$\theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r] = \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) > r \right\}$$

Le fait que ceci soit ouvert revient exactement à dire que l'ensemble des  $x$  vérifiant (9.4) est ouvert.  $\square$

Remarquons que la formule (9.4) est exactement de la forme demandée dans la propriété d'inclusion-exclusion (2.1). Le point 2 ci-dessus nous permet donc de remarquer que :

**Fait 9.6.3** *Tout système de transition de Markov est un crédo.*

Par les points 3 et 4, un crédo est exactement un système de transitions qui à  $x \in X$  associe de façon continue une valuation continue  $\theta_\ell(x)^*$  sur  $\mathcal{Q}(X)$ , les valuations continues étant équipées indifféremment de la topologie de Scott ou de la topologie faible.

Une autre idée que suggère le lemme 9.6.2 mène à changer la définition d'une topologie agglomérante, et à choisir des topologies contenant davantage d'ouverts, c'est-à-dire pouvant faire davantage de tests. Ceci va nous mener à la notion de topologie  $\mathcal{Q}$ -agglomérante ci-dessous.

Imaginons que nous disposons d'une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de  $X$ . Chaque ouvert  $U \in \mathcal{O}$  est un test sur l'espace  $X$  des états. On peut maintenant imaginer que  $\square U$  sera un test légitime sur l'espace  $\mathcal{Q}(X)$  des compacts saturés non vides de  $X$  : pour tester si  $Q$  passe le test  $\square U$ , on se demande si  $Q$  est inclus dans  $U$ . En complétant par intersections finies et unions quelconques, on obtient alors une topologie, que nous noterons  $\square[\mathcal{O}]$ , sur  $\mathcal{Q}(X)$ . Pour chaque ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\square[\mathcal{O}]$ , on peut maintenant tester si  $\theta_\ell(x)^*(\mathcal{U}) > r$ , autrement dit si  $\theta_\ell(x)^* \in [\mathcal{U} > r]$ , et demander que  $\{x \in X \mid \theta_\ell(x)^* \in [\mathcal{U} > r]\}$  soit un test légitime de  $\mathcal{O}$ . Formellement, nous obtenons la notion suivante :

**Définition 9.6.4 (Topologie  $\mathcal{Q}$ -agglomérante)** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un crédo sur  $X$ . Pour toute topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de  $X$ , soit  $\square[\mathcal{O}]$  la topologie sur  $\mathcal{Q}(X)$  engendrée par les ouverts  $\square U$ ,  $U \in \mathcal{O}$ .*

*Une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de  $X$  est  $\mathcal{Q}$ -agglomérante pour  $\theta$  si et seulement si  $\theta_\ell^*_{|\square[\mathcal{O}]}$  est continue de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{Q}(X) : \square[\mathcal{O}])$ .*

Cherchons à comprendre la différence avec la notion de topologie agglomérante. Une topologie agglomérante définit des tests  $U \in \mathcal{O}$  sur l'espace  $X$  des états où, intuitivement, c'est au tour du joueur probabiliste  $P$  de jouer. Aucun test n'est défini sur les états où c'est à l'adversaire  $C$  de jouer. En fait, dans le cas général des systèmes de transitions ludiques où la notion générale de topologie agglomérante a un sens, il n'y a pas de notion d'espace des états où ce serait à  $C$  de jouer.

Lorsque  $\theta$  est un crédo, ceci change : à l'état  $x$ ,  $P$  choisit au hasard un compact saturé  $Q \in \mathcal{Q}(X)$ , selon la valuation  $\theta_\ell(x)^*$  ;  $Q$  est alors l'état dans lequel nous nous trouvons, et où c'est au tour de  $C$  de jouer, en choisissant un nouvel état  $y \in Q$ .

Dans ce nouveau cadre, il est naturel de définir tant une topologie  $\mathcal{O}$  sur  $X$  que la topologie  $\square[\mathcal{O}]$  sur  $\mathcal{Q}(X)$ . La première permet d'agglomérer les états de  $\mathbb{P}$ , la seconde permet d'agglomérer les états de  $\mathbb{C}$ .

**Lemme 9.6.5** *Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un crédo sur  $X$ . Une topologie  $\mathcal{O}$ , moins fine que celle de  $X$ , est  $\mathcal{Q}$ -agglomérante pour  $\theta$  si et seulement si, pour tous  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que*

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) > r \quad (9.5)$$

est dans  $\mathcal{O}$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* La démonstration est essentiellement la même qu'au lemme 9.6.2. L'inégalité (9.5) est équivalente à

$$\theta_\ell(x)^* \left( \bigcup_{i=1}^n \square U_i \right) > r \quad (9.6)$$

Si  $\mathcal{O}$  est  $\mathcal{Q}$ -agglomérante, l'ensemble des  $x \in X$  vérifiant (9.6), donc aussi (9.5), est dans  $\mathcal{O}$  par hypothèse. Réciproquement, supposons que l'ensemble des  $x \in X$  tels que (9.5) soit vrai soit dans  $\mathcal{O}$ , pour toute famille finie  $(U_i)_{i=1}^n$  d'éléments de  $\mathcal{O}$  et pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . Tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{Q}(X) : \square[\mathcal{O}]$  est une union dirigée d'ouverts  $\mathcal{U}_j$ ,  $j \in J$ , qui sont des unions finies d'ouverts de la forme  $\square U$  avec  $U \in \mathcal{O}$ . Alors

$$\begin{aligned} \theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r] &= \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^*(\mathcal{U}) > r\} \\ &= \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^* \left( \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j \right) > r\} = \{x \in X \mid \sup_{j \in J} \theta_\ell(x)^*(\mathcal{U}_j) > r\} \\ &= \bigcup_{j \in J} \{x \in X \mid \theta_\ell(x)^*(\mathcal{U}_j) > r\} \end{aligned}$$

est dans  $\mathcal{O}$ , donc  $\theta_\ell^*_{\square[\mathcal{O}]}$  est continue de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1} \text{wk}(\mathcal{Q}(X) : \square[\mathcal{O}])$ . □

On peut, dans ce nouveau cadre, décrire des propriétés des états  $x \in X$  et  $Q \in \mathcal{Q}(X)$  par deux logiques définies chacune en terme de l'autre. Nous ne traiterons pas des constructions complexes telles que l'implication  $\Rightarrow$  ou des points fixes  $\mu$  et  $\nu$ .

**Définition 9.6.6** *Soit  $Q$  une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  un espace bien filtrant et localement compact.*

*Soient  $\mathcal{A}^P$  et  $\mathcal{A}^C$  deux ensembles dénombrables de formules atomiques, et  $\mathcal{A}$  l'union disjointe de  $\mathcal{A}^P$  et de  $\mathcal{A}^C$ . Les formules  $F^P$  de la logique  $\mathcal{L}^P_{\text{open}\square}(\mathcal{A})$  et les formules  $F^C$  de la logique  $\mathcal{L}^C_{\text{open}\square}(\mathcal{A})$  sont définies par la grammaire :*

$F^P ::= A^P$	<i>où <math>A^P \in \mathcal{A}^P</math></i>	$F^C ::= A^C$	<i>où <math>A^C \in \mathcal{A}^C</math></i>
$\top$	<i>vrai</i>	$\top$	<i>vrai</i>
$F^P \wedge F^P$	<i>conjonction</i>	$F^C \wedge F^C$	<i>conjonction</i>
$\perp$	<i>faux</i>	$\perp$	<i>faux</i>
$F^P \vee F^P$	<i>disjonction</i>	$F^C \vee F^C$	<i>disjonction</i>
$[\ell]_{>r} F^C$	<i>modalité</i>	$\square F^P$	<i>modalité</i>

où  $r$  est un nombre de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , et  $\ell \in L$ . Les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{P}}(A)$  seront dites de type P, celles de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{C}}(A)$  seront dites de type C.

La sémantique de ces deux logiques est définie comme suit. Une interprétation  $I$  est une fonction qui à tout  $A^{\text{P}} \in \mathcal{A}^{\text{P}}$  associe un ouvert de  $X$ , et à tout  $A^{\text{C}} \in \mathcal{A}^{\text{C}}$  associe un ouvert de  $\mathcal{Q}(X)$ . On définit les deux relations  $x \models_{\theta}^I F^{\text{P}}$  et  $Q \models_{\theta}^I F^{\text{C}}$  par :

$$\begin{array}{llll}
x \models_{\theta}^I A^{\text{P}} & \text{ssi} & x \in I(A^{\text{P}}) & Q \models_{\theta}^I A^{\text{C}} & \text{ssi} & Q \in I(A^{\text{C}}) \\
x \models_{\theta}^I \top & & \text{toujours} & Q \models_{\theta}^I \top & & \text{toujours} \\
x \models_{\theta}^I F_1^{\text{P}} \wedge F_2^{\text{P}} & \text{ssi} & x \models_{\theta}^I F_1^{\text{P}} \text{ et } x \models_{\theta}^I F_2^{\text{P}} & Q \models_{\theta}^I F_1^{\text{C}} \wedge F_2^{\text{C}} & \text{ssi} & Q \models_{\theta}^I F_1^{\text{C}} \text{ et } Q \models_{\theta}^I F_2^{\text{C}} \\
x \models_{\theta}^I \perp & & \text{jamais} & Q \models_{\theta}^I \perp & & \text{jamais} \\
x \models_{\theta}^I F_1^{\text{P}} \vee F_2^{\text{P}} & \text{ssi} & x \models_{\theta}^I F_1^{\text{P}} \text{ ou } x \models_{\theta}^I F_2^{\text{P}} & Q \models_{\theta}^I F_1^{\text{C}} \vee F_2^{\text{C}} & \text{ssi} & Q \models_{\theta}^I F_1^{\text{C}} \text{ ou } Q \models_{\theta}^I F_2^{\text{C}} \\
x \models_{\theta}^I [\ell]_{>r} F^{\text{C}} & \text{ssi} & \theta_{\ell}^*(x)(I \llbracket F^{\text{C}} \rrbracket_{\theta}) > r & Q \models_{\theta}^I \square F^{\text{P}} & \text{ssi} & \text{pour tout } x \in Q, x \models_{\theta}^I F^{\text{P}}
\end{array}$$

où  $I \llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$  dénote  $\{x \in X \mid x \models_{\theta}^I F^{\text{P}}\}$  et  $I \llbracket F^{\text{C}} \rrbracket_{\theta}$  dénote  $\{Q \in \mathcal{Q}(X) \mid Q \models_{\theta}^I F^{\text{C}}\}$ .

Pour tout couple d'ensembles  $\text{Ops}_1, \text{Ops}_2$  d'opérateurs logiques parmi  $\top, \wedge, \perp, \vee$ , notons  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{C:Ops}_2}(A)$ , resp.  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{P:Ops}_1}(A)$ , l'ensemble des formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{P}}(A)$ , resp.  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{C}}(A)$  dont les sous-formules de type P sont construites à partir des opérateurs de  $\text{Ops}_1$  et dont les sous-formules de type C sont construites à partir des opérateurs de  $\text{Ops}_2$ .

La nouvelle modalité  $\square F^{\text{P}}$  signifie donc que l'on se trouve à un état  $Q$ , c'est au tour de C de jouer, et quelque état  $x \in Q$  qu'il joue, la formule  $F^{\text{P}}$  sera vraie à l'état  $x$ . Notons aussi que  $Q \models_{\theta}^I \square F^{\text{P}}$  si et seulement si  $Q \subseteq I \llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $Q \in \square I \llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$ . En d'autres termes,  $I \llbracket \square F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta} = \square I \llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$ . Il est donc facile de voir que :

**Lemme 9.6.7 (Correction)** Soit  $X$  un espace bien filtrant et localement compact. Soit  $\mathcal{O}$  une topologie  $\mathcal{Q}$ -agglomérante pour le crédo  $\theta$  sur  $X$ . Pour tout énoncé  $F^{\text{P}}$  de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{P}}(\emptyset)$ ,  $\llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\mathcal{O}$ . Pour tout énoncé  $F^{\text{C}}$  de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{C}}(\emptyset)$ ,  $\llbracket F^{\text{C}} \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\square[\mathcal{O}]$ .

Réciproquement, on a :

**Théorème 9.6.8 (Complétude)** Soit  $\theta$  un crédo sur un espace bien filtrant et localement compact  $X$ . La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$ , lorsque  $F^{\text{P}}$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{C:\top\wedge\vee}}(\emptyset)$ , est  $\mathcal{Q}$ -agglomérante. De même lorsque  $F^{\text{P}}$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{P:\top\wedge\vee}}(\emptyset)$ .

Les deux topologies coïncident, et forment la topologie  $\mathcal{Q}$ -agglomérante pour  $\theta$  la moins fine sur  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  cette topologie. Le fait que  $\theta$  soit un crédo implique que  $\mathcal{O}$  est moins fine que la topologie de  $X$ .

Commençons par montrer que la topologie  $\square[\mathcal{O}]$  est engendrée par les ouverts de la forme  $\square \llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$ ,  $F^{\text{P}}$  formule de  $\mathcal{L}^{\text{P}}$ . Il suffit de montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}$ ,  $\square U$  est dans la topologie  $\mathcal{O}'$  engendrée par les  $\square \llbracket F^{\text{P}} \rrbracket_{\theta}$ ,  $F^{\text{P}}$  formule de  $\mathcal{L}^{\text{P}}$ . Si  $U$  est vide, c'est clair car  $\square \emptyset = \emptyset$ .

Sinon, écrivons  $U$  sous la forme d'une union  $\bigcup_{i \in I} U_i$  d'une famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de la forme  $U_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \bigcap_{k=1}^{n_{ij}} \llbracket F_{ijk}^P \rrbracket_\theta$  ( $m_i \geq 1$ ,  $n_{ij} \geq 0$ ). Comme au théorème 9.5.8, on peut écrire  $U_i = \bigcap_{f \in \prod_{j=1}^{m_i} \{1, \dots, n_{ij}\}} \bigcup_{j=1}^{m_i} \llbracket F_{ijf(j)}^P \rrbracket_\theta = \bigcap_{f \in \prod_{j=1}^{m_i} \{1, \dots, n_{ij}\}} \llbracket \bigvee_{j=1}^{m_i} F_{ijf(j)}^P \rrbracket_\theta$ . On a alors

$$\square U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{f \in \prod_{j=1}^{m_i} \{1, \dots, n_{ij}\}} \square \llbracket \bigvee_{j=1}^{m_i} F_{ijf(j)}^P \rrbracket_\theta$$

par le lemme 3.3.5. Donc  $\square U$  est bien dans  $\mathcal{O}'$ .

Tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\square[\mathcal{O}]$  est donc lui-même soit vide soit une union dirigée d'unions finies d'intersections finies. Si  $\mathcal{U}$  est vide, alors  $\theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r]$  vaut soit  $\emptyset$  soit  $X$  selon la valeur de  $r$ . Supposons donc  $\mathcal{U}$  non vide. Dans le cas où  $\mathcal{O}$  est engendré par les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\overset{\rightarrow P: T \wedge V}{C: V}}(\emptyset)$ , on observe que  $\mathcal{U}$  est une union dirigée  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ , où chaque  $\mathcal{U}_i$  est une union finie non vide d'intersections finies  $\bigcup_{j=1}^{m_i} \bigcap_{k=1}^{n_{ij}} \square \llbracket F_{jk}^P \rrbracket_\theta = \llbracket \bigvee_{j=1}^{m_i} \bigwedge_{k=1}^{n_{ij}} \square F_{jk}^P \rrbracket_\theta$ , donc que  $\theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r]$  est l'union des  $\llbracket [\ell]_{>r} \bigvee_{j=1}^{m_i} \bigwedge_{k=1}^{n_{ij}} \square F_{jk}^P \rrbracket_\theta$ ,  $i \in I$ , et est donc dans  $\mathcal{O}$ . Lorsque  $\mathcal{O}$  est engendré par les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\overset{\rightarrow P: V}{C: T \wedge V}}(\emptyset)$ , on conclut en remarquant que  $\theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r]$  est l'union des  $\llbracket [\ell]_{>r} \bigvee_{j=1}^{m_i} \square \bigwedge_{k=1}^{n_{ij}} F_{jk}^P \rrbracket_\theta$ ,  $i \in I$ , en utilisant le lemme 3.3.5, ce qui est donc encore dans  $\mathcal{O}$ .

En utilisant le lemme 9.6.7,  $\mathcal{O}$  est donc la topologie  $\mathcal{Q}$ -agglomérante la moins fine pour  $\theta$ , quelle que soit la logique utilisée. Les deux topologies correspondant aux deux logiques sont donc en particulier identiques.  $\square$

On pourrait penser de nouveau économiser l'un ou l'autre opérateur logique en invoquant un analogue des topologies  $\sigma$ -agglomérantes, ou des tribus agglomérantes, de façon analogue à ce que nous avons fait à la section 9.5. La bonne notion à utiliser n'est pas claire ici.

Une définition possible serait la suivante : une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de l'espace  $X$  est  $\sigma$ - $\mathcal{Q}$ -agglomérante pour le crédo  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  si et seulement si, pour tout  $\mathcal{U} \in \square[\mathcal{O}]$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\ell \in L$ , l'ensemble  $\theta_\ell^{*-1}[\mathcal{U} > r]$  des  $x \in X$  tels que  $\theta_\ell^*(x)(\mathcal{U}) > r$  appartient à la tribu  $\sigma[\mathcal{O}]$  engendrée par  $\mathcal{O}$ .

En mélangeant les arguments du théorème 9.6.8 avec l'usage particulier de la formule d'inclusion-exclusion faite au théorème 9.5.8, on pourrait alors montrer que la topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket F^P \rrbracket_\theta$ , lorsque  $F^P$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}$  est  $\sigma$ - $\mathcal{Q}$ -agglomérante, où  $\mathcal{L}$  est l'une quelconque des logiques  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\overset{\rightarrow P: T \wedge}{C: V}}(\emptyset)$ ,  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\overset{\rightarrow P: T \vee}{C: V}}(\emptyset)$ , ou  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\overset{\rightarrow P: V}{C: T \wedge V}}(\emptyset)$ . Mais un énoncé de correction, selon lequel  $\llbracket F^P \rrbracket_\theta$  serait dans  $\sigma[\mathcal{O}]$ , semble devoir rester hors de portée.

Passons aux autres formes de non-déterminisme.

On peut bien entendu remplacer le non-déterminisme démoniaque par un non-déterminisme angélique ou chaotique. On devra cependant faire son deuil d'une caractérisation élégante, similaire à celle donnée au lemme 9.6.2, des plausos et estimos, analogues des crédos.

Rappelons que, par le théorème 6.3.17, si  $X$  est stablement localement compact, alors  $\nu \mapsto \nu_*$  définit un isomorphisme de  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$  sur  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{H}_u(X))$ . En général, la topologie de Scott et

la topologie faible ne coïncident pas sur ce dernier espace. (Nous traiterons du cas où tout se passe bien au lemme 9.6.10 ci-dessous.) Définissons donc directement l'analogie angélique des crédos :

**Définition 9.6.9 (Plauso)** Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Un plauso est une famille  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  telle que  $\theta_{\ell*}$ , qui à  $x$  associe  $\theta_\ell(x)_*$ , est une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{H}_u(X))$  pour tout  $\ell \in L$ .

Ceci a un sens par le théorème 6.3.17, puisque  $X$  est stablement localement compact.

**Lemme 9.6.10** Soit  $X$  un cpo continu cohérent, et  $\theta$  un système de transitions plausibiliste sur  $X$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout  $\ell \in L$ ,  $\theta_\ell$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$  (avec sa topologie de Scott) ;
2. pour tout  $\ell \in L$ , pour toute famille finie non vide d'ouverts  $(U_i)_{i=1}^n$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x) \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) > r \quad (9.7)$$

est ouvert dans  $X$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

3.  $\theta$  est un plauso sur  $X$ , autrement dit la fonction  $\theta_{\ell*}$  de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{H}_u(X))$  est continue pour tout  $\ell \in L$  ;
4. la fonction  $\theta_{\ell*}$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{H}_u(X))$  pour tout  $\ell \in L$ .

*Démonstration.* Par la proposition 3.4.5,  $\mathcal{H}(X)$  est un cpo continu, et par la proposition 3.4.19,  $\mathcal{H}_u(X) = \mathcal{H}(X)$ .

3  $\Leftrightarrow$  4. Puisque  $\mathcal{H}_u(X)$  est un cpo continu, par la proposition 3.7.12 la topologie faible et la topologie de Scott coïncident sur  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{H}_u(X))$ , autrement dit  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{H}_u(X)) = \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{H}_u(X))$ .

4  $\Leftrightarrow$  1. La fonction qui à  $x$  associe  $\theta_\ell(x)_*$  est la composée de  $\theta_\ell$  avec  $\nu \mapsto \nu_*$ . Or cette dernière est un isomorphisme entre  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$  et  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{H}_u(X))$  par le théorème 6.3.17, qui s'applique car  $X$ , en tant que cpo continu cohérent, est stablement localement compact.

2  $\Rightarrow$  3. On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned}
 \theta_{\ell_*}^{-1}\left[\bigcap_{i=1}^n \diamond U_i > r\right] &= \left\{ x \in X \mid \theta_{\ell}(x)_* \left( \bigcap_{i=1}^n \diamond U_i \right) > r \right\} \\
 &= \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_{\ell}(x)_* \left( \bigcup_{i \in I} \diamond U_i \right) > r \right\} \\
 &\quad \text{par la formule d'exclusion-inclusion,} \\
 &\quad \text{puisque } \theta_{\ell}(x)_* \text{ est une valuation} \\
 &= \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_{\ell}(x)_* \left( \diamond \bigcup_{i \in I} U_i \right) > r \right\} \\
 &\quad \text{par le lemme 3.4.18} \\
 &= \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_{\ell}(x) \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) > r \right\}
 \end{aligned}$$

Mais ceci est ouvert dans  $X$ , par 2. Tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}_u(X)$  s'écrit comme une union dirigée d'unions finies d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\diamond U$ . De façon équivalente, comme une union dirigée d'intersections finies d'unions finies de tels ouverts. Or par le lemme 3.4.18,  $\diamond$  commute aux unions, donc  $\mathcal{U}$  s'écrit comme une union dirigée d'intersections finies d'ouverts  $\diamond U$ . On peut donc écrire  $\mathcal{U}$  comme l'union dirigée des  $\mathcal{U}_j$ ,  $j \in J$ , où  $\mathcal{U}_j = \bigcap_{i=1}^n \square U_{ij}$  pour tout  $j \in J$ . Donc

$$\begin{aligned}
 \theta_{\ell_*}^{-1}[\mathcal{U} > r] &= \left\{ x \in X \mid \theta_{\ell}(x)_* \left( \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j \right) > r \right\} \\
 &= \left\{ x \in X \mid \sup_{j \in J} \theta_{\ell}(x)_*(\mathcal{U}_j) > r \right\} \quad \text{puisque } \theta_{\ell}(x)_* \text{ est continue} \\
 &= \{ x \in X \mid \exists j \in J \cdot \theta_{\ell}(x)_*(\mathcal{U}_j) > r \} \\
 &= \bigcup_{j \in J} \{ x \in X \mid \theta_{\ell}(x)_*(\mathcal{U}_j) > r \} = \bigcup_{j \in J} \theta_{\ell_*}^{-1}[\mathcal{U}_j > r]
 \end{aligned}$$

est ouvert.

3  $\Rightarrow$  2. Réciproquement, si  $\theta_{\ell_*}$  est continue, alors  $\theta_{\ell_*}^{-1}[\mathcal{U} > r]$  est un ouvert de  $X$ . Or, lorsque  $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \diamond U_i$ ,

$$\theta_{\ell_*}^{-1}[\mathcal{U} > r] = \left\{ x \in X \mid \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_{\ell}(x) \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) > r \right\}$$

Le fait que ceci soit ouvert revient exactement à dire que l'ensemble des  $x$  vérifiant (9.7) est ouvert.  $\square$

**Définition 9.6.11 (Topologie  $\mathcal{H}_u$ -agglomérante)** Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un plauso sur  $X$ . Pour toute topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de  $X$ , soit  $\diamond[\mathcal{O}]$  la topologie sur  $\mathcal{H}_u(X)$  engendrée par les ouverts  $\diamond U$ ,  $U \in \mathcal{O}$ .

Une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de  $X$  est  $\mathcal{H}_u$ -agglomérante pour  $\theta$  si et seulement si  $\theta_{\ell*|\diamond[\mathcal{O}]}$  est continue de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{H}_u(X) : \diamond[\mathcal{O}])$ .

**Lemme 9.6.12** Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un plauso sur  $X$ . Une topologie  $\mathcal{O}$ , moins fine que celle de  $X$ , est  $\mathcal{H}_u$ -agglomérante pour  $\theta$  si et seulement si, pour tous  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x) \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) > r \quad (9.8)$$

est dans  $\mathcal{O}$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* L'inégalité (9.8) est équivalente à

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x)_* \left( \diamond \bigcup_{i \in I} U_i \right) > r$$

donc à

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \theta_\ell(x)_* \left( \bigcup_{i \in I} \diamond U_i \right) > r$$

puisque, par le lemme 3.4.18,  $\diamond$  commute aux unions finies. Cette inégalité est donc équivalente à

$$\theta_\ell(x)_* \left( \bigcap_{i=1}^n \diamond U_i \right) > r \quad (9.9)$$

par le principe d'exclusion-inclusion. Si  $\mathcal{O}$  est  $\mathcal{H}_u$ -agglomérante, l'ensemble des  $x \in X$  vérifiant l'une ou l'autre est donc dans  $\mathcal{O}$ . Réciproquement, supposons que l'ensemble des  $x \in X$  vérifiant (9.9) soit dans  $\mathcal{O}$  pour toute famille finie  $(U_i)_{i=1}^n$  d'éléments de  $\mathcal{O}$  et pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . Tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{H}_u(X) : \diamond[\mathcal{O}]$  est une union dirigée d'ouverts  $\mathcal{U}_i$ ,  $i \in I$ , qui sont des unions finies d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\diamond U$  avec  $U \in \mathcal{O}$ . Chaque  $\mathcal{U}_i$  est donc aussi une intersection finie d'unions finies d'ouverts de la forme  $\diamond U$ , et comme  $\diamond$  commute aux unions finies par le lemme 3.4.18, chaque  $\mathcal{U}_i$  est une intersection finie d'ouverts  $\diamond U_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq n_i$  ( $n_i \geq 0$ ). On en déduit que

$$\begin{aligned} \theta_{\ell*}^{-1}[\mathcal{U} > r] &= \{x \in X \mid \theta_{\ell*}(x)(\mathcal{U}) > r\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \theta_{\ell*}(\mathcal{U}_i) > r\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \theta_{\ell*} \left( \bigcap_{j=1}^{n_i} \diamond U_{ij} \right) > r\} \end{aligned}$$

est dans  $\mathcal{O}$ . □

On peut dans ce cadre définir une logique, très proche de  $\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ , mais où la modalité  $\square$  est remplacée par une modalité existentielle  $\diamond$ . Une collision malencontreuse de notations fait que nous avons utilisé la lettre  $F$  pour dénoter tant des formules, que des fermés non vides. Ce n'était pas grave tant que les contextes d'utilisation des deux concepts étaient disjoints. Nous devons ici mentionner les deux dans un même contexte : nous réserverons donc temporairement la lettre  $G$  aux formules, et la lettre  $F$  aux fermés non vides.

**Définition 9.6.13** Soit  $Q$  une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  un espace stablement localement compact.

Soient  $\mathcal{A}^P$  et  $\mathcal{A}^C$  deux ensembles dénombrables de formules atomiques, et  $\mathcal{A}$  l'union disjointe de  $\mathcal{A}^P$  et de  $\mathcal{A}^C$ . Les formules  $G^P$  de la logique  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^P(\mathcal{A})$  et les formules  $G^C$  de la logique  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^C(\mathcal{A})$  sont définies par la grammaire :

$G^P ::=$	$A^P$	où $A^P \in \mathcal{A}^P$	$G^C ::=$	$A^C$	où $A^C \in \mathcal{A}^C$
	$\top$	vrai		$\top$	vrai
	$G^P \wedge G^P$	conjonction		$G^C \wedge G^C$	conjonction
	$\perp$	faux		$\perp$	faux
	$G^P \vee G^P$	disjonction		$G^C \vee G^C$	disjonction
	$[\ell]_{>r} G^C$	modalité		$\Diamond G^P$	modalité

où  $r$  est un nombre de  $Q \cap [0, 1]$ , et  $\ell \in L$ . Les formules de  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^P(\mathcal{A})$  seront dites de type P, celles de  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^C(\mathcal{A})$  seront dites de type C.

La sémantique de ces deux logiques est définie comme suit. Une interprétation  $I$  est une fonction qui à tout  $A^P \in \mathcal{A}^P$  associe un ouvert de  $X$ , et à tout  $A^C \in \mathcal{A}^C$  associe un ouvert de  $\mathcal{H}_u(X)$ . On définit les deux relations  $x \models_{\theta}^I G^P$  et  $F \models_{\theta}^I G^C$  ( $F \in \mathcal{H}_u(X)$ ) par :

$x \models_{\theta}^I A^P$	ssi	$x \in I(A^P)$	$F \models_{\theta}^I A^C$	ssi	$F \in I(A^C)$
$x \models_{\theta}^I \top$		toujours	$F \models_{\theta}^I \top$		toujours
$x \models_{\theta}^I G_1^P \wedge G_2^P$	ssi	$x \models_{\theta}^I G_1^P$ et $x \models_{\theta}^I G_2^P$	$F \models_{\theta}^I G_1^C \wedge G_2^C$	ssi	$F \models_{\theta}^I G_1^C$ et $F \models_{\theta}^I G_2^C$
$x \models_{\theta}^I \perp$		jamais	$F \models_{\theta}^I \perp$		jamais
$x \models_{\theta}^I G_1^P \vee G_2^P$	ssi	$x \models_{\theta}^I G_1^P$ ou $x \models_{\theta}^I G_2^P$	$F \models_{\theta}^I G_1^C \vee G_2^C$	ssi	$F \models_{\theta}^I G_1^C$ ou $F \models_{\theta}^I G_2^C$
$x \models_{\theta}^I [\ell]_{>r} G^C$	ssi	$\theta_{\ell^*}(x)(I \llbracket G^C \rrbracket_{\theta}) > r$	$F \models_{\theta}^I \Diamond G^P$	ssi	il existe $x \in F$ tel que $x \models_{\theta}^I G^P$

où  $I \llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$  dénote  $\{x \in X \mid x \models_{\theta}^I G^P\}$  et  $I \llbracket G^C \rrbracket_{\theta}$  dénote  $\{F \in \mathcal{H}_u(X) \mid F \models_{\theta}^I G^C\}$ .

Pour tout couple d'ensembles  $Ops_1, Ops_2$  d'opérateurs logiques parmi  $\top, \wedge, \perp, \vee$ , notons  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^{\rightarrow P:Ops_1, P:Ops_2}(\mathcal{A})$ , resp.  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^{\rightarrow C:Ops_2}(\mathcal{A})$ , l'ensemble des formules de  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^P(\mathcal{A})$ , resp.  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^C(\mathcal{A})$  dont les sous-formules de type P sont construites à partir des opérateurs de  $Ops_1$  et dont les sous-formules de type C sont construites à partir des opérateurs de  $Ops_2$ .

Notons immédiatement que  $F \models_{\theta}^I \Diamond G^P$  si et seulement si  $F \cap I \llbracket G^P \rrbracket_{\theta} \neq \emptyset$ , si et seulement si  $F \in \Diamond I \llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$ , autrement dit  $I \llbracket \Diamond G^P \rrbracket_{\theta} = \Diamond I \llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$ . On en déduit immédiatement :

**Lemme 9.6.14 (Correction)** Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Soit  $\mathcal{O}$  une topologie  $\mathcal{H}_u$ -agglomérante pour le plauso  $\theta$  sur  $X$ . Pour tout énoncé  $G^P$  de  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^P(\emptyset)$ ,  $\llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\mathcal{O}$ . Pour tout énoncé  $G^C$  de  $\mathcal{L}_{open\Diamond}^C(\emptyset)$ ,  $\llbracket G^C \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\Diamond[\mathcal{O}]$ .

Et réciproquement, on a le théorème suivant, qui se démontre exactement comme le théorème 9.6.8, mais en utilisant le lemme 3.4.18 à la place du lemme 3.3.5.

**Théorème 9.6.15 (Complétude)** Soit  $\theta$  un plauso sur un espace stablement localement compact  $X$ . La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket G^P \rrbracket_\theta$ , lorsque  $G^P$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\diamond}^{\rightarrow P; \top \wedge \vee; \text{C}; \top \wedge \vee}(\emptyset)$ , est  $\mathcal{H}_u$ -agglomérante. De même lorsque  $G^P$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{\text{open}\diamond}^{\rightarrow P; \top \wedge \vee; \text{C}; \top \wedge \vee}(\emptyset)$ .

Les deux topologies coïncident, et forment la topologie  $\mathcal{H}_u$ -agglomérante pour  $\theta$  la moins fine sur  $X$ .

Terminons par le mélange d'un choix probabiliste et d'un non-déterminisme chaotique. Rappelons que, par la proposition 7.4.6, la fonction qui à toute estimation continue  $\nu$  associe  $\llbracket \nu \rrbracket$  est un isomorphisme de  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  sur  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$ . Ceci sort du cadre des systèmes de transition ludiques tels que nous les avons définis : nous étudierons ici des systèmes de transition  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$ , où chaque fonction  $\theta_\ell$  est maintenant une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  — et ce dernier espace n'est pas un espace de jeux. Mais la différence est relativement minime.

**Définition 9.6.16 (Estimo)** Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Un estimo est une famille  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  d'estimations continues telles que la fonction  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket$ , qui à  $x$  associe  $\llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket$ , est une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{P}_\nu(X))$  pour tout  $\ell \in L$ .

Ceci a un sens par le lemme 7.3.18, puisque  $X$  est stablement localement compact.

**Lemme 9.6.17** Soit  $X$  un cpo continu cohérent et compact, et  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  une famille de fonctions  $\theta_\ell$  de  $X$  vers  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout  $\ell \in L$ ,  $\theta_\ell$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  (avec sa topologie de Scott) ;
2. pour tout  $\ell \in L$ , pour toute famille finie non vide d'ouverts élémentaires  $\square U_i \cap \bigcap_{j=1}^{n_i} \diamond V_{ij}$  de  $\mathcal{P}_\nu(X)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que :

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset \\ K \subseteq \biguplus_{i \in I} \{1, \dots, n_i\}}} (-1)^{|I|+|K|+1} \theta_\ell(x) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \setminus \bigcup_{(i,j) \in K} V_{ij} \right) > r$$

est ouvert dans  $X$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . (On note  $\biguplus_{i \in I} \{1, \dots, n_i\}$  l'ensemble des couples  $(i, j)$  avec  $i \in I$  et  $j \in \{1, \dots, n_i\}$ .)

3.  $\theta$  est un estimo sur  $X$ , autrement dit  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{P}_\nu(X))$  pour tout  $\ell \in L$  ;
4.  $\theta$  est un estimo sur  $X$ , autrement dit  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$  pour tout  $\ell \in L$ .

*Démonstration.* Par le corollaire 3.6.22, notons d'abord que  $\mathcal{P}_\nu(X) = \mathcal{P}(X)$  est un cpo continu, cohérent et compact.

3  $\Leftrightarrow$  4. Puisque  $\mathcal{P}_\nu(X)$  est un cpo continu, par la proposition 3.7.12 la topologie faible et la topologie de Scott coïncident sur  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$ , autrement dit  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X)) = \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(\mathcal{P}_\nu(X))$ .

4  $\Leftrightarrow$  1. La fonction qui à  $x$  associe  $\llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket$  est la composée de  $\theta_\ell$  avec  $\nu \mapsto \llbracket \nu \rrbracket$ . Or cette dernière est un isomorphisme entre  $\mathbf{Est}_{\leq 1}(X)$  et  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\nu(X))$  par la proposition 7.4.6.

2  $\Leftrightarrow$  3. Soit  $\mathcal{U}_i$  l'ouvert élémentaire  $\square U_i \cap \bigcap_{j=1}^{n_i} \diamond V_{ij}$ , et  $\mathcal{U}$  l'union des  $\mathcal{U}_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . On remarque que :

$$\begin{aligned}
 \llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket(\mathcal{U}) &= \llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket \left( \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i \right) \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket \left( \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) \\
 &\quad \text{par le principe d'inclusion-exclusion} \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket \left( \square \bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{\substack{i \in I \\ 1 \leq j \leq n_i}} \diamond V_{ij} \right) \\
 &\quad \text{en utilisant le lemme 7.1.4} \\
 &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \sum_{K \subseteq \bigcup_{i \in I} \{1, \dots, n_i\}} (-1)^{|K|} \theta_\ell(x) \left( \bigcap_{i \in I} U_i \setminus \bigcup_{(i,j) \in K} V_{ij} \right)
 \end{aligned}$$

par le lemme 7.1.6, sachant que  $P = \llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket$  est par définition une valuation sur  $\mathcal{P}_\mathcal{V}(X)$  telle que  $\nu(C) = P^\%(\square C)$  pour tout croissant  $C$ . La condition (9.10) est donc équivalente à : (\*)  $\llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket(\mathcal{U}) > r$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , pour toute union finie  $\mathcal{U}$  d'ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_\mathcal{V}(X)$ .

Sous l'hypothèse 2, pour tout ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{P}_\mathcal{V}(X)$ , on peut écrire  $\mathcal{V}$  sous forme de l'union d'une famille dirigée  $(\mathcal{V}_j)_{j \in J}$  d'unions finies d'ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_\mathcal{V}(X)$ . Alors  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket^{-1}[\mathcal{V} > r]$  est l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $\llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket(\bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j) > r$ , c'est-à-dire tels qu'il existe  $j \in J$  avec  $\llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket(\mathcal{V}_j) > r$ , puisque  $\llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket$  est une valuation continue. Or par 2, en utilisant la reformulation (\*) de (9.10), avec  $\mathcal{U} = \mathcal{V}_j$ , l'ensemble  $V_j$  des  $x$  tels que  $\llbracket \theta_\ell(x) \rrbracket(\mathcal{V}_j) > r$  est ouvert dans  $X$ . Or  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket^{-1}[\mathcal{V} > r]$  est l'union des  $V_j$ , et est donc ouvert. Donc  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket$  est continue de  $X$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1}(\mathcal{P}_\mathcal{V}(X))$ . C'est la condition 3.

Réciproquement, si 3 est vrai, alors en particulier  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket^{-1}[\mathcal{U} > r]$  est ouvert pour toute union finie  $\mathcal{U}$  d'ouverts élémentaires de  $\mathcal{P}_\mathcal{V}(X)$ , ce qui par (\*) revient à démontrer la condition 2.  $\square$

**Définition 9.6.18 (Topologie  $\mathcal{P}_\mathcal{V}$ -agglomérante)** Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $\theta = (\theta_\ell)_{\ell \in L}$  un estimo sur  $X$ . Pour toute topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de  $X$ , soit  $\square, \diamond[\mathcal{O}]$  la topologie sur  $\mathcal{P}_\mathcal{V}(X)$  engendrée par les ouverts  $\square U$ , et  $\diamond V$ ,  $U, V \in \mathcal{O}$ .

Une topologie  $\mathcal{O}$  moins fine que celle de  $X$  est  $\mathcal{P}_\mathcal{V}$ -agglomérante pour  $\theta$  si et seulement si  $\llbracket \theta_\ell \rrbracket_{\square, \diamond[\mathcal{O}]}$  est continue de  $X : \mathcal{O}$  vers  $\mathbf{V}_{\leq 1}^{wk}(\mathcal{P}_\mathcal{V}(X) : \square, \diamond[\mathcal{O}])$ .

On définit de nouveau une logique associée, de façon relativement immédiate.

**Définition 9.6.19** Soit  $Q$  une partie dénombrable partout dense de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  un espace stablement compact.

Soient  $\mathcal{A}^P$  et  $\mathcal{A}^C$  deux ensembles dénombrables de formules atomiques, et  $\mathcal{A}$  l'union disjointe de  $\mathcal{A}^P$  et de  $\mathcal{A}^C$ . Les formules  $G^P$  de la logique  $\mathcal{L}_{\text{open}, \square, \diamond}^P(\mathcal{A})$  et les formules  $G^C$  de la logique

$\mathcal{L}_{open\Box.\Diamond}^C(\mathcal{A})$  sont définies par la grammaire :

$G^P$	::=	$A^P$	où	$A^P \in \mathcal{A}^P$
		$\top$		vrai
		$G^P \wedge G^P$		conjonction
		$\perp$		faux
		$G^P \vee G^P$		disjonction
		$[\ell]_{>r} G^C$		modalité
$G^C$	::=	$A^C$	où	$A^C \in \mathcal{A}^C$
		$\top$		vrai
		$G^C \wedge G^C$		conjonction
		$\perp$		faux
		$G^C \vee G^C$		disjonction
		$\Box G^P$		modalité universelle
		$\Diamond G^P$		modalité existentielle

où  $r$  est un nombre de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , et  $\ell \in L$ . Les formules de  $\mathcal{L}_{open\Box.\Diamond}^P(\mathcal{A})$  seront dites de type P, celles de  $\mathcal{L}_{open\Box.\Diamond}^C(\mathcal{A})$  seront dites de type C.

La sémantique de ces deux logiques est définie comme suit. Une interprétation  $I$  est une fonction qui à tout  $A^P \in \mathcal{A}^P$  associe un ouvert de  $X$ , et à tout  $A^C \in \mathcal{A}^C$  associe un ouvert de  $\mathcal{P}_V(X)$ . On définit les deux relations  $x \models_\theta^I G^P$  et  $\alpha \models_\theta^I G^C$  ( $\alpha \in \mathcal{P}_V(X)$ ) par :

$x \models_\theta^I A^P$	ssi	$x \in I(A^P)$	$\alpha \models_\theta^I A^C$	ssi	$\alpha \in I(A^C)$
$x \models_\theta^I \top$		toujours	$\alpha \models_\theta^I \top$		toujours
$x \models_\theta^I G_1^P \wedge G_2^P$	ssi	$x \models_\theta^I G_1^P$ et $x \models_\theta^I G_2^P$	$\alpha \models_\theta^I G_1^C \wedge G_2^C$	ssi	$\alpha \models_\theta^I G_1^C$ et $\alpha \models_\theta^I G_2^C$
$x \models_\theta^I \perp$		jamais	$\alpha \models_\theta^I \perp$		jamais
$x \models_\theta^I G_1^P \vee G_2^P$	ssi	$x \models_\theta^I G_1^P$ ou $x \models_\theta^I G_2^P$	$\alpha \models_\theta^I G_1^C \vee G_2^C$	ssi	$\alpha \models_\theta^I G_1^C$ ou $\alpha \models_\theta^I G_2^C$
$x \models_\theta^I [\ell]_{>r} G^C$	ssi	$\langle \theta_\ell(x) \rangle (I \llbracket G^C \rrbracket_\theta) > r$			
$\alpha \models_\theta^I \Box G^P$	ssi	$\alpha(I \llbracket G^P \rrbracket_\theta) = 1$	$\alpha \models_\theta^I \Diamond G^P$	ssi	$\alpha(I \llbracket G^P \rrbracket_\theta) \neq 0$

où  $I \llbracket G^P \rrbracket_\theta$  dénote  $\{x \in X \mid x \models_\theta^I G^P\}$  et  $I \llbracket G^C \rrbracket_\theta$  dénote  $\{\alpha \in \mathcal{P}_V(X) \mid \alpha \models_\theta^I G^C\}$ .

Pour tout couple d'ensembles  $Ops_1, Ops_2$  d'opérateurs logiques parmi  $\top, \wedge, \perp, \vee$ , notons  $\mathcal{L}_{open\Box.\Diamond}^{\rightarrow P:Ops_1, C:Ops_2}(\mathcal{A})$ , resp.  $\mathcal{L}_{open\Box.\Diamond}^{\rightarrow P:Ops_1, C:Ops_2}(\mathcal{A})$ , l'ensemble des formules de  $\mathcal{L}_{open\Box.\Diamond}^P(\mathcal{A})$ , resp.  $\mathcal{L}_{open\Box.\Diamond}^C(\mathcal{A})$  dont les sous-formules de type P sont construites à partir des opérateurs de  $Ops_1$  et dont les sous-formules de type C sont construites à partir des opérateurs de  $Ops_2$ .

On rappelle que,  $X$  étant sobre,  $\mathcal{P}_V(X)$  est isomorphe à l'espace  $\mathcal{P}'_V(X)$  des couples  $(Q, F)$  formés d'un compact saturé  $Q$  de  $X$ , d'un fermé  $F$  de  $X$  tels que, en posant  $L$  la lentille  $Q \cap F$ ,  $L$  est non vide,  $Q = \uparrow L$ , et tout ouvert  $U$  contenant  $Q$  est tel que  $F \subseteq cl(U \cap F)$ . C'est la proposition 3.6.3. Étant donnée  $\alpha$ , on obtient  $Q$  comme l'intersection des ouverts  $U$  tels que  $\alpha(U) = 1$ , et  $F$  comme l'intersection des complémentaires des ouverts  $V$  tels que  $\alpha(V) = 0$ .

Notons alors que  $\alpha \models_{\theta}^I \Box G^P$  si et seulement si  $Q$  est inclus dans  $I \llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$  (puisque  $\alpha = (Q, F)^*$ , donc  $\alpha(U) = 1$  si et seulement si  $Q \subseteq U$ ), c'est-à-dire si et seulement si pour tout  $x \in Q$ ,  $x \models_{\theta}^I G^P$ . De même,  $\alpha \models_{\theta}^I \Diamond G^P$  si et seulement si  $F$  intersecte pas  $I \llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$  (puisque  $\alpha = (Q, F)^*$ , donc  $\alpha(U) = 0$  si et seulement si  $F$  n'intersecte pas  $U$ ), si et seulement si il existe  $x \in F$  tel que  $x \not\models_{\theta}^I G^P$ .

On retrouve ainsi les sémantiques usuelles des modalités universelle  $\Box$  et existentielle  $\Diamond$ .

**Lemme 9.6.20 (Correction)** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $\mathcal{O}$  une topologie  $\mathcal{P}_V$ -agglomérante pour l'estimo  $\theta$  sur  $X$ . Pour tout énoncé  $G^P$  de  $\mathcal{L}_{open\Box, \Diamond}^P(\emptyset)$ ,  $\llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\mathcal{O}$ . Pour tout énoncé  $G^C$  de  $\mathcal{L}_{open\Box, \Diamond}^C(\emptyset)$ ,  $\llbracket G^C \rrbracket_{\theta}$  est dans  $\Box, \Diamond[\mathcal{O}]$ .*

**Théorème 9.6.21 (Complétude)** *Soit  $\theta$  un estimo sur un espace stablement compact  $X$ . La topologie engendrée par les ouverts de  $X$  de la forme  $\llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$ , lorsque  $G^P$  parcourt les formules de  $\mathcal{L}_{open\Box, \Diamond}^{\rightarrow P; \top \wedge \vee}(\emptyset)$ , est  $\mathcal{P}_V$ -agglomérante.*

*Cette topologie est la topologie  $\mathcal{P}_V$ -agglomérante pour  $\theta$  la moins fine sur  $X$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$  cette topologie. Le fait que  $\theta$  soit un estimo implique que  $\mathcal{O}$  est moins fine que la topologie de  $X$ .

On remarque que la topologie  $\Box, \Diamond[\mathcal{O}]$  est engendrée par les ouverts de la forme  $\Box \llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$  et  $\Diamond \llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$ , avec  $G^P$  de type P. Il suffit de montrer que les ouverts de la forme  $\Box U$  et  $\Diamond U$  sont dans la topologie  $\mathcal{O}'$  engendrée par ces derniers. Si  $U = \emptyset$ , alors  $\Box U = \emptyset$  et  $\Diamond U = \emptyset$  y sont clairement. Sinon,  $U$  est l'union d'une famille dirigée  $(U_i)_{i \in I}$ , où chaque  $U_i$  est une union finie non vide d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\llbracket G^P \rrbracket_{\theta}$ . Puisque l'on dispose de  $\vee, \top, \wedge$  sur les formules de type P, on peut écrire chaque  $U_i$  sous la forme  $\llbracket G_i^P \rrbracket_{\theta}$ . Or :

$$\Box U = \bigcup_{i \in I} \Box U_i \quad \text{par le lemme 7.1.9}$$

est une union d'ouverts  $\Box U_i = \llbracket \Box G_i^P \rrbracket_{\theta}$ , et est donc dans  $\Box, \Diamond[\mathcal{O}]$ . De plus,

$$\Diamond U = \bigcup_{i \in I} \Diamond U_i \quad \text{par le lemme 7.1.10}$$

est une union d'ouverts  $\Diamond U_i = \llbracket \Diamond G_i^P \rrbracket_{\theta}$ , et est donc dans  $\Box, \Diamond[\mathcal{O}]$ .

Tout ouvert  $\mathcal{U}$  non vide de  $\Box, \Diamond[\mathcal{O}]$  est une union dirigée d'unions finies non vides d'intersections finies d'ouverts de la forme  $\llbracket \Box G^P \rrbracket_{\theta}$  ou  $\llbracket \Diamond G^P \rrbracket_{\theta}$ . Puisque la logique  $\mathcal{L}_{open\Box, \Diamond}^{\rightarrow P; \top \wedge \vee}(\emptyset)$  permet de former les conjonctions finies et les disjonctions finies non vides de formules de type C,  $\mathcal{U}$  est donc une union dirigée de la forme  $\bigcup_{i \in I} \llbracket G_i^C \rrbracket_{\theta}$ . Alors  $\llbracket \theta_{\ell} \rrbracket_{\Box, \Diamond[\mathcal{O}]}^{-1}[\mathcal{U} > r]$  est l'union des  $\llbracket \ell \rrbracket_{> r} G_i^C \rrbracket_{\theta}$ ,  $i \in I$ , et est donc dans  $\mathcal{O}$ .

$\mathcal{O}$  est donc  $\mathcal{P}_V$ -agglomérante. Par le lemme 9.6.20,  $\mathcal{O}$  est donc la topologie  $\mathcal{P}_V$ -agglomérante la moins fine.  $\square$



# **Quatrième partie**

## **Prévisions**



# Chapitre 10

## Convexité, concavité, prévisions colinéaires

Un résultat classique de théorie de la mesure est que, si  $X$  est un espace compact, toute mesure  $\nu$  donne lieu à une fonctionnelle  $f \mapsto \int_{x \in X} f(x) d\nu$  qui vérifie certaines propriétés (elle est linéaire en  $f$ , continue et bornée, positive), et que toute fonctionnelle vérifiant ces propriétés est ainsi obtenue. C'est le *théorème de Riesz*. Dans le cadre des capacités, la correspondance analogue sera entre les jeux convexes continus et certaines fonctionnelles que nous appellerons des *prévisions basses colinéaires*, entre les jeux concaves continus et les *prévisions hautes colinéaires*, et entre les jeux continus et les *prévisions colinéaires*.

### 10.1 Prévisions, prévisions basses, prévisions hautes

**Définition 10.1.1 (Prévision)** Soit  $X$  un espace topologique, et notons  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  l'espace des fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , soit  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

Une prévision est une fonctionnelle  $F$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que :

- $F$  est positivement homogène : pour tout  $\alpha \geq 0$ ,  $F(\alpha f) = \alpha F(f)$  ;
- $F$  est croissante : si  $f \leq g$ , alors  $F(f) \leq F(g)$  ;

On dit que  $F$  est une prévision basse si de plus :

- $F$  est sur-additive :  $F(f + g) \geq F(f) + F(g)$ .

Une prévision  $F$  est appelée une prévision haute si et seulement si :

- $F$  est sous-additive :  $F(f + g) \leq F(f) + F(g)$ .

Une prévision  $F$  est colinéaire si et seulement si :

- $F$  est additive sur les fonctions comonotones : si  $f$  et  $g$  sont comonotones,  $F(f + g) = F(f) + F(g)$ .

Une prévision  $F$  est linéaire si et seulement si elle est additive, autrement dit si  $F(f + g) = F(f) + F(g)$  pour toutes  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ .

Finalement, une prévision  $F$  est continue si et seulement si elle est Scott-continue : pour toute famille dirigée  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions continues bornées de borne supérieure  $f$ ,  $F(\sup_{i \in I} f_i) = \sup_{i \in I} F(f_i)$ .

On notera  $\mathbf{P}(X)$ ,  $\nabla \mathbf{P}(X)$ ,  $\Delta \mathbf{P}(X)$  respectivement les espaces des prévisions continues, basses continues, et hautes continues sur  $X$ . On notera  $\mathbf{P}^*(X)$ ,  $\nabla \mathbf{P}^*(X)$ ,  $\Delta \mathbf{P}^*(X)$ ,  $\mathbf{P}^\Delta(X)$  les espaces des prévisions colinéaires continues (resp. basses, hautes, linéaires) sur  $X$ .

Le nom de *prévision basse* est inspiré de Walley (1991), et j'en ai pris connaissance à la lecture de Maaß (2001); Maass (2003). Pour Walley et Maaß, les prévisions basses sont juste les fonctionnelles à valeurs réelles. Seules les prévisions basses dites *cohérentes* semblent avoir de l'intérêt dans le cadre qui intéressent ces auteurs. La description usuelle de la condition de cohérence n'est pas très parlante, mais Maass (2003) remarque qu'une définition équivalente est que  $F(f) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i F(f_i) + \lambda_0$  dès que  $f \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \lambda_0$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Ceci est le cas dès que  $F$  est positivement homogène, croissante et telle que  $F(\chi_X) \geq 1$ . Il est facile de voir que réciproquement la condition de cohérence implique l'homogénéité positive sauf éventuellement pour  $\alpha = 0$  (pour  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha f \geq \alpha \times f$  implique  $F(\alpha f) \geq \alpha F(f)$  et  $f \geq 1/\alpha \times (\alpha f)$  implique  $F(f) \geq 1/\alpha F(\alpha f)$ , donc  $F(\alpha f) = \alpha F(f)$ ), la croissance (prendre  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0$ ), et  $F(\chi_X) \geq 1$  (prendre  $n = 0$ ,  $\lambda_0 = 1$ ).

Nous avons donc légèrement perverti la définition originelle. Ceci a notamment comme avantage de nous permettre de définir la notion de prévision haute comme la contrepartie naturelle de celle de prévision basse. (Alors que Walley (1991) définit une prévision basse  $\underline{P}$  comme une fonction quelconque envoyant toute fonction  $f$  vers un réel, il définit aussi la prévision haute  $\overline{P}$  par  $\overline{P}(f) = -\underline{P}(-f)$ .) Un autre avantage sera la correspondance quasi-exacte entre différentes formes de jeux et différentes formes de prévisions colinéaires ; voir plus bas.

Notons que toute prévision est nécessairement bornée, au sens où  $F(f)/\|f\|_\infty$  a une borne supérieure  $\|F\|$  lorsque  $f$  parcourt l'ensemble des fonctions continues bornées non nulles de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . (On rappelle que  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} f(x)$ .) En effet,  $f \leq \|f\|_\infty \chi_X$ , donc  $F(f) \leq \|f\|_\infty F(\chi_X)$  puisque  $F$  est croissante et positivement homogène ; donc  $\|F\| \leq F(\chi_X)$ . Réciproquement,  $F(\chi_X) \leq \|F\| \|\chi_X\|_\infty = \|F\|$ , donc  $\|F\| = F(\chi_X)$ .

**Fait 10.1.2** Soit  $\nu$  un jeu convexe (resp., convexe continu). Alors la fonctionnelle

$$\alpha_e(\nu) : f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \mapsto \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

est une prévision basse colinéaire (resp. une prévision basse colinéaire continue).

L'homogénéité positive est par la proposition 4.2.12, la sur-additivité par la proposition 4.3.1 (et est la seule propriété pour laquelle la convexité de  $\nu$  est requise), l'additivité sur les fonctions comonotones est par la proposition 4.4.3, la croissance est par le lemme 4.1.2, et la continuité, lorsque  $\nu$  est continu, est par la proposition 4.2.1. Notons que  $\|\alpha_e(\nu)\| = \alpha_e(\nu)(\chi_X) = \nu(X)$ .

De même, en utilisant la proposition 4.3.2 au lieu de la proposition 4.3.1, on a :

**Fait 10.1.3** Soit  $\nu$  un jeu concave (resp., concave continu). Alors la fonctionnelle

$$\alpha_e(\nu) : f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \mapsto \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

est une prévision haute colinéaire (resp. une prévision haute colinéaire continue).

La réciproque du fait 10.1.2, à savoir que toute prévision basse colinéaire provient d'un jeu convexe, dans le cas où  $X$  est fini, est connue sous le nom de théorème de Schmeidler. Dans le cas général, nous aurons besoin d'hypothèses de continuité pour le démontrer. Nous démontrerons aussi le résultat symétrique que toute prévision haute colinéaire (continue) provient d'un jeu concave (continu).

On remarque d'abord :

**Lemme 10.1.4** *Soit  $F$  une prévision sur  $X$ . La fonction*

$$\gamma_e(F) : U \mapsto F(\chi_U)$$

*est un jeu. Si  $F$  est basse et colinéaire, alors  $\gamma_e(F)$  est convexe. Si  $F$  est haute et colinéaire, alors  $\gamma_e(F)$  est concave.*

*Démonstration.* Que  $\gamma_e(F)(\emptyset)$  soit égal à 0 est une conséquence de l'homogénéité positive. Ensuite,  $\gamma_e(F)$  est monotone car  $F$  est croissante. Pour ce qui est de la convexité, lorsque  $F$  est une prévision basse, remarquons d'abord que  $\chi_{U \cup V}$  et  $\chi_{U \cap V}$  sont comonotones. En effet, l'inégalité  $\chi_W(x) < \chi_W(x')$  est équivalente à  $x \notin W$  et  $x' \in W$ , puisque  $\chi_W$  ne prend que les valeurs 0 ou 1. En particulier, si on avait  $\chi_{U \cup V}(x) < \chi_{U \cup V}(x')$  et  $\chi_{U \cap V}(x) > \chi_{U \cap V}(x')$ , alors nécessairement  $x \notin U \cup V$ ,  $x' \in U \cup V$ ,  $x \in U \cap V$ ,  $x' \notin U \cap V$ ; or, par exemple,  $x \notin U \cup V$  et  $x \in U \cap V$  sont contradictoires. Remarquons ensuite que  $\chi_{U \cup V} + \chi_{U \cap V} = \chi_U + \chi_V$ . Donc  $\gamma_e(F)(U \cup V) + \gamma_e(F)(U \cap V) = F(\chi_{U \cup V} + \chi_{U \cap V})$  (par colinéarité)  $= F(\chi_U + \chi_V) \geq F(\chi_U) + F(\chi_V)$  (par sur-additivité)  $= \gamma_e(F)(U) + \gamma_e(F)(V)$ . Un raisonnement similaire montre que  $\gamma_e(F)$  est concave si  $F$  est une prévision haute.  $\square$

**Lemme 10.1.5** *Soit  $F$  une prévision colinéaire sur  $X$ , et  $f = a + \sum_{i=1}^m a_i \chi_{U_i}$  une fonction étagée, avec  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^+$ . Alors*

$$\int_{x \in X} f(x) d\gamma_e(F) = F(f)$$

*Démonstration.* Posons, pour simplifier,  $U_0 = X$  et  $a_0 = a$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\gamma_e(F) &= a\gamma_e(F)(X) + \sum_{i=1}^m a_i \gamma_e(F)(U_i) \\ &= aF(\chi_X) + \sum_{i=1}^m a_i F(\chi_{U_i}) = F(a\chi_X) + \sum_{i=1}^m F(a_i \chi_{U_i}) \\ &= \sum_{i=0}^m F(a_i \chi_{U_i}) \end{aligned}$$

Notons que  $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ . Supposons de plus, sans perte de généralité, que  $a_1, \dots, a_m > 0$ . Observons alors que, pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , les fonctions  $\sum_{i=0}^{k-1} a_i \chi_{U_i}$  et  $a_k \chi_{U_k}$  sont comonotones. En effet, si l'on pouvait trouver deux points  $x$  et  $x'$  tels que  $(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \chi_{U_i})(x) <$

$(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \chi_{U_i})(x')$  et  $a_k \chi_{U_k}(x) > a_k \chi_{U_k}(x')$ . Puisque  $a_k > 0$ , la dernière inégalité implique  $x \in U_k$  et  $x' \notin U_k$ . Puisque  $x \in U_k$ ,  $x$  est dans tout  $U_i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ , donc  $(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \chi_{U_i})(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ . La première inégalité entraîne donc  $\sum_{i=0}^{k-1} a_i < (\sum_{i=0}^{k-1} a_i \chi_{U_i})(x')$ , ce qui est impossible puisque tous les  $a_i$  sont non nuls.

On en déduit, à l'aide de la colinéarité de  $F$ , que

$$\sum_{i=0}^m F(a_i \chi_{U_i}) = F\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \chi_{U_i}\right) + \sum_{i=k}^m F(a_i \chi_{U_i})$$

pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq m+1$ , par récurrence sur  $k$ . Donc, pour  $k = m+1$ ,

$$\oint_{x \in X} f(x) d\gamma_e(F) = F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) = F(f)$$

□

Nous montrons à la proposition 10.1.7 que  $\alpha_e \dashv \gamma_e$  forme une surrection de Galois. De plus,  $\alpha_e$  et  $\gamma_e$  seront Scott-continues. Nous rencontrerons ce genre d'objet plusieurs fois dans la suite, donnons-leur un nom :

**Définition 10.1.6 (Scott-rétract)** Soient  $Z$  et  $Y$  deux ensembles ordonnés. Une Scott-rétraction de  $Y$  sur  $Z$ , ou de  $Z$  dans  $Y$ , est une surrection de Galois  $s \dashv r$ , où  $s : Z \rightarrow Y$  et  $r : Y \rightarrow Z$  sont Scott-continues. De façon équivalente, c'est la donnée de deux fonctions Scott-continues, la section  $s : Z \rightarrow Y$  et la rétraction  $r : Y \rightarrow Z$ , telles que  $r(s(z)) = z$  pour tout  $z \in Z$ , et  $y \leq s(r(y))$  pour tout  $y \in Y$ .

On dit alors que l'ensemble ordonné  $Z$  est un Scott-rétract de  $Y$ .

Toute Scott-rétraction fournit une section et une rétraction. La condition supplémentaire que l'on demande par rapport à un couple section-rétraction est que  $y \leq s(r(y))$  pour tout  $y \in Y$ .

**Proposition 10.1.7** Pour tout jeu  $\nu$ ,  $\gamma_e(\alpha_e(\nu)) = \nu$ . Pour toute prévision colinéaire  $F$  sur  $X$ ,  $\alpha_e(\gamma_e(F)) \leq F$ . Plus précisément,  $\alpha_e \dashv \gamma_e$  est une Scott-rétraction de l'espace des jeux dans l'espace des prévisions colinéaires, de l'espace des jeux convexes dans l'espace des prévisions basses colinéaires, et de l'espace des jeux concaves dans l'espace des prévisions hautes colinéaires.

*Démonstration.* Montrons que  $\gamma_e(\alpha_e(\nu)) = \nu$  pour tout jeu  $\nu$  :

$$\gamma_e(\alpha_e(\nu))(U) = \alpha_e(\nu)(\chi_U) = \oint_{x \in X} \chi_U(x) d\nu = \nu(U)$$

ce qui est une conséquence de la proposition 4.1.4. Montrons maintenant que  $\alpha_e(\gamma_e(F)) \leq F$  pour toute prévision colinéaire  $F$ . D'abord,

$$\alpha_e(\gamma_e(F))(f) = \oint_{x \in X} f(x) d\gamma_e(F)$$

En utilisant les fonctions étagées  $f_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , du lemme 4.1.6 dans le lemme 10.1.5,

$$\int_{x \in X} f_K(x) d\gamma_{\mathcal{C}}(F) = F(f_K)$$

La borne supérieure du côté gauche est l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\gamma_{\mathcal{C}}(F)$ , c'est-à-dire  $\alpha_{\mathcal{C}}(\gamma_{\mathcal{C}}(F))(f)$ . Comme  $F$  est croissante, le côté droit est toujours inférieur ou égal à  $F(f)$ , donc  $\alpha_{\mathcal{C}}(\gamma_{\mathcal{C}}(F))(f) \leq F(f)$ .

Ensuite,  $\alpha_{\mathcal{C}}$  est croissante par la proposition 4.2.3, et  $\gamma_{\mathcal{C}}$  est trivialement croissante. Donc  $\alpha_{\mathcal{C}} \dashv \gamma_{\mathcal{C}}$  forme une surrection de Galois. Par la proposition 4.2.5,  $\alpha_{\mathcal{C}}$  est Scott-continue, et la Scott-continuité de  $\gamma_{\mathcal{C}}$  est évidente.  $\square$

Avec des hypothèses de continuité, on obtient même un isomorphisme. C'est le théorème de Schmeidler, dans le cas des jeux convexes et des prévisions basses colinéaires sur des espaces finis (où tant les jeux que les prévisions sont continues).

**Théorème 10.1.8 (de représentation)** *Si  $\nu$  est un jeu continu (resp. et convexe, resp. et concave) sur  $X$ , alors  $\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$  est une prévision colinéaire continue (resp. et basse, resp. et haute).*

*Si  $F$  est une prévision colinéaire continue sur  $X$  (resp. et basse, resp. et haute), alors  $\gamma_{\mathcal{C}}(F)$  est un jeu continu sur  $X$  (resp. et convexe, resp. et concave).*

*Enfin,  $\alpha_{\mathcal{C}}$  et  $\gamma_{\mathcal{C}}$  définissent un isomorphisme d'ordre :*

- entre l'espace  $\mathbf{J}(X)$  des jeux continus et l'espace  $\mathbf{P}^*(X)$  des prévisions colinéaires continues ;
- entre l'espace  $\nabla \mathbf{J}(X)$  des jeux convexes continus et l'espace  $\nabla \mathbf{P}^*(X)$  des prévisions basses colinéaires continues ;
- entre l'espace  $\Delta \mathbf{J}(X)$  des jeux concaves continus et l'espace  $\Delta \mathbf{P}^*(X)$  des prévisions hautes colinéaires continues ;
- et entre l'espace  $\mathbf{V}(X)$  des valuations continues et l'espace  $\mathbf{P}^{\Delta}(X)$  des prévisions linéaires continues.

*Démonstration.* La première affirmation est par la proposition 4.2.1, ainsi que les faits 10.1.2 et 10.1.3. La seconde est évidente, puisque  $\sup_{i \in I} \chi_{U_i} = \chi_{\bigcup_{i \in I} U_i}$  pour toute famille d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $\alpha_{\mathcal{C}}(\gamma_{\mathcal{C}}(F))(f) = F(f)$  pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ .

En appliquant le lemme 10.1.5 aux fonctions étagées  $f_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , du lemme 4.1.6,

$$\int_{x \in X} f_K(x) d\gamma_{\mathcal{C}}(F) = F(f_K)$$

La borne supérieure du côté gauche est l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\gamma_{\mathcal{C}}(F)$ , c'est-à-dire  $\alpha_{\mathcal{C}}(\gamma_{\mathcal{C}}(F))(f)$ , alors que celle du côté droit est  $F(f)$  puisque  $F$  est continue.  $\square$

Le dernier point listé au théorème 10.1.8 est un corollaire du résultat précédent, reliant valuations continues aux fonctionnelles adéquates correspondantes. On peut trouver de tels résultats chez Jones (1990, théorème 6.2) ou chez Tix (1995, Satz 4.16). De façon explicite :

**Corollaire 10.1.9 (Riesz-Jones-Tix)** *Si  $\nu$  est une valuation continue sur  $X$ , alors  $\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$  est une prévision linéaire continue.*

*Si  $F$  est une prévision linéaire continue de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ , alors  $\gamma_{\mathcal{C}}(F)$  est une valuation continue sur  $X$ .*

*Finalemment,  $\alpha_{\mathcal{C}}$  et  $\gamma_{\mathcal{C}}$  définissent un isomorphisme d'ordre entre l'espace  $\mathbf{V}(X)$  des valuations continues et l'espace  $\mathbf{P}^{\Delta}(X)$  des prévisions linéaires continues.*

*Démonstration.* Les valuations continues sont exactement les jeux continus à la fois convexes et concaves, et les prévisions linéaires sont exactement celles qui sont positivement homogènes, et à la fois sur-additives et sous-additives.  $\square$

## 10.2 Prévisions dans le cas fini

Avant de progresser, il sera utile d'examiner le cas où  $X$  est un ensemble fini, muni de la topologie discrète. Dans ce cas, toute partie de  $X$  est ouverte, fermée, et compacte.

À bijection près, on peut identifier  $X$  à l'ensemble  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ . Toute fonction  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  est continue et bornée, et est entièrement décrite par les valeurs  $f(0), f(1), \dots, f(n)$ .

Concentrons-nous sur les fonctions  $g$  qui ne sont pas identiquement nulles. Toute prévision colinéaire  $F$  est entièrement déterminée par ses valeurs sur de telles fonctions, parce que  $F(0) = 0$  par homogénéité positive. En fait, quand  $X = [n]$ ,  $F$  est entièrement déterminée par ses valeurs sur les fonctions  $g$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et telles que  $g(0) + g(1) + \dots + g(n) = 1$ . En effet, si  $g$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et non partout nulle, posons  $\alpha = g(0) + g(1) + \dots + g(n)$ , alors  $F(g) = \alpha F(g/\alpha)$ .

De telles fonctions sont juste les points du *simplexe standard*  $\Delta_n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$ . (Voir la figure 3.4.)

Une prévision  $F$  définit alors une fonction de  $\Delta_n$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

Lorsque  $F$  est une prévision basse, comme  $F$  est sur-additive et positivement homogène,  $F$  est concave : pour tous réels  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  avec  $\alpha + \beta = 1$ , pour tous  $f, g \in \Delta_n$ ,  $F(\alpha f + \beta g) \geq \alpha F(f) + \beta F(g)$ . Par exemple, lorsque  $X = [2]$ , une prévision basse est une fonction concave de  $\Delta_2$  vers  $\mathbb{R}^+$ , comme illustrée en figure 10.1. La notation  $\nabla \mathbf{P}(X)$  qui dénote l'espace des prévisions basses continues sur  $X$  est censée rappeler cette forme.

De façon symétrique, toute prévision haute définit une fonction convexe de  $\Delta_n$  vers  $\mathbb{R}^+$ , d'où la notation  $\Delta \mathbf{P}(X)$ .

La condition de colinéarité est au premier abord plus obscure. Pour l'expliciter, considérons la *subdivision barycentrique*  $SD(\Delta_n)$  de  $\Delta_n$ . Intuitivement, ceci est obtenu en ajoutant un point au milieu de chaque segment, coupant chaque segment en deux, puis un au milieu de chaque triangle, coupant chaque triangle en six, etc. Ceci est illustré en figure 10.2 dans le cas  $n = 2$ .

Formellement, on indexe les sommets de  $SD(\Delta_n)$  par les parties non vides de  $[n]$ . Pour tout  $I \neq \emptyset$ ,  $I \subseteq [n]$ , le point  $\underline{I}$  est celui de coordonnées  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  avec  $t_i = 1/|I|$  si  $i \in I$ ,  $t_i = 0$  sinon.

De plus, les faces de dimension  $k$  peuvent être identifiées avec les chaînes croissantes  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k$  de parties non vides de  $[n]$ . Par exemple,  $\{1\} \subseteq \{0, 1\}$  définit un segment de  $SD(\Delta_2)$ , et  $\{0\} \subseteq \{0, 1\} \subseteq \{0, 1, 2\}$  définit un triangle de  $SD(\Delta_2)$ , voir la figure 10.2.

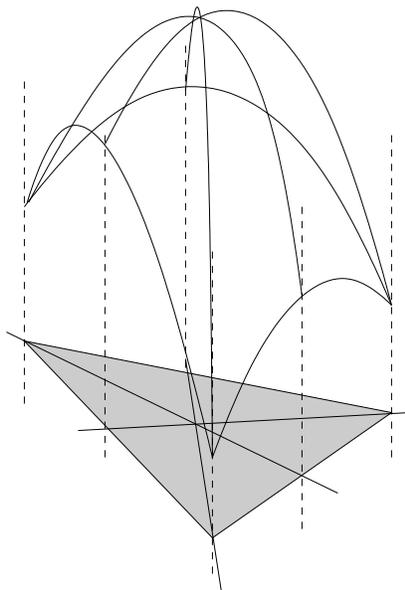


FIG. 10.1 – Une prévision basse sur  $X = [2]$

Parmi toutes les faces de  $SD(\Delta_n)$ , celles telles que  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_k$ , le signe  $\subset$  dénotant l'inclusion stricte, sont dites *non dégénérées*. Il est plus facile de comprendre la notion en réalisant qu'une face comme  $\{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$  est une face dégénérée de dimension 2, qui est matérialisée géométriquement sous forme d'un segment (autrement dit, c'est un triangle aplati, dont un côté est de longueur nulle).

Géométriquement, toute face  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k$  de  $SD(\Delta_n)$  s'interprète comme l'ensemble  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k$  des barycentres des points  $I_0, I_1, \dots, I_k$ . Un *barycentre* de  $x_0, x_1, \dots, x_k$  est par définition une combinaison linéaire  $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ , avec  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^+$  et  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ .

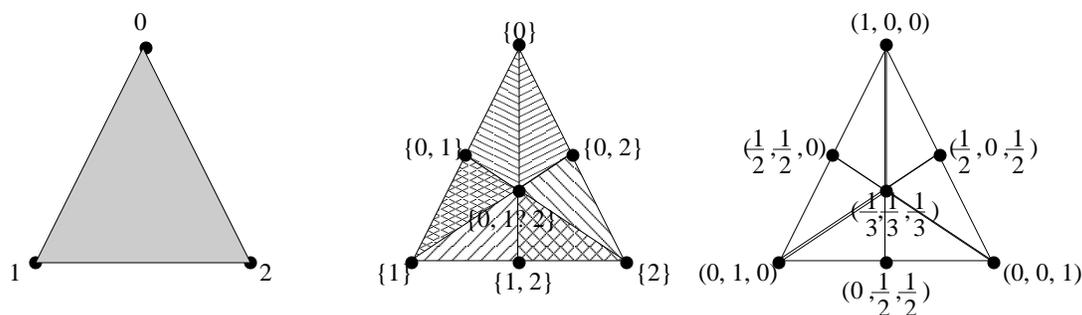


FIG. 10.2 – Subdivision barycentrique

**Lemme 10.2.1** Soit  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k$  une face de  $SD(\Delta_n)$ . Définissons le préordre  $\sqsubseteq$  sur  $[n]$  (“ $i$  est introduit avant  $i'$  dans l'énumération  $I_0, I_1, \dots, I_k$ ”) par  $i \sqsubseteq i'$  si et seulement si  $i$  appartient à tout  $I_j$  qui contient  $i'$ ,  $0 \leq j \leq k$ .

Alors  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k$  est l'ensemble des points  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  de  $\Delta_n$  dont les seules entrées  $t_i$  non nulles sont telles que  $i \in I_k$ , et tels que si  $i \sqsubseteq i'$  alors  $t_i \geq t_{i'}$  pour tous  $i, i'$ .

*Démonstration.* Soit  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  un point de  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k$ . Comme il s'agit d'un barycentre de  $I_0, I_1, \dots, I_k$ , il existe  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ , et

$$(t_0, t_1, \dots, t_n) = \sum_{\ell=0}^k \alpha_\ell I_\ell$$

Rappelons que  $I_\ell$  a pour seules coordonnées non nulles celles d'indices appartenant à  $I_\ell$ , et que ces coordonnées valent  $1/|I_\ell|$ . Donc

$$t_i = \sum_{\ell=\ell[i]}^k \alpha_\ell / |I_\ell| \tag{10.1}$$

où  $\ell[i]$  est le plus petit  $\ell$  tel que  $i \in I_\ell$  s'il en existe un, et  $k+1$  sinon (auquel cas la somme est nulle). En particulier, si  $t_i \neq 0$ , alors il existe  $\ell$  tel que  $i \in I_\ell$ , donc  $i \in I_k$ . Notons aussi que  $i \sqsubseteq i'$  si et seulement si  $\ell[i] \leq \ell[i']$ . En conséquence, si  $i \sqsubseteq i'$ ,  $t_i \geq t_{i'}$ .

Réciproquement, supposons que  $t_i = 0$  pour tout  $i \notin I_k$ , et que  $i \sqsubseteq i'$  implique  $t_i \geq t_{i'}$ . Tentons de résoudre l'ensemble des équations (10.1),  $0 \leq i \leq n$ . Notons que l'hypothèse signifie que  $\ell[i] \leq \ell[i']$  implique  $t_i \geq t_{i'}$ . En particulier, si  $\ell[i] = \ell[i']$  alors  $t_i = t_{i'}$ .

Trions les valeurs prises par les  $\ell[i]$  par ordre croissant :  $0 = \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_p$ . L'ensemble des  $i$  tels que  $\ell[i] = \ell_j$  est  $I_{\ell_j} \setminus I_{\ell_{j-1}}$  si  $j > 1$ ,  $I_0$  si  $j = 1$ . Pour chaque  $j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , soit  $t^j$  la valeur de  $t_i$  pour un  $i$  tel que  $\ell[i] = \ell_j$  :  $t^j$  ne dépend pas du  $i$  choisi tel que  $\ell[i] = \ell_j$ , car si  $\ell[i] = \ell[i']$  alors  $t_i = t_{i'}$ .

Posons  $\alpha_{\ell_p} = |I_{\ell_p}| \times t^p$ ,  $\alpha_{\ell_{p-1}} = |I_{\ell_{p-1}}| \times (t^{p-1} - t^p)$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_{\ell_1} = |I_{\ell_1}| \times (t^1 - t^2)$ , et soit  $\alpha_\ell = 0$  dans tous les autres cas. Montrons que tous les  $\alpha_\ell$  sont positifs ou nuls. Ceci revient à démontrer que pour tout  $j$ ,  $1 \leq j < p$ ,  $t^j \geq t^{j+1}$ . Soit  $i$  tel que  $\ell[i] = \ell_j$ , et  $i'$  tel que  $\ell[i'] = \ell_{j+1}$ . On a  $i' \in I_{\ell_{j+1}} \setminus I_{\ell_{j+1}-1}$ . Comme  $i \in I_{\ell_j}$ ,  $i \sqsubseteq i'$ , donc  $t_i \geq t_{i'}$ , autrement dit  $t^j \geq t^{j+1}$ . Donc  $t^1 \geq t^2 \geq \dots \geq t^p$ , donc tous les  $\alpha_\ell$  sont positifs ou nuls.

La somme des  $\alpha_\ell$  vaut

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell_1} + \alpha_{\ell_2} + \dots + \alpha_{\ell_p} &= |I_{\ell_1}| \times (t^1 - t^2) + \dots + |I_{\ell_{p-1}}| \times (t^{p-1} - t^p) + |I_{\ell_p}| \times t^p \\ &= |I_{\ell_1}| \times t^1 + (|I_{\ell_2}| - |I_{\ell_1}|) \times t^2 + \dots + (|I_{\ell_p}| - |I_{\ell_{p-1}}|) \times t^p \\ &= |I_{\ell_1}| \times t^1 + |I_{\ell_2} \setminus I_{\ell_1}| \times t^2 + \dots + |I_{\ell_p} \setminus I_{\ell_{p-1}}| \times t^p \end{aligned}$$

Mais  $|I_{\ell_1}| \times t^1$  est exactement la somme des  $t_i$  tels que  $i \in I_{\ell_1}$ ,  $|I_{\ell_2} \setminus I_{\ell_1}| \times t^2$  est la somme des  $t_i$  tels que  $i \in I_{\ell_2} \setminus I_{\ell_1}$ ,  $\dots$ , et  $|I_{\ell_p} \setminus I_{\ell_{p-1}}| \times t^p$  est la somme des  $t_i$  tels que  $i \in I_{\ell_p} \setminus I_{\ell_{p-1}}$ . Donc

$$\alpha_{\ell_1} + \alpha_{\ell_2} + \dots + \alpha_{\ell_p} = \sum_{i \in I_{\ell_p}} t_i = \sum_{i=0}^n t_i = 1$$

puisque  $i \in I_{\ell_p}$  si et seulement si  $i \in I_k$ , et que  $t_i = 0$  dès que  $i \notin I_k$ .

Il ne reste qu'à montrer que les  $\alpha_\ell$  sont une solution des équations (10.1). Au vu de la définition, ceci revient à démontrer que pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , pour tout  $i$  tel que  $\ell[i] = \ell_j$ , autrement dit pour tout  $i \in I_{\ell_j} \setminus I_{\ell_{j-1}}$  (si  $j > 1$ , sinon, pour tout  $i \in I_0$ ),

$$t_i = \alpha_{\ell_j}/|I_{\ell_j}| + \alpha_{\ell_{j+1}}/|I_{\ell_{j+1}}| + \dots + \alpha_{\ell_p}/|I_{\ell_p}|$$

Or  $t_i = t^j$ , et le côté droit vaut  $t^j$  également, comme on le vérifie par calcul.  $\square$

Cette démonstration est relativement opaque. Si on la spécialise aux faces non dégénérées de dimension maximale, qui sont toutes de la forme  $\{\sigma(0)\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1)\} \subset \dots \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$  pour une certaine permutation  $\sigma$  de  $[n]$ , alors le lemme 10.2.1 énonce que les points de cette face sont les  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  tels que  $t_{\sigma(0)} \geq t_{\sigma(1)} \geq \dots \geq t_{\sigma(n)}$ . Par exemple, les points de  $\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$  dans la figure 10.2 sont les  $(t_0, t_1, t_2)$  tels que  $t_0 \geq t_1 \geq t_2$ .

**Proposition 10.2.2** *Pour tous  $f, g \in \Delta_n$ ,  $f$  et  $g$  sont comonotones si et seulement s'il existe une face non dégénérée maximale  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$  de  $SD(\Delta_n)$  telle que  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$  contienne à la fois  $f$  et  $g$ .*

*Démonstration.* Si  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$  contient à la fois  $f$  et  $g$ , en posant  $I_k = \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$  pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , on a :

$$\begin{aligned} f(\sigma(0)) &\geq f(\sigma(1)) \geq \dots \geq f(\sigma(n)) \\ g(\sigma(0)) &\geq g(\sigma(1)) \geq \dots \geq g(\sigma(n)) \end{aligned}$$

et donc  $f$  et  $g$  sont comonotones, par le lemme 4.4.2.

Réciproquement, si  $f$  et  $g$  sont comonotones, considérons le préordre  $\preceq$  sur  $[n]$  définie par  $i \preceq j$  si et seulement si  $f(i) \geq f(j)$  et  $g(i) \geq g(j)$ . Montrons que  $\preceq$  est total, c'est-à-dire que pour tous  $i, j$ ,  $i \preceq j$  ou  $j \preceq i$ . Si ce n'était pas le cas, on aurait  $f(i) < f(j)$  ou  $g(i) < g(j)$ , et  $f(i) > f(j)$  ou  $g(i) > g(j)$ . Autrement dit, on aurait  $f(i) < f(j)$  et  $g(i) > g(j)$ , ou  $g(i) < g(j)$  et  $f(i) > f(j)$ , ce qui est impossible. Comme  $\preceq$  est total, on peut trier les indices de  $[n]$  en ordre croissant. En d'autres termes, il existe une permutation de  $\sigma$  de  $[n]$  telle que  $\sigma(0) \preceq \sigma(1) \preceq \dots \preceq \sigma(n)$ . Par définition de  $\preceq$ ,

$$\begin{aligned} f(\sigma(0)) &\geq f(\sigma(1)) \geq \dots \geq f(\sigma(n)) \\ g(\sigma(0)) &\geq g(\sigma(1)) \geq \dots \geq g(\sigma(n)) \end{aligned}$$

Donc  $f$  et  $g$  sont dans la face  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$ , où  $I_k = \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$  pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , par le lemme 10.2.1.  $\square$

Une fonctionnelle est donc colinéaire si et seulement si elle est linéaire sur toute face non dégénérée maximale de  $SD(\Delta_n)$  : voir la figure 10.3 pour une fonctionnelle linéaire concave (une prévision basse, correspondant à un jeu convexe). La notation  $\mathbf{P}^*(X)$  désignant l'espace des prévisions colinéaires continues est censée rappeler cette figure.

Pour comparaison, le corollaire 10.1.9 énonce que l'espace  $\mathbf{V}(X)$  des valuations continues sur  $X$  est isomorphe à celui des fonctionnelles continues linéaires positives sur  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  ; une

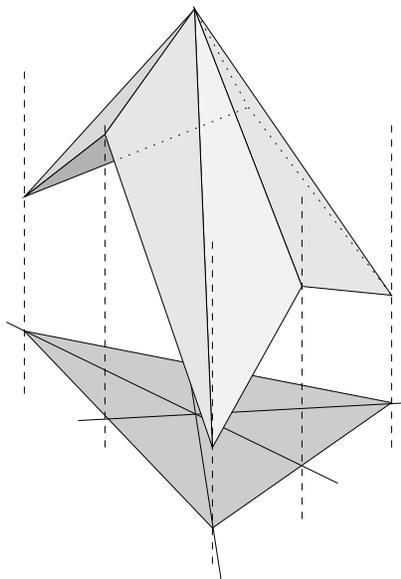


FIG. 10.3 – Une prévision basse colinéaire sur [2]

fonctionnelle linéaire serait linéaire sur tout  $\Delta_n$ , pas seulement sur chacune des faces maximales de  $SD(\Delta_n)$ .

Cette présentation géométrique des prévisions, en particulier des prévisions basses, nous permet de démontrer facilement deux théorèmes classiques de la théorie des jeux convexes, ceux de Shapley et de Rosenmuller. L'âme  $Core(\nu)$  d'une capacité  $\nu$  sur un espace fini  $X$  est (traditionnellement) l'ensemble de toutes les mesures  $p$  sur  $X$  telles que  $\nu \leq p$  et  $\nu(X) = p(X)$ . (Ici, nous demanderons que  $p$  soit une valuation continue, ce qui exactement identique sur un espace  $X$  fini.)

Le théorème de Shapley (Shapley, 1965, 1971) énonce que tout jeu convexe a une âme non vide. Autrement dit, partons d'un jeu convexe  $\nu$  sur  $X$ , on peut augmenter  $\nu(U)$  pour tout  $U \subseteq X$  de sorte à corriger le défaut de modularité de  $\nu$ , c'est-à-dire de sorte que  $\nu(U) + \nu(V)$  rattrape  $\nu(U \cup V) + \nu(U \cap V)$  — tout ceci sans changer le poids total  $\nu(X)$  de l'espace total  $X$ .

La démonstration en est simple ici. Soit  $\nu$  un jeu convexe sur  $X = [n]$ . Alors  $\alpha_c(\nu)$  est une prévision basse colinéaire (voir la figure 10.3 pour un exemple). Les valuations  $p$  sur  $X$  telles que  $\nu \leq p$  et  $\nu(X) = p(X)$  donnent donc lieu aux fonctionnelles linéaires  $\alpha_c(p)$  telles que  $\alpha_c(\nu) \leq \alpha_c(p)$ , et telles que  $\alpha_c(\nu)(O) = \alpha_c(p)(O)$ , où  $O = \underline{[n]} = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$  est le centre du simplexe  $\Delta_n$  : voir la figure 10.4.

Il est alors clair que l'âme de  $\nu$  est non vide. Il suffit de trouver n'importe quel plan passant par le sommet  $\alpha_c(\nu)(O)$  et au-dessus de  $\alpha_c\nu$ . Par exemple, choisir une face maximale de  $SD(\Delta_n)$  : la restriction de  $\alpha_c(\nu)$  définit un tel plan.

Le théorème de Rosenmuller (Rosenmuller, 1971, 1972) énonce plus précisément qu'un jeu  $\nu$  est convexe si et seulement si, d'une part, l'âme  $Core(\nu)$  de  $\nu$  est non vide, et d'autre part,

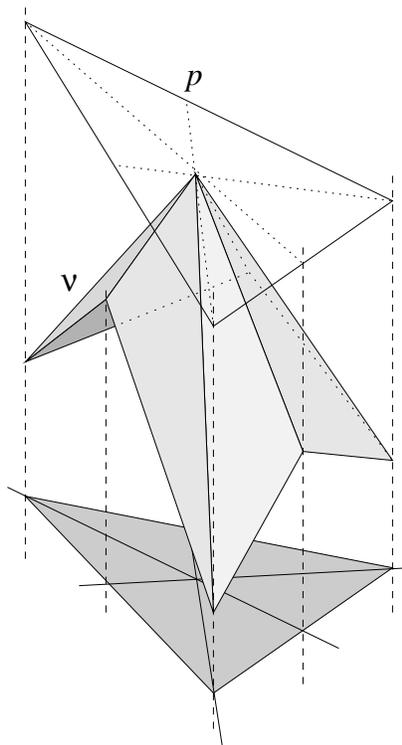


FIG. 10.4 – Une prévision basse colinéaire et un élément de son âme

pour toute fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \min_{p \in \text{Core}(\nu)} \int_{x \in X} f(x) dp$$

Dans le cadre des jeux stochastiques, on peut réexpliquer ce résultat comme suit. Reprenons le vocabulaire et les notations de l'introduction, et supposons que l'on soit à un état  $q$ , et que la préprobabilité d'aller ensuite dans l'ensemble d'états  $E$  soit  $P(q)(E)$ . Posons  $\nu = P(q)$ , et supposons pour simplifier que  $\nu(X) = 1$ . On peut voir  $\nu$  comme la spécification d'une loi de probabilité  $p$  inconnue dans  $\text{Core}(\nu)$ . (Il y en a au moins une par le théorème de Shapley.) Le théorème de Rosenmuller implique que, si  $f(x)$  évalue le gain que l'on peut espérer en allant à l'état  $x$ , la moyenne des gains obtenus en passant à l'état suivant en suivant la distribution décrite par  $\nu$ , telle que calculée par l'intégrale de Choquet, est le plus petit de tous les gains possibles, lorsque  $p$  parcourt  $\text{Core}(\nu)$ .

En d'autres termes, l'adversaire C choisit démoniaquement  $p \in \text{Core}(\nu)$ , puis le joueur P joue aléatoirement selon la probabilité  $p$ . L'adversaire C a, au passage, choisi  $p$  de sorte à minimiser l'espérance de gain de P.

Par exemple, si  $\nu = u_A$ , avec  $A \subseteq X$ ,  $\text{Core}(\nu)$  consiste en toutes les probabilités sur  $X$  concentrées sur  $A$  (c'est-à-dire donnant un poids nul aux éléments hors de  $A$ ). Supposons par exemple que  $A = \{1, 2, 3\}$ , et que la fonction de gain  $f$  soit décrite par  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 0.5$ ,  $f(3) = 1.2$ . Alors une probabilité  $p$  qui minimise le gain est donnée par  $p(2) = 1$ ,  $p(1) = p(3) =$

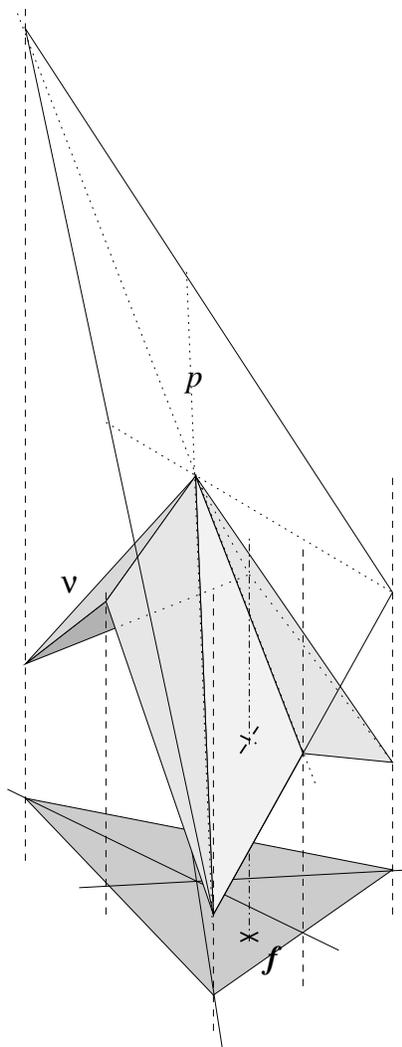


FIG. 10.5 – Le théorème de Rosenmuller

0, autrement dit  $p = \delta_2$ . Il est facile de voir que, dans le cas fini, et lorsque  $f$  est à valeurs positives ou nulles, l'une des probabilités qui minimise le gain est toujours de la forme  $\delta_x$ , où  $x$  minimise  $f(x)$ . On peut donc voir le théorème de Rosenmuller dans le cas  $\nu = u_A$  comme une façon de dire que C choisit en réalité un état  $x$  particulier de  $A$  qui minimise le gain  $f(x)$  ; C peut éventuellement laisser plus de liberté à P, et le laisser tirer au hasard parmi un ensemble plus grand d'états, du moment que le gain n'augmente pas.

Le théorème de Rosenmuller est lui aussi facile à démontrer géométriquement lorsque  $X$  est fini. Il énonce que  $\nu$  est convexe si et seulement si  $Core(\nu) \neq \emptyset$  et, pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $\alpha_c(\nu)(f) = \min_{p \in Core(\nu)} \alpha_c(p)(f)$ . Si  $\nu$  est convexe,  $Core(\nu) \neq \emptyset$  par le théorème de Shapley. Pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , c'est-à-dire pour tout point  $f \in \Delta_n$ ,  $f$  appartient à l'une des faces maximales de  $SD(\Delta_n)$ . Cette face définit, comme on l'a vu plus haut, un plan  $\alpha_c(p)$  et donc une probabilité  $p$ . Celle-ci réalise clairement  $\alpha_c(\nu)(f) = \min_{p \in Core(\nu)} \alpha_c(p)(f)$ . Voir la figure 10.5.

La réciproque, que si  $\nu$  est un jeu tel que  $Core(\nu) \neq \emptyset$  et  $\alpha_c(\nu)(f) = \min_{p \in Core(\nu)} \alpha_c(p)(f)$ , alors  $\nu$  est convexe, est évidente. Les hypothèses impliquent en effet que  $\alpha_c(\nu)$  a la forme d'une intersection de demi-espaces dont le plan frontière passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée  $\nu(X)$ , ce qui fait de  $\alpha_c(\nu)$  une prévision basse colinéaire, donc de  $\nu$  un jeu convexe.

### 10.3 Drapeaux ouverts, théorèmes de Shapley et de Rosenmuller

On a vu qu'une face de  $SD(\Delta_n)$  était une famille totalement ordonnée de sous-ensembles non vides de  $[n]$ . Dans le cas continu, définissons :

**Définition 10.3.1 (Drapeau ouvert)** Soit  $X$  un espace topologique. Un drapeau ouvert sur  $X$  est une famille d'ouverts non triviaux de  $X$  totalement ordonnée par inclusion. Un ouvert  $U$  est non trivial si et seulement si  $U \neq \emptyset$  et  $U \neq X$ .

Le nom est par analogie avec la notion de drapeau, utilisée dans la théorie des immeubles de Tits : un drapeau sur un espace vectoriel est une famille de sous-espaces vectoriels non réduits à 0 et différents de l'espace vectoriel tout entier, totalement ordonnés par inclusion.

Comme il n'y aura pas d'ambiguïté, nous dirons en général drapeau plutôt que drapeau ouvert.

**Lemme 10.3.2** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Le drapeau de  $f$ ,  $\text{drap}(f)$ , est l'ensemble des ouverts non triviaux de la forme  $f^{-1}]t, +\infty[$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Alors  $\text{drap}(f)$  est un drapeau ouvert sur  $X$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\text{drap}(f)$  est totalement ordonné par inclusion. Mais c'est évident, car  $t \leq t'$  implique  $f^{-1}]t', +\infty[ \subseteq f^{-1}]t, +\infty[$ .  $\square$

Par exemple, la fonction étagée de la figure 4.1 a le drapeau  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq U_4$ , où les  $U_i$  sont représentés en figure 10.6. On peut remarquer que ce drapeau est fini. En fait,

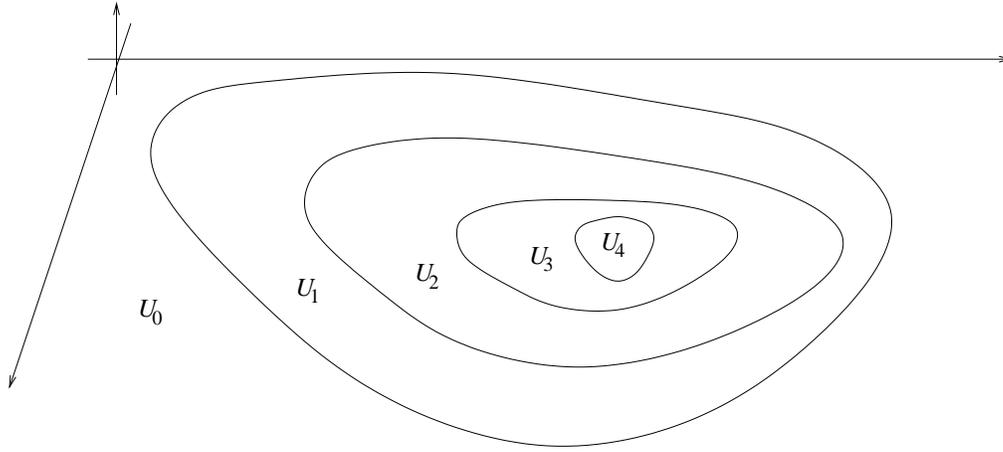


FIG. 10.6 – Un drapeau ouvert

**Lemme 10.3.3** *La fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est étagée si et seulement si son drapeau est fini. De plus,*

- si  $f = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ , où  $X = U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_n \neq \emptyset$  est une suite strictement décroissante d'ouverts, et  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , alors  $\text{drap}(f) = \{U_1, \dots, U_n\}$ .
- si  $f = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ , où  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  est une suite décroissante d'ouverts, et  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , alors  $\text{drap}(f) \subseteq \{U_1, \dots, U_n\}$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est étagée, disons  $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ , où  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  est une suite décroissante d'ouverts, et  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , alors on peut supposer sans perte de généralité que  $U_n \neq \emptyset$ , que les inclusions de  $U_{i+1}$  dans  $U_i$  sont strictes, et que  $a_1 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$ . Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $f^{-1}]a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1}, +\infty[ = U_i$ . Comme  $U_i \supseteq U_n \neq \emptyset$ ,  $U_i$  est non vide. Puisque  $i \geq 1$ ,  $X = U_0 \supset U_i$ , donc  $U_i \neq X$ . Donc  $U_i \in \text{drap}(f)$ . Réciproquement, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , si  $t < a_0$ , alors  $f^{-1}]t, +\infty[ = X$ ; si  $t \geq a_0 + a_1 + \dots + a_n$ , alors  $f^{-1}]t, +\infty[ = \emptyset$ ; sinon, soit  $i$  l'unique entier tel que  $t \in [a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1}, a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_i[$  (car  $a_i \neq 0$ ), alors  $f^{-1}]t, +\infty[ = U_i$ , donc tout ouvert du drapeau de  $f$  est parmi  $U_1, \dots, U_n$ . Donc  $\text{drap}(f) = \{U_1, \dots, U_n\}$ .

Réciproquement, supposons que  $\text{drap}(f)$  soit fini, et écrivons-le  $\{U_1, \dots, U_n\}$ , avec  $U_1 \supset \dots \supset U_n$ . (L'inclusion  $\supset$  est stricte.) Posons  $a_0 = \inf_{x \in X} f(x)$ . Construisons ensuite  $a_i$  par récurrence sur  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  : comme  $U_i \in \text{drap}(f)$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $U_i = f^{-1}]t, +\infty[$ , soit  $a_i = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid U_i \subseteq f^{-1}]t, +\infty[\} - a_{i-1}$ . On a donc

$$\sup\{t \in \mathbb{R} \mid U_i \subseteq f^{-1}]t, +\infty[\} = a_0 + a_1 + \dots + a_i \quad (10.2)$$

Par extension, posons  $U_0 = X$  et  $U_{n+1} = \emptyset$ . Pour tout  $x \in X$ , il existe un unique  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , tel que  $x \in U_i \setminus U_{i+1}$ . Soit  $t_0 = f(x)$ .

Comme  $x \notin f^{-1}]t_0, +\infty[$ ,  $f^{-1}]t_0, +\infty[$  est un  $U_j$  avec  $j \geq i + 1$ . Tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $U_i \subseteq f^{-1}]t, +\infty[$  est donc inférieur à  $t_0$  : en effet, sinon,  $t \geq t_0$ , donc  $f^{-1}]t, +\infty[ \subseteq f^{-1}]t_0, +\infty[ = U_j$ , ce qui impliquerait  $U_i \subseteq U_j$ . Par (10.2),  $a_0 + a_1 + \dots + a_i \leq t_0$ .

D'autre part, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $x \in f^{-1}]t_0 - \epsilon, +\infty[$ . Donc  $f^{-1}]t_0 - \epsilon, +\infty[$  est un ouvert  $U_j$  avec  $j \leq i$ , donc tel que  $U_i \subseteq U_j$ . En d'autres termes,  $U_i \subseteq f^{-1}]t_0 - \epsilon, +\infty[$ , donc  $t_0 - \epsilon \leq a_0 + a_1 + \dots + a_i$ , par (10.2). Comme  $\epsilon > 0$  est arbitraire,  $t_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_i$ .

En résumé, si  $x \in U_i \setminus U_{i+1}$ , alors  $f(x) = a_0 + a_1 + \dots + a_i$ . C'est-à-dire  $f = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ , et  $f$  est donc bien étagée.  $\square$

En général, le drapeau de  $f$  sera donc infini. Les fonctions étagées qui approximent  $f$ , comme  $f_K$  (lemme 4.1.6), ont des drapeaux finis, que l'on peut assimiler à des faces de dimension finie d'une subdivision simpliciale, comme en section 10.2. Mais les drapeaux de fonctions générales seront des faces, en quelque sorte, de dimension infinie.

En dimension finie, le lemme 10.2.1 énonce que la face  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k$  de  $SD(\Delta_n)$  est celle qui contient les fonctions dont le drapeau est inclus dans  $\{I_0, I_1, \dots, I_k\}$ . La proposition 10.2.2 énonce que deux fonctions sont comonotones si et seulement si leurs drapeaux sont compatibles, au sens suivant.

**Définition 10.3.4** *Un drapeau  $d$  raffine un drapeau  $d'$  si et seulement  $d \supseteq d'$ . Deux drapeaux  $d$  et  $d'$  sont compatibles si et seulement s'il existe un drapeau raffinant à la fois  $d$  et  $d'$ , autrement dit si et seulement si  $d \cup d'$  est totalement ordonné, si et seulement si  $d \cup d'$  est un drapeau.*

Dans le cas fini, lorsque deux drapeaux (faces de  $SD(\Delta_n)$ ) sont compatibles, il existe une face de dimension maximale qui les contient. Ce ne sera plus le cas dans le cas général. La proposition 10.2.2 se généralise en le résultat suivant.

**Proposition 10.3.5** *Soit  $f$  et  $f'$  deux fonctions continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  :  $f$  et  $f'$  sont comonotones si et seulement si  $\text{drap}(f)$  et  $\text{drap}(f')$  sont compatibles.*

*Démonstration.* Supposons que  $f$  et  $f'$  soient comonotones, et montrons que  $\text{drap}(f)$  et  $\text{drap}(f')$  sont compatibles. Il suffit de montrer que, pour tous  $t, t' \in \mathbb{R}$ , en posant  $U = f^{-1}]t, +\infty[$  et  $U' = f'^{-1}]t', +\infty[$ , l'un des deux ouverts  $U, U'$  est inclus dans l'autre. Si ce n'était pas le cas, il existerait un point  $x \in U \setminus U'$  et un point  $x' \in U' \setminus U$ . Comme  $x \in U \setminus U'$ ,  $f(x) > t$  et  $f'(x) \leq t'$ . Comme  $x' \in U' \setminus U$ ,  $f(x') \leq t$  et  $f'(x') > t'$ . Donc  $f(x) > f'(x')$  et  $f'(x) < f'(x')$ , ce qui contredit le fait que  $f$  et  $f'$  sont comonotones.

Réciproquement, supposons que  $f$  et  $f'$  ne soient pas comonotones, il existerait  $x, x' \in X$  tels que  $f(x) < f(x')$  et  $f'(x) > f'(x')$ . Soit  $t = f(x)$ , et  $U = f^{-1}]t, +\infty[$ , alors  $x' \in U$  et  $x \notin U$ . Soit  $t' = f'(x')$ , et  $U' = f'^{-1}]t', +\infty[$ , alors  $x \in U'$  et  $x' \notin U'$ . Comme  $x \in U'$  et  $x \notin U$ ,  $U' \not\subseteq U$ . Comme  $x' \in U$  et  $x' \notin U'$ ,  $U \not\subseteq U'$ . Comme  $U \in \text{drap}(f)$  et  $U' \in \text{drap}(f')$ ,  $\text{drap}(f)$  et  $\text{drap}(f')$  ne sont pas compatibles.  $\square$

On rappelle qu'une famille  $(f_i)_{i=1}^n$  est globalement comonotone si et seulement si elle est comonotone deux à deux, par la proposition 4.4.5. Par la proposition 10.3.5, ceci est équivalent au fait que  $\text{drap}(f_i)$  et  $\text{drap}(f_j)$  sont compatibles pour tous  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Il est facile de voir que ceci est équivalent au fait que  $\bigcup_{i=1}^n \text{drap}(f_i)$  est totalement ordonné.

Rappelons que toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est la borne supérieure d'une famille  $(f_K)_{K \in \mathbb{N}}$  de fonctions étagées, définie au lemme 4.1.6.

**Lemme 10.3.6** Pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{drap}(f_0) \subseteq \text{drap}(f_1) \subseteq \dots \subseteq \text{drap}(f_K) \subseteq \dots \subseteq \text{drap}(f)$$

*Démonstration.* Par définition,  $\text{drap}(f_K)$  est composé des ouverts non triviaux parmi les  $f^{-1}]a + \frac{k}{2^K}, +\infty[$ ,  $1 \leq k \leq \lfloor (b-a)2^K \rfloor$ , où  $a = \inf_{x \in X} f(x)$  et  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ . L'affirmation en est une conséquence évidente.  $\square$

Notons qu'on n'a pas en général  $\text{drap}(f) = \bigcup_{K \in \mathbb{N}} \text{drap}(f_K)$ , loin de là : l'union des  $\text{drap}(f_K)$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , ne contient que des ouverts de la forme  $f^{-1}(I)$  où  $I$  est un intervalle ouvert dont la borne inférieure a un dénominateur qui est une puissance de 2.

**Définition 10.3.7 (Âme)** Soit  $X$  un espace topologique. L'âme  $\text{Core}(\nu)$  d'une capacité  $\nu$  sur  $X$  est l'ensemble de toutes les valuations  $p$  sur  $X$  telles que  $\nu \leq p$  et  $\nu(X) = p(X)$ .

L'âme continue  $\text{CCore}(\nu)$  en est le sous-ensemble réduit aux valuations  $p$  qui sont continues.

Une façon de démontrer les théorèmes de Shapley et de Rosenmuller, dans le cas topologique, démarre comme suit. Nous en présenterons une autre, plus générale, à la section 11.7.

**Lemme 10.3.8** Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $d$  un drapeau fini  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ . Posons  $U_0 = X$ , et

$$\Delta F_d(g) = \inf_{(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right)$$

Alors  $\Delta F_d$  est une prévision,  $\Delta F_d \geq F$ , et  $\Delta F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Si  $F$  est colinéaire ou sous-additive,  $\Delta F_d$  est sous-linéaire.

De plus, si  $d \subseteq d'$ , alors  $\Delta F_{d'} \leq \Delta F_d$ .

*Démonstration.* Notons que  $\Delta F_d$  est bien définie. En effet, la famille des  $(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1}$  tels que  $g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}$  est non vide, car contenant par exemple toute famille  $(a_i)_{i=0}^m$  telle que  $a_0 \geq \sup_{x \in X} g(x)$ .

Montrons que  $\Delta F_d$  est positivement homogène. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , alors soit  $\alpha = 0$  et  $\Delta F_d(\alpha g) = \Delta F_d(0) = 0 = \alpha \Delta F_d(g)$ , soit  $\alpha > 0$  et alors

$$\begin{aligned} \Delta F_d(\alpha g) &= \inf_{(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / \alpha g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) \\ &= \inf_{(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g \leq \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{\alpha} \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) \\ &= \inf_{(a'_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g \leq \sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m \alpha a'_i \chi_{U_i}\right) \\ &= \inf_{(a'_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g \leq \sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}} \alpha F\left(\sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}\right) = \alpha \Delta F_d(g) \end{aligned}$$

puisque  $F$ , en tant que prévision, est positivement homogène.

$\Delta F_d$  est croissante, car si  $g \leq g'$  et  $g' \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}$  alors  $g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}$ . Donc  $\Delta F_d$  est une prévision.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Delta F_d(g) &= \inf_{(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) \\ &\geq \inf_{(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}} F(g) \quad \text{car } F \text{ est croissante} \\ &= F(g) \end{aligned}$$

Donc  $\Delta F_d \geq F$ .

Ensuite,  $\Delta F_d(\chi_X) \leq F(\chi_X)$ , en choisissant  $m = 0$ ,  $a_0 = 1$  et  $U_0 = X$  dans la définition de  $\Delta F_d$ . Comme  $\Delta F_d \geq F$ ,  $\Delta F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ .

Lorsque  $F$  est une prévision colinéaire ou sous-additive,  $\Delta F_d$  est sous-additive :

$$\begin{aligned} \Delta F_d(g) + \Delta F_d(g') &= \inf_{(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) \\ &\quad + \inf_{(a'_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g' \leq \sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}\right) \\ &= \inf_{\substack{(a_i)_{i=0}^m, (a'_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} \\ g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i} \\ g' \leq \sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}}} \left( F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) + F\left(\sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}\right) \right) \end{aligned}$$

Si  $F$  est colinéaire, alors, par le lemme 10.3.3 et la proposition 10.3.5,  $\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}$  et  $\sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}$  sont comonotones, donc  $F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) + F\left(\sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}\right) = F\left(\sum_{i=0}^m (a_i + a'_i) \chi_{U_i}\right)$ . Si  $F$  est sous-additive,  $F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right) + F\left(\sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}\right) \geq F\left(\sum_{i=0}^m (a_i + a'_i) \chi_{U_i}\right)$ . Donc

$$\begin{aligned} \Delta F_d(g) + \Delta F_d(g') &\geq \inf_{\substack{(a_i)_{i=0}^m, (a'_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} \\ g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i} \\ g' \leq \sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}}} F\left(\sum_{i=0}^m (a_i + a'_i) \chi_{U_i}\right) \\ &\geq \inf_{(a''_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{+m+1} / g+g' \leq \sum_{i=0}^m a''_i \chi_{U_i}} F\left(\sum_{i=0}^m a''_i \chi_{U_i}\right) = \Delta F_d(g+g') \end{aligned}$$

puisque si  $g \leq \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}$  et  $g' \leq \sum_{i=0}^m a'_i \chi_{U_i}$  alors  $g+g' \leq \sum_{i=0}^m (a_i + a'_i) \chi_{U_i}$ .

Finalement, grâce au lemme 10.3.3, on peut reformuler la définition de  $\Delta F_d$  en

$$\Delta F_d(g) = \inf_{\substack{g' \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \text{drap}(g') \subseteq d, g' \geq g}} F(g')$$

Si  $d \subseteq d'$ , alors  $\Delta F_{d'}$  est une borne inférieure prise sur une famille plus grande de fonctions  $g'$ , donc  $\Delta F_d(g) \geq \Delta F_{d'}(g)$ .  $\square$

**Lemme 10.3.9** Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $d$  un drapeau ouvert quelconque. Étendons la définition du lemme 10.3.8 par :

$$\bigtriangleup F_d(g) = \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \bigtriangleup F_{d_0}(g)$$

Alors  $\bigtriangleup F_d$  est une prévision,  $\bigtriangleup F_d \geq F$ , et  $\bigtriangleup F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Si  $F$  est colinéaire ou sous-additive,  $\bigtriangleup F_d$  est sous-linéaire.

De plus, si  $d \subseteq d'$ , alors  $\bigtriangleup F_{d'} \leq \bigtriangleup F_d$ .

*Démonstration.* D'abord, ceci est bien une extension de la définition du lemme 10.3.8 : si  $d$  est un drapeau fini,

$$\inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \bigtriangleup F_{d_0}(g) = \bigtriangleup F_d(g)$$

puisque  $d_0 \subseteq d$  implique  $\bigtriangleup F_{d_0} \geq \bigtriangleup F_d$  par le dernier point du lemme 10.3.8.

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} \bigtriangleup F_d(\alpha g) &= \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \bigtriangleup F_{d_0}(\alpha g) = \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \alpha \bigtriangleup F_{d_0}(g) \quad \text{par le lemme 10.3.8} \\ &= \alpha \bigtriangleup F_d(g) \end{aligned}$$

Si  $g \leq g'$ ,

$$\begin{aligned} \bigtriangleup F_d(g) &= \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \bigtriangleup F_{d_0}(g) \\ &\leq \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \bigtriangleup F_{d_0}(g') = \bigtriangleup F_d(g') \end{aligned}$$

Donc  $\bigtriangleup F_d$  est croissante. De plus,  $\bigtriangleup F_d(\chi_X)$  est la borne inférieure d'une famille identiquement égale à  $F(\chi_X)$ , donc  $\bigtriangleup F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ .

Comme  $\bigtriangleup F_{d_0} \geq F$  pour tout drapeau fini  $d_0$  par le lemme 10.3.8, on a aussi  $\bigtriangleup F_d \geq F$ .

On remarque ensuite que la famille des drapeaux finis  $d_0$  inclus dans  $d$  est dirigée. Si  $F$  est colinéaire ou sous-additive, on a donc

$$\begin{aligned} \bigtriangleup F_d(g) + \bigtriangleup F_d(g') &= \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \bigtriangleup F_{d_0}(g) + \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \bigtriangleup F_{d_0}(g') \\ &= \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} (F_{d_0}(g) + F_{d_0}(g')) \\ &\geq \inf_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} F_{d_0}(g + g') = F_d(g + g') \end{aligned}$$

par le lemme 10.3.8. Donc  $\bigtriangleup F_d$  est sous-linéaire.

Finalement, lorsque  $d \subseteq d'$ , la famille des drapeaux finis inclus dans  $d$  est incluse dans celle des drapeaux finis inclus dans  $d'$ , donc  $\bigtriangleup F_d \geq \bigtriangleup F_{d'}$ .  $\square$

**Lemme 10.3.10** Soit  $F$  une prévision colinéaire ou sous-additive sur  $X$ ,  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et  $d = \text{drap}(f)$ . Alors  $\Delta F_d(f) = F(f)$ .

*Démonstration.* On commence par une construction similaire à celle du lemme 4.1.6. Cette fois, nous approchons  $f$  par le haut. Soit  $a = \inf_{x \in X} f(x)$ ,  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ . Pour tout  $c > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , soit

$$f^{\epsilon,c}(x) = a + \epsilon \sum_{k=1}^{\lfloor c/\epsilon \rfloor} \chi_{f^{-1}[a+(k-1)\epsilon, +\infty[}(x)$$

Clairement,  $f^{\epsilon,c}$  est étagée.

Pour tout  $x \in X$ , soit  $j = \lceil (f(x) - a)/\epsilon \rceil$ . Alors  $\chi_{f^{-1}[a+(k-1)\epsilon, +\infty[}(x) = 1$  si et seulement si  $f(x) > a + (k-1)\epsilon$ , si et seulement si  $j \geq k$ . Donc  $f^{\epsilon,c}(x) = a + \epsilon \min(\lfloor c/\epsilon \rfloor, j)$ . Remarquons que  $j \leq (b-a)/\epsilon + 1$ . Lorsque  $c \geq b-a + \epsilon$ , on a donc  $c \geq \epsilon j$ , donc  $f^{\epsilon,c}(x) = a + \epsilon j$ . En particulier, par définition de  $j$ ,  $f(x) \leq f^{\epsilon,c}(x) \leq f(x) + \epsilon$ .

Soit  $d_\epsilon = \text{drap}(f^{\epsilon,c})$ . Par le lemme 10.3.3,  $d_\epsilon$  est un drapeau fini. Par définition, puisque  $f \leq f^{\epsilon,c}$ ,  $\Delta F_{d_\epsilon}(f) \leq F(f^{\epsilon,c})$ . Comme  $F$  est croissante et  $f^{\epsilon,c} \leq f + \epsilon \chi_X$ ,  $F(f^{\epsilon,c}) \leq F(f + \epsilon \chi_X)$ . Si  $F$  est sous-additive, alors  $F(f + \epsilon \chi_X) \leq F(f) + \epsilon F(\chi_X)$ . Si  $F$  est colinéaire, alors  $F(f + \epsilon \chi_X) = F(f) + \epsilon F(\chi_X)$  puisque  $f$  et  $\epsilon \chi_X$  sont comonotones. Dans tous les cas,  $\Delta F_{d_\epsilon}(f) \leq F(f^{\epsilon,c}) \leq F(f) + \epsilon F(\chi_X)$ . En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on en déduit que  $\Delta F_d(f) \leq F(f)$ . Comme d'autre part  $\Delta F_d \geq F$  par le lemme 10.3.9, on en déduit  $\Delta F_d(f) = F(f)$ .  $\square$

On en déduit le théorème 10.3.11 ci-dessous, qui est essentiellement une reformulation du théorème de Shapley dans le monde des fonctionnelles. Notons ici que la notion topologique importante est celle d'espace topologique stablement localement relativement compact, voir la définition 3.6.18.

Tout espace stablement localement compact est stablement localement relativement compact. En fait, tout espace localement compact est localement relativement compact (lemme 3.4.11). Nous avons aussi vu, juste après la définition 3.6.17 que tout espace cohérent et localement compact était relativement cohérent.

**Théorème 10.3.11** Soit  $X$  un espace topologique,  $F$  une prévision basse colinéaire, et  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une prévision linéaire  $G$  telle que  $F \leq G$  et  $F(f) = G(f)$ . De plus,  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$ .

Si de plus  $X$  est stablement localement relativement compact, et si  $F$  est continue, alors on peut demander que  $G$  soit continue.

*Démonstration.* Soit  $C = \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . Muni de l'addition, de la multiplication scalaire usuels et de l'ordre point à point,  $C$  est un cône ordonné. Soit  $d = \text{drap}(f)$ . Par le lemme 10.3.9,  $\Delta F_d$  est une fonction sous-linéaire de  $C$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $\Delta F_d$  est croissante, et  $\Delta F_d \geq F$ . D'autre part,  $F$  est par définition une fonction sur-linéaire de  $C$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, il existe une fonction linéaire croissante  $G$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}^+}$  telle que  $F \leq G \leq \Delta F_d$ . Comme  $G \leq \Delta F_d$ ,  $G$  est en fait à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , c'est donc une prévision linéaire. De plus,

$F(\chi_X) \leq G(\chi_X) \leq \Delta F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ , donc  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Enfin  $F(f) \leq G(f) \leq \Delta F_d(f) = F(f)$  par le lemme 10.3.10, donc  $G(f) = F(f)$ .

Supposons maintenant que  $X$  soit stablement localement relativement compact. Supposons aussi  $F$  continue. Par le paragraphe ci-dessus, il existe une prévision linéaire  $G_0$  telle que  $F \leq G_0$ ,  $F(f) = G_0(f)$ , et  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Posons  $\nu_0 = \gamma_e(G_0)$ ,  $\nu_0$  est une valuation sur  $X$  par le lemme 10.1.4. Par le lemme 4.5.8,  $\nu = \tau(\nu_0)$  est un jeu continu sur  $X$ . Comme  $X$  est stablement localement relativement compact, par le lemme 4.5.9,  $\nu$  est une valuation continue sur  $X$ . Posons  $G = \alpha_e(\nu)$ . Par le corollaire 10.1.9,  $G$  est une prévision linéaire continue.

Rappelons que  $F \leq G_0$ , donc  $\gamma_e(F) \leq \gamma_e(G_0) = \nu_0$ . Comme  $F$  est une prévision basse colinéaire continue,  $\gamma_e(F)$  est un jeu convexe continu par le théorème 10.1.8, donc  $\gamma_e(F) \leq \nu$ , puisque  $\nu$  est le plus grand jeu continu inférieur ou égal à  $\nu_0$  par le lemme 4.5.8. Comme  $\gamma_e$  a pour inverse  $\alpha_e$ , on en déduit  $F \leq \alpha_e(\nu)$ , c'est-à-dire  $F \leq G$ .

Comme  $\nu \leq \nu_0$ ,  $G \leq G_0$ , donc  $G(\chi_X) \leq G_0(\chi_X) \leq F(\chi_X)$ . Comme  $F \leq G$ ,  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$ . On a aussi  $G(f) \leq G_0(f) = F(f)$ . Et comme  $F \leq G$ ,  $F(f) \leq G(f)$ . Donc  $F(f) = G(f)$ .  $\square$

**Corollaire 10.3.12 (Shapley)** *Soit  $X$  un espace topologique,  $\nu$  un jeu convexe sur  $X$ . Alors  $Core(\nu) \neq \emptyset$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , il existe une valuation  $p$  sur  $X$  telle que  $\nu \leq p$ ,  $p(X) = \nu(X)$ , et*

$$\int_{x \in X} f(x) dp = \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

*Si de plus  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $\nu$  est un jeu convexe continu, alors  $CCore(\nu) \neq \emptyset$ ; pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , il existe une valuation continue  $p$  sur  $X$  telle que  $\nu \leq p$ ,  $p(X) = \nu(X)$ , et*

$$\int_{x \in X} f(x) dp = \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

*Démonstration.* Par la proposition 10.1.7,  $\alpha_e(\nu)$  est une prévision basse colinéaire. Par le théorème 10.3.11, il existe une prévision linéaire  $G$  telle que  $\alpha_e(\nu) \leq G$  et  $\alpha_e(\nu)(f) = G(f)$ . De plus,  $G(\chi_X) = \alpha_e(\nu)(\chi_X) = \nu(X)$ . Comme  $\alpha_e \dashv \gamma_e$ ,  $\alpha_e(\nu) \leq G$  implique  $\nu \leq \gamma_e(G)$ . Posons  $p = \gamma_e(G)$ . On a donc  $\nu \leq p$ .

Comme  $G(\chi_X) = \nu(X)$ , en particulier  $p(X) = \gamma_e(G)(X) = G(\chi_X) = \nu(X)$ .

Par la proposition 10.1.7,  $\alpha_e(\gamma_e(G)) \leq G$ . Comme  $\alpha_e(\nu)(f) = G(f)$ , on a donc  $\alpha_e(\nu)(f) \geq \alpha_e(\gamma_e(G))(f)$ , c'est-à-dire  $\alpha_e(\nu)(f) \geq \alpha_e(p)(f)$ , autrement dit

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu \geq \int_{x \in X} f(x) dp$$

Comme  $\nu \leq p$ , et  $\nu(X) = p(X)$ , on a aussi l'inégalité inverse par le proposition 4.2.3.

Le cas où  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $\nu$  est continu, se traite en invoquant le fait 10.1.2 pour affirmer que  $\alpha_e(\nu)$  est continue. Le théorème 10.3.11 nous permet alors de supposer que  $G$  est continue. Par le théorème 10.1.8,  $p = \gamma_e(G)$  est alors une valuation continue.  $\square$

**Corollaire 10.3.13 (Rosenmuller)** Soit  $X$  un espace topologique, et  $\nu$  un jeu sur  $X$ . Alors  $\nu$  est convexe si et seulement si, d'une part, l'âme  $Core(\nu)$  de  $\nu$  est non vide, et d'autre part, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \inf_{p \in Core(\nu)} \int_{x \in X} f(x) dp$$

De plus, la borne inférieure est atteinte.

Si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $\nu$  est un jeu continu sur  $X$ , alors  $\nu$  est convexe si et seulement si, d'une part, l'âme continue  $CCore(\nu)$  de  $\nu$  est non vide, et d'autre part, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \inf_{p \in CCore(\nu)} \int_{x \in X} f(x) dp$$

De plus, la borne inférieure est atteinte.

*Démonstration.* Si  $\nu$  est convexe, par le corollaire 10.3.12,  $Core(\nu)$  est non vide. Comme

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu \leq \int_{x \in X} f(x) dp$$

pour tout  $p \in Core(\nu)$ , par la proposition 4.2.3, et qu'il existe  $p \in Core(\nu)$  permettant d'obtenir l'égalité, par le corollaire 10.3.12, on a

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \min_{p \in Core(\nu)} \int_{x \in X} f(x) dp$$

Réciproquement, supposons  $Core(\nu) \neq \emptyset$  et

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \inf_{p \in Core(\nu)} \int_{x \in X} f(x) dp$$

pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $\alpha_c(\nu)$  est la borne inférieure des  $\alpha_c(p)$ ,  $p \in Core(\nu)$ , par l'isomorphisme d'ordre donné au théorème 10.1.8. Montrons que  $\alpha_c(\nu)$  est une prévision basse colinéaire. Comme  $\nu$  est un jeu,  $\alpha_c(\nu)$  est une prévision colinéaire par la proposition 10.1.7. Il ne reste donc qu'à montrer que  $\alpha_c(\nu)$  est sur-additive. Or

$$\begin{aligned} \alpha_c(\nu)(f + g) &= \inf_{p \in Core(\nu)} \alpha_c(p)(f + g) = \inf_{p \in Core(\nu)} (\alpha_c(p)(f) + \alpha_c(p)(g)) \\ &\geq \inf_{p \in Core(\nu)} \alpha_c(p)(f) + \inf_{p \in Core(\nu)} \alpha_c(p)(g) = \alpha_c(\nu)(f) + \alpha_c(\nu)(g) \end{aligned}$$

Par la proposition 10.1.7,  $\nu = \gamma_c(\alpha_c(\nu))$  est donc un jeu convexe.

La deuxième partie du corollaire, dans le cas où  $X$  est stablement localement relativement compact et  $\nu$  est un jeu continu, se démontre de façon similaire.  $\square$

L'âme d'un jeu convexe a quelques propriétés remarquables supplémentaires. Sa compacité, notamment, qui sera établie par des méthodes similaires à celles de la section 4.5. On remarque d'abord :

**Lemme 10.3.14** Soit  $F$  une partie patch-fermée d'un espace stablement compact  $X$ . Alors  $F$  est compact dans  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $X'$  l'espace de Nachbin associé à  $X$ , c'est-à-dire  $X$  muni de la topologie patch.  $F$  est fermé dans  $X'$ , donc compact dans  $X'$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $F$ . Chaque  $U_i$  est un ouvert de  $X$ , donc de  $X'$ . Puisque  $F$  est compact dans  $X'$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini de  $F$ . Donc  $F$  est compact.  $\square$

**Proposition 10.3.15 (L'âme est convexe compacte)** Soit  $X$  un espace topologique, et  $\nu$  un jeu convexe sur  $X$ . L'âme  $Core(\nu)$  de  $\nu$  est convexe : si  $p_1, p_2 \in Core(\nu)$ , et  $\alpha \in [0, 1]$ , alors  $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2$  est dans  $Core(\nu)$ . Si de plus  $\nu$  est sous-normalisée, alors  $Core(\nu)$  est compact dans la topologie faible, c'est-à-dire dans  $Y = \prod_{U \in \mathcal{O}(X)} [0, 1]$ , dans l'espace des jeux sous-normalisés, des jeux convexes sous-normalisés, ou des valuations sous-normalisées sur  $X$ .

Si de plus  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $\nu$  est un jeu convexe continu sous-normalisé sur  $X$ , alors son âme continue  $CCore(\nu)$  est convexe compacte dans  $Y$ , dans l'espace  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  des jeux continus sous-normalisés sur  $X$ , et dans l'espace  $\nabla \mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  des jeux continus convexes sous-normalisés sur  $X$ .

*Démonstration.* La convexité de  $Core(\nu)$  est évidente. Supposons maintenant  $\nu(X) \leq 1$ , ce qui n'entâche pas au passage la généralité de la proposition, quitte à multiplier  $\nu$  par une constante. Dans  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\uparrow \nu$  est un compact finitaire, donc compact. Montrons d'abord que  $Core(\nu)$  est compact dans  $Y$ . Rappelons que  $Y$  est stablement compact, et que son espace de Nachbin associé  $Y'$  est  $\prod_{U \in \mathcal{O}(X)} [0, 1]'$ , où  $[0, 1]'$  est l'intervalle  $[0, 1]$  avec sa topologie métrique usuelle. Soit  $V_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  l'espace des valuations, non nécessairement continues, sous-normalisées sur  $X$ , muni de la topologie faible. Par définition  $Core(\nu) = \{p \in V_{\leq 1 \text{ wk}}(X) \mid p \in \uparrow \nu \text{ et } \nu(X) = p(X)\}$  : l'âme est donc l'intersection du compact  $\uparrow \nu$ , de  $V_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , et de l'image réciproque  $f^{-1}\{0\}$  de  $\{0\}$  par la fonction  $f$  de  $Y$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $p$  associe  $p(X) - \nu(X)$ .

Par la proposition 4.5.7,  $V_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  est patch-fermé dans  $Y$ . La fonction  $f$  est continue de  $Y' = \prod_{U \in \mathcal{O}(X)} [0, 1]'$  vers  $\mathbb{R}$ , puisque composée de la fonction continue qui à  $x$  associe  $x - \nu(X)$  et de la projection qui à  $p$  associe  $p(X)$ . Donc  $f$  est patch-continue, et  $f^{-1}\{0\}$  est patch-fermé. Donc  $V_{\leq 1 \text{ wk}}(X) \cap f^{-1}\{0\}$  est patch-fermé.

$Core(\nu)$  est donc l'intersection d'un compact,  $\uparrow \nu$ , et d'un patch-fermé,  $V_{\leq 1 \text{ wk}}(X) \cap f^{-1}\{0\}$ . Il est donc patch-fermé dans  $Y$ . Puisque  $Y$  est stablement compact,  $Core(\nu)$  est compact dans  $Y$  par le lemme 10.3.14.

$Core(\nu)$  est aussi une partie compacte de l'espace  $Z$  des jeux, des jeux convexes, ou des valuations sur  $X$  bornées par 1, car la topologie faible sur  $Z$  est la topologie induite sur  $Z$  par la topologie faible sur  $Y$ . Plus concrètement, tout ouvert de  $Z$  est l'intersection  $U \cap Z$  d'un ouvert  $U$  de  $Y$ , et de  $Z$ . Étant donné un recouvrement ouvert  $(U_i \cap Z)_{i \in I}$  de  $Core(\nu)$  dans  $Z$ ,  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $Core(\nu)$  dans  $Y$ . On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini  $(U_i)_{i \in J}$ . Mais alors  $(U_i \cap Z)_{i \in J}$  est un recouvrement fini de  $Core(\nu)$ .

Lorsque  $X$  est stablement localement relativement compact et  $\nu$  est continu, avec  $\nu(X) \leq 1$ , on rappelle que  $\mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\nabla \mathbf{J}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , et  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  sont des rétracts des espaces des jeux, resp. des jeux convexes, resp. des valuations, bornées par 1. C'est la proposition 4.5.10, et la

rétraction est la fonction  $\tau$  du lemme 4.5.8.  $CCore(\nu)$  est alors l'image par  $\tau$  de  $Core(\nu)$ , et est donc compact.  $\square$

La compacité de l'âme est une conséquence relativement simple de la machinerie de la section 4.5. Il s'agit d'une forme du théorème dit de Banach-Alaoglu, dont une adaptation au cadre des d-cônes est due à Plotkin (2006, corollaire 2). Ce théorème énonce que, si  $C$  est un d-cône continu, c'est-à-dire un d-cône qui, en tant que cpo, est continu, et si la relation  $\ll$  sur  $C$  est additive, alors pour toute fonction continue sur-linéaire  $F$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , pour toute fonction continue sous-linéaire  $F'$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , l'ensemble des fonctions linéaires continues  $G$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telles que  $F \leq G \leq F'$  est un patch-compact de la topologie faible. (Plotkin appelle "weak\*-Scott" la topologie que nous appelons faible.) On peut pratiquement utiliser ce théorème ici, en prenant  $C = \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . Le lemme 11.2.16, que nous démontrerons plus loin, énonce en effet précisément que  $\ll$  est additive sur  $C$ . Mais  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  n'est pas un cpo continu — ce n'est même pas un cpo.

Pour utiliser le théorème de Plotkin-Banach-Alaoglu, il aurait fallu que nous définissions les prévisions comme des fonctionnelles de  $\langle X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ . Le théorème 10.1.8 aurait alors établi une correspondance avec des espaces de jeux non bornés, c'est-à-dire des fonctions de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  (plutôt que  $\mathbb{R}^+$ ). La théorie des jeux et en particulier des crédibilités et des plausibilités fonctionne cependant de façon bien plus agréable si toutes les valeurs  $\nu(U)$  sont dans  $\mathbb{R}^+$ .

De façon symétrique, on peut s'intéresser aux jeux concaves.

**Définition 10.3.16 (Écorce)** Soit  $X$  un espace topologique. L'écorce  $Bark(\nu)$  d'une capacité  $\nu$  sur  $X$  est l'ensemble de toutes les valuations  $p$  sur  $X$  telles que  $p \leq \nu$  et  $p(X) = \nu(X)$ .

L'écorce continue  $CBark(\nu)$  en est le sous-ensemble réduit aux valuations  $p$  qui sont continues.

**Lemme 10.3.17** Soit  $F$  une prévision colinéaire sur  $X$ , et  $d$  un drapeau fini  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_m$ . Posons  $U_0 = X$ , et

$$\nabla F_d(g) = \sup_{(a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{m+1} / \sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i} \leq g} F\left(\sum_{i=0}^m a_i \chi_{U_i}\right)$$

Alors  $\nabla F_d$  est une prévision,  $\nabla F_d \leq F$ , et  $\nabla F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Si  $F$  est colinéaire ou sur-additive,  $\nabla F_d$  est sur-linéaire.

De plus, si  $d \subseteq d'$ , alors  $\nabla F_d \leq \nabla F_{d'}$ .

*Démonstration.* Similaire au lemme 10.3.17, et laissé en exercice.  $\square$

**Lemme 10.3.18** Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $d$  un drapeau ouvert quelconque. Étendons la définition du lemme 10.3.17 par :

$$\nabla F_d(g) = \sup_{\substack{d_0 \text{ drapeau fini} \\ d_0 \subseteq d}} \nabla F_{d_0}(g)$$

Alors  $\nabla F_d$  est une prévision,  $\nabla F_d \leq F$ , et  $\nabla F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Si  $F$  est colinéaire ou sur-additive,  $\nabla F_d$  est sur-linéaire.

De plus, si  $d \subseteq d'$ , alors  $\nabla F_d \leq \nabla F_{d'}$ .

*Démonstration.* Similaire au lemme 10.3.18, et laissé en exercice.  $\square$

L'analogie du théorème de Shapley pour les jeux concaves et les prévisions hautes, dans le cas continu, demandera encore une fois de supposer que l'espace ambiant  $X$  est stablement localement relativement compact. Nous aurons aussi besoin de considérer une classe de fonctions continues relativement spécifiques :

**Définition 10.3.19 (Fonction pure)** Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est pure si et seulement si  $f$  est continue et, pour tous ouverts  $U, V$  de  $Y$  tels que  $U \Subset V$ , alors  $f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$ .

La notion de fonction pure est à rapprocher de celle de fonction parfaite : une fonction parfaite est une fonction continue telle que, pour tout compact saturé  $Q$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(Q)$  est un compact de  $X$ .

En général (Jung, 2004, proposition 2.14), si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces localement compacts,  $f : X \rightarrow Y$  est parfaite si et seulement si elle est patch-continue et croissante par rapport aux ordres de spécialisation de  $X$  et de  $Y$ .

Il est facile de voir que, si  $Y$  est localement compact et  $f$  est parfaite de  $X$  vers  $Y$ , alors  $f$  est pure. En effet, supposons que  $U$  et  $V$  soient deux ouverts de  $Y$  tels que  $U \Subset V$ . Par le lemme 3.4.11, et comme  $Y$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q$  de  $Y$  tel que  $U \subseteq Q \subseteq V$ . Donc  $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(Q) \subseteq f^{-1}(V)$ . Comme  $f$  est parfaite,  $f^{-1}(Q)$  est compact, donc  $f^{-1}(U) \Subset f^{-1}(V)$  par le lemme 3.4.11 de nouveau. Donc  $f$  est pure.

Alors que les fonctions pures, et a fortiori les fonctions parfaites sont relativement rares en général, on peut remarquer par exemple que toute fonction continue d'un espace compact  $X$  vers un espace  $T_2$   $Y$  est parfaite, donc pure. En effet, tout compact saturé  $Q$  d'un espace  $T_2$  est fermé, donc  $f^{-1}(Q)$  est fermé dans  $X$ , donc compact dans  $X$ .

Nous serons en particulier intéressé par les fonctions  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Les ouverts (de Scott) de  $\mathbb{R}^+$  sont les  $]t, +\infty[$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , plus  $\mathbb{R}^+$  tout entier. Il est facile de voir que  $]t, +\infty[ \Subset ]t', +\infty[$  si et seulement si  $t > t' > 0$ , et que  $]t, +\infty[ \Subset \mathbb{R}^+$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . Une fonction  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  est alors pure si et seulement si  $f^{-1}]t, +\infty[$  est ouvert pour tout  $t$ , et  $f^{-1}]t, +\infty[ \Subset f^{-1}]t', +\infty[$  dès que  $t > t' > 0$ . Elle est parfaite si et seulement si  $f^{-1}]t, +\infty[$  est ouvert et  $f^{-1}]t, +\infty[$  est compact pour tout  $t$ .

L'intérêt des fonctions pures est rendu explicite au lemme suivant. La construction de  $\nu$  en fonction de  $\nu_0$  a déjà été utilisée dans la démonstration du théorème 10.3.11.

**Lemme 10.3.20** Soit  $X$  un espace localement relativement compact,  $\nu_0$  un jeu sur  $X$ , et  $\nu$  le jeu  $\tau(\nu_0)$  :

$$\nu(U) = \sup_{V \Subset U} \nu_0(V)$$

Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est pure et bornée, alors

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{x \in X} f(x) d\nu_0$$

*Démonstration.* Fixons  $\epsilon > 0$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $]t + \epsilon, +\infty[ \subseteq ]t, +\infty[$ . Comme  $f$  est pure,  $f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[ \subseteq f^{-1}]t, +\infty[$ , donc  $\nu(f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[) \geq \nu_0(f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[)$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &\geq \int_0^{+\infty} \nu_0(f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[) dt = \int_\epsilon^{+\infty} \nu_0(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &= \int_{x \in X} f(x) d\nu_0 - \int_0^\epsilon \nu_0(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &\geq \int_{x \in X} f(x) d\nu_0 - \epsilon \nu_0(X) \end{aligned}$$

Comme  $\epsilon$  est arbitraire,

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu \geq \int_{x \in X} f(x) d\nu_0$$

L'inégalité inverse vient du fait que, comme  $\nu_0$  est un jeu,  $\nu \leq \nu_0$ , et en utilisant la proposition 4.2.3.  $\square$

**Théorème 10.3.21** Soit  $X$  un espace topologique,  $F$  une prévision haute colinéaire, et  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une prévision linéaire  $G$  telle que  $F \geq G$  et  $F(f) = G(f)$ . De plus,  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$ .

Si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $f$  est une fonction pure bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , alors il existe une prévision linéaire continue  $G$  telle que  $F \geq G$  et  $F(f) = G(f)$ . Si de plus  $X$  est compact, alors  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$ .

*Démonstration.* Soit  $C$  le cône ordonné  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , et  $d = \text{drap}(f)$ . Par le lemme 10.3.18,  $\nabla F_d$  est une fonction sur-linéaire croissante et  $\nabla F_d \leq F$ . Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, il existe donc une fonction linéaire croissante  $G$  de  $C$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$  telle que  $\nabla F_d \leq G \leq F$ . Comme  $G \leq F$ ,  $G$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , donc  $G$  est une prévision linéaire. De plus,  $\nabla F_d(\chi_X) \leq G(\chi_X) \leq F(\chi_X)$ , donc  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$  puisque  $\nabla F_d(\chi_X) = F(\chi_X)$ .

Lorsque  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $F$  est continue, par le paragraphe ci-dessus il existe une prévision linéaire  $G_0$  telle que  $F \geq G_0$ ,  $F(f) = G_0(f)$ , et  $G_0(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Posons  $\nu_0 = \gamma_e(G_0)$  :  $\nu_0$  est une valuation sur  $X$  par le lemme 10.1.4.

Posons maintenant  $\nu(U) = \sup_{V \in U} \nu_0(V)$ . Comme au théorème 10.3.11,  $\nu$  est la plus grande fonction continue de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\nu \leq \nu_0$ , et est une valuation continue. Posons  $G = \alpha_e(\nu)$  : par le corollaire 10.1.9,  $G$  est une prévision linéaire continue. Comme  $F \geq G_0$ ,  $\gamma_e(F) \geq \gamma_e(G_0) = \nu_0 \geq \nu = \gamma_e(G)$ . Par la proposition 10.1.7, ceci implique  $\alpha_e(\gamma_e(G)) \leq F$ . Comme  $G$  est continue, par le corollaire 10.1.9,  $\alpha_e(\gamma_e(G)) = G$ , donc  $G \leq F$ .

Ensuite,  $F(f) = G(f)$ . En effet, par le lemme 10.3.20,

$$G(f) = \int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{x \in X} f(x) d\nu_0 = G_0(f) = F(f)$$

Enfin, si  $X$  est compact, alors  $X \in X$ , donc  $\nu(X) = \nu_0(X)$ , ce qui implique  $G(\chi_X) = \nu(X) = \nu_0(X) = G_0(\chi_X) = F(\chi_X)$ .  $\square$

Dans le cas non continu, on peut déjà en déduire :

**Corollaire 10.3.22 (Shapley, dual)** *Soit  $X$  un espace topologique,  $\nu$  un jeu concave sur  $X$ . Alors  $CBark(\nu) \neq \emptyset$ .*

*Si  $X$  est compact et stablement localement relativement compact, alors  $CBark(\nu) \neq \emptyset$ . De plus, pour toute fonction pure bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , il existe une valuation continue  $p$  sur  $X$  telle que  $p \leq \nu$ ,  $p(X) = \nu(X)$ , et*

$$\int_{x \in X} f(x) dp = \int_{x \in X} f(x) d\nu$$

*Démonstration.* Par la proposition 10.1.7,  $\alpha_e(\nu)$  est une prévision haute colinéaire. Par le théorème 10.3.21, il existe une prévision linéaire  $G$  telle que  $\alpha_e(\nu) \geq G$  et  $\alpha_e(\nu)(f) = G(f)$ . De plus,  $G(\chi_X) = \alpha_e(\nu)(\chi_X) = \nu(X)$ . Comme  $\alpha_e(\nu) \geq G$ ,  $\gamma_e(\alpha_e(\nu)) \geq \gamma_e(G)$ . Or  $\gamma_e(\alpha_e(\nu)) = \nu$  par la proposition 10.1.7, donc  $\nu \geq \gamma_e(G)$ . Posons  $p = \gamma_e(G)$ . On a donc  $\nu \geq p$ .

Comme  $G(\chi_X) = \nu(X)$ , en particulier  $p(X) = \gamma_e(G)(X) = G(\chi_X) = \nu(X)$ . Ceci démontre la première partie du corollaire.

Si  $X$  est compact et stablement localement relativement compact, par le théorème 10.3.21, on peut supposer que  $G$  est continue, et  $G(f) = F(f)$ , la fonction  $f$  étant pure. Par le corollaire 10.1.9,  $\alpha_e(\gamma_e(G)) = G$ . Comme  $\alpha_e(\nu)(f) = G(f)$ , on a donc  $\alpha_e(\nu)(f) = \alpha_e(\gamma_e(G))(f)$ , c'est-à-dire  $\alpha_e(\nu)(f) = \alpha_e(p)(f)$ , autrement dit

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \int_{x \in X} f(x) dp$$

$\square$

On ne peut cependant pas en déduire un analogue du théorème de Rosenmuller, apparemment.

On l'obtiendra dans le cas continu. La voie la plus simple ici est, comme au chapitre 6, de se ramener au cas convexe par dualité convexe-concave. Ceci nous permettra aussi de nous affranchir de la condition de pureté de  $f$ , que nous supposons juste continue.

**Théorème 10.3.23 (Shapley-Rosenmuller, dual, cas continu)** *Soit  $X$  un espace stablement compact,  $\nu$  un jeu concave continu sur  $X$ . Alors  $CBark(\nu) \neq \emptyset$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu = \sup_{q \in CBark(\nu)} \int_{x \in X} f(x) dq \tag{10.3}$$

*Réciproquement, soit  $\nu$  un jeu sur  $X$  tel que  $CBark(\nu) \neq \emptyset$  et (10.3) est vraie pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $\nu$  est un jeu concave continu.*

Notons que contrairement au cas convexe (corollaire 10.3.13), la borne supérieure ne semble pas devoir être atteinte en général.

*Démonstration.* Si  $\nu$  est identiquement nul, le théorème est évident. Supposons donc  $\nu \neq 0$ , c'est-à-dire  $\nu(X) \neq 0$ . Posons  $a = \nu(X)$ , et  $\nu_1 = \nu/a$  :  $\nu_1$  est un jeu concave continu normalisé sur  $X$ .

Par le théorème 6.2.6,  $\nu_1^\perp$  est un jeu concave continu sur  $X^d$ . Clairement,  $\nu_1^\perp$  est aussi normalisé. Comme  $X^d$  est stablement compact,  $X^d$  est en particulier localement relativement compact. Le corollaire 10.3.12 s'applique donc : il existe une valuation continue  $p$  sur  $X^d$  telle que  $\nu_1^\perp \leq p$ , et  $p(X) = \nu(X) = 1$ .

Par le théorème 6.2.11,  $p^\perp$  est une valuation continue normalisée sur  $X$ , et  $\nu_1 \leq p^\perp$ . Donc  $ap^\perp$  est une valuation continue, et  $\nu \leq ap^\perp$  :  $CBark(\nu)$  est non vide.

Par le corollaire 10.3.13, de plus, pour toute fonction continue bornée  $g'$  de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,

$$\int_{x \in X^d} g'(x) d\nu_1^\perp = \min_{p \in CCore(\nu_1^\perp)} \int_{x \in X^d} g'(x) dp \quad (10.4)$$

Calculons :

$$\begin{aligned} - \int_{x \in X} f(x) d\nu &= a. - \int_{x \in X} f(x) d\nu_1 \quad \text{par la proposition 4.2.6} \\ &= a. \inf_g \int_{x \in X^d} g(x) d\nu_1^\perp \end{aligned}$$

où  $g$  varie parmi les fonctions étagées de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$  telles que  $f+g \geq 0$ , par la proposition 6.2.14. Soit  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ . Lorsque  $f+g \geq 0$ ,  $g \geq -b$ . La fonction  $g' = g+b$  — qui est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  — et la fonction constante égale à  $-b$  sont comonotones, donc par la proposition 4.4.3,

$$\begin{aligned} - \int_{x \in X} f(x) d\nu &= a. \left[ \inf_g \int_{x \in X^d} (g(x) + b) d\nu_1^\perp - b \right] \\ &= a. \left[ \inf_g \min_{p \in CCore(\nu_1^\perp)} \int_{x \in X^d} (g(x) + b) dp - b \right] \quad \text{en utilisant (10.4)} \\ &= \inf_{p \in CCore(\nu_1^\perp)} \left[ a. \inf_g \int_{x \in X^d} (g(x) + b) dp - b \right] \\ &= \inf_{p \in CCore(\nu_1^\perp)} \left[ a. \inf_g \int_{x \in X^d} g(x) dp \right] \quad \text{par la proposition 4.4.3} \end{aligned}$$

Or, par le théorème 6.2.11,  $p \in CCore(\nu_1^\perp)$  est équivalent à demander que  $p$  soit de la forme  $q^\perp$ , où  $q \in CBark(\nu_1)$ . Et ceci est équivalent à demander que  $ap$  soit de la forme  $q^\perp$ , où  $q \in CBark(a\nu_1) = CBark(\nu)$ . Donc

$$\begin{aligned} - \int_{x \in X} f(x) d\nu &= \inf_{q \in CBark(\nu)} \inf_g \int_{x \in X^d} g(x) dq^\perp \\ &= \inf_{q \in CBark(\nu)} - \int_{x \in X} f(x) dq \end{aligned}$$

par la proposition 6.2.14 de nouveau. On en déduit (10.3) en prenant l'opposé de chaque côté.

Réciproquement, supposons que  $\nu$  soit un jeu sur  $X$  tel que  $CBark(\nu) \neq \emptyset$  et que (10.3) soit vraie pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$  est la borne supérieure des  $\alpha_{\mathcal{C}}(p)$ ,  $p \in CBark(\nu)$ , par l'isomorphisme d'ordre donné au théorème 10.1.8. Montrons que  $\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$  est une prévision haute colinéaire. Comme  $\nu$  est un jeu,  $\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$  est une prévision colinéaire par la proposition 10.1.7. Il ne reste donc qu'à montrer que  $\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$  est sous-additive. Or

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{C}}(\nu)(f + g) &= \sup_{p \in CBark(\nu)} \alpha_{\mathcal{C}}(p)(f + g) = \sup_{p \in CBark(\nu)} (\alpha_{\mathcal{C}}(p)(f) + \alpha_{\mathcal{C}}(p)(g)) \\ &\leq \sup_{p \in CBark(\nu)} \alpha_{\mathcal{C}}(p)(f) + \sup_{p \in CBark(\nu)} \alpha_{\mathcal{C}}(p)(g) = \alpha_{\mathcal{C}}(\nu)(f) + \alpha_{\mathcal{C}}(\nu)(g) \end{aligned}$$

Par la proposition 10.1.7,  $\nu = \gamma_{\mathcal{C}}(\alpha_{\mathcal{C}}(\nu))$  est donc un jeu concave.  $\square$

Nous conjecturons que le théorème 10.3.23 tient encore lorsque  $X$  n'est que compact et stablement localement relativement compact, mais pas nécessairement ni localement compact ni cohérent. (Il semble que la compacité soit réellement nécessaire.) Ceci, cependant, demanderait de nous passer du bel outil qu'est la dualité convexe-concave, et semble requérir des efforts soutenus.

## 10.4 Prévisions pessimistes et démoniaques, optimistes et angéliques

Les notions de prévisions colinéaires convexes et concaves ont de belles propriétés, résumés par le théorème de Shapley-Rosenmuller et son dual.

Les prévisions colinéaires convexes correspondent directement aux jeux convexes, via la correspondance de Galois  $\alpha_{\mathcal{C}} \dashv \gamma_{\mathcal{C}}$  (qui est un isomorphisme dans le cas des prévisions et des jeux continus). Au chapitre 5, nous avons défendu la thèse selon laquelle c'étaient les crédibilités qui représentaient fidèlement le mélange de tirages probabilistes et de choix démoniaquement non déterministe, et non la notion strictement plus étendue des jeux convexes. Nous allons montrer que c'est la notion de prévision colinéaire *démoniaque*, que nous définirons ci-dessous, qui est la bonne représentation du mélange de tirages probabilistes et de choix démoniaquement non déterministe dans le monde des prévisions colinéaires. (Le cas des prévisions générales, non nécessairement linéaires, est relativement différent, et sera traité au chapitre 11.)

De même, ce sont les prévisions colinéaires *angéliques* qui représenteront fidèlement un mélange de tirages probabilistes et de choix angéliquement non déterministe.

Nous définissons aussi une notion intermédiaire de prévisions pessimistes, respectivement optimistes.

Notons que  $\max$  et  $\min$  sont deux fonctions Scott-continues de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $\max(f, g)$  et  $\min(f, g)$  sont donc elles aussi continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

**Définition 10.4.1 (Pessimiste, optimiste, démoniaque, angélique)** Soit  $X$  un espace topologique. Une prévision  $F$  sur  $X$  est :

- $\leq$ -convexe si et seulement si, pour toutes fonctions  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $F(\max(f, g)) + F(\min(f, g)) \geq F(f) + F(g)$ ; pessimiste si et seulement si  $F$  est basse et  $\leq$ -convexe;
- $\leq$ -concave si et seulement si, pour toutes fonctions  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $F(\max(f, g)) + F(\min(f, g)) \leq F(f) + F(g)$ ; optimiste si et seulement si  $F$  est haute et  $\leq$ -concave;
- totalement  $\leq$ -convexe si et seulement si, pour tout  $n \geq 1$ , pour toute famille de fonctions  $f_i \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$F\left(\max_{1 \leq i \leq n} f_i\right) \geq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} F\left(\min_{i \in I} f_i\right) \quad (10.5)$$

$F$  est démoniaque si et seulement si  $F$  est basse et totalement  $\leq$ -convexe ;

- totalement  $\leq$ -concave si et seulement si, pour tout  $n \geq 1$ , pour toute famille de fonctions  $f_i \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$F\left(\min_{1 \leq i \leq n} f_i\right) \leq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} F\left(\max_{i \in I} f_i\right) \quad (10.6)$$

$F$  est angélique si et seulement si  $F$  est haute et totalement  $\leq$ -concave.

Ces notions sont plus fortes que les notions de convexité et de concavité :

**Fait 10.4.2** *Toute prévision démoniaque est pessimiste. Toute prévision pessimiste est basse. Toute prévision angélique est optimiste. Toute prévision optimiste est haute.*

On notera la ressemblance formelle entre les conditions de prévisions  $\leq$ -convexes,  $\leq$ -concaves, totalement  $\leq$ -convexes, totalement  $\leq$ -concaves d'un côté, et de jeux convexes, concaves, totalement convexes et totalement concaves de l'autre côté : remplacer  $f, g, f_i$  par des ouverts,  $\max$  par  $\cup$  et  $\min$  par  $\cap$ . Disons-le plus formellement.

**Proposition 10.4.3** *Soit  $\nu$  un jeu sur un espace topologique  $X$ , et  $F = \alpha_e(\nu)$ . Si  $\nu$  est convexe, alors  $F$  est pessimiste. Si  $\nu$  est concave, alors  $F$  est optimiste. Si  $\nu$  est totalement convexe, alors  $F$  est démoniaque. Si  $\nu$  est totalement concave, alors  $F$  est angélique.*

*Démonstration.* Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . On note que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\max(f, g)^{-1}t, +\infty[ = \{x \in X \mid \max(f(x), g(x)) > t\} = \{x \in X \mid f(x) > t \text{ ou } g(x) > t\} = f^{-1}]t, +\infty[ \cup g^{-1}]t, +\infty[$ . De même,  $\min(f, g)^{-1}t, +\infty[ = f^{-1}]t, +\infty[ \cap g^{-1}]t, +\infty[$ .

Si  $\nu$  est un jeu convexe, on a donc :

$$\begin{aligned}
& F(\max(f, g)) + \\
& F(\min(f, g)) = \int_{x \in X} \max(f, g)(x) d\nu + \int_{x \in X} \min(f, g)(x) d\nu \\
& = \int_0^{+\infty} [\nu(\max(f, g)^{-1}]t, +\infty[) + \nu(\min(f, g)^{-1}]t, +\infty[)] dt \\
& = \int_0^{+\infty} [\nu(f^{-1}]t, +\infty[\cup g^{-1}]t, +\infty[) + \nu(f^{-1}]t, +\infty[\cap g^{-1}]t, +\infty[)] dt \\
& \geq \int_0^{+\infty} [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) + \nu(g^{-1}]t, +\infty[)] dt \\
& = \int_{x \in X} f(x) d\nu + \int_{x \in X} g(x) d\nu
\end{aligned}$$

Donc  $F$  est  $\leq$ -convexe.  $F$  est convexe par le fait 10.1.2. Donc  $F$  est pessimiste.

Si  $\nu$  est un jeu concave, le même raisonnement, avec  $\leq$  plutôt que  $\geq$ , établit que  $F$  est optimiste.

Lorsque  $\nu$  est totalement convexe, le même style de raisonnement montre que  $F$  est totalement  $\leq$ -convexe, donc démoniaque :

$$\begin{aligned}
F(\max_{1 \leq i \leq n} f_i) & = \int_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x) d\nu = \int_0^{+\infty} \nu((\max_{1 \leq i \leq n} f_i)^{-1}]t, +\infty[) dt \\
& = \int_0^{+\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}]t, +\infty[\right) dt \\
& \geq \int_0^{+\infty} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left(\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}]t, +\infty[\right) dt \\
& = \int_0^{+\infty} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \nu\left((\min_{i \in I} f_i)^{-1}]t, +\infty[\right) dt \\
& = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} F(\min_{i \in I} f_i)
\end{aligned}$$

De même, si  $\nu$  est totalement concave, alors  $F$  est angélique.  $\square$

**Proposition 10.4.4** Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $\nu = \gamma_c(F)$ . Si  $F$  est  $\leq$ -convexe, alors  $\nu$  est convexe. Si  $F$  est totalement  $\leq$ -convexe, alors  $\nu$  est totalement convexe. Si  $F$  est  $\leq$ -concave, alors  $\nu$  est concave. Si  $F$  est totalement  $\leq$ -concave, alors  $\nu$  est totalement concave.

*Démonstration.* Si  $F$  est  $\leq$ -convexe, on a  $F(\max(\chi_U, \chi_V)) + F(\min(\chi_U, \chi_V)) \geq F(\chi_U) + F(\chi_V)$  pour tous ouverts  $U$  et  $V$ . Or  $\max(\chi_U, \chi_V) = \chi_{U \cup V}$ ,  $\min(\chi_U, \chi_V) = \chi_{U \cap V}$ , donc  $F(\chi_{U \cup V}) + F(\chi_{U \cap V}) \geq F(\chi_U) + F(\chi_V)$  :  $\nu$  est convexe. De même pour les autres affirmations de l'énoncé.  $\square$

On en déduit en particulier que, dans le cas de prévisions *colinéaires* et continues, les notions de bassesse (concavité) et de  $\leq$ -convexité sont équivalentes, et que les notions de hauteur (convexité) et de  $\leq$ -concavité sont équivalentes.

**Corollaire 10.4.5** *Soit  $F$  une prévision colinéaire continue sur  $X$ . Les propositions : 1.  $F$  est basse, 2.  $F$  est  $\leq$ -convexe, 3.  $F$  est pessimiste, sont équivalentes. Les propositions : 4.  $F$  est haute, 5.  $F$  est  $\leq$ -concave, 6.  $F$  est optimiste, sont équivalentes.*

*Démonstration.* Si  $F$  est basse, comme  $F$  est colinéaire, par le lemme 10.1.4,  $\gamma_e(F)$  est convexe. Par la proposition 10.4.3,  $\alpha_e(\gamma_e(F))$  est donc pessimiste. Par le théorème 10.1.8, comme  $F$  est continue,  $\alpha_e(\gamma_e(F)) = F$ . Donc 1. implique 2. et 3. De façon évidente, 3. implique 2. Finalement, 2. implique 1. : si  $F$  est  $\leq$ -convexe, par la proposition 10.4.4,  $\gamma_e(F)$  est convexe, donc  $\alpha_e(\gamma_e(F)) = F$  est basse par le théorème 10.1.8. De même pour l'équivalence entre 4., 5., et 6.  $\square$



# Chapitre 11

## Prévisions générales

Donnons-nous une prévision colinéaire continue  $F$  sur  $X$ . Par le théorème 10.1.8, il est équivalent de se donner un jeu continu  $\nu$  sur  $X$ . Et, si l'on oublie pendant un instant la différence entre jeux convexes et jeux totalement convexes (crédibilités), ou celle entre jeux concaves et jeux totalement concaves (plausibilités),  $\nu$  code essentiellement un coup du joueur P suivi d'un coup du joueur C. Peut-on représenter plus de deux coups, c'est-à-dire une partie complète alternant les coups de P et de C ?

On ne peut pas représenter plus de deux coups à l'aide de jeux. Il se trouve que, mathématiquement, le principal obstacle est que tout jeu définit une prévision *colinéaire*. En nous intéressant à des prévisions continues mais pas nécessairement colinéaires, nous arriverons à représenter des parties entières.

### 11.1 Composition séquentielle

Tentons de justifier ceci intuitivement, dans le cas où  $\nu$  est une crédibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i}$  sur  $X$ . On a vu que ceci représentait le choix probabiliste, par P, avec probabilité  $a_i$ , d'un ensemble  $Q_i$  d'états suivants parmi lesquels C pouvait choisir, démoniaquement. Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de gain, qui à chaque état  $x$  associe ce que P gagne en arrivant à l'état  $x$ , alors, en posant  $F = \alpha_C(\nu)$  :

$$F(f) = \int_{x \in X} f(x) d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \min_{x \in Q_i} f(x)$$

est l'espérance de gain de P lors d'une partie à deux coups (un de P et un de C) : c'est la moyenne, sur  $i$ , des gains  $\min_{x \in Q_i} f(x)$  qu'aura P une fois que C aura joué — C joue en choisissant  $x$  de sorte à minimiser les gains possibles de P.

En général, une partie entre P et C va alterner choix probabilistes du premier et choix non déterministes du second. Considérons une partie à quatre coups, un de P, un de C, un autre de P, et enfin un dernier de C. D'abord P tire au hasard avec probabilité  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , un ensemble  $Q_i$  d'états parmi lesquels C choisit démoniaquement. En chaque état  $x$  de  $Q_i$ , P tire au hasard avec

probabilité  $b_{xj}$ ,  $1 \leq j \leq n_x$ , un ensemble  $Q'_{xj}$  d'états parmi lesquels C choisit démoniaquement de nouveau. On peut s'attendre à ce que l'espérance de gain correspondante pour P soit alors

$$F^2(f) = \sum_{i=1}^n a_i \min_{x \in Q_i} \sum_{j=1}^{m_x} b_{xj} \min_{y \in Q'_{xj}} f(x)$$

Ceci définit une fonctionnelle de  $f$ , dont nous verrons qu'il s'agit encore d'une prévision, et même d'une prévision démoniaque, mais elle ne sera pas colinéaire en général. Voici un contre-exemple. Prenons  $n = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $Q_1 = \{1, 2\}$ ,  $m_1 = 2$ ,  $b_{11} = 3/4$ ,  $b_{12} = 1/4$ ,  $m_2 = 2$ ,  $b_{21} = 1/3$ ,  $b_{22} = 2/3$ , et  $Q'_{xj}$  un singleton  $\{ *_{xj} \}$  pour chaque  $x \in \{1, 2\}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Alors  $F^2(f) = \min(3/4f(*_{11}) + 1/4f(*_{12}), 1/3f(*_{21}) + 2/3f(*_{22}))$ . Considérons alors les deux fonctions  $f$  et  $g$  données dans la table suivante, leur somme  $f + g$ , et les valeurs respectives de  $F^2(f)$ ,  $F^2(g)$ ,  $F^2(h)$  :

Fonction $h$	$h(*_{11})$	$h(*_{12})$	$h(*_{21})$	$h(*_{22})$	$F^2(h)$
$f$	0,3	0,1	0,7	0,1	0,25
$g$	0,5	0	0,7	0	0,233...
$f + g$	0,8	0,1	1,4	0,1	0,533...

et l'on constate que  $F^2(f) + F^2(g) = 0,4833... \neq F^2(f + g)$ , alors même que  $f$  et  $g$  sont colinéaires. (L'exemple a été vérifié, et en fait fabriqué aléatoirement par programme.) En revanche,  $F^2$  reste basse, ce que l'on vérifie sur l'exemple :  $F^2(f + g) \leq F^2(f) + F^2(g)$ . Notons que cet exemple est des plus simples : au premier coup, P ne fait rien (tirage avec probabilité 1), et seul C choisit, entre les deux états 1 et 2, au second tour. Au troisième tour, P fait un choix probabiliste, avec poids 3/4 et 1/4 s'il est dans l'état 1, avec poids 1/3 et 2/3 s'il est dans l'état 2, enfin C ne fait rien (il choisit l'unique état  $*_{ij}$  possible).

Notons  $\nu_x$  le jeu  $\sum_{j=1}^{m_x} b_{xj} u_{Q'_{xj}}$ . On peut réécrire :

$$F^2(f) = \sum_{i=1}^n a_i \min_{x \in Q_i} \int_{y \in X} f(y) d\nu_x$$

Posons  $F = \alpha_C(\nu)$ ,  $F_x = \alpha_C(\nu_x)$ , alors

$$F^2(f) = F(\lambda x \cdot F_x(f))$$

Poursuivons. Lors d'une partie à 6 coups, l'espérance de gain sera

$$\begin{aligned} F^3(f) &= \sum_{i=1}^n a_i \min_{x \in Q_i} \sum_{j=1}^{m_x} b_{xj} \min_{y \in Q'_{xj}} \sum_{k=1}^{m_y} b_{yk} \min_{z \in Q'_{yk}} f(z) \\ &= F(\lambda x \cdot F_x(\lambda y \cdot F_y(f))) \end{aligned}$$

En général, on peut définir  $F^{k+1}(f) = F(\lambda x_1 \cdot F_{x_1}(\lambda x_2 \cdot F_{x_2}(\dots \lambda x_k \cdot F_{x_k}(f) \dots)))$ , qui représente l'espérance de gain lors d'une partie à  $2k + 2$  coups. Tous les  $F^{k+1}$  sont des prévisions continues, dès que  $x \mapsto F_x$  est Scott-continue, par la proposition suivante. En réalité, il suffit que  $x \mapsto F_x$  soit continue lorsque  $F_x$  est pris dans un espace muni de la topologie faible. Cette dernière est définie par imitation de la proposition 4.5.4.

**Définition 11.1.1 (Topologie faible)** Soit  $X$  un espace topologique, et  $P$  un espace de fonctionnelles de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ , par exemple  $\mathbf{P}(X)$ ,  $\mathbf{P}^*(X)$ ,  $\mathbf{P}^\Delta(X)$ ,  $\Delta \mathbf{P}(X)$ ,  $\nabla \mathbf{P}(X)$ ,  $\Delta \mathbf{P}^*(X)$ ,  $\nabla \mathbf{P}^*(X)$ .

La topologie faible sur  $P$  est la topologie la moins fine qui rend toutes les fonctions  $F \mapsto F(f)$  continues de  $P$  vers  $\mathbb{R}^+$ , pour chaque fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

Autrement dit, la topologie faible sur  $P$  est la topologie engendrée par les ouverts  $[f > r] = \{F \in P(X) \mid F(f) > r\}$ ,  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

On notera alors  $P_{wk}$  l'espace  $P$  muni de la topologie faible :  $\mathbf{P}_{wk}(X)$ ,  $\nabla \mathbf{P}_{wk}(X)$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{wk}(X)$ .

L'un des points agréables de la topologie faible est que la topologie induite par la topologie faible sur un sous-espace de  $P$  est encore la topologie faible sur le sous-espace. Ce n'est pas le cas en général pour la topologie de Scott.

La proposition 4.5.4 montre que la définition 11.1.1 de la topologie faible est compatible avec celle que nous avons sur les espaces de jeux. Plus précisément, on a l'analogue du théorème 10.1.8 :

**Théorème 11.1.2 (de représentation)** Les fonctions  $\alpha_{\mathbb{C}}$  et  $\gamma_{\mathbb{C}}$  définissent un homéomorphisme :

- entre l'espace  $\mathbf{J}_{wk}(X)$  des jeux continus et l'espace  $\mathbf{P}_{wk}^*(X)$  des prévisions colinéaires continues ;
- entre l'espace  $\nabla \mathbf{J}_{wk}(X)$  des jeux convexes continus et l'espace  $\nabla \mathbf{P}_{wk}^*(X)$  des prévisions basses colinéaires continues ;
- entre l'espace  $\Delta \mathbf{J}_{wk}(X)$  des jeux concaves continus et l'espace  $\Delta \mathbf{P}_{wk}^*(X)$  des prévisions hautes colinéaires continues ;
- entre l'espace  $\mathbf{V}_{wk}(X)$  des valuations continues et l'espace  $\mathbf{P}_{wk}^\Delta(X)$  des prévisions linéaires continues ;

tous les espaces concernées étant munis de leurs topologies faibles.

On définit ensuite la composition séquentielle d'une prévision continue avec une fonction de transition  $\vartheta$ . La définition d'une telle fonction de transition est le parallèle exact de la définition 8.1.1, modulo les homéomorphismes donnés au théorème 11.1.2.

**Définition 11.1.3 (Composition séquentielle)** Soit  $P_{wk}(X)$  l'espace de toutes les prévisions sur  $X$ , muni de la topologie faible.

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. On dira qu'une fonction  $\vartheta$  de  $X$  vers un espace de fonctionnelles sur  $Y$ , muni de la topologie faible, est bornée si la fonction  $\lambda x \in X \cdot \vartheta(x)(f)$  est bornée pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ .

Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $\vartheta$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $P_{wk}(Y)$ . La composition séquentielle  $F; \vartheta$  est la fonctionnelle définie par

$$(F; \vartheta)(f) = F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f))$$

On notera que ceci n'est bien défini que si  $\lambda x \cdot \vartheta(x)(f)$  est une fonction continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ . La continuité est due au fait que  $(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f))^{-1}]t, +\infty[ = \{x \in X \mid \vartheta(x)(f) > t\} = \vartheta^{-1}[f > t]$ . Le fait que  $\lambda x \cdot \vartheta(x)(f)$  soit bornée est l'hypothèse que  $\vartheta$  soit bornée.

**Proposition 11.1.4 (Correction)** *Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $\vartheta$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $P_{wk}(Y)$ . Alors  $F; \vartheta$  est une prévision sur  $Y$ . Si  $F$  est une prévision basse (resp. haute, resp. continue) et  $\vartheta(x)$  est une prévision basse (resp. haute, resp. continue) pour tout  $x \in X$ , alors  $F; \vartheta$  est une prévision basse (resp. haute, resp. continue).*

*Démonstration.*  $F; \vartheta$  est positivement homogène : pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} (F; \vartheta)(\alpha f) &= F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(\alpha f)) = F(\lambda x \cdot \alpha \vartheta(x)(f)) \quad \text{puisque } \vartheta(x) \text{ est une prévision} \\ &= F(\alpha \lambda x \cdot \vartheta(x)(f)) \quad \text{par définition} \\ &= \alpha F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f)) \quad \text{puisque } F \text{ est une prévision} \\ &= \alpha (F; \vartheta)(f) \end{aligned}$$

$F$  est croissante : si  $f \leq g$ , alors pour tout  $x \in X$ ,  $\vartheta(x)(f) \leq \vartheta(x)(g)$  car  $\vartheta(x)$  est une prévision, donc  $\lambda x \cdot \vartheta(x)(f) \leq \lambda x \cdot \vartheta(x)(g)$ , d'où :

$$(F; \vartheta)(f) = F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f)) \leq F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(g)) = (F; \vartheta)(g)$$

puisque  $F$  est une prévision. Donc  $F; \vartheta$  est une prévision.

Ensuite, si  $F$  est continue et  $\vartheta(x)$  est continue pour tout  $x$ , alors  $F; \vartheta$  est continue : si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée de fonctions continues bornées, pour tout  $x \in X$ ,  $\vartheta(x)(\sup_{i \in I} f_i) = \sup_{i \in I} \vartheta(x)(f_i)$  puisque  $\vartheta(x)$  est une prévision continue pour tout  $x$ ; donc  $\lambda x \cdot \vartheta(x)(\sup_{i \in I} f_i) = \sup_{i \in I} \lambda x \cdot \vartheta(x)(f_i)$ , et

$$\begin{aligned} (F; \vartheta)(\sup_{i \in I} f_i) &= F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(\sup_{i \in I} f_i)) = F(\sup_{i \in I} \lambda x \cdot \vartheta(x)(f_i)) \\ &= \sup_{i \in I} F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f_i)) = \sup_{i \in I} (F; \vartheta)(f_i) \end{aligned}$$

puisque  $F$  est une prévision continue.

Si  $F$  est une prévision basse, c'est-à-dire si  $F$  est sur-additive, et s'il en est de même pour  $\vartheta(x)$  pour tout  $x \in X$ , alors pour tous  $f, g \in \langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $\vartheta(x)(f + g) \geq \vartheta(x)(f) + \vartheta(x)(g)$  pour tout  $x \in X$ , c'est-à-dire  $\lambda x \cdot \vartheta(x)(f + g) \geq (\lambda x \cdot \vartheta(x)(f)) + (\lambda x \cdot \vartheta(x)(g))$ , donc

$$\begin{aligned} (F; \vartheta)(f + g) &= F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f + g)) \\ &\geq F((\lambda x \cdot \vartheta(x)(f)) + (\lambda x \cdot \vartheta(x)(g))) \quad \text{puisque } F \text{ est croissante} \\ &\geq F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f)) + F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(g)) = (F; \vartheta)(f) + (F; \vartheta)(g) \end{aligned}$$

puisque  $F$  est sur-additive. Donc  $F; \vartheta$  est sur-additive, c'est-à-dire est une prévision basse. Le résultat sur les prévisions hautes se démontre de façon similaire.  $\square$

On peut se demander si l'espace  $\mathbf{P}(X)$  des prévisions continues (resp. l'espace  $\nabla \mathbf{P}(X)$  des prévisions basses continues, resp. l'espace  $\Delta \mathbf{P}(X)$  des prévisions hautes continues) est le plus petit cpo  $C_X$  qui contienne l'espace  $\mathbf{P}^*(X)$  des prévisions colinéaires continues (resp.  $\nabla \mathbf{P}^*(X)$ ,  $\Delta \mathbf{P}^*(X)$ ) et qui soit stable par composition séquentielle, au sens où, si  $F$  est dans  $C_X$ , et  $\vartheta$  est une fonction continue bornée de  $X$  dans  $C_Y$ , alors  $F; \vartheta \in C_Y$ .

Le reste de ce chapitre est consacré à démontrer un résultat de cette nature. Nous aurons besoin de généraliser le théorème de Shapley-Rosenmuller au cas de prévisions basses non nécessairement colinéaires, ce que nous ferons à la section 11.2. La notion de tangente à une prévision  $y$  sera introduite : c'est l'essence du théorème de Shapley-Rosenmuller, voir par exemple la figure 10.5 pour le cas colinéaire. L'utilisation que nous ferons des tangentes requerra plus tard que nous nous restreignons à des prévisions *normalisées*, dans un sens proche de celui des jeux normalisés. La définition, en absence de colinéarité, sera cependant subtile. Nous traitons de cet aspect à la section 11.3. De même, les prévisions sous-normalisées forment le sujet de la section 11.4. Nous traiterons des tangentes inférieures aux prévisions hautes en section 11.5.

Le bon cadre pour démontrer le résultat visé sera d'autre part celui des espaces topologiques et non des cpo. La bonne topologie sur les espaces de prévisions sera la topologie faible, et non celle de Scott. Nous étudions cette topologie en section 11.6. Le résultat de complétude souhaité proviendra alors de l'existence de tangentes, supérieures ou inférieures, et du fait que les ensembles de ces tangentes sont compacts. Ces ensembles de tangentes seront étudiés à la section 11.7. Nous en profiterons au passage pour comparer nos modèles avec ceux, finalement très proches, de Tix et al. (2005).

## 11.2 Tangentes supérieures

Le théorème 10.3.11 énonce entre autres que si  $F$  est une prévision basse colinéaire, et  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , alors on peut trouver une prévision linéaire  $G$  (une "tangente à  $F$  en  $f$ ") telle que  $F \leq G$ ,  $F(f) = G(f)$ , et  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$ . Ceci est illustré en figure 10.5.

Lorsque  $F$  n'est plus colinéaire, mais reste une prévision basse, on peut imaginer qu'il existera encore une tangente  $G$  à  $F$  en  $f$ , au sens où  $G$  sera une prévision linéaire,  $F \leq G$ , et  $F(f) = G(f)$ . La figure 10.1 peut aider à visualiser la situation. Mais on ne pourra plus demander que  $F(\chi_X) = G(\chi_X)$ . En fait, nous devrons même autoriser  $G(g)$  à valoir  $+\infty$  pour certaines fonctions  $g$ .  $G$  ne sera donc pas à strictement parler une prévision linéaire, puisqu'à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ .

Comme plus haut, on obtiendra  $G$  en appliquant le théorème du sandwich de Roth. Nous devons d'abord trouver une fonctionnelle concave au-dessus de  $F$  et coïncidant avec elle en  $f$ . La formule magique est donnée ci-dessous.

**Définition 11.2.1** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ , et  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . On pose, pour tout  $g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  :

$$\widetilde{F}_f(g) = \inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^+ \\ \lambda f \geq g}} \left[ F(\lambda f) - \sup_{\substack{h \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ g+h \leq \lambda f}} F(h) \right]$$

Il est convenu que cette quantité vaut  $+\infty$  s'il n'existe aucun  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq g$ .

On écrira en abrégé  $\check{F}_f(g) = \inf_{\lambda/\lambda f \geq g} [F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h)]$ . Noter qu'on ne peut pas écrire en général  $F(\lambda f - g)$  au lieu de  $\sup_{h \leq \lambda f - g} F(h)$ , car  $\lambda f - g$  n'est pas en général une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Si on le pouvait,  $\check{F}_f(g)$  serait  $\inf_{\lambda/\lambda f \geq g} (F(\lambda f) - F(\lambda f - g))$ . Or  $F(\lambda f) - F(\lambda f - g) = \lambda[F(f) - F(f - 1/\lambda g)]$ . Si l'on imagine que  $F$  est dérivable — quoi que ceci veuille dire ici — et de dérivée  $\dot{F}(g)$  en  $g$ , alors  $F(f - 1/\lambda g)$  est approché au premier ordre par  $F(f) - 1/\lambda \dot{F}(g)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , donc  $F(\lambda f) - F(\lambda f - g)$  est approché par  $\dot{F}(g)$ .  $\check{F}_f(g)$  est donc, modulo un certain nombre d'abus, égal à la dérivée  $\dot{F}(g)$ .

**Lemme 11.2.2**  $\check{F}_f(0) = 0$ .

*Démonstration.*

$$\check{F}_f(0) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \left[ F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f} F(h) \right] = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^+} [F(\lambda f) - F(\lambda f)] = 0$$

□

**Lemme 11.2.3**  $\check{F}_f$  est croissante.

*Démonstration.* Soient  $g, g' \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , avec  $g \leq g'$ . Fixons  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq g'$ . Pour tout  $h' \leq \lambda f - g'$  dans  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , il existe  $h \leq \lambda f - g$  dans  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  telle que  $F(h) \geq F(h')$ , à savoir  $h'$  elle-même. Donc  $\sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) \geq \sup_{h' \leq \lambda f - g'} F(h')$ . Donc  $F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) \leq F(\lambda f) - \sup_{h' \leq \lambda f - g'} F(h')$ . En faisant varier  $\lambda$ ,

$$\inf_{\lambda/\lambda f \geq g'} \left[ F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) \right] \leq \inf_{\lambda/\lambda f \geq g'} \left[ F(\lambda f) - \sup_{h' \leq \lambda f - g'} F(h') \right]$$

Comme  $\lambda f \geq g'$  implique  $\lambda f \geq g$ , le côté gauche de l'inégalité ci-dessus vaut au moins

$$\inf_{\lambda/\lambda f \geq g} \left[ F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) \right]$$

c'est-à-dire  $\check{F}_f(g)$ . Le côté droit est par définition  $\check{F}_f(g')$ , donc  $\check{F}_f(g) \leq \check{F}_f(g')$ . □

**Lemme 11.2.4** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ .  $\check{F}_f$  est convexe : pour tout réel  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , pour tout  $g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,

$$\check{F}_f(\alpha g + (1 - \alpha)g') \leq \alpha \check{F}_f(g) + (1 - \alpha) \check{F}_f(g') \quad (11.1)$$

*Démonstration.* L'inégalité est évidente si  $\alpha = 0$  ou si  $\alpha = 1$ . Supposons donc  $0 < \alpha < 1$ .

S'il n'existe aucun  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq g$ , ou bien s'il n'existe aucun  $\lambda' \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda' f \geq g'$ , le côté droit de (11.1) vaut  $+\infty$ , et l'inégalité est donc trivialement vraie. Supposons donc qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq g$  et  $\lambda' \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda' f \geq g'$ .

Fixons pour l'instant  $\lambda$  et  $\lambda'$ . Par commodité, définissons l'abréviation  $g'' = \alpha g + (1 - \alpha)g'$ , et posons  $\lambda'' = \alpha\lambda + (1 - \alpha)\lambda'$ .

Pour tout  $h \leq \lambda f - g$  dans  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , pour tout  $h' \leq \lambda' f - g'$  dans  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , posons  $h'' = \alpha h + (1 - \alpha)h'$ . La fonction  $h''$  est bien continue, car  $\alpha$  et  $1 - \alpha$  sont positifs ou nuls. De plus,  $h'' \leq \lambda'' f - g''$ . Finalement, comme  $F$  est une prévision basse,  $F$  est concave, c'est-à-dire que  $\alpha F(h) + (1 - \alpha)F(h') \leq F(h'')$ . Nous venons de montrer que pour tous  $h \leq \lambda f - g$  et  $h' \leq \lambda' f - g'$ , il existe  $h'' \leq \lambda'' f - g''$  telle que  $\alpha F(h) + (1 - \alpha)F(h') \leq F(h'')$ . On en déduit

$$\sup_{h'' \leq \lambda'' f - g''} F(h'') \geq \alpha \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) + (1 - \alpha) \sup_{h' \leq \lambda' f - g'} F(h')$$

Comme  $\lambda'' = \alpha\lambda + (1 - \alpha)\lambda'$ ,

$$F(\lambda'' f) - \sup_{h'' \leq \lambda'' f - g''} F(h'') \leq \alpha \left[ F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) \right] + (1 - \alpha) \left[ F(\lambda' f) - \sup_{h' \leq \lambda' f - g'} F(h') \right]$$

En faisant varier  $\lambda$  et  $\lambda'$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \inf_{\substack{\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+ \\ \lambda f \geq g, \lambda' f \geq g' \\ \lambda'' = \alpha\lambda + (1 - \alpha)\lambda'}} \left[ F(\lambda'' f) - \sup_{h'' \leq \lambda'' f - g''} F(h'') \right] & (11.2) \\ & \leq \inf_{\substack{\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+ \\ \lambda f \geq g, \lambda' f \geq g'}} \left[ \alpha \left[ F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) \right] + (1 - \alpha) \left[ F(\lambda' f) - \sup_{h' \leq \lambda' f - g'} F(h') \right] \right] \end{aligned}$$

Clairement  $\lambda'' \in \mathbb{R}^+$  et  $\lambda'' f \geq g''$ . Rappelons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq g$  et  $\lambda' \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda' f \geq g'$ . Le côté droit de (11.2) vaut donc  $\alpha \widetilde{F}_f(g) + (1 - \alpha) \widetilde{F}_f(g')$ . Quant au côté gauche, on observe que pour tous  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\lambda f \geq g, \lambda' f \geq g'$ , la quantité  $\lambda'' = \alpha\lambda + (1 - \alpha)\lambda'$  vérifie  $\lambda'' \in \mathbb{R}^+$  et  $\lambda'' f \geq g''$  : le côté gauche de (11.2) est donc en particulier au moins aussi grand que la borne inférieure sur tous les  $\lambda'' \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\lambda'' f \geq g''$  de la quantité  $F(\lambda'' f) - \sup_{h'' \leq \lambda'' f - g''} F(h'')$ . Mais cette borne inférieure est exactement  $\widetilde{F}_f(g'')$ . Donc  $\widetilde{F}_f(g'') \leq \alpha \widetilde{F}_f(g) + (1 - \alpha) \widetilde{F}_f(g')$ .  $\square$

**Lemme 11.2.5** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ .  $\widetilde{F}_f$  est positivement homogène : pour tout  $\alpha \geq 0$ ,  $\widetilde{F}_f(\alpha g) = \alpha \widetilde{F}_f(g)$ .

*Démonstration.* Lorsque  $\alpha = 0$ , c'est par le lemme 11.2.2. Pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_f(\alpha g) &= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda f \geq \alpha g} \left[ F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - \alpha g} F(h) \right] \\ &= \inf_{\lambda' \in \mathbb{R}^+, \lambda' f \geq g} \left[ F(\alpha \lambda' f) - \sup_{h \leq \alpha \lambda' f - \alpha g} F(h) \right] \quad (\text{où } \lambda' = \lambda/\alpha) \\ &= \inf_{\lambda' \in \mathbb{R}^+, \lambda' f \geq g} \left[ F(\alpha \lambda' f) - \sup_{h' \leq \lambda' f - g} F(\alpha h') \right] \quad (\text{où } h' = h/\alpha) \\ &= \inf_{\lambda' \in \mathbb{R}^+, \lambda' f \geq g} \left[ \alpha F(\lambda' f) - \sup_{h' \leq \lambda' f - g} \alpha F(h') \right] \end{aligned}$$

puisque  $F$  est positivement homogène. Mais la quantité ci-dessus est exactement  $\alpha \check{F}_f(g)$ .  $\square$

**Lemme 11.2.6** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Pour tout  $g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $\check{F}_f(g) \geq F(g)$ .

*Démonstration.* Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq g$ , pour tout  $h \leq \lambda f - g$ ,  $F(\lambda f) \geq F(h) + F(g)$ . En effet,  $F(h) + F(g) \leq F(h+g)$  puisque  $F$  est sur-additive, et  $F(h+g) \leq F(\lambda f)$  par hypothèse.

Donc  $F(\lambda f) \geq \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) + F(g)$ , autrement dit  $F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - g} F(h) \geq F(g)$ . Le résultat se déduit en prenant la borne inférieure sur tous les  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\lambda f \geq g$ .  $\square$

**Lemme 11.2.7** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Alors  $\check{F}_f(f) = F(f)$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est la fonction nulle, alors  $\check{F}_f(f) = F(f) = 0$ . Sinon, le plus petit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq f$  est 1, et l'on a  $\check{F}_f(f) = \inf_{\lambda/\lambda f \geq f} [F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - f} F(h)] = F(1.f) - F(0) = F(f)$ .  $\square$

Alors que  $\check{F}_f$  peut prendre la valeur  $+\infty$ , ce n'est pas le cas si la borne inférieure de  $f$  est non nulle :

**Lemme 11.2.8** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ .  $\check{F}_f(\chi_X) \geq F(\chi_X)$ . De plus, si  $\inf_{x \in X} f(x) > 0$ , alors  $\check{F}_f(\chi_X) \leq \frac{1}{\inf_{x \in X} f(x)} F(f)$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \check{F}_f(\chi_X) &= \inf_{\lambda/\lambda f \geq \chi_X} \left[ F(\lambda f) - \sup_{h \leq \lambda f - \chi_X} F(h) \right] \\ &= \inf_{\lambda/\lambda f \geq \chi_X} [F(\lambda f) - F(\lambda f - \chi_X)] \end{aligned}$$

On observe en effet que  $h = \lambda f - \chi_X$  est continue : c'est la fonction qui à tout  $x \in X$  associe  $\lambda f(x) - 1$ . Puisque  $F$  est concave,  $F(\lambda f) \geq F(\lambda f - \chi_X) + F(\chi_X) \geq F(\chi_X)$  (car  $h = \lambda f - \chi_X \geq 0$ ), donc  $\check{F}_f(\chi_X) \geq F(\chi_X)$ .

Pour la seconde inégalité, puisque  $F(\lambda f - \chi_X) \geq 0$ , on obtient  $\check{F}_f(\chi_X) \leq \inf_{\lambda/\lambda f \geq \chi_X} F(\lambda f)$ . Posons  $a_0 = \inf_{x \in X} f(x)$ , et observons que  $\lambda f \geq \chi_X$  si et seulement si  $\lambda \geq 1/a_0$ . Donc  $\check{F}_f(\chi_X) \leq 1/a_0 F(f)$ .  $\square$

On obtient ainsi l'analogie souhaité du théorème 10.3.11 dans le cas non colinéaire. Rappelons que  $G$  est linéaire si et seulement si  $G(f + g) = G(f) + G(g)$  et  $G(\alpha f) = \alpha G(f)$  pour tous  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . Notons que le  $G$  trouvé sera à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  au lieu de  $\mathbb{R}^+$ , et que  $G(\chi_X)$  ne vaudra pas nécessairement  $F(\chi_X)$ .

**Théorème 11.2.9 (Tangente supérieure)** Soit  $X$  un espace topologique,  $F$  une prévision basse non nécessairement colinéaire sur  $X$ , et  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une fonctionnelle  $G$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , croissante et linéaire, telle que  $F \leq G$  et  $F(f) = G(f)$ . De plus, si  $\inf_{x \in X} f(x) \neq 0$ , alors  $G$  est une prévision linéaire.

*Démonstration.* Par les lemmes 11.2.5 et 11.2.4,  $\widetilde{F}_f$  est sous-linéaire.  $F$  est par hypothèse sur-linéaire. De plus,  $F$  et  $\widetilde{F}_f$  sont croissantes et  $F \leq \widetilde{F}_f$  par le lemme 11.2.6. Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, il existe une fonctionnelle  $G$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , croissante et linéaire, telle que  $F \leq G \leq \widetilde{F}_f$ . En utilisant le lemme 11.2.7,  $F(f) \leq G(f) \leq \widetilde{F}_f(f) = F(f)$ , donc  $G(f) = F(f)$ .

Si de plus  $\inf_{x \in X} f(x) \neq 0$ , par le lemme 11.2.8,  $G(\chi_X) \leq \widetilde{F}_f(\chi_X) \leq 1/\inf_{x \in X} f(x) F(f) < +\infty$ . Donc pour tout  $g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $G(g) \leq G(\sup_{x \in X} g(x) \chi_X) < +\infty$ . Comme  $G$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^+$  et non plus dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ ,  $G$  est alors une prévision linéaire.  $\square$

On serait tenté de penser que la construction précédente généralise celle de la première partie du théorème 10.3.11, au sens où l'on devrait pouvoir demander que  $G(\chi_X) = F(\chi_X)$  lorsque  $F$  est colinéaire. Ceci découlerait du fait que  $\widetilde{F}_f(\chi_X) = F(\chi_X)$ , ce qui semble devoir être le cas puisque  $\widetilde{F}_f(\chi_X) = \inf_{\lambda/\lambda f \geq \chi_X} [F(\lambda f) - F(\lambda f - \chi_X)] = \inf_{\lambda/\lambda f \geq \chi_X} F(\chi_X)$ . En effet, lorsque  $F$  est colinéaire, puisque  $\lambda f$  et  $\chi_X$  sont trivialement comonotones,  $F(\lambda f) - F(\lambda f - \chi_X) = F(\chi_X)$ . Mais ceci n'est correct que dans le cas où il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda f \geq \chi_X$ , c'est-à-dire lorsque  $\inf_{x \in X} f(x) > 0$ . Dans le cas contraire,  $\widetilde{F}_f(\chi_X) = +\infty$ .

Le théorème 11.2.9 ne permet pas de conclure que l'on peut choisir  $G$  continue lorsque  $F$  est continue et  $X$  est stablement localement relativement compact. Nous allons le montrer comme suit : étant donnée une fonctionnelle linéaire, non nécessairement continue,  $G_0$  telle que  $F \leq G_0$  et  $F(f) = G_0(f)$ , comme le garantit le théorème 11.2.9, nous poserons  $G(g) = \sup_{h \ll g} G_0(h)$ , et nous démontrerons que  $F$  est une fonctionnelle linéaire, continue, et telle que  $F \leq G$  et  $F(g) = G(f)$ .

Ceci demande un certain nombre de lemmes auxiliaires portant sur la relation  $\ll$  entre fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . On notera que ces lemmes peuvent aussi être utilisés pour fournir une démonstration différente de la seconde partie du théorème 10.3.11.

**Lemme 11.2.10** *Notons  $\ll$  la relation "bien au-dessous" de l'espace  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , et  $\ll_1$  celle de l'espace  $\langle X \rightarrow [0, 1] \rangle$  des fonctions continues  $f$  bornées par 1 sur  $X$ , c'est-à-dire telles que  $f(x) \leq 1$  pour tout  $x \in X$ .*

*Soit  $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i}$  une fonction étagée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  (resp.  $[0, 1]$ ),  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Soit  $g$  une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  (resp.  $[0, 1]$ ). Alors  $f \ll g$  (resp.  $f \ll_1 g$ ) si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $U_i \in g^{-1}[\sum_{j=1}^i a_j, +\infty[$ .*

*Démonstration.* 1. La condition est nécessaire. Fixons en effet  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , posons  $t_i$  la valeur  $\sum_{j=1}^i a_j$ , et considérons une famille dirigée quelconque d'ouverts  $(V_k)_{k \in I}$  tels que  $g^{-1}[t_i, +\infty[ \subseteq \bigcup_{k \in I} V_k$ . Posons  $W_k = V_k \cap g^{-1}[t_i, +\infty[$ . Pour chaque  $k \in I$  et chaque réel  $r$ ,  $0 < r < 1$ , soit  $f_{r,k}$  la fonction  $r \cdot (\max(\min(t_i, g), \chi_{W_k} \cdot g))$ . C'est une fonction continue, en tant que composée de fonctions continues ; notons en particulier que  $\max$ ,  $\min$  et la multiplication par  $r > 0$  sont Scott-continues ; le seul point à vérifier réellement est que  $\chi_{W_k} \cdot g$  est continue : l'image réciproque de  $]t, +\infty[$  par cette fonction est  $X$  tout entier si  $t < 0$ , et sinon  $W_k \cap g^{-1}[t, +\infty[$ , qui est bien ouvert. Dans le cas où l'on considère des fonctions de  $\langle X \rightarrow [0, 1] \rangle$ , et  $f \ll_1 g$ ,  $f_{r,k}$  est encore dans  $\langle X \rightarrow [0, 1] \rangle$ .

Si  $x \in W_k \subseteq g^{-1}]t_i, +\infty[$ ,  $f_{r,k}(x) = r.g(x)$ ; si  $x \in g^{-1}]t_i, +\infty[\setminus W_k$ ,  $f_{r,k}(x) = r.t_i$ ; si  $x \notin g^{-1}]t_i, +\infty[$  (en particulier  $x \notin W_k$ ),  $f_{r,k}(x) = r.g(x)$ .

Notons que si  $r \leq r'$  et  $V_k \subseteq V_{k'}$  (donc  $W_k \subseteq W_{k'}$ ), alors  $f_{r,k} \leq f_{r',k'}$  : si  $x \in W_k$  alors  $f_{r,k}(x) = r.g(x) \leq r'.g(x) = f_{r',k'}(x)$  car  $x \in W_{k'}$ ; si  $x \in W_{k'} \setminus W_k$ , donc  $x \in g^{-1}]t_i, +\infty[\setminus W_k$ , alors  $f_{r,k}(x) = r.t_i < r'.g(x) = f_{r',k'}(x)$ ; si  $x \in g^{-1}]t_i, +\infty[\setminus W_{k'}$ ,  $f_{r,k}(x) = r.t_i \leq r'.t_i = f_{r',k'}(x)$ ; et si  $x \notin g^{-1}]t_i, +\infty[$ , alors  $f_{r,k}(x) = r.g(x) \leq r'.g(x) = f_{r',k'}(x)$ . On en déduit que la famille  $(f_{r,k})_{0 < r < 1}$  est dirigée, puisque  $f_{r,k}$  et  $f_{r',k'}$  sont toutes les deux inférieures ou égales à  $f_{\max(r,r'), k''}$ , où  $k''$  est un indice tel que  $V_k, V_{k'} \subseteq V_{k''}$ .

De plus, la borne supérieure de cette famille est exactement  $g$  : pour tout  $x \in X$ , soit  $x \in g^{-1}]t_i, +\infty[ = \bigcup_{k \in I} W_k$ , donc il existe  $k \in I$  tel que  $x \in W_k$ , et alors  $f_{r,k}(x) = r.g(x)$ ; soit  $x \notin g^{-1}]t_i, +\infty[$  et alors  $f_{r,k}(x) = r.g(x)$  de nouveau; or  $\sup_{0 < r < 1} r.g(x) = g(x)$ .

Si  $f \ll g$ , on a donc nécessairement  $f \leq f_{r,k}$  pour un certain  $r$ ,  $0 < r < 1$ , et un certain  $k \in I$ . Alors, pour tout  $x \in U_i$ ,  $f(x) \geq t_i$ , donc  $f_{r,k}(x) \geq t_i$ . Par définition de  $f_{r,k}$ , ceci implique  $\max(\min(t_i, g(x)), \chi_{W_k}(x).g(x)) \geq t_i/r$ . Comme  $\min(t_i, g(x)) \leq t_i < t_i/r$ , nécessairement  $\chi_{W_k}(x).g(x) \geq t_i/r$ , donc  $x \in W_k$  et  $g(x) \geq t_i/r$ .

En particulier,  $U_i \subseteq W_k \subseteq V_k$ . La famille  $(V_k)_{k \in I}$  étant arbitraire,  $U_i \in g^{-1}]t_i, +\infty[$ .

2. Réciproquement, la condition est suffisante. Supposons en effet que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $U_i \in g^{-1}]t_i, +\infty[$ , où comme plus haut  $t_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j$ .

Montrons que  $f \ll g$  (resp.  $f \ll_1 g$ ). Soit  $(f_k)_{k \in I}$  une famille dirigée de fonctions continues quelconques de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  (resp.  $[0, 1]$ ) telles que  $g \leq \sup_{k \in I} f_k$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $g^{-1}]t, +\infty[ = \{x \in X \mid g(x) > t\} \subseteq \{x \in X \mid \sup_{k \in I} f_k(x) > t\} = \{x \in X \mid \exists k \in I \cdot f_k(x) > t\} = \bigcup_{k \in I} f_k^{-1}]t, +\infty[$ . La famille  $(f_k^{-1}]t, +\infty[)_{k \in I}$  est dirigée, car  $(f_k)_{k \in I}$  est dirigée et  $f_k \leq f_{k'}$  implique  $f_k^{-1}]t, +\infty[ \subseteq f_{k'}^{-1}]t, +\infty[$ . Comme  $U_i \in g^{-1}]t_i, +\infty[ \subseteq \bigcup_{k \in I} f_k^{-1}]t_i, +\infty[$ , il existe donc un indice  $k_i \in I$  tel que  $U_i \subseteq f_{k_i}^{-1}]t_i, +\infty[$ . Comme  $(f_k)_{k \in I}$  est dirigée, il existe un indice  $k \in I$  tel que  $f_{k_i} \leq f_k$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . On a alors  $U_i \subseteq f_{k_i}^{-1}]t_i, +\infty[ \subseteq f_k^{-1}]t_i, +\infty[$ .

Posons  $U_0 = X$ ,  $U_{n+1} = \emptyset$ . Pour tout  $x \in X$ , soit  $i$  l'unique entier entre 0 et  $n$  tel que  $x \in U_i \setminus U_{i+1}$ . Si  $i = 0$ , alors  $f(x) = 0$ , donc  $f(x) \leq f_k(x)$ . Si  $i \neq 0$ , alors  $f(x) = \sum_{j=1}^i a_j = t_i$ , et comme  $x \in U_i$ ,  $x \in f_k^{-1}]t_i, +\infty[$ , c'est-à-dire  $f_k(x) > t_i$ . Autrement dit  $f_k(x) > f(x)$ . Comme  $x$  est arbitraire,  $f_k \geq f$ . Donc  $f \ll g$ .  $\square$

**Proposition 11.2.11** *Soit  $X$  un espace localement relativement compact. Soit  $B$  l'ensemble des fonctions étagées de la forme  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k}$ , où  $K, N \in \mathbb{N}$ , et où  $(U_k)_{k=1}^N$  forme une suite décroissante d'ouverts de  $X$ .*

*Alors  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  est un ensemble ordonné continu, avec base  $B$ . L'espace  $\langle X \rightarrow [0, 1] \rangle$  des fonctions continues  $f$  bornées par 1 sur  $X$  est un cpo continu avec base  $B_1 = B \cap \langle X \rightarrow [0, 1] \rangle$ .*

*Démonstration.* Soit  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , resp.  $f \in \langle X \rightarrow [0, 1] \rangle$ . Considérons l'ensemble  $D$  des fonctions de la forme  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k}$ ,  $K, N \in \mathbb{N}$ , où  $U_k \in f^{-1}]k/2^K, +\infty[$  pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Clairement  $D \subseteq B$ , resp.  $D \subseteq B_1$ .

Montrons d'abord que  $D$  est un ensemble dirigé.  $D$  est non vide : prendre  $N = 0$ . Ensuite, si  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k}$  et  $1/2^{K'} \sum_{k=1}^{N'} \chi_{V_k}$  sont dans  $D$ , on peut supposer que  $K = K'$  et  $N = N'$  sans perte de généralité. Montrons d'abord que l'on peut supposer  $K = K'$  : si par exemple

$K' < K$ , on peut réécrire la seconde fonction sous la forme  $1/2^K \sum_{k=1}^{2^{K-K'}N'} \chi_{W_k}$ , où  $W_k = V_{\lfloor (k+2^{K-K'}-1)/2^{K-K'} \rfloor}$  pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq 2^{K-K'}N'$ . Sachant  $K = K'$ , on peut aussi demander  $N = N'$  : si  $N' < N$  par exemple, alors  $1/2^{K'} \sum_{k=1}^{N'} \chi_{V_k} = 1/2^{K'} \sum_{k=1}^N \chi_{V_k}$ , où l'on pose  $V_k = \emptyset$  pour tout  $k$ ,  $N' < k \leq N$ .

Si l'on a donc deux fonctions de la forme  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k}$  et  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{V_k}$  dans  $D$ , alors  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k \cup V_k}$  est encore dans  $D$ , car  $U_k \cup V_k \in f^{-1}]k/2^K, +\infty[$ , en utilisant le lemme 3.4.9. Donc  $D$  est dirigé.

Par le lemme 4.1.6,  $f$  est la borne supérieure des fonctions  $f_K = 1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{f^{-1}]k/2^K, +\infty[$  lorsque  $K \in \mathbb{N}$  et  $N = \lfloor a2^K \rfloor$ , où  $a = \sup_{x \in X} f(x)$ . Or, comme  $X$  est localement relativement compact,  $\mathcal{O}(X)$  est un cpo continu par le lemme 3.4.10 ; donc  $f^{-1}]k/2^K, +\infty[$  est l'union de la famille dirigée des ouverts  $U \in f^{-1}]k/2^K, +\infty[$ , donc  $\chi_{f^{-1}]k/2^K, +\infty[} = \sup_{U \in f^{-1}]k/2^K, +\infty[} \chi_U$ . Donc  $f_K$  est une borne supérieure dirigée d'éléments de  $D$ . Comme  $f = \sup_{K \in \mathbb{N}} f_K$ ,  $f$  aussi est borne supérieure d'éléments de  $D$ . Par le lemme 11.2.10, tous les éléments de  $D$  sont bien au-dessous de  $f$ .  $\square$

**Lemme 11.2.12** Soit  $f$  une fonction étagée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $g$  une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et  $a > 0$  un réel tel que  $a \geq \sup_{x \in X} f(x)$ ,  $a \geq \sup_{x \in X} g(x)$ . Alors  $f \ll g$  si et seulement si  $f/a \ll_1 g/a$ .

*Démonstration.* Posons  $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i}$ . Alors  $f \ll g$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $U_i \in g^{-1}] \sum_{j=1}^i a_j, +\infty[$  par le lemme 11.2.10. Toujours par le lemme 11.2.10,  $f/a \ll_1 g/a$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $U_i \in (g/a)^{-1}] \sum_{j=1}^i a_j/a, +\infty[$ . Mais on observe que  $(g/a)^{-1}] \sum_{j=1}^i a_j/a, +\infty[ = g^{-1}] \sum_{j=1}^i a_j, +\infty[$ . Les conditions  $f \ll g$  et  $f/a \ll_1 g/a$  sont donc bien équivalentes.  $\square$

**Lemme 11.2.13** La relation  $\ll$  sur  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  admet la propriété d'interpolation raffinée : si  $f$  est une fonction étagée telle que  $f \ll g$ , alors il existe une fonction étagée  $f'$ , dans la base  $B$  définie à la proposition 11.2.11, telle que  $f \ll f' \ll g$ .

*Démonstration.* Car  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  est un ensemble ordonné continu.  $\square$

**Lemme 11.2.14** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et supposons  $X$  localement relativement compact. Si  $h \ll f + g$ , il existe  $f', g' \in B$  tels que  $h \leq f' + g'$ ,  $f' \ll f$  et  $g' \ll g$ .

*Démonstration.* Rappelons la base  $B$  définie à la proposition 11.2.11. Soit  $B_f$  l'ensemble des fonctions  $f' \in B$  telles que  $f' \leq f$ ,  $B_g$  celui des fonctions  $g' \in B$  telles que  $g' \leq g$ . Par la proposition 11.2.11,  $f = \sup_{f' \in B_f} f'$ ,  $g = \sup_{g' \in B_g} g'$ . Puisque l'addition est Scott-continue,  $f + g = \sup_{f' \in B_f, g' \in B_g} f' + g'$ . De plus,  $B_f$  et  $B_g$  sont dirigées, donc  $B_f \times B_g$  aussi. Comme  $h \ll f + g$ , il existe  $f' \in B_f$  et  $g' \in B_g$  telles que  $h \leq f' + g'$ .  $\square$

La présentation des fonctions de la base  $B$  nous permet un calcul explicite de la somme de deux fonctions de  $B$ . Le lemme suivant est un peu plus général, dans le sens où l'on ne demande pas aux  $A_i$  et aux  $B_j$  d'être ouverts, ce qui sera parfois commode dans la suite. Les fonctions  $f'$  et  $g'$  sont dans  $B$  si  $A_i = U_i$  est ouvert, et  $B_j = V_j$  est ouvert.

**Lemme 11.2.15** Soient  $f' = 1/2^K \sum_{i=1}^N \chi_{A_i}$ ,  $g' = 1/2^K \sum_{j=1}^{N'} \chi_{B_j}$  deux fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $X \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_N$  et  $X \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_{N'}$ . Par extension, notons  $A_0 = B_0 = X$ , et  $A_i = \emptyset$  pour tout  $i > N$ ,  $B_j = \emptyset$  pour tout  $j > N'$ . Alors  $f' + g' = 1/2^K \sum_{k=1}^{N+N'} \chi_{W_k}$ , où  $W_k = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \\ i+j=k}} (A_i \cap B_j)$ .

*Démonstration.* Rappelons que choisir le même  $K$  pour  $f'$  et  $g'$  n'entache pas la généralité du lemme. Pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $f'(x) + g'(x) \geq k/2^K$  si et seulement s'il existe deux entiers  $i, j$  tels que  $i + j = k$ ,  $f'(x) \geq i/2^K$ , et  $g'(x) \geq j/2^K$ , autrement dit tels que  $i + j = k$ , et  $x \in A_i \cap B_j$ . Donc  $f' + g' = 1/2^K \sum_{k \geq 1} \chi_{W_k}$ . Or pour  $k > N + N'$ , quels que soient les entiers naturels  $i$  et  $j$  tels que  $i + j = k$ , soit  $i > N$  soit  $j > N'$ , donc soit  $U_i = \emptyset$  soit  $V_j = \emptyset$ , c'est-à-dire  $W_k = \emptyset$ . La somme s'arrête donc à l'indice  $k = N + N'$  au plus tard.  $\square$

**Lemme 11.2.16** Soit  $X$  un espace relativement cohérent. Pour toutes fonctions continues bornées  $f, g$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , et toutes fonctions  $f', g'$  de la base  $B$  définie à la proposition 11.2.11, si  $f' \ll f$  et  $g' \ll g$ , alors  $f' + g' \ll f + g$ .

*Démonstration.* Écrivons  $f' = 1/2^K \sum_{i=1}^N \chi_{U_i}$ ,  $g' = 1/2^K \sum_{j=1}^N \chi_{V_j}$ . Comme lors de la démonstration de la proposition 11.2.11, on peut supposer que  $f'$  et  $g'$  s'écrivent avec le même  $K$  et le même  $N$ . Par extension, notons  $U_0 = V_0 = X$ , et  $U_i = V_i = \emptyset$  pour tout  $i > N$ . Par le lemme 11.2.15,  $f' + g' = 1/2^K \sum_{k=1}^{2N} \chi_{W_k}$ , où  $W_k = \bigcup_{i+j=k} (U_i \cap V_j)$ .

Par hypothèse,  $f' \ll f$ , donc par le lemme 11.2.10,  $U_i \in f^{-1}]i/2^K, +\infty[$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2^K$ . C'est encore vrai pour  $i > 2^K$ , puisqu'alors  $U_i$  est vide, donc bien au-dessous au sens de  $\in$  que n'importe quel ouvert. De même, comme  $g' \ll g$ ,  $V_j \in g^{-1}]j/2^K, +\infty[$  pour tout  $j \geq 1$ .

On en déduit que  $U_i \cap V_j \in (f + g)^{-1}]k/2^K, +\infty[$  pour tous entiers  $i, j \geq 1$  tels que  $i + j = k$ . En effet, on a  $U_i \cap V_j \subseteq U_i \in f^{-1}]i/2^K, +\infty[$  et  $U_i \cap V_j \subseteq V_j \in g^{-1}]j/2^K, +\infty[$ , donc  $U_i \cap V_j \in f^{-1}]i/2^K, +\infty[ \cap g^{-1}]j/2^K, +\infty[$ , puisque  $X$  est relativement cohérent (définition 3.6.17). Or, pour tout  $x \in f^{-1}]i/2^K, +\infty[ \cap g^{-1}]j/2^K, +\infty[$ ,  $f(x) > i/2^K$  et  $g(x) > j/2^K$ , donc  $f(x) + g(x) > k/2^K$ , autrement dit  $x \in (f + g)^{-1}]k/2^K, +\infty[$ . Donc  $U_i \cap V_j \in (f + g)^{-1}]k/2^K, +\infty[$ .

On a aussi  $U_i \cap V_j \in (f + g)^{-1}]k/2^K, +\infty[$  lorsque  $i + j = k \geq 1$  mais  $i$  ou  $j$  est nul. Si par exemple  $i = 0$ , alors  $j = k$ ,  $U_i \cap V_j = X \cap V_k = V_k \in g^{-1}]k/2^K, +\infty[ \subseteq (f + g)^{-1}]k/2^K, +\infty[$ .

Donc  $U_i \cap V_j \in (f + g)^{-1}]k/2^K, +\infty[$  pour tous entiers  $i, j$  tels que  $i + j = k$ ,  $k \geq 1$ . Par le lemme 3.4.9,  $W_k = \bigcup_{i+j=k} U_i \cap V_j \in (f + g)^{-1}]k/2^K, +\infty[$  pour tout  $k \geq 1$ . Par le lemme 11.2.10, on a donc  $f' + g' \ll f + g$ .  $\square$

**Lemme 11.2.17** Soit  $X$  un espace compact. Pour tout  $h' \in B$ , pour tout  $a > 0$ ,  $h' \ll a\chi_X$  si et seulement si  $h'$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i}$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , avec  $\sum_{i=1}^n a_i < a$ .

En particulier,  $h' \ll a\chi_X$  si et seulement s'il existe  $a' < a$  tel que  $h' \leq a'\chi_X$ .

*Démonstration.* Pour tout  $h' \in B$ , écrivons  $h' = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i}$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Par le lemme 11.2.10,  $h' \ll a\chi_X$  si et seulement si  $U_i \in \emptyset$  pour tout  $i$  tel que  $\sum_{j=1}^i a_j \geq a$ , et  $U_i \in X$  pour tout  $i$  tel que  $\sum_{j=1}^i a_j < a$ . Ceci revient à demander que  $U_i = \emptyset$  pour tout  $i$  tel que  $\sum_{j=1}^i a_j \geq a$ ; comme  $X$  est compact, on a toujours  $U_i \in X$ . Les fonctions  $h'$

telles que  $h' \ll a\chi_X$  sont donc exactement celles de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i\chi_{U_i}$ ,  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  avec  $\sum_{i=1}^n a_i < a$ .

Si  $h' \ll a\chi_X$ , on a donc  $h' \leq a'\chi_X$ , où  $a'$  est n'importe quel réel strictement compris entre  $\sum_{i=1}^n a_i$  et  $a$ . Réciproquement, si  $h' \leq a'\chi_X$  avec  $a' < a$ , alors  $h' \ll a\chi_X$  puisque  $a'\chi_X \ll a\chi_X$  par le lemme 11.2.10.  $\square$

**Lemme 11.2.18** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. On rappelle la formule de Scott : pour toute fonctionnelle  $F$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}^+}$ ,  $\tau(F)$  est la fonction définie par*

$$\tau(F)(f) = \sup_{g \in B, g \ll f} F(g)$$

où la base  $B$  est définie à la proposition 11.2.11. Alors  $\tau(F)$  est une fonctionnelle continue de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}^+}$ . De plus,  $\tau(F)$  est la plus grande fonctionnelle continue inférieure ou égale à  $F$ .

Si  $F$  est une prévision, resp. basse, resp. haute, resp. linéaire, alors il en est de même de  $\tau(F)$ .

Si de plus  $X$  est compact, et  $F(a\chi_X + f) = a + F(f)$  pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  et tout  $a > 0$ , alors  $\tau(F)(a\chi_X + f) = a + \tau(F)(f)$  pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  et tout  $a > 0$ .

*Démonstration.* On applique le lemme 3.6.16,  $B$  étant une base de l'ensemble ordonné continu  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  par la proposition 11.2.11.

Supposons maintenant que  $F$  soit une prévision. La fonction  $\tau(F)$  est alors à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , car si  $a = \sup_{x \in X} f(x)$ , alors  $\tau(F)(f) = \sup_{g \in B, g \ll f} F(g) \leq F(a\chi_X) < +\infty$ . Elle est positivement homogène par le lemme 11.2.12. Elle est basse dès que  $F$  l'est, car :

$$\begin{aligned} \tau(F)(f + g) &= \sup_{h \in B, h \ll f+g} F(h) \\ &= \sup_{h', h'' \in B, h' \ll f, h'' \ll g} F(h' + h'') \quad \text{par le lemme 11.2.14 et le lemme 11.2.16} \\ &\geq \sup_{h', h'' \in B, h' \ll f, h'' \ll g} (F(h') + F(h'')) \\ &= \sup_{h' \in B, h' \ll f} F(h') + \sup_{h'' \in B, h'' \ll g} F(h'') = \tau(F)(f) + \tau(F)(g) \end{aligned}$$

De même, si  $F$  est haute alors  $\tau(F)$  aussi, et si  $F$  est linéaire alors  $\tau(F)$  aussi.

Finalement, si  $F(a\chi_X + f) = a + F(f)$  pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  et tout  $a > 0$ , et si  $X$  est compact, alors pour tout  $a > 0$ ,  $\tau(F)(a\chi_X + f) = \sup_{h \in B, h \ll a\chi_X + f} F(h) = \sup_{h', h'' \in B, h' \ll a\chi_X, h'' \ll f} F(h' + h'') = \sup_{a' < a, h'' \in B, h'' \ll f} F(a'\chi_X + h'')$  (par le lemme 11.2.17)  $= \sup_{a' < a, h'' \in B, h'' \ll f} (a' + F(h'')) = a + \tau(F)(f)$ .  $\square$

**Théorème 11.2.19 (Tangente supérieure, cas continu)** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact,  $F$  une prévision basse continue, et  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une fonctionnelle linéaire continue  $G$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}^+}$  telle que  $F \leq G$  et  $F(f) = G(f)$ .*

*Démonstration.* Par le théorème 11.2.9, il existe une fonctionnelle croissante linéaire  $G_0$  telle que  $F \leq G_0$  et  $F(f) = G_0(f)$ . Posons  $G = \tau(G_0)$ . Par le lemme 11.2.18,  $G$  est une fonctionnelle linéaire continue. De plus, c'est la plus grande fonctionnelle continue inférieure ou égale à  $G_0$ , donc  $F \leq G$ . Enfin,  $G \leq G_0$ , donc  $G(f) \leq F(f)$ ; comme  $F \leq G$ ,  $F(f) \leq G(f)$ ; donc  $F(f) = G(f)$ .  $\square$

On peut, comme dans le cas linéaire, s'intéresser de façon duale aux prévisions hautes. Il semble qu'il soit difficile de trouver une fonctionnelle  $\widehat{F}_f$  croissante, au-dessous de  $F$ , concave et positivement homogène, et telle que  $\widehat{F}_f(f) = F(f)$ . Nous ramènerons l'étude des prévisions hautes à celle des prévisions basses dans le cas des prévisions normalisées, à la section 11.5.

### 11.3 Prévisions normalisées

Un jeu  $\nu$  sur  $X$  est normalisé si et seulement si  $\nu(X) = 1$ . Il est tentant, par analogie, de définir les prévisions normalisées comme étant les prévisions  $F$  sur  $X$  telles que  $F(\chi_X) = 1$ . Ceci est acceptable lorsque  $F$  est colinéaire, mais ne sera pas suffisant dans le cas général.

**Définition 11.3.1 (Prévision normalisée)** *Une prévision  $F$  sur  $X$  est normalisée si et seulement si, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $F(a+f) = a + F(f)$ .*

*On note  $\mathbf{P}_1(X)$  l'espace des prévisions continues normalisées sur  $X$ ,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$  l'espace des prévisions basses continues normalisées sur  $X$ ,  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$  l'espace des prévisions hautes continues normalisées sur  $X$ . On note aussi  $\mathbf{P}_{1\text{ wk}}(X)$ ,  $\nabla \mathbf{P}_{1\text{ wk}}(X)$ , et  $\Delta \mathbf{P}_{1\text{ wk}}(X)$  respectivement ces espaces munis de leur topologie faible.*

En toute rigueur, nous aurions dû écrire  $a\chi_X + f$  plutôt que  $a + f$ , mais cette dernière notation est en un sens plus parlante. Notons au passage que la dernière partie du lemme 11.2.18 énonce que si  $F$  est normalisée, alors  $\tau(F)$  aussi, dès que  $X$  est compact.

**Proposition 11.3.2** *Si  $\nu$  est un jeu normalisé, alors  $\alpha_e(\nu)$  est une prévision colinéaire normalisée. Si  $F$  est une prévision colinéaire normalisée sur  $X$ , alors  $\gamma_e(F)$  est un jeu normalisé. En particulier,  $\alpha_e \dashv \gamma_e$  est une surrection de Galois des jeux normalisés (resp. convexes, concaves) dans les prévisions colinéaires normalisées (resp. basses, hautes). De plus,  $\alpha_e$  et  $\gamma_e$  sont Scott-continues.*

*D'autre part,  $\alpha_e$  et  $\gamma_e$  définissent un isomorphisme d'ordre :*

- entre l'espace  $\mathbf{J}_1(X)$  des jeux continus normalisés et l'espace  $\mathbf{P}_1^*(X)$  des prévisions colinéaires continues normalisées ;
- entre l'espace  $\nabla \mathbf{J}_1(X)$  des jeux convexes continus normalisés et l'espace  $\nabla \mathbf{P}_1^*(X)$  des prévisions basses colinéaires continues normalisées ;
- entre l'espace  $\Delta \mathbf{J}_1(X)$  des jeux concaves continus normalisés et l'espace  $\Delta \mathbf{P}_1^*(X)$  des prévisions hautes colinéaires continues normalisées ;
- et entre l'espace  $\mathbf{V}_1(X)$  des valuations continues normalisées et l'espace  $\mathbf{P}_1^\Delta(X)$  des prévisions linéaires continues normalisées ;

et un homéomorphisme :

- entre l'espace  $\mathbf{J}_{1\ wk}(X)$  des jeux continus normalisés et l'espace  $\mathbf{P}_{1\ wk}^*(X)$  des prévisions colinéaires continues normalisées ;
- entre l'espace  $\nabla \mathbf{J}_{1\ wk}(X)$  des jeux convexes continus normalisés et l'espace  $\nabla \mathbf{P}_{1\ wk}^*(X)$  des prévisions basses colinéaires continues normalisées ;
- entre l'espace  $\Delta \mathbf{J}_{1\ wk}(X)$  des jeux concaves continus normalisés et l'espace  $\Delta \mathbf{P}_{1\ wk}^*(X)$  des prévisions hautes colinéaires continues normalisées ;
- entre l'espace  $\mathbf{V}_{1\ wk}(X)$  des valuations continues normalisées et l'espace  $\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$  des prévisions linéaires continues normalisées ;

ces espaces étant munis de leur topologie faible.

*Démonstration.* Si  $\nu$  est normalisé, en posant  $F = \alpha_e(\nu)$ , on a  $F(a + f) = F(a\chi_X + f) = aF(\chi_X) + F(f)$ , puisque  $F$  est colinéaire. En effet,  $a\chi_X$  et  $f$  sont toujours comonotones : les deux sont composées de  $f$ , l'une avec la fonction constante retournant  $a$ , l'autre avec l'identité, et l'on utilise le lemme 4.4.2. Comme  $F(\chi_X) = \nu(X) = 1$ , on conclut.

Réciproquement, si  $F$  est une prévision colinéaire normalisée, alors en prenant pour  $f$  la fonction identiquement nulle, et  $a = 1$ ,  $F(\chi_X) = 1 + F(0) = 1$ . Donc  $\gamma_e(F)(X) = 1$ .

Le reste de la proposition est par la proposition 10.1.7, le théorème 10.1.8, et le théorème 11.1.2.

□

Rappelons que, si nous avons adopté le nom de “prévision basse”, c'était par analogie avec la notion homonyme de Walley (1991), voir aussi Maaß (2001). Pour Maaß, les prévisions basses sont juste les fonctionnelles à valeurs réelles, et les prévisions basses *cohérentes* sont celles,  $F$ , telles que  $F(f) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i F(f_i) + \lambda_0$  dès que  $f \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \lambda_0$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Toute prévision basse cohérente est telle que  $F(g + a) \geq F(g) + a$  pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$  : prendre  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $f_1 = g$ ,  $\lambda_0 = a$ ,  $f = g + a$ . Mais aussi  $F(g + a) \leq F(g) + a$  : prendre  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $f_1 = g + a$ ,  $\lambda_0 = -a$ ,  $f = g$ . Toute prévision basse cohérente, au sens de Walley et Maass, est donc normalisée. La réciproque, selon laquelle toute prévision basse normalisée est cohérente, est évidente.

Les différences principales entre nos prévisions basses normalisées et les prévisions basses cohérentes de Walley et Maass sont les suivantes. Nous avons déjà mentionné à la suite de la définition 10.1.1 que nos prévisions s'annulent en 0 :  $F(0) = 0$  ; ce n'est pas le cas nécessairement chez Walley et Maass. Une autre différence est que les prévisions de Walley ou Maass sont en général des fonctionnelles de  $Z$  vers  $\mathbb{R}^+$ , où  $Z$  est une algèbre de fonctions de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , pas nécessairement  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  tout entier. Finalement, la théorie des prévisions de Walley et Maass est bien définie lorsque  $X$  est fini, et la bonne définition dans le cas où  $X$  est infini est plus floue.

La définition des prévisions normalisées rend évidente le prolongement suivant de la proposition 11.1.4.

**Proposition 11.3.3** *Soit  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $\vartheta$  une fonction continue de  $X$  vers  $P_{wk}(Y)$ . Si  $F$  est normalisée et  $\vartheta(x)$  est normalisée pour tout  $x \in X$ , alors la composition séquentielle  $F; \vartheta$  est une prévision normalisée sur  $Y$ .*

*Démonstration.*  $F; \vartheta$  est une prévision, par la proposition 11.1.4, sachant que  $\vartheta$  est bornée au sens de la définition 11.1.3, puisque  $\vartheta(x)$  est normalisée pour tout  $x$ . Ensuite,  $(F; \vartheta)(a + f) =$

$F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(a + f)) = F(\lambda x \cdot a + \vartheta(x)(f))$  (car  $\vartheta(x)$  est normalisée)  $= F(a + \lambda x \cdot \vartheta(x)(f)) = a + F(\lambda x \cdot \vartheta(x)(f))$  (puisque  $F$  est normalisée)  $= a + (F; \vartheta)(f)$ .  $\square$

Dans le cas de prévisions normalisées, on peut raffiner la notion de tangente  $G$  à  $F$  en  $f$ , en demandant maintenant que  $G$  ne prenne plus  $+\infty$  comme valeur. Ce sera aussi le cas des prévisions sous-normalisées, mais plutôt que de le démontrer indépendamment, nous le déduirons via une astuce à la Edalat-Alvarez-Manilla, à la section 11.4.

**Définition 11.3.4** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ , et  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . On pose, pour tout  $g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  :

$$\check{F}_f(g) = \inf_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \check{F}_{f+\epsilon}(g)$$

Ceci est toujours défini, et est toujours un réel positif ou nul, jamais  $+\infty$ . En effet, par le lemme 11.2.8, dès que  $\epsilon > 0$ ,  $\check{F}_{f+\epsilon}(g) \leq \sup_{x \in X} g(x) \cdot \frac{1}{\epsilon + \inf_{x \in X} f(x)} F(f + \epsilon) < +\infty$ .

**Lemme 11.3.5**  $\check{F}_f(0) = 0$ .  $\check{F}_f$  est croissante.  $\check{F}_f$  est positivement homogène. Pour tout  $g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $\check{F}_f(g) \geq F(g)$ .

*Démonstration.* Utilisations directes des lemmes 11.2.2, 11.2.3, 11.2.5, 11.2.6.  $\square$

**Lemme 11.3.6** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Si  $F$  est normalisée, alors  $\check{F}_{f+\epsilon}$  est décroissante en  $\epsilon$ .

*Démonstration.* Supposons  $\epsilon < \epsilon'$ . Si  $\check{F}_{f+\epsilon}(g) = +\infty$  (ce qui implique  $\epsilon = 0$ ), on a bien  $\check{F}_{f+\epsilon'}(g) \leq \check{F}_{f+\epsilon}(g)$ . Supposons donc que  $\check{F}_{f+\epsilon}(g) < +\infty$ . Rappelons que

$$\check{F}_{f+\epsilon}(g) = \inf_{\lambda/\lambda(f+\epsilon) \geq g} \left[ F(\lambda(f+\epsilon)) - \sup_{h \leq \lambda(f+\epsilon)-g} F(h) \right]$$

Or  $F(\lambda(f+\epsilon')) = \lambda(\epsilon' - \epsilon) + F(\lambda(f+\epsilon))$  puisque  $F$  est normalisée. De plus, si  $g \leq \lambda(f+\epsilon)$ , alors :

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon' - \epsilon) + \sup_{h \leq \lambda(f+\epsilon)-g} F(h) &= \sup_{h \leq \lambda(f+\epsilon)-g} F(h + \lambda(\epsilon' - \epsilon)) \quad \text{puisque } F \text{ est normalisée} \\ &\leq \sup_{h' \leq \lambda(f+\epsilon')-g} F(h') \end{aligned}$$

puisque pour tout  $h \leq \lambda(f + \epsilon) - g$ ,  $h' = h + \lambda(\epsilon' - \epsilon)$  est inférieur ou égal à  $\lambda(f + \epsilon') - g$ .  
Donc

$$\begin{aligned}
\check{F}_{f+\epsilon}(g) &= \inf_{\lambda/\lambda(f+\epsilon) \geq g} \left[ F(\lambda(f + \epsilon')) - [\lambda(\epsilon' - \epsilon) + \sup_{h \leq \lambda(f+\epsilon) - g} F(h)] \right] \\
&\geq \inf_{\lambda/\lambda(f+\epsilon) \geq g} \left[ F(\lambda(f + \epsilon')) - \sup_{h' \leq \lambda(f+\epsilon') - g} F(h') \right] \\
&\geq \inf_{\lambda/\lambda(f+\epsilon') \geq g} \left[ F(\lambda(f + \epsilon')) - \sup_{h' \leq \lambda(f+\epsilon') - g} F(h') \right] \\
&\quad \text{puisque si } g \leq \lambda(f + \epsilon) \text{ alors } g \leq \lambda(f + \epsilon') \\
&= \check{F}_{f+\epsilon'}(g)
\end{aligned}$$

□

**Lemme 11.3.7** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Si  $F$  est normalisée, alors  $\check{F}_f$  est convexe.

*Démonstration.* Pour tous  $\epsilon', \epsilon'' \geq 0$ , il existe  $\epsilon \geq 0$  tel que  $\check{F}_{f+\epsilon}(g) + \check{F}_{f+\epsilon}(g') \leq \check{F}_{f+\epsilon'}(g) + \check{F}_{f+\epsilon''}(g')$ . En effet, par le lemme 11.3.6, il suffit de prendre  $\epsilon = \max(\epsilon', \epsilon'')$ . Donc  $\inf_{\epsilon \geq 0} [\check{F}_{f+\epsilon}(g) + \check{F}_{f+\epsilon}(g')] \leq \inf_{\epsilon' \geq 0} \check{F}_{f+\epsilon'}(g) + \inf_{\epsilon'' \geq 0} \check{F}_{f+\epsilon''}(g')$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}
\check{F}_f(g + g') &= \inf_{\epsilon \geq 0} \check{F}_{f+\epsilon}(g + g') \\
&\leq \inf_{\epsilon \geq 0} [\check{F}_{f+\epsilon}(g) + \check{F}_{f+\epsilon}(g')] \quad \text{par le lemme 11.2.4 et le lemme 11.2.5} \\
&\leq \inf_{\epsilon' \geq 0} \check{F}_{f+\epsilon'}(g) + \inf_{\epsilon'' \geq 0} \check{F}_{f+\epsilon''}(g') \\
&= \check{F}_f(g) + \check{F}_f(g')
\end{aligned}$$

$\check{F}_f$  est donc sous-linéaire, donc convexe puisque positivement homogène par le lemme 11.3.5. □

**Lemme 11.3.8** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Si  $F$  est normalisée, alors  $\check{F}_f(f) = F(f)$ .

*Démonstration.* Clairement  $\check{F}_f(g) \leq \check{F}_f(g)$  (prendre  $\epsilon = 0$ ). Lorsque  $g = f$ , par le lemme 11.2.7,  $\check{F}_f(f) = F(f)$ . Donc  $\check{F}_f(f) \leq F(f)$ . L'inégalité réciproque est par le lemme 11.3.5. □

**Lemme 11.3.9** Soit  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Si  $F$  est normalisée, alors  $\check{F}_f(\chi_X) = 1$ .

*Démonstration.* S'il existe  $\lambda$  tel que  $1 \leq \lambda(f + \epsilon)$ ,

$$\begin{aligned}
\check{F}_{f+\epsilon}(\chi_X) &= \inf_{\lambda/1 \leq \lambda(f+\epsilon)} \left[ F(\lambda(f + \epsilon)) - \sup_{h \leq \lambda(f+\epsilon) - 1} F(h) \right] \\
&= \inf_{\lambda/1 \leq \lambda(f+\epsilon)} \left[ F(\lambda(f + \epsilon) - 1) + 1 - \sup_{h \leq \lambda(f+\epsilon) - 1} F(h) \right]
\end{aligned}$$

puisque  $F$  est normalisée. Comme  $\sup_{h \leq \lambda(f+\epsilon)-1} F(h) = F(\lambda(f+\epsilon)-1)$ ,  $\check{F}_{f+\epsilon}(\chi_X) = 1$ . D'autre part, lorsqu'il n'existe pas de  $\lambda$  tel que  $1 \leq \lambda(f+\epsilon)$ ,  $\check{F}_{f+\epsilon}(\chi_X) = +\infty$ . Ce dernier ne peut se produire que lorsque  $\epsilon = 0$ , à condition que  $\inf_{x \in X} f(x) = 0$ . Dans ce cas,  $\check{F}(\chi_X)$  est la borne inférieure de 1 et de  $+\infty$ ; sinon,  $\check{F}(\chi_X)$  vaut 1, directement.  $\square$

**Théorème 11.3.10 (Tangente supérieure, cas normalisé)** *Soit  $X$  un espace topologique,  $F$  une prévision basse normalisée sur  $X$ , et  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une prévision linéaire normalisée  $G$  telle que  $F \leq G$  et  $F(f) = G(f)$ .*

*Si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $F$  est une prévision basse continue normalisée, alors on peut de plus demander que  $G$  soit continue.*

*Démonstration.*  $F$  est sur-linéaire,  $\check{F}_f$  est sous-linéaire par le lemme 11.3.7,  $F$  est croissante et  $\check{F}_f$  aussi par le lemme 11.3.5. Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, il existe une fonctionnelle  $G$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}}^+$ , croissante et linéaire, telle que  $F \leq G \leq \check{F}_f$ . Par le lemme 11.3.8,  $F(f) \leq G(f) \leq \check{F}_f(f) = F(f)$ , donc  $G(f) = F(f)$ . Ensuite,  $\check{F}_f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , donc  $G$  aussi.  $G$  est donc une prévision. Finalement,  $G$  est normalisée car pour toute fonction continue bornée  $g$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $G(a+g) = aG(\chi_X) + G(g)$  (puisque  $G$  est linéaire)  $= a + G(g)$ . En effet,  $1 = F(\chi_X) \leq G(\chi_X) \leq \check{F}_f(\chi_X) = 1$  par le lemme 11.3.9.

Dans le cas où  $X$  est stablement localement relativement compact et  $F$  continue, on procède comme au théorème 11.2.19. Soit  $G_0$  une prévision linéaire normalisée telle que  $F \leq G_0$  et  $F(f) = G_0(f)$ . Posons  $G = \tau(G)$ . Par le lemme 11.2.18,  $G$  est une prévision linéaire continue. Comme  $G$  est la plus grande au-dessous de  $G_0$  et que  $F \leq G_0$ , on a donc  $F \leq G$ . Puisque  $G \leq G_0$ ,  $G(f) \leq G_0(f) = F(f) \leq G(f)$ , donc  $G(f) = F(f)$ . Finalement, on montre que  $G$  est normalisée. Pour ceci, on peut faire l'économie d'une hypothèse de compacité de  $X$ , comme le suggérerait le lemme 11.2.18. Montrons en effet que  $G(a+g) = a + G(g)$  : par linéarité,  $G(a+g) = aG(\chi_X) + G(g)$ , et  $G(\chi_X) = 1$  car  $G(\chi_X) \leq G_0(\chi_X) = 1$  d'une part, et  $G(\chi_X) \geq F(\chi_X) = 1$  d'autre part.  $\square$

Le théorème 11.3.10 généralise le théorème 10.3.11 dans le cas des prévisions basses non nécessairement colinéaires. (Ce n'était pas le cas des théorèmes 11.2.9 et 11.2.19.) En effet, si  $F$  est une prévision basse colinéaire, soit  $F = 0$  et le théorème est évidente, soit  $1/aF$  est une prévision basse (colinéaire) normalisée, où  $a = F(\chi_X)$ . Par le théorème 11.3.10, il existe une prévision linéaire normalisée  $G_a$  telle que  $1/aF \leq G_a$  et  $1/aF(f) = G_a(f)$ . On en déduit le théorème 10.3.11 en prenant  $G = aG_a$ , et de même dans le cas où  $X$  est stablement localement relativement compact et  $F$  est continue.

## 11.4 Prévisions sous-normalisées

Tout ce que l'on peut faire sur les prévisions normalisées se transporte au cas des prévisions sous-normalisées, par une astuce similaire à celle d'Alvarez-Manilla, présentée à la section 6.3.

De nouveau, la définition des prévisions sous-normalisées est un peu subtile. La définition ne devrait cependant pas être très étonnante, une fois que l'on s'est habitué à celle des prévisions normalisées.

**Définition 11.4.1 (Prévision sous-normalisée)** Une prévision  $F$  sur  $X$  est sous-normalisée si et seulement si, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $F(a+f) \leq a + F(f)$ .

On note  $\mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  l'espace des prévisions continues sous-normalisées sur  $X$ ,  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  l'espace des prévisions basses continues sous-normalisées sur  $X$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  l'espace des prévisions hautes continues sous-normalisées sur  $X$ . On note aussi  $\mathbf{P}_{\leq 1 w_k}(X)$ ,  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1 w_k}(X)$ , et  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1 w_k}(X)$  respectivement ces espaces munis de leur topologie faible.

La proposition suivante se démontre exactement comme la proposition 11.3.2.

**Proposition 11.4.2** Si  $\nu$  est un jeu sous-normalisé, alors  $\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$  est une prévision colinéaire sous-normalisée. Si  $F$  est une prévision colinéaire sous-normalisée sur  $X$ , alors  $\gamma_{\mathcal{C}}(F)$  est un jeu sous-normalisé. En particulier,  $\alpha_{\mathcal{C}} \dashv \gamma_{\mathcal{C}}$  est une surrection de Galois des jeux sous-normalisés (resp. convexes, concaves) dans les prévisions colinéaires sous-normalisées (resp. basses, hautes). De plus,  $\alpha_{\mathcal{C}}$  et  $\gamma_{\mathcal{C}}$  sont Scott-continues.

D'autre part,  $\alpha_{\mathcal{C}}$  et  $\gamma_{\mathcal{C}}$  définissent un isomorphisme d'ordre :

- entre l'espace  $\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$  des jeux continus sous-normalisés et l'espace  $\mathbf{P}_{\leq 1}^*(X)$  des prévisions colinéaires continues sous-normalisées ;
- entre l'espace  $\nabla \mathbf{J}_{\leq 1}(X)$  des jeux convexes continus sous-normalisés et l'espace  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}^*(X)$  des prévisions basses colinéaires continues sous-normalisées ;
- entre l'espace  $\Delta \mathbf{J}_{\leq 1}(X)$  des jeux concaves continus sous-normalisés et l'espace  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}^*(X)$  des prévisions hautes colinéaires continues sous-normalisées ;
- et entre l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  des valuations continues sous-normalisées et l'espace  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X)$  des prévisions linéaires continues sous-normalisées ;

et un homéomorphisme :

- entre l'espace  $\mathbf{J}_{\leq 1 w_k}(X)$  des jeux continus sous-normalisés et l'espace  $\mathbf{P}_{\leq 1 w_k}^*(X)$  des prévisions colinéaires continues sous-normalisées ;
- entre l'espace  $\nabla \mathbf{J}_{\leq 1 w_k}(X)$  des jeux convexes continus sous-normalisés et l'espace  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1 w_k}^*(X)$  des prévisions basses colinéaires continues sous-normalisées ;
- entre l'espace  $\Delta \mathbf{J}_{\leq 1 w_k}(X)$  des jeux concaves continus sous-normalisés et l'espace  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1 w_k}^*(X)$  des prévisions hautes colinéaires continues sous-normalisées ;
- et entre l'espace  $\mathbf{V}_{\leq 1 w_k}(X)$  des valuations continues sous-normalisées et l'espace  $\mathbf{P}_{\leq 1 w_k}^{\Delta}(X)$  des prévisions linéaires continues sous-normalisées ;

ces espaces étant munis de leurs topologies faibles.

De même, la proposition suivante se démontre comme la proposition 11.3.3.

**Proposition 11.4.3** Soit  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $F$  une prévision sur  $X$ , et  $\vartheta$  une fonction continue de  $X$  vers  $P_{w_k}(Y)$ . Si  $F$  est sous-normalisée et  $\vartheta(x)$  est sous-normalisée pour tout  $x \in X$ , alors la composition séquentielle  $F; \vartheta$  est une prévision sous-normalisée sur  $Y$ .

On peut ajouter une clause au lemme 11.2.18 :

**Lemme 11.4.4** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Si  $F$  est une prévision sous-normalisée, alors il en est de même de  $\mathfrak{r}(F)$ .*

*Démonstration.* Si  $F$  est sous-normalisée, alors pour tout  $a$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{r}(F)(a\chi_X + f) &= \sup_{h \in B, h \ll a\chi_X + f} F(h) \\
 &= \sup_{h', h'' \in B, h' \ll a\chi_X, h'' \ll f} F(h' + h'') \\
 &\leq \sup_{h'' \in B, h'' \ll f} F(a\chi_X + h'') \quad \text{puisque si } h' \ll a\chi_X, \text{ alors } h' \leq a\chi_X, \\
 &\quad \text{et parce que } F \text{ est croissante} \\
 &\leq \sup_{h'' \in B, h'' \ll f} (a + F(h'')) \quad \text{puisque } F \text{ est sous-normalisée} \\
 &= a + \mathfrak{r}(F)(f)
 \end{aligned}$$

Donc  $\mathfrak{r}(F)$  est sous-normalisée.  $\square$

En général, on peut transporter tout ce que l'on sait sur les prévisions normalisées aux prévisions sous-normalisées. Le prochain lemme est une adaptation au cadre des prévisions de l'astuce d'Alvarez-Manilla, imitant le lemme 6.3.9.

**Lemme 11.4.5** *Soit  $X$  un espace topologique, et  $F$  une prévision sous-normalisée sur  $X$ . Posons  $F_\perp(f') = f'(\perp) + F(f'_{|X} - f'(\perp)\chi_X)$  pour toute fonction continue bornée  $f'$  de  $X_\perp$  dans  $\mathbb{R}^+$ , et où  $f'_{|X}$  dénote la restriction de  $f'$  à  $X$ .*

*Si  $F = \alpha_e(\nu)$  pour un jeu sous-normalisé  $\nu$ , alors  $F_\perp = \alpha_e(\nu_\perp^1)$ .*

*Pour toute prévision sous-normalisée  $F$  sur  $X$ ,  $F_\perp$  est une prévision normalisée sur  $X_\perp$ . Si  $F$  est basse, resp. haute, il en est de même de  $F_\perp$ .*

*Démonstration.* Soit  $F = \alpha_e(\nu)$ , où  $\nu(X) \leq 1$ . Pour toute fonction continue bornée  $f'$  de  $X_\perp$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,

$$\alpha_e(\nu_\perp^1)(f') = \int_{x \in X_\perp} f'(x) d\nu_\perp^1 = \int_0^{+\infty} \nu_\perp^1(f'^{-1}]t, +\infty[) dt$$

Or  $\nu_\perp^1(f'^{-1}]t, +\infty[) = 1$  si  $\perp \in f'^{-1}]t, +\infty[$ , c'est-à-dire si  $f'^{-1}]t, +\infty[ = X_\perp$ , puisque le seul ouvert de  $X_\perp$  qui contient  $\perp$  est  $X_\perp$  lui-même, voir le lemme 6.3.8. Or  $\perp \in f'^{-1}]t, +\infty[$  si et seulement si  $f'(\perp) > t$ . Si  $f'(\perp) \leq t$ ,  $\nu_\perp^1(f'^{-1}]t, +\infty[) = \nu(f'^{-1}]t, +\infty[) = \nu(f'_{|X}^{-1}]t, +\infty[)$ .  
Donc

$$\begin{aligned}
 \int_{x \in X_\perp} f'(x) d\nu_\perp^1 &= \int_0^{f'(\perp)} 1 dt + \int_{f'(\perp)}^{+\infty} \nu(f'_{|X}^{-1}]t, +\infty[) dt \\
 &= f'(\perp) + \int_{f'(\perp)}^{+\infty} \nu(f'_{|X}^{-1}]t, +\infty[) dt \\
 &= f'(\perp) + \int_0^{+\infty} \nu(f'_{|X}^{-1}]t, +\infty[) dt - \nu(X)f'(\perp)
 \end{aligned}$$

En effet, l'intégrale de 0 à  $f'(\perp)$  de  $\nu(f'_{|X^{-1}}]t, +\infty[)$  vaut  $\nu(X)f'(\perp)$ . C'est parce que si  $t < f'(\perp)$ ,  $f'_{|X^{-1}}]t, +\infty[ = \{x \in X | f'(x) > t\} \supseteq \{x \in X | f'(x) \geq f'(\perp)\} = X$ , puisque  $f'$  est continue donc croissante et que  $\perp$  est le plus petit élément de  $X_\perp$  par le lemme 6.3.8 ; donc  $\nu(f'_{|X^{-1}}]t, +\infty[) = \nu(X)$ .

Or  $F_\perp(f') = f'(\perp) + F(f'_{|X} - f'(\perp)\chi_X) = f'(\perp) + F(f'_{|X}) - \nu(X)f'(\perp)$ , puisque  $F = \alpha_c(\nu)$  est colinéaire et  $f'_{|X}$  et  $\chi_X$  sont comonotones. Donc  $F_\perp(f') = \alpha_c(\nu_\perp^1)(f')$ .

Montrons maintenant que, quelle que soit la prévision sous-normalisée  $F$  sur  $X$ ,  $F_\perp$  est une prévision sur  $X_\perp$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $F_\perp(\alpha f') = \alpha f'(\perp) + F(\alpha f'_{|X} - \alpha f'(\perp)\chi_X) = \alpha F_\perp(f')$ , donc  $F_\perp$  est positivement homogène. Si  $f' \leq g'$ , alors  $F_\perp(f') = f'(\perp) + F(f'_{|X} - f'(\perp)\chi_X) \leq f'(\perp) + F(g'_{|X} - f'(\perp)\chi_X)$  (puisque  $F$  est croissante)  $= f'(\perp) + F(g'_{|X} - g'(\perp)\chi_X) + [g'(\perp) - f'(\perp)]\chi_X \leq f'(\perp) + [g'(\perp) - f'(\perp)] + F(g'_{|X} - g'(\perp)\chi_X)$  (car  $F$  est sous-normalisée)  $= F(g')$ .

Il est facile de voir que  $F_\perp$  est normalisée : pour tout  $a \geq 0$ ,  $F_\perp(a + f') = a + f'(\perp) + F(a + f'_{|X} - a - f'(\perp)) = a + F_\perp(f')$ . On a utilisé ici que  $F$  était colinéaire, et que  $a$  et  $f'_{|X}$  sont comonotones.

Si  $F$  est basse, on a  $F_\perp(f' + g') = f'(\perp) + g'(\perp) + F(f'_{|X} + g'_{|X} - f'(\perp) - g'(\perp)) = f'(\perp) + g'(\perp) + F([f'_{|X} - f'(\perp)] + [g'_{|X} - g'(\perp)]) \leq f'(\perp) + g'(\perp) + F(f'_{|X} - f'(\perp)) + F(g'_{|X} - g'(\perp))$  (car  $F$  est basse)  $= F_\perp(f') + F_\perp(g')$ . De même, si  $F$  est haute,  $F_\perp$  aussi.  $\square$

**Lemme 11.4.6** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Si  $F = \alpha_c(\nu)$  pour un jeu sous-normalisé continu  $\nu$ , alors  $\tau(F_\perp) = F_\perp = \alpha_c(\nu_\perp^1)$ .*

*Pour toute prévision sous-normalisée continue  $F$  sur  $X$ ,  $\tau(F_\perp)$  est une prévision normalisée continue sur  $X_\perp$ . Si  $F$  est basse, resp. haute, il en est de même de  $\tau(F_\perp)$ .*

*Démonstration.* D'abord, si  $\nu$  est un jeu sous-normalisé continu, d'une part  $F_\perp = \alpha_c(\nu_\perp^1)$  par le lemme 11.4.5, d'autre part  $\nu_\perp^1$  est un jeu continu par le lemme 6.3.9. Donc  $F_\perp = \alpha_c(\nu_\perp^1)$  est continue par la proposition 4.2.1, et en particulier  $\tau(F_\perp) = F_\perp$ .

Supposons que  $F$  soit continue, et notons qu'il ne semble pas que  $F_\perp$  soit continue en général. Cependant,  $\tau(F_\perp)$  est une prévision continue, qui est basse dès que  $F$  l'est, et haute dès que  $F$  l'est, par le lemme 11.2.18. Elle est de plus normalisée, toujours par le lemme 11.2.18, car  $X_\perp$  est compact, par le lemme 6.3.8.

On dispose aussi d'une construction en sens inverse, c'est-à-dire une construction analogue à l'astuce d'Edalat.

**Lemme 11.4.7** *Notons  $\Subset_\perp$  la relation "bien au-dessous" sur les ouverts de  $X_\perp$ , en réservant la notation  $\Subset$  pour celle portant sur les ouverts de  $X$ . Alors  $U \Subset_\perp V$  si et seulement si  $V = X_\perp$ , ou bien  $U \Subset V \subseteq X$ .*

*Si  $X$  est localement relativement compact, resp. relativement cohérent, resp. stablement localement relativement compact, il en est de même de  $X_\perp$ .*

*Démonstration.* Rappelons que les ouverts de  $X_\perp$  sont ceux de  $X$ , plus  $X_\perp$  tout entier. Comme  $X_\perp$  est compact, par le lemme 6.3.8, on a  $U \Subset_\perp V$  dès que  $V = X_\perp$ . Si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $X$ , et  $U \Subset V$ , alors  $U \Subset_\perp V$ . En effet, pour toute famille dirigée  $(W_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X_\perp$ , la famille  $(W_i \cap X)_{i \in I}$  est une famille dirigée d'ouverts de  $X$  ; si l'union des  $W_i$  contient  $V$ , alors

l'union des  $W_i \cap X$  aussi puisque  $V \subseteq X$ , donc  $U \subseteq W_i \cap X$  pour un certain  $i \in I$ , c'est-à-dire  $U \subseteq W_i$ . Réciproquement, si  $U \in_{\perp} V$ , soit  $V = X_{\perp}$  soit  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $X$ . Mais alors il est évident que  $U \in V$ .

Si  $X$  est localement relativement compact, fixons  $x \in X_{\perp}$  et  $V$  un ouvert de  $X_{\perp}$  contenant  $x$ . Si  $V = X_{\perp}$ ,  $V$  est compact, donc  $x \in V \in_{\perp} V$ . Sinon, il existe un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $x \in U \in V$ . Donc  $X_{\perp}$  est localement relativement compact.

Si  $X$  est relativement cohérent, fixons trois ouverts  $U, V_1, V_2$  de  $X_{\perp}$  tels que  $U \in_{\perp} V_1$  et  $U \in_{\perp} V_2$ . Si  $V_1 = X_{\perp}$  ou  $V_2 = X_{\perp}$ , alors il est clair que  $U \in_{\perp} V_1 \cap V_2$ , puisque  $V_1 \cap V_2$  vaut alors soit  $V_1$  soit  $V_2$ . Sinon,  $U, V_1$ , et  $V_2$  sont trois ouverts de  $X$ . Donc  $U \in V_1, U \in V_2$ , d'où  $U \in V_1 \cap V_2$ . On en déduit  $U \in_{\perp} V_1 \cap V_2$ . Donc  $X_{\perp}$  est relativement cohérent.  $\square$

**Lemme 11.4.8** *Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , soit  $f_0$  la fonction de  $X_{\perp}$  vers  $\mathbb{R}^+$  qui à  $\perp$  associe 0 et à tout  $x \in X$  associe  $f(x)$ . Alors  $f_0$  est continue.*

*Pour toute prévision normalisée  $F'$  sur  $X_{\perp}$ , définissons  $F'_{\perp}(f) = F'(f_0)$ . Alors  $F'_{\perp}$  est une prévision sous-normalisée sur  $X$ . Si  $F'$  est basse, resp. haute, resp. linéaire, resp. continue, alors il en est de même de  $F'_{\perp}$ .*

*Pour toute prévision sous-normalisée  $F$  sur  $X$ ,  $(F_{\perp})_{\perp} = F$ . Si de plus  $F$  est continue, et  $X$  est localement relativement compact, alors  $(\tau(F_{\perp}))_{\perp} = F$ .*

*Démonstration.* L'image réciproque de l'ouvert  $]t, +\infty[$  par  $f_0$  vaut  $f^{-1}]t, +\infty[$  si  $t > 0$  (un ouvert de  $X$ , donc de  $X_{\perp}$ ), ou bien  $X_{\perp}$  tout entier si  $t \leq 0$ . Donc  $f_0$  est continue.

Soit  $F'$  une prévision normalisée sur  $X_{\perp}$ . Fixons  $a \geq 0$ . Notons que  $(a + f)_0 \leq a + f_0$ ; la seule différence entre les deux fonctions est que la première envoie  $\perp$  vers 0, la seconde envoie  $\perp$  vers  $a$ . Donc  $F'_{\perp}(a + f) = F'((a + f)_0) \leq F'(a + f_0) = a + F'(f_0) = a + F'_{\perp}(f)$ , en utilisant le fait que  $F'$  est normalisée.  $F'_{\perp}$  est croissante car  $F'$  l'est et  $f \leq g$  implique  $f_0 \leq g_0$ .  $F'_{\perp}$  est positivement homogène car  $F'$  l'est et  $(\alpha f)_0 = \alpha f_0$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Le fait que  $F'_{\perp}$  soit basse, resp. haute, resp. linéaire dès que  $F'$  l'est est parce que  $(f + g)_0 = f_0 + g_0$ . Finalement, si  $F'$  est continue, alors  $F'_{\perp}$  est continue, car si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée de fonctions continues bornées de borne supérieure  $f$ , alors  $(f_{i0})_{i \in I}$  est elle aussi dirigée, et de borne supérieure  $f_0$ .

Soit  $F$  une prévision sous-normalisée sur  $X$ . Alors  $(F_{\perp})_{\perp}(f) = F_{\perp}(f_0) = f_0(\perp) + F(f_0|_X - f_0(\perp)\chi_X) = F(f)$ . Donc  $(F_{\perp})_{\perp} = F$ .

Finalement, si  $F$  est de surcroît continue, et  $X$  est localement relativement compact, montrons que  $(\tau(F_{\perp}))_{\perp} = F$ . Notons  $B$  la base de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  donnée à la proposition 11.2.11. Ceci est bien défini car  $X$  est localement relativement compact. Par le lemme 11.4.7,  $X_{\perp}$  est aussi localement relativement compact : notons  $B_{\perp}$  la base correspondante de  $\langle X_{\perp} \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . Notons que si  $g' \in B_{\perp}$  et  $g'(\perp) = 0$ , alors  $g'$  s'écrit  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k}$ , où  $K, N \in \mathbb{N}$ , et où  $(U_k)_{k=1}^{2^K}$  forme une suite décroissante d'ouverts de  $X$ . Ceci découle de la définition (proposition 11.2.11). Donc  $g' = g_0$  pour un certain  $g \in B$ , à savoir  $g = 1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k}$ , vue cette fois-ci comme fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Ceci arrive notamment lorsque  $g' \ll f_0$ , puisqu'alors  $g'(\perp) \leq f_0(\perp) = 0$ . De plus, par le lemme 11.2.10 et le lemme 11.4.7,  $g_0 \ll f_0$  si et seulement si  $g \ll f$ . On en déduit que  $(\tau(F_{\perp}))_{\perp}(f) = \tau(F_{\perp})(f_0) = \sup_{g' \in B_{\perp}, g' \ll f_0} F_{\perp}(g') = \sup_{g \in B, g \ll f} F_{\perp}(g_0) = \sup_{g \in B, g \ll f} F(g)$  (car  $(F_{\perp})_{\perp} = F$ ) =  $F(f)$  (car  $F$  est continue et  $B$  est une base).  $\square$

On en déduit :

**Théorème 11.4.9 (Tangente supérieure, cas sous-normalisé)** Soit  $X$  un espace topologique,  $F$  une prévision basse sous-normalisée sur  $X$ , et  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une prévision linéaire sous-normalisée  $G$  telle que  $F \leq G$  et  $F(f) = G(f)$ .

Si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $F$  est une prévision basse continue sous-normalisée, alors on peut de plus demander que  $G$  soit continue.

*Démonstration.* Pour la première partie,  $F_\perp$  est une prévision basse normalisée sur  $X_\perp$ , par le lemme 11.4.5. Construisons la fonction  $f_0$  du lemme 11.4.8. Par le théorème 11.3.10, il existe une prévision linéaire normalisée  $G_1$  telle que  $F_\perp \leq G_1$  et  $F_\perp(f_0) = G_1(f_0)$ . Posons  $G = G_{1\downarrow}$ . Par construction,  $(F_\perp)_\downarrow \leq G_{1\downarrow}$ , donc  $F \leq G$ , par le lemme 11.4.8. De plus,  $F(f) = (F_\perp)_\downarrow(f) = F_\perp(f_0) = G_1(f_0) = G(f)$ .

Pour la deuxième partie, par le lemme 11.4.7,  $X_\perp$  est stablement localement relativement compact. Donc par le théorème 11.3.10, on peut demander que  $G_1$  soit continue. Mais alors  $G$  est continue par le lemme 11.4.8.  $\square$

## 11.5 Tangentes inférieures

On peut, comme dans le cas linéaire, s'intéresser de façon duale aux prévisions hautes. Nous allons procéder par techniques de dualité convexe-concave. La définition 11.5.2 ci-dessous s'inspire de la proposition 6.2.14, au sens où si  $F = \alpha_e(\nu)$ ,  $F^\perp$  vaut par construction  $\alpha_e(\nu^\perp)$ . On observe d'abord que toute prévision normalisée s'étend naturellement en une fonctionnelle sur tout  $\langle X \rightarrow \mathbb{R} \rangle$ , pas seulement  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ .

**Lemme 11.5.1** Soit  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ .  $F$  s'étend en une fonctionnelle de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R} \rangle$  vers  $\mathbb{R}$  par  $\widehat{F}(f) = F(f + a) - a$ , pour tout  $a \geq -\inf_{x \in X} f(x)$ .

$\widehat{F}$  est normalisée, au sens où  $\widehat{F}(f + a) = \widehat{F}(f) + a$  pour toute fonction  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R} \rangle$  et tout  $a \in \mathbb{R}$ .

$\widehat{F}$  est croissante : si  $f \leq f'$  alors  $\widehat{F}(f) \leq \widehat{F}(f')$ .

$\widehat{F}$  est positivement homogène : si  $\alpha \geq 0$  alors  $\widehat{F}(\alpha f) = \alpha \widehat{F}(f)$ .

Si  $F$  est colinéaire, alors  $\widehat{F}$  est colinéaire.

Si  $F$  est basse (concave) alors  $\widehat{F}$  est concave. Si  $F$  est haute (convexe) alors  $\widehat{F}$  est convexe.

Si  $F$  est (Scott-)continue, alors  $\widehat{F}$  est Scott-continue.

*Démonstration.* Notons d'abord que la définition ne dépend pas du choix de  $a$  : si  $a, a' \geq -\inf_{x \in X} f(x)$ , en supposant par exemple  $a \geq a'$ , alors  $F(f + a) - a = F(f + a' + (a - a')) - a = F(f + a') + (a - a') - a$  (puisque  $F$  est normalisée)  $= F(f + a') - a'$ .

Montrons que  $\widehat{F}$  est normalisée. Soit  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R} \rangle$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , et fixons  $b$  de sorte que  $b \geq -\inf_{x \in X} f(x)$  et  $b \geq -\inf_{x \in X} (f(x) + a)$ . Alors  $\widehat{F}(f + a) = F(f + a + b) - b = F(f + (a + b)) - (a + b) + a = \widehat{F}(f) + a$ .

$\widehat{F}$  est croissante : si  $f \leq f'$  alors, en fixant  $a \geq -\inf_{x \in X} f(x)$ ,  $\widehat{F}(f) = F(f + a) - a \leq F(f' + a) - a = \widehat{F}(f')$ .

$\widehat{F}$  est positivement homogène : lorsque  $\alpha = 0$ ,  $\widehat{F}(\alpha f) = \widehat{F}(0) = F(0) = 0$ , et sinon  $\widehat{F}(\alpha f) = F(\alpha f + a) - a$  (pour  $a \geq -\inf_{x \in X} \alpha f(x)$ )  $= \alpha[F(f + a/\alpha) - a/\alpha] = \alpha \widehat{F}(f)$ .

Si  $F$  est colinéaire, considérons deux fonctions comonotones  $f$  et  $g$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Prenons  $a \geq -\inf_{x \in X} f(x)$  et  $b \geq -\inf_{x \in X} g(x)$ . On a donc aussi  $a + b \geq -\inf_{x \in X} (f(x) + g(x))$ , car  $\inf_{x \in X} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in X} f(x) + \inf_{x \in X} g(x)$ . Puisque  $f$  et  $g$  sont comonotones,  $f + a$  et  $g + b$  le sont aussi. En effet, on peut écrire  $f = f' \circ h$  et  $g = g' \circ h$  avec  $f'$  et  $g'$  croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $h$  continue de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , par le lemme 4.4.2. Alors  $f + a = (f' + a) \circ h$  et  $g + b = (g' + b) \circ h$ . On en déduit que  $\widehat{F}(f + g) = F(f + g + (a + b)) - (a + b) = F((f + a) + (g + b)) - a - b = F(f + a) + F(g + b) - a - b = \widehat{F}(f) + \widehat{F}(g)$ . Donc  $\widehat{F}$  est colinéaire.

Si  $F$  est concave, alors  $\widehat{F}(f + g) = F(f + g + (a + b)) - (a + b)$ , où nous prenons  $a \geq -\inf_{x \in X} f(x)$  et  $b \geq -\inf_{x \in X} g(x)$ , donc  $a + b \geq -\inf_{x \in X} (f(x) + g(x))$ . Or  $F(f + g + (a + b)) = F((f + a) + (g + b)) \geq F(f + a) + F(g + b)$ . Donc  $\widehat{F}(f + g) \geq F(f + a) - a + F(g + b) - b = \widehat{F}(f) + \widehat{F}(g)$ . De même, si  $F$  est convexe, alors  $\widehat{F}$  l'est aussi.

Si  $F$  est continue, considérons une famille dirigée  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , et supposons que cette famille ait une borne supérieure  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R} \rangle$ . Fixons  $a$  de sorte que  $a \geq -\inf_{x \in X} f_{i_0}(x)$  pour au moins un  $i_0 \in I$ . La sous-famille  $(f_i)_{i \in J}$  tels que  $a \geq -\inf_{x \in X} f_i(x)$  est non vide, et donc dirigée puisque si  $a \geq -\inf_{x \in X} f_i(x)$  et  $a \geq -\inf_{x \in X} f_j(x)$ , il existe  $k \in I$  tel que  $f_i, f_j \leq f_k$ , donc  $-\inf_{x \in X} f_k(x) \leq a$ , c'est-à-dire  $k \in J$ . De plus, la borne supérieure de cette sous-famille est encore  $f$ , car pour tout  $i \in I$ , il existe  $k \in J$  tel que  $f_i \leq f_k$ . En effet, pour tout  $i \in I$ , il existe  $k \in I$  tel que  $f_i, f_{i_0} \leq f_k$ . Alors  $a \geq -\inf_{x \in X} f_k(x)$ , donc  $k \in J$ . On peut donc considérer sans perte de généralité que  $a \geq -\inf_{x \in X} f_i(x)$  pour tout  $i \in I$ . Alors  $\widehat{F}(f) = F(f + a) - a = F(\sup_{i \in I} f_i + a) - a = \sup_{i \in I} F(f_i + a) - a = \sup_{i \in I} \widehat{F}(f_i)$ .  $\square$

Lorsque  $F = \alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$ , c'est-à-dire lorsque  $F$  est la fonctionnelle d'intégration de Choquet des fonctions à valeurs positives,  $\widehat{F}$  est la fonctionnelle d'intégration de Choquet des fonctions à valeurs réelles quelconques. Rappelons que nous avons supposé  $F$  normalisée, donc  $\nu(X) = 1$ . On a en effet :

$$\int_{x \in X} (f(x) + a) d\nu = \int_{x \in X} f(x) d\nu + a\nu(X) = \int_{x \in X} f(x) d\nu + a$$

puisque l'intégrale de Choquet est linéaire en les fonctions comonotones (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , pas seulement dans  $\mathbb{R}^+$ , voir la proposition 4.4.3), et que  $f$  et  $a\chi_X$  sont toujours comonotones.

Il n'est donc pas très surprenant de retrouver toutes les propriétés de l'intégrale de Choquet pour  $\widehat{F}$ .

**Définition 11.5.2** Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute prévision normalisée  $F$  sur  $X$ , on définit la fonctionnelle  $F^\perp$  de  $\langle X^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$  par :

$$F^\perp(g) = - \inf_{\substack{f \text{ étagée} \\ f+g \geq 0}} \widehat{F}(f)$$

On utilise  $\widehat{F}$  plutôt que  $F$  car, à l'évidence,  $f$  prendra en général des valeurs négatives. On notera en abrégé  $F^\perp(g) = -\inf_{f \geq -g} \widehat{F}(f)$ . Notons que si  $a \geq \sup_{x \in X} g(x)$ ,  $F^\perp(g) = a - \inf_{f \geq -g} F(f + a)$ .

**Proposition 11.5.3** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute prévision normalisée  $F$  sur  $X$ ,  $F^\perp$  est une prévision normalisée sur  $X^d$ .*

*Démonstration.* D'abord,  $F^\perp(0) = -\inf_{f \geq 0} \widehat{F}(f) = 0$  puisque  $\widehat{F}$  est croissante par le lemme 11.5.1, que la borne inférieure est atteinte en  $f = 0$ , et que  $\widehat{F}(0) = 0$ . Ensuite, pour tout  $\alpha > 0$ ,  $F^\perp(\alpha g) = -\inf_{f + \alpha g \geq 0} \widehat{F}(f) = -\inf_{f' + g \geq 0} \widehat{F}(\alpha f')$ , en posant  $f' = 1/\alpha f$ . Comme  $\widehat{F}(\alpha f') = \alpha \widehat{F}(f')$  par le lemme 11.5.1, on en déduit  $F^\perp(\alpha g) = \alpha F^\perp(g)$ .  $F^\perp$  est donc positivement homogène.

Soit  $g \leq g'$ . Alors  $F^\perp(g) = -\inf_{f + g \geq 0} \widehat{F}(f) \leq -\inf_{f + g' \geq 0} \widehat{F}(f)$ , puisque toute fonction étagée telle que  $f + g \geq 0$  est telle que  $f + g' \geq 0$ . Donc  $F^\perp$  est croissante.

Finalement,  $F^\perp(\chi_{X^d}) = -\widehat{F}(-\chi_X) = 1 - F(1 - \chi_X) = 1$ , donc  $F^\perp$  est normalisée.  $\square$

Pour étudier  $F^\perp$ , et en particulier établir que  $F^\perp$  est continue, nous aurons besoin de quelques notions nouvelles. L'idée est de transporter les propriétés de style  $Q \subseteq U$  reliant compacts saturés et ouverts, à des propriétés du même style sur des fonctions. On commence par un cas simple reliant des fonctions étagées.

**Définition 11.5.4** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $g$  une fonction continue bornée de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $g \sqsupseteq -f$  si et seulement si l'on peut écrire :*

$$f = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i} \quad g = -\sum_{i=0}^n a_i \chi_{Q_i}$$

avec les mêmes coefficients  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  une suite décroissante d'ouverts,  $X = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \dots \supseteq Q_n$  une suite décroissante de compacts saturés, et à condition que  $Q_i \subseteq U_i$  pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Dans la définition ci-dessus,  $f$  et  $g$  sont reliées à condition que  $f$  soit étagée,  $g$  soit aussi d'une forme ressemblant à celle des fonctions étagées, et avec les mêmes coefficients. (Nous laissons en exercice la vérification que  $g$  est effectivement une fonction étagée de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$ .) Puisque l'on demande  $Q_i \subseteq U_i$  pour tout  $i$ , il est clair que si  $g \sqsupseteq -f$ , alors  $f \geq -g$ , donc  $g \geq -f$ .

En passant au dual  $X^d$ , on peut définir la notion duale  $\sqsupseteq^d$ . Rappelons que  $X^{dd} = X$ , que les ouverts de  $X^d$  sont les complémentaires  $X \setminus Q$  de compacts saturés  $Q$  de  $X$ , et que les compacts saturés de  $X^d$  sont les complémentaires  $X \setminus U$  d'ouverts  $U$  de  $X$ .

**Définition 11.5.5** Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $g$  une fonction continue bornée de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $f \sqsupseteq^d -g$  si et seulement si l'on peut écrire :

$$g = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{X \setminus Q_i} \quad f = - \sum_{i=0}^n a_i \chi_{X \setminus U_i}$$

avec les mêmes coefficients  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $X = X \setminus Q_0 \supseteq X \setminus Q_1 \supseteq \dots \supseteq X \setminus Q_n$  une suite décroissante d'ouverts de  $X^d$ ,  $X = X \setminus U_0 \supseteq X \setminus U_1 \supseteq \dots \supseteq X \setminus U_n$  une suite décroissante de compacts saturés de  $X^d$ , et à condition que  $X \setminus U_i \subseteq X \setminus Q_i$  pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

De façon équivalente,  $f \sqsupseteq^d -g$  si et seulement si

$$f = - \left( \sum_{i=0}^n a_i \right) \chi_X + \sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i} \quad g = \left( \sum_{i=0}^n a_i \right) \chi_X - \sum_{i=1}^n a_i \chi_{Q_i}$$

et  $Q_i \subseteq U_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

En posant  $U'_0 = X$ ,  $U'_i = U_{n+1-i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $a'_0 = - \sum_{i=0}^n a_i$ ,  $a'_i = a_{n+1-i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), et de même  $Q'_0 = X$ ,  $Q'_i = Q_{n+1-i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $f \sqsupseteq^d -g$  si et seulement si l'on peut écrire :

$$f = \sum_{i=0}^n a'_i \chi_{U'_i} \quad g = - \sum_{i=0}^n a'_i \chi_{Q'_i}$$

avec les mêmes coefficients  $a'_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a'_1, \dots, a'_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $X = U'_0 \supseteq U'_1 \supseteq \dots \supseteq U'_n$  une suite décroissante d'ouverts,  $X = Q'_0 \supseteq Q'_1 \supseteq \dots \supseteq Q'_n$  une suite décroissante de compacts saturés, et à condition que  $Q'_i \subseteq U'_i$  pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . On a donc :

**Fait 11.5.6**  $g \sqsupseteq -f$  si et seulement si  $f \sqsupseteq^d -g$ .

Le lemme 6.2.13 énonce que, lorsque  $X$  est stablement compact, pour toute fonction étagée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , pour toute fonction  $g$  continue bornée de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g \geq -f$ , il existe une fonction étagée  $h$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g \geq h \sqsupseteq -f$ . En passant au dual  $X^d$ , on obtient :

**Lemme 11.5.7** Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute fonction étagée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$ , pour toute fonction  $f$  continue bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f \geq -g$ , il existe une fonction étagée  $h$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f \geq h \sqsupseteq^d -g$ .

**Corollaire 11.5.8** Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ . Pour toute fonction étagée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,

$$F^\perp(g) = - \inf_{f \sqsupseteq^d -g} \widehat{F}(f)$$

*Démonstration.* Pour tout  $f \sqsupseteq^d -g$ ,  $f \geq -g$ , donc  $\inf_{f \sqsupseteq^d -g} \widehat{F}(f) \geq \inf_{f \geq -g} \widehat{F}(f)$ . Réciproquement, si  $f \geq -g$ , par le lemme 11.5.7, il existe  $h \sqsupseteq^d -g$  avec  $h \leq f$ , donc avec  $\widehat{F}(h) \leq \widehat{F}(f)$ , par le lemme 11.5.1. Donc  $\inf_{f \geq -g} \widehat{F}(f) \geq \inf_{h \sqsupseteq^d -g} \widehat{F}(h)$ . On en déduit que  $\inf_{f \sqsupseteq^d -g} \widehat{F}(f) = \inf_{f \geq -g} \widehat{F}(f) = F^\perp(g)$ .  $\square$

**Lemme 11.5.9** Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute fonction étagée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , si  $g \sqsupseteq -f$ , alors il existe une fonction étagée  $f'$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $g \sqsupseteq -f'$  et  $r.f' \ll f$  pour tout  $r$ ,  $0 < r < 1$ .

*Démonstration.* Écrivons

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i} \\ g &= - \sum_{i=0}^n a_i \chi_{Q_i} \end{aligned}$$

où  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$ ,  $X = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \dots \supseteq Q_n$ , et  $Q_i \subseteq U_i$  pour tout  $i$ . Puisque  $X$  est localement compact, il existe pour chaque  $i$  un compact saturé  $\overset{\circ}{Q}'_i$  tel que  $Q_i \subseteq \overset{\circ}{Q}'_i \subseteq Q'_i \subseteq U_i$ . Quitte à remplacer  $Q'_i$  par  $Q'_i \cup Q'_{i+1} \cup \dots \cup Q'_n$ , on peut supposer que  $X = Q'_0 \supseteq Q'_1 \supseteq \dots \supseteq Q'_n$ . Posons  $f' = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{\overset{\circ}{Q}'_i}$ . Clairement,  $g \sqsupseteq -f'$ , puisque  $Q_i \subseteq \overset{\circ}{Q}'_i$ .

Il reste à montrer que  $r.f' \ll f$ . Comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , on peut supposer  $a_0 = 0$ , quitte à décaler les indices de 1. On peut de plus supposer que  $a_i > 0$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . On a alors  $\overset{\circ}{Q}'_i \in U_i$  par le lemme 3.4.11, et  $U_i \subseteq f^{-1}[r. \sum_{j=1}^i a_j, +\infty[$ ; en effet, pour tout  $x \in U_i$ ,  $f(x) \geq \sum_{j=1}^i a_j > r. \sum_{j=1}^i a_j$ . Donc  $\overset{\circ}{Q}'_i \in f^{-1}[r. \sum_{j=1}^i a_j, +\infty[$ , et le lemme 11.2.10 nous permet de conclure que  $r.f' \ll f$ .  $\square$

En passant au dual, on obtient :

**Lemme 11.5.10** Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute fonction étagée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$ , si  $f \sqsupseteq^d -g$ , alors il existe une fonction étagée  $g'$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $f \sqsupseteq^d -g'$  et  $r.g' \ll g$  pour tout  $r$ ,  $0 < r < 1$ .

On déduit de ceci, ainsi que du corollaire 11.5.8, le résultat de continuité suivant :

**Lemme 11.5.11** Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ . Pour toute fonction étagée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,

$$F^\perp(g) = \sup_{\substack{g'' \text{ étagée de } X^d \text{ vers } \mathbb{R}^+ \\ g'' \ll g}} F^\perp(g'')$$

*Démonstration.* Si  $g' \ll g$ , alors  $g' \leq g$ , donc  $F^\perp(g') \leq F^\perp(g)$  par la proposition 11.5.3. Donc le côté droit est plus petit ou égal au côté gauche. Réciproquement, par le corollaire 11.5.8, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $f \sqsupseteq^d -g$  telle que  $F^\perp(g) \leq -\widehat{F}(f) + \epsilon$ . Par le lemme 11.5.10, il existe une fonction étagée  $g'$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $f \sqsupseteq^d -g'$  et  $r.g' \ll g$  pour tout  $r$ ,  $0 < r < 1$ . Par le corollaire 11.5.8,  $-\widehat{F}(f) \leq F^\perp(g') = 1/r F^\perp(r.g')$ . (Nous avons utilisé ici que  $F^\perp$  était positivement homogène, grâce à la proposition 11.5.3.) Alors  $g'' = r.g'$  est une fonction étagée de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $g'' \ll g$ , et  $F^\perp(g) \leq 1/r F^\perp(g'') + \epsilon$ . Comme  $\epsilon > 0$  et  $r$ ,  $0 < r < 1$ , sont

arbitraires, on en déduit que  $F^\perp(g) \leq \sup_{g'' \ll g} F^\perp(g'')$  où  $g''$  parcourt l'ensemble des fonctions étagées de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$ .  $\square$

On peut raffiner ce lemme en considérant le dual  $B^d$  de la base introduite à la proposition 11.2.11.

**Lemme 11.5.12** *Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ . Notons  $B^d$  l'ensemble des fonctions étagées de la forme  $1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{X \setminus Q_k}$ ,  $K, N \in \mathbb{N}$ , et où  $(Q_k)_{k=1}^{2^K}$  forme une suite croissante de compacts saturés de  $X$ .*

*Pour toute fonction étagée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$F^\perp(g) = \sup_{g'' \in B^d, g'' \ll g} F^\perp(g'')$$

*Démonstration.* Le côté droit est plus petit ou égal au côté gauche, par le lemme 11.5.11. Réciproquement, on a :

$$\begin{aligned} F^\perp(g) &= \sup_{\substack{g' \text{ étagée de } X^d \text{ vers } \mathbb{R}^+ \\ g' \ll g}} F^\perp(g') && \text{par le lemme 11.5.11} \\ &= \sup_{\substack{g' \text{ étagée de } X^d \text{ vers } \mathbb{R}^+ \\ \exists g'' \in B^d, g' \ll g'' \ll g}} F^\perp(g') && \text{par le lemme 11.2.13 appliqué à } X^d \\ &\leq \sup_{g'' \in B^d, g'' \ll g} F^\perp(g'') \end{aligned}$$

puisque  $g' \ll g''$  entraîne  $g' \leq g''$  et donc  $F^\perp(g') \leq F^\perp(g'')$ .  $\square$

Pour montrer que  $F^\perp$  est continue, il ne reste plus qu'à faire l'observation suivante.

**Lemme 11.5.13** *Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ . Pour toute fonction continue bornée  $g$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$F^\perp(g) = \sup_{\substack{g' \text{ étagée de } X^d \text{ vers } \mathbb{R} \\ g' \leq g}} F^\perp(g')$$

*Démonstration.* Le côté droit vaut  $\sup_{g' \leq g} F^\perp(g') = \sup_{g' \leq g} \sup_{f \geq -g'} (-\widehat{F}(f))$ , où  $g'$  parcourt les fonctions étagées de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$ , et  $f$  celles de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Si  $g' \leq g$  et  $f \geq -g'$  alors  $f \geq -g$ , donc  $\sup_{g' \leq g} F^\perp(g') \leq F^\perp(g)$ . Réciproquement, si  $f \geq -g$ , c'est-à-dire si  $g \geq -f$ , par le lemme 6.2.13, il existe une fonction étagée  $g'$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g \geq g' \supseteq -f$ ; en particulier,  $g' \leq g$ , et  $f \geq -g'$ , donc  $F^\perp(g) = \sup_{f \geq -g} (-\widehat{F}(f)) \leq \sup_{g' \leq g} \sup_{f \geq -g'} (-\widehat{F}(f)) = \sup_{g' \leq g} F^\perp(g')$ . On en déduit l'égalité.  $\square$

**Proposition 11.5.14** *Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ . Alors  $F^\perp$  est une prévision continue sur  $X^d$ . Plus précisément,*

$$F^\perp(g) = \sup_{g'' \in B^d, g'' \ll g} F^\perp(g'')$$

*pour toute fonction continue bornée  $g$  de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}^+$ .*

*Démonstration.* Soit  $g$  une fonction continue bornée quelconque de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Par le lemme 11.5.13,  $F^\perp(g)$  est la borne supérieure des  $F^\perp(g')$  lorsque  $g'$  parcourt les fonctions étagées telles que  $g' \leq g$ . Par le lemme 11.5.12,  $F^\perp(g')$  est la borne supérieure des  $F^\perp(g'')$  avec  $g'' \in B^d$ ,  $g'' \ll g'$ . Or  $g'' \ll g'$  et  $g' \leq g$  impliquent  $g'' \ll g$ , donc le côté droit est plus grand ou égal au côté gauche. L'inégalité réciproque est évidente, puisque  $F^\perp$  est croissante par la proposition 11.5.3. Finalement, la fonction qui à  $g$  associe  $\sup_{g'' \in B^d, g'' \ll g} F^\perp(g'')$  est continue : c'est la formule de Scott (lemme 3.6.16), sachant que  $\langle X^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  est un ensemble ordonné continu (proposition 11.2.11) ; donc  $F^\perp$  est continue.  $\square$

On notera que  $F^\perp$  est continue, même sans supposer que  $F$  soit continue. Ceci ne devrait pas être trop surprenant, puisque  $\nu^\perp$  était continue pour tout jeu  $\nu$ , même non continu (théorème 6.2.6).

La prochaine étape est de montrer que  $F^\perp$  est haute dès que  $F$  est basse, et réciproquement. Ceci demande un certain effort, et passe par l'étude de la compatibilité de la relation  $\sqsupseteq^d$  avec l'addition de fonctions, qui est le sujet des deux prochains lemmes.

**Lemme 11.5.15** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Soit  $h, h' \in B^d$ , où la base  $B^d$  est définie au lemme 11.5.12. Supposons  $f \sqsupseteq^d -h$  et  $f' \sqsupseteq^d -h'$ . Alors  $f + f' \sqsupseteq^d -(h + h')$ .*

*Démonstration.* Puisque  $h$  et  $h'$  sont dans  $B^d$ , écrivons :

$$h = \frac{1}{2^K} \sum_{i=1}^N \chi_{X \setminus Q_i} \quad h' = \frac{1}{2^{K'}} \sum_{j=1}^{N'} \chi_{X \setminus Q'_j}$$

où  $Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_N$ ,  $Q'_1 \subseteq \dots \subseteq Q'_{N'}$  sont deux suites croissantes de compacts saturés de  $X$ . On peut prendre le même  $K$  dans les définitions des deux fonctions sans y perdre en généralité.

Eu égard à la définition 11.5.5,  $f$  et  $f'$  peuvent alors s'écrire :

$$f = -\frac{1}{2^K} \sum_{i=1}^N \chi_{X \setminus U_i} \quad f' = -\frac{1}{2^K} \sum_{j=1}^{N'} \chi_{X \setminus U'_j}$$

avec  $U_1 \subseteq \dots \subseteq U_N$ ,  $U'_1 \subseteq \dots \subseteq U'_{N'}$  deux suites croissantes d'ouverts de  $X$ , et où  $Q_i \subseteq U_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ),  $Q'_j \subseteq U'_j$  ( $1 \leq j \leq N'$ ).

Par le lemme 11.2.15, et en posant par convention  $X \setminus Q_0 = X \setminus Q'_0 = X$ , c'est-à-dire  $Q_0 = Q'_0 = \emptyset$ , ainsi que  $X \setminus Q_i = \emptyset$  pour tout  $i > N$  (c'est-à-dire  $Q_i = X$ ) et  $X \setminus Q'_j = \emptyset$  pour tout  $j > N'$  (c'est-à-dire  $Q'_j = X$ ),

$$h + h' = \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^{N+N'} \chi_{X \setminus Q''_k}$$

où  $X \setminus Q''_k = \bigcup_{i+j=k} (X \setminus Q_i) \cap (X \setminus Q'_j)$ , c'est-à-dire  $Q''_k = \bigcap_{i+j=k} (Q_i \cup Q'_j)$ .

D'un autre côté, en utilisant le lemme 11.2.15 avec  $A_i = X \setminus U_i$ ,  $B_j = X \setminus V_j$  (qui ne sont pas en général ouverts, justifiant ainsi la généralité avec laquelle nous avons énoncé ce lemme),

$$f + f' = -\frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^{N+N'} \chi_{W_k}$$

où  $W_k = \bigcup_{i+j=k} (A_i \cap B_j)$ , à condition de poser  $A_0 = B_0 = X$  et  $A_i = \emptyset$  pour  $i > N$ ,  $B_j = \emptyset$  pour  $j > N'$ . Si l'on pose  $U_0 = V_0 = \emptyset$  et  $U_i = X$  pour  $i > N$ ,  $V_j = X$  pour  $j > N'$ , alors on a  $A_i = X \setminus U_i$  pour tout  $i$ , et  $B_j = X \setminus V_j$  pour tout  $j$ . Posons  $U''_k = X \setminus W_k$ . Alors :

$$f + f' = -\frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^{N+N'} \chi_{X \setminus U''_k}$$

et  $U''_k = \bigcap_{i+j=k} (U_i \cup V_j)$ . On en déduit  $Q''_k \subseteq U''_k$  pour tout  $k \geq 1$ . Par conséquent,  $f + f' \sqsupseteq^d -(h + h')$ .  $\square$

**Lemme 11.5.16** Soit  $X$  un espace stablement compact. Soient  $h$  et  $h'$  deux fonctions de la base  $B^d$  définie au lemme 11.5.12. Soit  $f''$  une fonction étagée de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $f'' \sqsupseteq^d -(h + h')$ . Il existe deux fonctions étagées  $f$  et  $f'$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  telles que  $f \sqsupseteq^d -h$ ,  $f' \sqsupseteq^d -h'$ , et  $f + f' \leq f''$ .

*Démonstration.* Écrivons :

$$h = \frac{1}{2^K} \sum_{i=1}^N \chi_{X \setminus Q_i}$$

$$h' = \frac{1}{2^K} \sum_{j=1}^{N'} \chi_{X \setminus Q'_j}$$

avec  $Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_N$  et  $Q'_1 \subseteq \dots \subseteq Q'_{N'}$ . Nous avons choisi le même  $K$  dans la présentation de  $h, h'$ , ce qui n'entâche pas la généralité de l'argument. Posons  $h'' = h + h'$ . Par le lemme 11.2.15,

$$h'' = \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^{N+N'} \chi_{X \setminus Q''_k}$$

où  $X \setminus Q''_k = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \\ i+j=k}} ((X \setminus Q_i) \cap (X \setminus Q'_j))$ , c'est-à-dire  $Q''_k = \bigcap_{\substack{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \\ i+j=k}} (Q_i \cup Q'_j)$ . On a posé ici  $X \setminus Q_0 = X \setminus Q'_0 = X$ , c'est-à-dire  $Q_0 = Q'_0 = \emptyset$ ,  $X \setminus Q_i = \emptyset$  pour tout  $i > N$ , c'est-à-dire  $Q_i = X$  pour  $i > N$ , et enfin  $X \setminus Q'_j = \emptyset$  pour tout  $j > N'$ , c'est-à-dire  $Q'_j = X$  pour  $j > N'$ .

Notons que  $Q''_1 \subseteq \dots \subseteq Q''_{N+N'} \subseteq \dots$ . En effet, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} Q''_k &= \bigcap_{i+j=k} (Q_i \cup Q'_j) \\ &\subseteq \bigcap_{i+j=k} (Q_{i+1} \cup Q'_j) \cap \bigcap_{i+j=k} (Q_i \cup Q'_{j+1}) \quad \text{puisque } Q_i \subseteq Q_{i+1} \text{ et } Q'_j \subseteq Q'_{j+1} \\ &= \bigcap_{i+j=k+1} (Q_i \cup Q'_j) = Q''_{k+1} \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse que  $f'' \supseteq^d -h''$ . Par la définition 11.5.5,  $f$  est nécessairement de la forme :

$$f'' = - \sum_{k=1}^{N''} \chi_{X \setminus W_k} \quad (11.3)$$

où  $N'' = N + N'$ ,  $W_1 \subseteq \dots \subseteq W_{N''}$ , et  $Q''_k \subseteq W_k$  pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq N''$ . Posons  $W_0 = \emptyset$ , et  $W_k = X$  pour tout  $k > N''$ . Comme  $Q''_k$  est une intersection finie non vide de compacts saturés  $Q_i \cup Q'_j$ , une utilisation répétée du lemme 3.3.7 montre qu'il existe une famille d'ouverts  $W_{ij}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i + j \geq 1$ , tels que

$$Q_i \cup Q'_j \subseteq W_{ij} \quad \bigcap_{i+j=k} W_{ij} \subseteq W_k$$

pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i + j \geq 1$ , pour l'inclusion de gauche, et pour tout  $k \geq 1$  pour celle de droite.

On peut de plus supposer que la famille  $W_{ij}$  est croissante, au sens où si  $i \leq i'$  et  $j \leq j'$ , alors  $W_{ij} \subseteq W_{i'j'}$ . En effet, on peut toujours considérer la famille  $W'_{ij} = \bigcap_{\substack{i' \geq i \\ j' \geq j}} W_{ij}$  à la place de  $W_{ij}$ .

La famille des  $W'_{ij}$  est trivialement croissante. De plus, pour  $i > N$ ,  $j > N'$ , on a  $X = Q_i \cup Q'_j \subseteq W_{ij}$ , donc  $W_{ij} = X$  pour  $i, j$  assez grands. On en déduit que  $W'_{ij}$  est une intersection finie d'ouverts dont au plus un nombre fini est différent de  $X$ , autrement dit que  $W'_{ij}$  est une intersection finie d'ouverts. Donc  $W'_{ij}$  est toujours un ouvert. Ensuite,  $Q_i \cup Q'_j \subseteq Q_{i'} \cup Q'_{j'} \subseteq W_{i'j'}$  pour tous  $i' \geq i$ ,  $j' \geq j$ , donc  $Q_i \cup Q'_j \subseteq W'_{ij}$ . Finalement,  $\bigcap_{i+j=k} W'_{ij} \subseteq \bigcap_{i+j=k} W_{ij} \subseteq W_k$ , puisque clairement  $W'_{ij} \subseteq W_{ij}$ .

Posons d'autre part  $W_{00} = \emptyset$ . Nous disposons donc d'une famille d'ouverts  $W_{ij}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , tels que  $Q_i \cup Q'_j \subseteq W_{ij}$ ,  $\bigcap_{i+j=k} W_{ij} \subseteq W_k$ , et  $(W_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  est croissante. D'autre part, comme  $Q_i \cup Q'_j \subseteq W_{ij}$ , et que  $Q_i = X$  dès que  $i > N$  et  $Q'_j = X$  dès que  $j > N'$ ,  $W_{ij} = X$  dès que  $i > N$  ou  $j > N'$ .

Définissons  $U_i = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} W_{ij}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , et  $V_j = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_{ij}$ . Comme  $(W_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  est croissante, les familles  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sont elles aussi croissantes. Posons  $f = -1/2^K \sum_{i=1}^N \chi_{X \setminus U_i}$ ,  $f' = -1/2^K \sum_{j=1}^{N'} \chi_{X \setminus V_j}$ .

On remarque que  $Q_i \subseteq U_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . En effet, comme  $Q_i \cup Q'_j \subseteq W_{ij}$  pour tous  $i$  et  $j$ ,  $Q_i \subseteq W_{ij}$ , donc  $Q_i \subseteq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} W_{ij} = U_i$ . Vu les formes respectives de  $f$  et de  $h$ , par la définition 11.5.5, on a  $f \supseteq^d -h$ . De même,  $Q'_j \subseteq V_j$  pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq N'$ , donc  $f' \supseteq^d -h'$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $f + f' \leq f''$ . Écrivons  $f$ ,  $f'$ , et  $f''$  sous la forme standard des fonctions étagées.

$$\begin{aligned} f &= -\frac{N}{2^K} \chi_X + \frac{1}{2^K} \sum_{i=1}^N \chi_{U_{N+1-i}} \\ f' &= -\frac{N'}{2^K} \chi_X + \frac{1}{2^K} \sum_{j=1}^{N'} \chi_{V_{N'+1-j}} \\ f'' &= -\frac{N''}{2^K} \chi_X + \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^{N''} \chi_{W_{N''+1-k}} \end{aligned}$$

Nous avons réindexé les sommes sur  $i, j, k$ , de sorte que les suites  $(U_{N+1-i})_{i=1}^N$ ,  $(V_{N'+1-j})_{j=1}^{N'}$ , et  $(W_{N''+1-k})_{k=1}^{N''}$  soient décroissantes.

En utilisant le lemme 11.2.15, on sait que

$$\sum_{i=1}^N \chi_{U_i} + \sum_{j=1}^{N'} \chi_{V_j} = \sum_{k=1}^{N''} \chi_{W_k}$$

où  $W_k = \bigcup_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i+j=k \\ i \leq N, j \leq N'}} (U_i \cap V_j)$  dès lors que nous adoptons la convention que  $U_0 = V_0 = X$ . Le

fait de limiter l'union définissant  $W_k$  aux  $i$  et  $j$  tels que  $i \leq N$  et  $j \leq N'$  nous permet de faire l'économie de l'hypothèse que  $U_i = \emptyset$  pour  $i > N$  et  $V_j = \emptyset$  pour  $j > N'$ . Posons  $U_i = U_{N+1-i}$ ,  $0 \leq i \leq N$ . Notons que  $U_0 = X$ , puisque  $U_0 = U_{N+1} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} W_{(N+1)j} = X$ , vu que  $W_{ij} = X$  dès que  $i > N$ . De même,  $V_0$  vaut bien  $X$  lui aussi. On a donc :

$$\sum_{i=1}^N \chi_{U_{N+1-i}} + \sum_{j=1}^{N'} \chi_{V_{N'+1-j}} = \sum_{k=1}^{N''} \chi_{W_k}$$

et  $W_k = \bigcup_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i+j=k \\ i \leq N, j \leq N'}} (U_i \cap V_j) = \bigcup_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i+j=k \\ i \leq N, j \leq N'}} (U_{N+1-i} \cap V_{N'+1-j})$ . Or si  $i + j = k$ ,  $i \leq N$ , et  $j \leq N'$ ,

$$\begin{aligned} U_{N+1-i} \cap V_{N'+1-j} &= \bigcap_{j' \in \mathbb{N}} W_{(N+1-i)j'} \cap \bigcap_{i' \in \mathbb{N}} W_{i'(N'+1-j)} \\ &\subseteq \bigcap_{j'=0}^{N'-j} W_{(N+1-i)j'} \cap \bigcap_{i'=0}^{N-i} W_{i'(N'+1-j)} \\ &\subseteq \bigcap_{j'=0}^{N'-j} W_{(N+N'+1-k-j')j'} \cap \bigcap_{i'=0}^{N-i} W_{i'(N+N'+1-k-i')} \\ &\text{puisque la famille } (W_{i''j''})_{i'',j'' \in \mathbb{N}} \text{ est croissante,} \\ &\text{que } N+1-i \leq N+N'+1-k-j' \text{ dès que } i+j=k, j' \leq N'-j \\ &\text{et que } N'+1-j \leq N+N'+1-k-i' \text{ dès que } i+j=k, i' \leq N-i \\ &= \bigcap_{i'=N+1-i}^{N+N'+1-k} W_{i'(N+N'+1-k-i')} \cap \bigcap_{i'=0}^{N-i} W_{i'(N+N'+1-k-i')} \\ &\text{en réindexant la première union via } i' = N+N'+1-k-j', \\ &\text{sachant que } -k+j = -i \\ &= \bigcap_{i'=0}^{N+N'+1-k} W_{i'(N+N'+1-k-i')} = \bigcap_{\substack{i',j' \in \mathbb{N} \\ i'+j'=N+N'+1-k}} W_{i'j'} \\ &\subseteq W_{N+N'+1-k} = W_{N''+1-k} \end{aligned}$$

Donc  $W'_k \subseteq W_{N''+1-k}$  pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq N''$ . Donc  $\sum_{i=1}^N \chi_{U_{N+1-i}} + \sum_{j=1}^{N'} \chi_{V_{N'+1-j}} \leq \sum_{k=1}^{N''} \chi_{W_{N''+1-k}}$ , d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} f + f' &= -\frac{N + N'}{2K} \chi_X + \frac{1}{2K} \left( \sum_{i=1}^N \chi_{U_{N+1-i}} + \sum_{j=1}^{N'} \chi_{V_{N'+1-j}} \right) \\ &\leq -\frac{N''}{2K} + \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^{N''} \chi_{W_{N''+1-k}} \end{aligned}$$

et ceci n'est rien d'autre que  $f''$ . □

**Proposition 11.5.17** *Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ . Si  $F$  est basse, alors  $F^\perp$  est haute. Si  $F$  est haute, alors  $F^\perp$  est basse.*

*Démonstration.* Supposons  $F$  basse, c'est-à-dire sur-linéaire. Soient  $h$  et  $h'$  deux éléments de  $B^d$ . On a :

$$\begin{aligned} F^\perp(h) + F^\perp(h') &= -\inf_{f \sqsupseteq^d -h} \widehat{F}(f) - \inf_{f' \sqsupseteq^d -h'} \widehat{F}(f') \quad \text{par le corollaire 11.5.8} \\ &= -\inf_{\substack{f \sqsupseteq^d -h \\ f' \sqsupseteq^d -h'}} \widehat{F}(f) + \widehat{F}(f') \\ &\geq -\inf_{\substack{f \sqsupseteq^d -h \\ f' \sqsupseteq^d -h'}} \widehat{F}(f + f') \\ &\quad \text{puisque } F \text{ est basse, donc } \widehat{F} \text{ aussi par le lemme 11.5.1} \\ &= -\inf_{f'' \sqsupseteq^d -(h+h')} \widehat{F}(f'') \end{aligned}$$

En effet, si  $f \sqsupseteq^d -h$  et  $f' \sqsupseteq^d -h'$ , alors  $f'' = f + f'$  est telle que  $f'' \sqsupseteq^d -(h + h')$  par le lemme 11.5.15, donc  $\inf_{\substack{f \sqsupseteq^d -h \\ f' \sqsupseteq^d -h'}} \widehat{F}(f + f') \geq \inf_{f'' \sqsupseteq^d -(h+h')} \widehat{F}(f'')$ . Réciproquement, si  $f'' \sqsupseteq^d -(h + h')$  alors on peut trouver  $f \sqsupseteq^d -h$  et  $f' \sqsupseteq^d -h'$  telles que  $f + f' \leq f''$ , par le lemme 11.5.16, donc  $\inf_{f'' \sqsupseteq^d -(h+h')} \widehat{F}(f'') \geq \inf_{\substack{f \sqsupseteq^d -h \\ f' \sqsupseteq^d -h'}} \widehat{F}(f + f')$ .

En utilisant le corollaire 11.5.8 de nouveau, on en déduit que  $F^\perp(h) + F^\perp(h') \geq F^\perp(h + h')$ . Dans le cas général, prenons deux fonctions continues bornées  $g$  et  $g'$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}^+$ , alors

$$\begin{aligned} F^\perp(g) + F^\perp(g') &= \sup_{h \in B^d, h \ll g} F^\perp(h) + \sup_{h' \in B^d, h' \ll g'} F^\perp(h') \quad \text{par la proposition 11.5.14} \\ &= \sup_{\substack{h, h' \in B^d \\ h \ll g, h' \ll g'}} F^\perp(h) + F^\perp(h') \\ &\geq \sup_{\substack{h, h' \in B^d \\ h \ll g, h' \ll g'}} F^\perp(h + h') \\ &= \sup_{h'' \in B^d, h'' \ll g + g'} F^\perp(h'') \end{aligned}$$

par le lemme 11.2.14 et le lemme 11.2.16. Or ceci est  $F^\perp(g + g')$  par la proposition 11.5.14. Donc  $F^\perp$  est haute.

Le fait que  $F^\perp$  soit basse dès que  $F$  est haute se démontre de façon exactement similaire.  $\square$

**Proposition 11.5.18** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute prévision continue normalisée  $F$  sur  $X$ ,  $F^{\perp\perp} = F$ .*

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction étagée quelconque de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Fixons  $a \geq \sup_{x \in X} f(x)$ . On a :

$$\begin{aligned} F^{\perp\perp}(f) &= a - \inf_{g \geq -f} F^\perp(g + a) \\ &= a - \inf_{g \geq -f} \left( - \inf_{h \geq -g-a} \widehat{F}(h) \right) \\ &= a + \sup_{g \geq -f} \inf_{h \geq -g-a} \widehat{F}(h) \\ &= \sup_{g \geq -f} \inf_{h \geq -g-a} \widehat{F}(h + a) \quad \text{puisque } F \text{ est normalisée} \\ &= \sup_{g \geq -f} \inf_{h \geq -g} \widehat{F}(h) \end{aligned}$$

où  $g$  et  $h$  sont prises parmi les fonctions étagées de  $X^d$ , resp.  $X$ , dans  $\mathbb{R}$ . Or pour toute fonction étagée  $g \geq -f$ ,  $\inf_{h \geq -g} \widehat{F}(h) \leq \widehat{F}(f)$ , puisque l'on peut prendre  $h = f \geq -g$ . (Rappelons que  $f$  est étagée.) Donc  $F^{\perp\perp}(f) \leq F(f)$ .

L'inégalité réciproque se démontre par une version améliorée de la technique du lemme 6.2.2. Écrivons  $f$  sous la forme  $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i}$ , où  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  est une suite décroissante d'ouverts de  $X$ , et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ . Par extension, posons  $U_0 = X$ ,  $U_{n+1} = \emptyset$ .

Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , pour tout  $x \in U_i$ , comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q_x$  tel que  $x \in \overset{\circ}{Q}_x \subseteq Q_x \subseteq U_i$ . Donc  $U_i = \bigcup_{x \in U_i} \overset{\circ}{Q}_x$ . Donc  $U_i$  est aussi l'union de la famille dirigée des  $\bigcup_{x \in E_i} \overset{\circ}{Q}_x$  lorsque  $E_i$  parcourt les parties finies de  $U_i$ . Comme

$$\bigcup_{x \in E_i} \overset{\circ}{Q}_x \subseteq \overbrace{\bigcup_{x \in E_i} Q_x}^{\circ} \subseteq U_i, \quad U_i \text{ est aussi l'union de la famille (dirigée) des } \overbrace{\bigcup_{x \in E_i} Q_x}^{\circ},$$

lorsque  $E_i$  parcourt les parties finies de  $U_i$ . Notons que  $\bigcup_{x \in E_i} Q_x$  est un compact saturé inclus dans  $U_i$ .  $U_i$  est donc aussi l'union de la famille dirigée des compacts saturés  $Q_i$  inclus dans  $U_i$ .

On en déduit que  $f$  est la borne supérieure de la famille dirigée des fonctions  $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{Q_i^\circ}$ , lorsque  $Q_1, \dots, Q_n$  parcourent les compacts saturés de  $U_1, \dots, U_n$  respectivement, avec  $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots \supseteq Q_n$ . Ceci se démontre par récurrence sur  $n$ . C'est évident pour  $n = 0$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $\sum_{i=2}^n a_i \chi_{U_i}$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $\sum_{i=2}^n a_i \chi_{Q_i^\circ}$ , lorsque  $Q_2, \dots, Q_n$  parcourent les compacts saturés de  $U_2, \dots, U_n$  respectivement, avec  $Q_2 \supseteq \dots \supseteq Q_n$ , par hypothèse de récurrence. Mais  $\chi_{U_1} = \sup_{Q_1 \subseteq U_1} \chi_{Q_1^\circ}$ . Comme pour tout compact saturé  $Q_1 \subseteq U_1$ , il en existe un autre (à savoir  $Q_1 \cup Q_2$ ) qui contient en plus  $Q_2$ ,  $\chi_{U_1} = \sup_{\substack{Q_1 \\ Q_2 \subseteq Q_1 \subseteq U_1}} \chi_{Q_1^\circ}$ .

D'où le résultat.

Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe donc  $n$  compacts saturés  $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots \supseteq Q_n$  inclus dans  $U_1, \dots, U_n$  respectivement, tels que  $f - \epsilon \leq \sum_{i=1}^n a_i \chi_{Q_i} \leq f$ . Posons  $g = -\sum_{i=1}^n a_i \chi_{Q_i}$  :  $g$  est continue de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$ , puisque  $-\chi_{Q_i}$  est continue de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$  pour tout  $i \in I$ . De plus,  $g$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et est donc étagée de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}$ .

Pour toute fonction étagée  $h$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $h \geq -g$ , c'est-à-dire telle que  $h \geq \sum_{i=1}^n a_i \chi_{Q_i}$ , on a  $h \geq \sum_{i=1}^n a_i \chi_{Q_i} \geq f - \epsilon$ . Donc  $\inf_{h \geq -g} \widehat{F}(h) \geq \widehat{F}(f - \epsilon)$  (puisque  $\widehat{F}$  est croissante, par le lemme 11.5.1)  $= \widehat{F}(f) - \epsilon$  (puisque  $\widehat{F}$  est normalisée, de nouveau par le lemme 11.5.1)  $= F(f) - \epsilon$ .

En faisant varier  $g$ , on en déduit que  $F^{\perp\perp}(f) = \sup_{g \geq -f} \inf_{h \geq -g} F(h) \geq F(f) - \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $F^{\perp\perp}(f) \geq F(f)$ . Puisque  $F^{\perp\perp}(f) \leq F(f)$ ,  $F^{\perp\perp}(f) = F(f)$ .

Dans le cas général où  $f$  n'est plus nécessairement étagée,  $F^{\perp\perp}(f) = \sup_{f' \in B, f' \ll_g} F^{\perp\perp}(f')$  par la proposition 11.5.14. Nous venons de voir que  $F^{\perp\perp}(f') = F''(f')$  pour tout  $f' \in B$ , et l'on conclut parce que  $F$  est continue, et que  $B$  est une base, par la proposition 11.2.11.  $\square$

Résumons tout ceci :

**Théorème 11.5.19 (Dualité convexe-concave)** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute prévision normalisée  $F$  sur  $X$ ,  $F^\perp$  est une prévision normalisée sur  $X^d$ . De plus,*

1.  $F^\perp$  est continue ;
2. si  $F$  est basse, alors  $F^\perp$  est haute ;
3. si  $F$  est haute, alors  $F^\perp$  est basse ;
4. si  $F$  est linéaire, alors  $F^\perp$  aussi ;
5. si  $F = \alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$ , alors  $F^\perp = \alpha_{\mathcal{C}}(\nu^\perp)$  ;
6. si  $F$  est continue et colinéaire, alors  $F^\perp$  aussi ;
7. si  $F$  est continue, alors  $F^{\perp\perp} = F$ .

*Démonstration.* Que  $F^\perp$  soit une prévision normalisée est la proposition 11.5.3. Le point 1. est par la proposition 11.5.14. Les points 2. et 3. sont par la proposition 11.5.17. Le point 4. est une conséquence facile des deux précédents. Le point 5. est par définition de  $F^\perp$  (définition 11.5.2) et par la proposition 6.2.14. Le point 6. est une conséquence du point 5. et de l'isomorphisme entre jeux continus et prévisions colinéaires continues (théorème 10.1.8). Le point 7. est la proposition 11.5.18.  $\square$

Finalement, la dualité renverse l'ordre.

**Lemme 11.5.20** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Si  $F \leq F'$  alors  $F'^\perp \leq F^\perp$ .*

*Démonstration.* Si  $F \leq F'$ , alors  $\widehat{F} \leq \widehat{F}'$ . On conclut par la définition 11.5.2.  $\square$

On en déduit donc l'analogie du théorème 6.2.11, dans le cas des prévisions :

**Théorème 11.5.21** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Alors  $F \mapsto F^\perp$  définit un isomorphisme entre :*

- l'ensemble ordonné des prévisions normalisées continues sur  $X$  et l'opposé de l'ensemble ordonné des prévisions normalisées continues sur  $X^d$  ;
- l'ensemble ordonné des prévisions basses (resp., hautes) continues normalisées sur  $X$  et l'opposé de l'ensemble ordonné des prévisions hautes (resp., basses) continues normalisées sur  $X^d$  ;
- l'ensemble ordonné des prévisions linéaires continues normalisées sur  $X$  et l'opposé de l'ensemble ordonné des prévisions linéaires continues normalisées sur  $X^d$ .

**Théorème 11.5.22 (Tangente inférieure, cas continu, normalisé)** Soit  $X$  un espace stablement compact,  $F$  une prévision haute continue normalisée. Il existe une prévision linéaire continue normalisée  $G$  telle que  $G \leq F$ . De plus, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $F(f) = \sup_{G \leq F} G(f)$ , où  $G$  parcourt l'espace des prévisions linéaires continues normalisées.

*Démonstration.* Par le théorème 11.5.19,  $F^\perp$  est une prévision basse continue normalisée sur  $X^d$ . Pour toute fonction continue bornée  $g$  de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}^+$ , il existe donc une prévision linéaire continue normalisée  $G_g$  sur  $X^d$  telle que  $F^\perp \leq G_g$  et  $F^\perp(g) = G_g(g)$ , par le théorème 11.3.10.

Notons que  $G_g^\perp$  est une prévision linéaire continue normalisée sur  $X$ , par le théorème 11.5.19, points 1. et 4.

Il existe donc une prévision continue  $G \leq F$ , à savoir  $G_g^\perp$ , pour n'importe quelle fonction continue bornée  $g$  de  $X^d$  vers  $\mathbb{R}^+$ . En effet, puisque  $F^\perp \leq G_g$ , on a  $G_g^\perp \leq F^{\perp\perp}$  par le lemme 11.5.20, donc  $G_g^\perp \leq F$  par la proposition 11.5.18.

Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une fonction étagée  $g'$  de  $X^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g' + f \geq 0$  et telle que  $F^{\perp\perp}(f) \leq -\widehat{F^\perp}(g') + \epsilon$ , puisque  $F^{\perp\perp}(f) = -\inf_{g'+f \geq 0} \widehat{F^\perp}(g')$ . Le côté gauche de l'inégalité vaut  $F(f)$  par la proposition 11.5.18, et le côté droit vaut  $a - F^\perp(a + g') + \epsilon$  pour  $a$  assez grand, c'est-à-dire

$a - G_{a+g'}(a + g') + \epsilon = -\widehat{G_{a+g'}^\perp}(g') + \epsilon \leq G_{a+g'}^\perp(f) + \epsilon$ . Il existe donc une prévision linéaire continue normalisée  $G$ , à savoir  $G_{a+g'}^\perp$ , telle que  $F(f) \leq G(f) + \epsilon$ . De plus,  $G \leq F$  car  $F^\perp \leq G_{a+g'}$ , donc  $G_{a+g'}^\perp \leq F^{\perp\perp} = F$ , en utilisant le lemme 11.5.20 et la proposition 11.5.18. Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $F(f)$  est bien la borne supérieure des  $G(f)$  lorsque  $G$  parcourt l'espace des prévisions linéaires continues normalisées au-dessous de  $F$ .  $\square$

**Corollaire 11.5.23 (Tangente inférieure, cas continu, sous-normalisé)** Soit  $X$  un espace stablement localement compact,  $F$  une prévision haute continue sous-normalisée. Il existe une prévision linéaire continue sous-normalisée  $G$  telle que  $G \leq F$ . De plus, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $F(f) = \sup_{G \leq F} G(f)$ , où  $G$  parcourt l'espace des prévisions linéaires continues sous-normalisées.

*Démonstration.* Par le lemme 6.3.8,  $X_\perp$  est stablement compact. Par le lemme 11.4.6,  $\tau(F_\perp)$  est une prévision haute continue normalisée sur  $X_\perp$ . Par le théorème 11.5.22, il existe une prévision linéaire continue normalisée  $G_1$  telle que  $G_1 \leq \tau(F_\perp)$ . Comme  $G_1 \leq \tau(F_\perp)$ ,  $G_1 \leq F_\perp$ , donc  $G_{1\perp} \leq (F_\perp)_{\perp} = F$ , par le lemme 11.4.8. Il existe donc une prévision linéaire continue sous-normalisée  $G$  sur  $X$  telle que  $G \leq F$ , à savoir  $G_{1\perp}$ , encore par le lemme 11.4.8.

Le théorème 11.5.22 énonce de plus que, pour toute fonction continue bornée  $f'$  de  $X_\perp$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,  $\tau(F_\perp)(f') = \sup_{G_1 \leq \tau(F_\perp)} G_1(f')$ , où  $G_1$  parcourt les prévisions linéaires continues normalisées sur  $X_\perp$ . Comme  $F$  est continue, par le lemme 11.4.8, pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $F(f) = (\tau(F_\perp))_\perp(f) = \tau(F_\perp)(f_0) = \sup_{G_1 \leq \tau(F_\perp)} G_1(f_0)$ , où  $G_1$  parcourt les prévisions linéaires continues normalisées sur  $X_\perp$ . Pour chacune de ces prévisions  $G_1$ , posons  $G = G_{1\perp}$ . Alors  $G_1(f_0) = G(f)$ , et  $G$  est une prévision linéaire continue sous-normalisée par le lemme 11.4.8. De plus,  $G \leq (\tau(F_\perp))_\perp = F$ . Donc  $F(f) \leq \sup_{G \leq F} G(f)$ , où  $G$  parcourt les prévisions linéaires continues sous-normalisées sur  $X$ . L'inégalité réciproque vient du fait que pour toute prévision linéaire continue sous-normalisée  $G$  sur  $X$ , telle que  $G \leq F$ , la prévision  $G_1 = \tau(G_\perp)$  est linéaire, continue, et normalisée sur  $X_\perp$  par le lemme 11.4.6,  $G_1 \leq \tau(F_\perp)$ , et  $G_1(f_0) = (\tau(G_\perp))_\perp(f) = G(f)$ . Donc  $F(f) = \sup_{G \leq F} G(f)$ .  $\square$

## 11.6 La topologie faible sur les espaces de prévisions

Nous allons montrer que tous les espaces de prévisions qui ne consistent qu'en des prévisions normalisées ou sous-normalisés, sont stablement compacts dans la topologie faible, modulo quelques conditions sur l'espace  $X$  dans le cas des prévisions continues. Les arguments sont similaires à ceux de la section 4.5.

On peut envoyer tout espace de prévisions sous-normalisées sur  $X$  dans l'espace stablement compact  $Z = \prod_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \sup_{x \in X} f(x)=1}} [0, 1]$ , par la fonction  $e$  qui à toute prévision sous-normalisée  $F$  associe la famille des  $F(f)$ , lorsque  $f$  varie parmi les fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  de borne supérieure 1. Réciproquement, pour toute famille  $z = (z_f)_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \sup_{x \in X} f(x)=1}}$  d'éléments de  $[0, 1]$ , on peut définir une fonctionnelle positivement homogène  $m(z)$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$  par :  $m(z)(0) = 0$ ,  $m(z)(f) = az_{f/a}$  lorsque  $a = \sup_{x \in X} f(x) > 0$ .

On rappelle que  $[0, 1]$ , muni de sa topologie de Scott, est stablement compact (lemme 4.5.6). On note  $[0, 1]'$  l'espace de Nachbin associé à  $[0, 1]$ , c'est-à-dire muni de la topologie patch. La topologie de  $[0, 1]'$  est la topologie métrique usuelle. On rappelle aussi que la topologie patch d'un produit d'espaces stablement compacts coïncide avec le produit des topologies patch (Jung, 2004, Proposition 2.15). L'espace de Nachbin  $Z'$  obtenu en équipant  $Z$  de sa topologie patch égale donc  $\prod_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \sup_{x \in X} f(x)=1}} [0, 1]'$ , muni de l'ordre composante par composante.

**Lemme 11.6.1** *Soit  $X$  un espace topologique, et  $Z = \prod_f [0, 1]$ , où le produit est indexé par les fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$  de borne supérieure égale à 1. Soit  $m$  la fonction qui à tout  $z \in Z$  associe la fonctionnelle positivement homogène  $m(z)$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$  par :  $m(z)(0) = 0$ ,  $m(z)(f) = a \times z_{f/a}$  lorsque  $a = \sup_{x \in X} f(x) > 0$ .*

*Le sous-espace de  $Z$  formé des  $z$  tels que  $m(z)$  est une prévision, resp. basse, resp. haute, resp. linéaire, resp. sous-normalisée, resp. normalisée, est patch-fermé dans  $Z$ , et donc stablement compact.*

*Démonstration.* On applique le théorème 3.6.14 avec  $T$  l'espace des  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  telles que

$\sup_{x \in X} f(x) = 1$ ,  $A = [0, 1]$ ,  $B = \mathbb{S}$ , et  $\Sigma$  un ensemble d'équations patch-continues prises parmi celles qui suivent, où  $x \leq y$  dénote l'équation  $\max(x, y) = y$ .

- $a \times \_ (f/a) \leq b \times \_ (g/b)$ , pour toutes fonctions  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  qui sont non identiquement nulles telles que  $f \leq g$ , où  $a = \sup_{x \in X} f(x)$ ,  $b = \sup_{x \in X} g(x)$ ; ceci exprime que  $m(z)(f) \leq m(z)(g)$  pour toutes  $f \leq g$  (au moins lorsque  $f \neq 0$ ; le cas  $f = 0$  est évident), c'est-à-dire que  $m(z)$  est croissante, donc une prévision;
- $a \times \_ (f/a) + b \times \_ (g/b) \leq c \times \_ ((f+g)/c)$  pour toutes fonctions  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  qui sont non identiquement nulles, avec  $a = \sup_{x \in X} f(x)$ ,  $b = \sup_{x \in X} g(x)$ ,  $c = \sup_{x \in X} f(x) + g(x)$  ( $m(z)$  est basse);
- $c \times \_ ((f+g)/c) \leq a \times \_ (f/a) + b \times \_ (g/b)$  ( $m(z)$  est haute);
- $(a+b) \times \_ ((a+f)/(a+b)) \leq a + b \times \_ (f/b)$  pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  non identiquement nulle et tout  $a > 0$ , où  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ ; ceci signifie que  $m(z)(a+f) \leq a + m(z)(f)$  pour tout  $f \neq 0$  (le cas  $f = 0$  est évident, car  $m(z)(a) = a \times m(z)(a/a) \leq a$ ; le cas  $a = 0$  aussi), c'est-à-dire que  $m(z)$  est sous-normalisée.
- $(a+b) \times \_ ((a+f)/(a+b)) = a + b \times \_ (f/b)$  pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  non identiquement nulle et tout  $a > 0$ , où  $b = \sup_{x \in X} f(x)$ ; plus  $a \times \_ (1) = a$  pour tout  $a > 0$  (le cas où  $f$  est identiquement nulle); ceci exprime que  $m$  est normalisée.  $\square$

**Lemme 11.6.2** Soit  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  l'espace des prévisions sous-normalisées sur  $X$ , muni de la topologie faible. Soit  $e$  la fonction de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  vers  $Z$  qui à toute  $F \in P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  associe la famille des  $F(f)$ , lorsque  $f$  varie parmi les fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  de borne supérieure 1.

Soit  $Z_{\leq 1}$  le sous-espace de  $Z$  formé des  $z$  tels que  $m(z)$  est une prévision sous-normalisée. Alors  $Z_{\leq 1}$  est stablement compact, et  $e$  définit un homéomorphisme de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  sur  $Z_{\leq 1}$ , dont l'inverse est la fonction  $m$  définie au lemme 11.6.1, restreinte à  $Z_{\leq 1}$ .

*Démonstration.* D'abord,  $e$  est bien à valeurs dans  $Z$ , car pour tout  $f$  de borne supérieure 1,  $F(f) \leq F(\chi_X) \leq 1$ .

Ensuite,  $Z_{\leq 1}$  est patch-fermé dans l'espace stablement compact  $Z$ , et stablement compact, par le lemme 11.6.1.

Montrons que  $e$  est continue de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  vers  $Z_{\leq 1}$ . Pour ceci, il suffit de montrer que  $e$  est continue de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  vers  $Z$ , c'est-à-dire de démontrer que la fonction qui à  $F$  associe  $e(F)(f)$  est continue de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  vers  $[0, 1]$  pour toute fonction continue  $f$  de borne supérieure 1. Or pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , l'image réciproque de  $]r, +\infty[$  est  $\{F \in P_{\leq 1 \text{ wk}}(X) \mid F(f) > r\}$  est l'ouvert faible  $[f > r]$ .

Montrons que  $m$  est continue. Considérons un ouvert faible de la forme  $[f > r]$ . Il suffit de montrer que  $m^{-1}[f > r]$  est ouvert dans  $Z$ . C'est évident si  $f$  est identiquement nulle, car alors soit  $r < 0$ ,  $[f > r] = P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  et alors  $m^{-1}[f > r] = Z_{\leq 1}$ , soit  $r \geq 0$ ,  $[f > r] = \emptyset$  et alors  $m^{-1}[f > r] = \emptyset$ . Posons donc  $a = \sup_{x \in X} f(x) \neq 0$ . Alors  $m^{-1}[f > r] = \{z \in Z \mid a \times z_{f/a} > r\}$  est l'ouvert de  $Z$  formé des  $z$  dont la composante  $f/a$  est dans  $]r/a, 1]$ . Comme  $]r/a, 1]$  est ouvert dans  $[0, 1]$ ,  $m^{-1}[f > r]$  est ouvert.

On vérifie que  $m(e(F)) = F$  pour tout  $F \in P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$ , soit  $f = 0$  et alors  $m(e(F))(f) = 0 = F(f)$ , soit  $a = \sup_{x \in X} f(x)$  est non nul. Alors  $m(e(F))(f) = a \times e(F)_{f/a} = a \times F(f/a) = F(f)$ , puisque  $F$  est positivement homogène.

On a aussi  $e(m(z)) = z$  pour tout  $z \in Z_{\leq 1}$ . En effet, pour toute fonction continue  $f$  de borne supérieure 1,  $e(m(z))_f = m(z)(f) = 1 \times z_{f/1} = z_f$ . Donc  $e$  et  $m$  sont deux fonctions continues inverses l'une de l'autre.  $\square$

On en déduit donc facilement :

**Proposition 11.6.3** *Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $P$  n'importe quelle conjonction de propriétés de prévisions sous-normalisées parmi "basse", "haute", "linéaire", "normalisée". L'espace des prévisions sous-normalisées sur  $X$  vérifiant  $P$ , muni de la topologie faible, est stablement compact.*

*Démonstration.* Par le lemme 11.6.1, puisque tout sous espace patch-fermé d'un espace stablement compact est stablement compact, et que  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  est stablement compact, puisqu'homéomorphe à l'espace stablement compact  $Z_{\leq 1}$ .  $\square$

Intéressons-nous maintenant aux espaces de prévisions continues. Nous procédons, comme à la section 4.5, via l'utilisation d'une rétraction. Celle-ci est donnée par la formule de Scott (lemme 3.6.16), telle que nous l'avons utilisée au lemme 11.2.18.

**Proposition 11.6.4** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Soit  $P$  n'importe quelle conjonction de propriétés de prévisions parmi "basse", "haute", "linéaire", "sous-normalisée", et "normalisée" si  $X$  est compact. La fonction  $\tau$  définie au lemme 11.2.18 et l'injection canonique  $\mathfrak{s}$  des prévisions continues dans les prévisions sur  $X$  définissent une rétraction et une section, respectivement, entre l'espace des prévisions continues vérifiant  $P$  sur  $X$  avec la topologie faible et l'espace des prévisions vérifiant  $P$  sur  $X$  avec la topologie faible.*

*Démonstration.* La préservation de  $P$  est due au lemme 11.2.18 et au lemme 11.4.4.

Il ne reste qu'à montrer que  $\tau$  et  $\mathfrak{s}$  définissent une rétraction. Clairement,  $\tau(\mathfrak{s}(F)) = F$  pour toute prévision continue  $F$ . En effet,  $\tau(\mathfrak{s}(F)) = \tau(F) = F$  puisque  $\tau(F)$  est la plus grande fonctionnelle continue inférieure ou égale à  $F$ . De plus,  $\mathfrak{s}$  est continue. Il ne reste qu'à montrer que  $\tau$  est continue. L'image réciproque par  $\tau$  de l'ensemble des prévisions continues  $F$  telles que  $F(f) > r$  est l'ensemble des prévisions  $F$  telles que  $\sup_{g \in B, g \ll f} F(g) > r$ , c'est-à-dire telles qu'il existe  $g \in B, g \ll f$ , telle que  $F(g) > r$ . C'est donc une union d'ouverts faibles de la forme  $[g > r]$ , avec  $g \in B, g \ll f$ , et donc elle-même un ouvert faible.  $\square$

Il s'ensuit immédiatement :

**Théorème 11.6.5** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Les espaces  $\nabla P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\Delta P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  sont stablement compacts.*

*Si de plus  $X$  est compact,  $\nabla P_{1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\Delta P_{1 \text{ wk}}(X)$ ,  $P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  sont stablement compacts.*

*Démonstration.* Pour toute propriété parmi "basse", "haute", "linéaire", et "normalisée" si  $X$  est compact, l'espace des prévisions continues sous-normalisées vérifiant  $P$  apparaît comme un rétract de l'espace de toutes les prévisions sous-normalisées, non nécessairement continues, vérifiant  $P$ . C'est la proposition 11.6.4. Par la proposition 11.6.3, ces derniers espaces sont stablement compacts. On conclut par le lemme de Lawson 3.2.2.  $\square$

## 11.7 Le cœur et la peau

Introduisons deux notions très proches de celle d'âme et d'écorce des prévisions colinéaires, que nous appellerons le cœur et la peau. Comme pour l'âme, le cœur contiendra toutes les tangentes supérieures, et comme pour l'écorce, la peau contiendra toutes les tangentes inférieures.

**Définition 11.7.1 (Cœur)** Soit  $X$  un espace topologique. Si  $F$  est une fonctionnelle de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ , on appelle cœur  $Coeur(F)$  de  $F$  l'ensemble des fonctionnelles linéaires  $G$  telles que  $F \leq G$ . Son cœur continu  $CCoeur(F)$  est le sous-ensemble de  $Coeur(F)$  formé des fonctionnelles linéaires continues.

On définit de même le cœur normalisé  $Coeur_1(F)$  comme étant l'ensemble des prévisions linéaires normalisées du cœur de  $F$ , le cœur continu normalisé  $CCoeur_1(F) = CCoeur(F) \cap \mathbf{P}_1^\Delta(X)$ , le cœur sous-normalisé  $Coeur_{\leq 1}(F)$  formé des prévisions linéaires sous-normalisées du cœur de  $F$ , et le cœur continu sous-normalisé  $CCoeur_{\leq 1}(F) = CCoeur(F) \cap \mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$ .

**Définition 11.7.2 (Peau)** Soit  $X$  un espace topologique. Si  $F$  est une fonctionnelle de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ , on appelle peau  $Peau(F)$  de  $F$  l'ensemble des fonctionnelles linéaires  $G$  telles que  $G \leq F$ . Sa peau continue  $CPeau(F)$  est le sous-ensemble de  $Peau(F)$  formé des prévisions normalisées linéaires continues. On définit comme ci-dessus la peau normalisée  $Peau_1(F)$ , la peau sous-normalisée  $Peau_{\leq 1}(F)$ , la peau continue normalisée  $CPeau_1(F) = CPeau(F) \cap \mathbf{P}_1^\Delta(X)$ , et la peau continue sous-normalisée  $CPeau_{\leq 1}(F) = Cenv\ell(F) \cap \mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$ .

Cette définition est conçue de sorte à correspondre à peu de choses près aux notions d'âme et d'écorce de capacités, voir les définitions 10.3.7 et 10.3.16. Lorsque  $\nu$  est un jeu continu,  $F = \alpha_e(\nu)$  est une prévision continue, et alors  $CCoeur(F)$ , qui consiste en toutes les prévisions linéaires continues  $G$  telles que  $F \leq G$ , contient en particulier toutes celles telles que  $F(\chi_X) = G(\chi_X)$ . Ces dernières sont de la forme  $G = \alpha_e(p)$ , où  $p$  est une valuation continue telle que  $p(X) = \nu(X)$  et  $\nu \leq p$  ( $p$  est dans l'âme de  $\nu$ ). Modulo l'isomorphisme donné par  $\alpha_e$ , le cœur continu contient donc l'âme continue. De même, la peau continue contient l'écorce continue.

Lorsque  $\nu$  est un jeu continu normalisé, alors son cœur continu normalisé consiste en toutes les prévisions linéaires continues normalisées  $G$  telles que  $F \leq G$ . On a alors automatiquement  $F(\chi_X) = G(\chi_X) = 1$ . En somme, le cœur continu normalisé d'un jeu continu normalisé est exactement son âme continue. De même, sa peau continue normalisée coïncide avec son écorce continue.

Nous obtenons ainsi une extension du théorème de Rosenmuller (corollaire 10.3.13) au cas non colinéaire mais normalisé :

**Théorème 11.7.3 (Rosenmuller, cas non colinéaire, normalisé)** Soit  $X$  un espace topologique, et  $F$  une prévision normalisée sur  $X$ . Alors  $F$  est basse si et seulement si, d'une part, le cœur normalisé  $Coeur_1(F)$  de  $F$  est non vide, et d'autre part, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$F(f) = \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f)$$

De plus, la borne inférieure est atteinte.

Si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $F$  est une prévision normalisée continue sur  $X$ , alors  $F$  est basse si et seulement si, d'une part, le cœur continu normalisé  $CCoeur_1(F)$  de  $F$  est non vide, et d'autre part, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$F(f) = \inf_{G \in CCoeur_1(F)} G(f)$$

De plus, la borne inférieure est atteinte.

*Démonstration.* Si  $F$  est basse, alors  $Coeur_1(F)$  est non vide par le théorème 11.3.10. De plus, il existe  $G \in Coeur_1(F)$  telle que  $F(f) = G(f)$ , d'où le fait que  $F(f) = \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f)$  et que la borne inférieure soit atteinte.

Réciproquement, si  $Coeur_1(F)$  est non vide et  $F(f) = \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f)$  pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , alors  $F$  est sur-additive, donc basse. En effet,

$$\begin{aligned} F(f + f') &= \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f + f') = \inf_{G \in Coeur_1(F)} (G(f) + G(f')) \quad \text{puisque } G \text{ est additive} \\ &\geq \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f) + \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f') = F(f) + F(f') \end{aligned}$$

On raisonne de même lorsque  $F$  est continue,  $X$  est stablement localement relativement compact,  $G$  variant alors dans  $CCoeur_1(F)$ .  $\square$

On en déduit un théorème similaire dans le cas sous-normalisé :

**Théorème 11.7.4 (Rosenmuller, cas non colinéaire, sous-normalisé)** Soit  $X$  un espace topologique, et  $F$  une prévision sous-normalisée sur  $X$ . Alors  $F$  est basse si et seulement si, d'une part, le cœur sous-normalisé  $Coeur_{\leq 1}(F)$  de  $F$  est non vide, et d'autre part, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$F(f) = \inf_{G \in Coeur_{\leq 1}(F)} G(f)$$

De plus, la borne inférieure est atteinte.

Si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $F$  est une prévision sous-normalisée continue sur  $X$ , alors  $F$  est basse si et seulement si, d'une part, le cœur continu sous-normalisé  $CCoeur_{\leq 1}(F)$  de  $F$  est non vide, et d'autre part, pour toute fonction continue bornée  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$F(f) = \inf_{G \in CCoeur_{\leq 1}(F)} G(f)$$

De plus, la borne inférieure est atteinte.

*Démonstration.* Même démonstration qu'au théorème 11.7.3, en invoquant le théorème 11.4.9 au lieu du théorème 11.3.10.  $\square$

On a aussi le cas dual :

**Théorème 11.7.5 (Rosenmuller, cas dual, continu, non colinéaire, normalisé)** Soit  $X$  un espace stablement compact,  $F$  une prévision haute continue normalisée sur  $X$ . Alors  $CPeau_1(F) \neq \emptyset$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,

$$F(f) = \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f)$$

Réciproquement, soit  $F$  une fonctionnelle de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $X$  telle que  $CPeau_1(F) \neq \emptyset$  et vérifiant l'équation ci-dessus pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $F$  est une prévision haute continue normalisée.

*Démonstration.* La première partie est le théorème 11.5.22. Réciproquement, si  $CPeau_1(F)$  est non vide et  $F(f) = \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f)$ , montrons que  $F$  est une prévision haute continue normalisée.

D'abord,  $F$  est positivement homogène et croissante, car tous les éléments de  $CPeau_1(F)$  le sont. Ensuite,  $F$  est continue : si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée de fonctions continues bornées de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$  de borne supérieure  $f$ , alors

$$\begin{aligned} F(f) &= \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f) = \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(\sup_{i \in I} f_i) \\ &= \sup_{G \in CPeau_1(F)} \sup_{i \in I} G(f_i) \quad \text{puisque tout } G \in CPeau_1(F) \text{ est continu} \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f_i) = \sup_{i \in I} F(f_i) \end{aligned}$$

$F$  est haute, car

$$\begin{aligned} F(f + f') &= \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f + f') = \sup_{G \in CPeau_1(F)} (G(f) + G(f')) \quad \text{puisque } G \text{ est linéaire} \\ &\leq \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f) + \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f') = F(f) + F(f') \end{aligned}$$

Enfin,  $F$  est normalisée, car  $F(a\chi_X + f) = \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(a\chi_X + f) = \sup_{G \in CPeau_1(F)} (a + G(f)) = a + \sup_{G \in CPeau_1(F)} G(f) = a + F(f)$ .  $\square$

**Théorème 11.7.6 (Rosenmuller, cas dual, continu, non colinéaire, sous-normalisé)** Soit  $X$  un espace stablement localement compact,  $F$  une prévision haute continue sous-normalisée sur  $X$ . Alors  $CPeau_{\leq 1}(F) \neq \emptyset$ . Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,

$$F(f) = \sup_{G \in CPeau_{\leq 1}(F)} G(f)$$

Réciproquement, soit  $F$  une fonctionnelle de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $X$  telle que  $CPeau_{\leq 1}(F) \neq \emptyset$  et vérifiant l'équation ci-dessus pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $F$  est une prévision haute continue sous-normalisée.

*Démonstration.* L'argument est essentiellement le même qu'au théorème 11.7.5. La principale différence est que l'on utilise le théorème 11.5.23 au lieu du théorème 11.5.22. Noter que ceci nous permet de supposer que  $X$  est seulement stablement localement compact, et pas nécessairement stablement compact.  $\square$

### 11.7.1 Le cas démoniaque : le cœur

Le cœur et la peau ont des propriétés remarquables de compacité dans la topologie faible. Le résultat suivant est une extension au cas non colinéaire de la proposition 10.3.15. La convexité est facile à observer, la compacité est plus difficile. Rappelons que l'on peut (presque) la démontrer à partir de la version de Plotkin (2006) du théorème de Banach-Alaoglu. À la place, nous utiliserons la machinerie de la section 11.6.

**Proposition 11.7.7 (Le cœur est convexe compact)** *Soit  $X$  un espace topologique, et  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Les cœurs  $\text{Coeur}(F)$ ,  $\text{Coeur}_1(F)$  et  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F)$  de  $F$  sont convexes : si  $G_1, G_2$  sont dans un de ces ensembles, et  $\alpha \in [0, 1]$ , alors  $\alpha G_1 + (1 - \alpha)G_2$  est dans le même ensemble.*

*Si  $F$  est sous-normalisée, alors  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F)$  est compact dans l'espace des prévisions sous-normalisées, des prévisions basses sous-normalisées, ou des prévisions linéaires sous-normalisées sur  $X$  munis de la topologie faible.*

*$\text{Coeur}_1(F)$  est aussi compact dans l'espace des prévisions (sous-)normalisées, des prévisions basses (sous-)normalisées, ou des prévisions linéaires (sous-)normalisées sur  $X$ , munis de la topologie faible.*

*Démonstration.* La convexité de  $\text{Coeur}(F)$ ,  $\text{Coeur}_1(F)$  et  $\text{Coeur}_{\leq 1}(X)$  est évidente.

Fixons une prévision sous-normalisée  $F$ . Soit  $P$  l'un quelconque des espaces de prévisions sous-normalisées ( $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ), de prévisions basses sous-normalisées (notons-le  $\nabla P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ), ou de prévisions linéaires sous-normalisées sur  $X$  (notons-le  $P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ). Par la proposition 11.6.3,  $P$  est stablement compact. Par l'homéomorphisme du lemme 11.6.2 et le lemme 11.6.1,  $P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  est patch-fermé dans  $P$ .

Par définition,  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F)$  est l'intersection de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  et de  $\uparrow F = \{G \in P_{\leq 1 \text{ wk}}(X) \mid F \leq G\}$ . Ce dernier est un compact finitaire, donc un compact saturé, donc un patch-fermé de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ . Donc  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F)$  est patch-fermé dans  $P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , donc compact par le lemme 10.3.14.

On raisonne de même pour démontrer que  $\text{Coeur}_1(F)$  est compact. L'unique changement est que nous autorisons maintenant aussi  $P$  à représenter l'espace des prévisions normalisées, des prévisions basses normalisées, ou des prévisions linéaires normalisées sur  $X$  (notons ce dernier  $P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ), et que nous remplaçons l'usage de  $P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  par celui de l'espace  $P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  des prévisions linéaires normalisées, et  $\nabla P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  par l'espace  $\nabla P_{1 \text{ wk}}(X)$  des prévisions basses normalisées.  $\square$

Notons que l'on n'a pas besoin de supposer que  $F$  est normalisée pour établir que  $\text{Coeur}_1(F)$  est convexe et compact. On n'en a besoin, ainsi que du fait que  $F$  soit basse, que pour s'assurer qu'il est non vide.

**Proposition 11.7.8 (Le cœur continu est convexe compact)** *Si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $F$  est une prévision sous-normalisée continue sur  $X$ , alors  $\text{CCoeur}_{\leq 1}(F)$  est un convexe compact de  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , de  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , et de  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ .*

*Si  $X$  est stablement relativement compact et  $F$  est une prévision normalisée continue, alors  $\text{CCoeur}_1(F)$  est un convexe compact de  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , de  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ , de  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ , de  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}(X)$ , de  $\nabla \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}(X)$ , et de  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ .*

*Démonstration.* De nouveau, la convexité des cœurs continus est évidente.

On remarque que  $CCoeur_{\leq 1}(F)$  est exactement l'image par la rétraction  $\tau$  du lemme 11.2.18 de  $Coeur_{\leq 1}(F)$ . En effet, si  $G \in Coeur_{\leq 1}(F)$ , alors  $F \leq G$ , donc  $F = \tau(F) \leq \tau(G)$ , c'est-à-dire  $\tau(G) \in CCoeur_{\leq 1}(F)$ . Réciproquement, si  $G \in CCoeur_{\leq 1}(F)$ , alors  $F \leq G$ , donc  $F = \tau(F) \leq \tau(G) = G$ , c'est-à-dire que  $G$  est l'image par  $\tau$  d'un élément ( $G$  lui-même) de  $Coeur_{\leq 1}(F)$ . L'image d'un compact par une fonction continue étant compact, on conclut que  $CCoeur_{\leq 1}(F)$  est compact.

De même,  $CCoeur_1(F)$  est l'image par  $\tau$  de  $Coeur_1(F)$ , à condition que  $F$  soit normalisée et  $X$  soit compact, par le lemme 11.2.18. Il est donc compact lui aussi.  $\square$

La proposition 11.7.8 admet une réciproque, que voici. Notons que malgré la ressemblance avec la proposition 10.3.15, cette dernière n'a pas de réciproque évidente, car il n'y a pas de condition facile sur les convexes compacts de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  ou de  $\mathbf{P}_1^{\Delta}{}_{wk}(X)$  qui assure la colinéarité de la fonctionnelle  $\sqcap C$  ci-dessous.

**Lemme 11.7.9** *Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $K$  un sous-ensemble compact non vide de l'espace des prévisions linéaires sous-normalisées sur  $X$ , équipé de la topologie faible. Posons :*

$$\sqcap K(f) = \inf_{G \in K} G(f)$$

*pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . Alors la borne inférieure est atteinte : pour chaque  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , il existe  $G \in K$  tel que  $\sqcap K(f) = G(f)$ . De plus,  $\sqcap K$  est une prévision basse sous-normalisée, et si  $K$  est un sous-ensemble de l'espace des prévisions linéaires normalisées sur  $X$ , alors  $\sqcap K$  est normalisée.*

*Si  $K$  est un compact non vide de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , alors  $\sqcap K$  est une prévision basse continue sous-normalisée. Si  $K$  est un compact non vide de  $\mathbf{P}_1^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , alors  $\sqcap K$  est une prévision basse continue normalisée.*

*Enfin, la fonction qui à  $Q$  associe  $\sqcap Q$  est continue de  $\mathcal{Q}(P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  vers  $\nabla P_{\leq 1}(X)$ , de  $\mathcal{Q}(P_1^{\Delta}{}_{wk}(X))$  vers  $\nabla P_1(X)$ , de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  vers  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ , et de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_1^{\Delta}{}_{wk}(X))$  vers  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ .*

*Démonstration.* On pourrait vérifier le fait que la borne inférieure est atteinte à la main, mais on a en réalité déjà fait le travail. Il suffit de remarquer que :

$$\sqcap K(f) = \int_{G \in P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)} G(f) du_K = \int_{G \in P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)} G(f) du_{\uparrow K}$$

par la proposition 4.2.2. Le jeu  $u_{\uparrow K}$  est continu par la proposition 5.1.1. Par le fait 5.4.2, la borne inférieure est donc atteinte dans  $\uparrow K$ , donc dans  $K$ .

On déduit de la formulation ci-dessus que  $\sqcap K(f) = \alpha_e(u_{\uparrow K})(\lambda G \cdot G(f))$ , donc  $\sqcap K = \alpha_e(u_{\uparrow K}); \vartheta$ , où  $\vartheta(G)(g) = G(g)$ , c'est-à-dire  $\vartheta(G) = G$ . Ceci a un sens car  $\vartheta$  est bien continue et bornée. De plus,  $u_{\uparrow K}$  est un jeu convexe, donc  $\alpha_e(u_{\uparrow K})$  est une prévision basse par le fait 10.1.2. C'est clairement une prévision basse normalisée. Comme  $\vartheta(G)$  est une prévision basse (en fait linéaire) sous-normalisée pour tout  $G \in P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ,  $\sqcap K$  est une prévision basse sous-normalisée par la proposition 11.3.3. Elle est normalisée dès que  $K$  est un sous-ensemble de

l'espace des prévisions linéaires normalisées, car alors  $\vartheta(G) = G \in K$  sera toujours normalisée, et l'on applique alors la proposition 11.4.3.

Lorsque  $K \subseteq \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , la prévision  $\prod K$  est continue : appliquer la proposition 11.1.4, sachant que  $\alpha_{\mathcal{C}}(u_{\uparrow K})$  est continue par la proposition 5.1.1 et la proposition 4.2.1, et sachant que  $\vartheta(G) = G \in K$  sera toujours continue. Si  $K \subseteq \mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , l'argument est similaire.

Enfin, la continuité de  $Q \mapsto \prod Q$  vient du fait que, pour toute famille filtrante  $(Q_i)_{i \in I}$  de compacts de l'espace adéquat,

$$\begin{aligned} \prod \left( \bigcap_{i \in I} Q_i \right) (f) &= \int_{G \in P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)} G(f) du_{\bigcap_{i \in I} Q_i} \\ &= \int_{G \in P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)} G(f) d \sup_{i \in I} u_{Q_i} \quad \text{par la proposition 5.5.7} \\ &= \sup_{i \in I} \int_{G \in P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)} G(f) du_{Q_i} \quad \text{par la proposition 4.2.5} \\ &= \sup_{i \in I} \prod Q_i(f) \end{aligned}$$

On notera que c'est la continuité de Scott que nous obtenons ainsi, pas la continuité pour la topologie faible sur l'espace d'arrivée.  $\square$

Nous aurons besoin d'une variante de la construction de l'espace de Smyth, qui prenne en compte la notion de convexité.

**Définition 11.7.10** *Pour tout sous-espace convexe  $Z$  d'un cône topologique  $C$ , notons  $\mathcal{Q}^{cvx}(Z)$  l'espace des compacts saturés non vides convexes de  $Z$ , c'est-à-dire des  $Q \in \mathcal{Q}(Z)$  tels que pour tous  $a, b \in Q$ , pour tout  $r \in [0, 1]$ ,  $r \cdot a + (1 - r) \cdot b \in Q$ .  $\mathcal{Q}^{cvx}(Z)$  est ordonné, comme  $\mathcal{Q}(Z)$ , par inclusion inverse  $\supseteq$ .*

Nous utiliserons cette construction avec typiquement  $C = \mathbf{P}_{wk}^{\Delta}(X)$ , l'espace des prévisions linéaires continues sur  $X$ , avec la topologie faible ; et  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  par exemple. Notons que  $Z$  n'est pas un cône topologique, et n'est en fait même pas un cône : le produit scalaire de  $\alpha_{\mathcal{C}}(\delta_x)$  (pour n'importe quel  $x \in X$ ) par 2, par exemple, n'est pas dans  $Z$ . C'est la raison pour laquelle on ne définit pas  $\mathcal{Q}^{cvx}(Z)$  uniquement dans le cas où  $Z$  est un cône, mais où  $Z$  est une partie convexe d'un cône.

Rappelons qu'une Scott-rétraction est une surjection de Galois dont les deux composantes sont Scott-continues (définition 10.1.6). C'est en particulier une rétraction.

**Théorème 11.7.11** *Soit  $X$  un espace topologique. Le couple  $\text{Coeur}_1 \dashv \prod$  (resp.  $\text{Coeur}_{\leq 1} \dashv \prod$ ) forme une Scott-rétraction :*

- de l'espace  $\nabla P_{1}{}_{wk}(X)$  (resp.  $\nabla P_{\leq 1}{}_{wk}(X)$ ) des prévisions basses normalisées (resp. sous-normalisées) sur  $X$  ;
- dans  $\mathcal{Q}(P_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}(P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$ ), où  $P_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  est l'espace des prévisions linéaires normalisées, et  $P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  est celui des prévisions linéaires sous-normalisées, tous deux munis de la topologie faible.

$Coeur_1 \dashv \sqcap$  (resp.  $Coeur_{\leq 1} \dashv \sqcap$ ) est aussi une Scott-rétraction de  $\nabla P_{1\ wk}(X)$  (resp.  $\nabla P_{\leq 1\ wk}(X)$ ) dans  $\mathcal{Q}^{cvx}(P_{1\ wk}^\Delta(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}^{cvx}(P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X))$ ).

Si  $X$  est stablement localement relativement compact,  $CCoeur_{\leq 1} \dashv \sqcap$  est une Scott-rétraction de  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  dans  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X))$ , ainsi que dans  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X))$ .

Si  $X$  est stablement relativement compact,  $CCoeur_1 \dashv \sqcap$  est une Scott-rétraction de  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$  dans  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X))$ , ainsi que dans  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X))$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  une prévision basse normalisée (resp. sous-normalisée) sur  $X$ . Alors  $Coeur_1(F)$  (resp.  $Coeur_{\leq 1}(F)$ ) est un convexe compact dans l'espace des prévisions basses linéaires normalisées sur  $X$  par la proposition 11.7.7, il est non vide et  $F(f) = \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f)$  (resp.  $F(f) = \inf_{G \in Coeur_{\leq 1}(F)} G(f)$ ) par le théorème 11.7.3 (resp. le théorème 11.7.4), donc :

$$\sqcap Coeur_1(F)(f) = \inf_{G \in Coeur_1(F)} G(f) = F(f) \quad (11.4)$$

$$\text{resp. } \sqcap Coeur_{\leq 1}(F)(f) = \inf_{G \in Coeur_{\leq 1}(F)} G(f) = F(f) \quad (11.5)$$

Il est de plus clair que  $Coeur_1(F)$  (resp.  $Coeur_{\leq 1}(F)$ ) est clos par le haut dans l'espace des prévisions linéaires normalisées (resp. sous-normalisées) sur  $X$ .

On observe ensuite que  $Coeur_1$ ,  $Coeur_{\leq 1}$  et  $\sqcap$  préservent l'ordre. Il suffit de faire attention au fait que l'ordre sur les espaces de parties compactes saturées (éventuellement convexes) est l'inclusion inverse : si  $F \leq F'$ , alors  $Coeur_1(F) \supseteq Coeur_1(F')$  et  $Coeur_{\leq 1}(F) \supseteq Coeur_{\leq 1}(F')$ , et si  $Q \supseteq Q'$  alors  $\sqcap Q \leq \sqcap Q'$ .

Si  $F \leq \sqcap Q$ , pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $F(f) \leq G(f)$  pour tout  $G \in Q$ . Autrement dit, pour tout  $G \in Q$ ,  $F \leq G$ , c'est-à-dire  $Q \subseteq Coeur_{\leq 1}(F)$ . De plus, si  $Q$  consiste en des prévisions linéaires normalisées,  $Q \subseteq Coeur_1(F)$ .

Réciproquement, si  $Q \subseteq Coeur_{\leq 1}(F)$  (resp. si  $F$  est normalisée et  $Q \subseteq Coeur_1(F)$ ), par définition pour tout  $G \in Q$ ,  $F \leq G$ . Donc  $F \leq \sqcap Q$ .

On a ainsi une correspondance de Galois. Pour montrer qu'il s'agit d'une surrection de Galois, il reste à montrer que  $\sqcap Coeur_{\leq 1}(F) = F$ , et que  $\sqcap Coeur_1(F) = F$  si  $F$  est normalisée. Ce sont les équations (11.4) et (11.5).

La fonction  $\sqcap$  est Scott-continue par le lemme 11.7.9. Pour démontrer que  $Coeur_{\leq 1}$  est Scott-continue, soit  $F$  la borne supérieure d'une famille dirigée  $(F_i)_{i \in I}$ , alors  $Coeur_{\leq 1}(F) = \{G \in P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X) \mid F \leq G\} = \{G \in P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X) \mid \forall i \in I, F_i \leq G\} = \bigcap_{i \in I} Coeur_{\leq 1}(F_i)$ .  $Coeur_{\leq 1} \dashv \sqcap$  est donc une Scott-rétraction. De même pour  $Coeur_1 \dashv \sqcap$ .

Les cas de prévisions continues sous-normalisées, lorsque  $X$  est stablement localement relativement compact, ou des prévisions continues normalisées, avec  $X$  stablement relativement compact, procèdent de façon similaire.  $\square$

**Corollaire 11.7.12** *L'espace des prévisions basses normalisées  $\nabla P_1(X)$  (resp., sous-normalisées  $\nabla P_{\leq 1}(X)$ ) est un rétract de  $\mathcal{Q}(P_{1\ wk}^\Delta(X))$  et de  $\mathcal{Q}^{cvx}(P_{1\ wk}^\Delta(X))$  (resp. de  $\mathcal{Q}(P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X))$  et de  $\mathcal{Q}^{cvx}(P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X))$ ).*

*Lorsque  $X$  est stablement localement relativement compact (resp. et compact),  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ ) est un rétract de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X))$  et de  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X))$  (resp. de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X))$  et de  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X))$ ).*

Le modèle du cône convexe haut (“convex upper powercone”) de Tix et al. (2005, section 4.2) fournit, du coup, un modèle très proche de notre modèle des prévisions basses continues. Tix et al. (2005, section 4.4) proposent en effet comme domaine mêlant probabilités et non-déterminisme démoniaque le cpo  $\mathcal{Q}^{cvx}(\overline{\mathbf{V}}(X))$ , où  $\overline{\mathbf{V}}(X)$  est l’espace des valuations continues *étendues* sur  $X$ , c’est-à-dire à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$ . Il est naturel, dans une optique probabiliste, de remplacer le d-cône  $\overline{\mathbf{V}}(X)$  par  $\mathbf{V}_1(X)$  ou  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$ . Il semble que la plupart des propriétés de  $\mathcal{Q}^{cvx}(\overline{\mathbf{V}}(X))$  soit héritées par  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{V}_{\leq 1}(X))$ . D’un autre côté, nous aurions aussi pu développer notre théorie des cœurs et des peaux de prévisions non nécessairement colinéaires dans un cadre non normalisé. Les éléments des cœurs et des peaux auraient été des fonctionnelles linéaires croissantes, c’est-à-dire des valuations étendues. C’est ce que nous dit le théorème 11.2.9 pour les prévisions basses, et le théorème 11.2.19 dans le cas continu.

Vu l’isomorphisme entre  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  et  $\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$ , par la proposition 11.4.2, (resp. entre  $\mathbf{V}_1(X)$  et  $\mathbf{P}_1^\Delta(X)$ , par la proposition 11.3.2), l’espace  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{V}_{\leq 1}(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{V}_1(X))$ ) est isomorphe à  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_1^\Delta(X))$ ). Ceci n’est pas exactement l’espace mentionné dans les deux dernières parties du théorème 11.7.11, qui est  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1\ w_k}^\Delta(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ w_k}^\Delta(X))$ ) : de plus près,  $\mathbf{P}_{\leq 1\ w_k}^\Delta(X)$  est équipé de la topologie faible, pas de la topologie de Scott. Ceci n’est pas une différence dès que  $X$  est un cpo continu, qui est essentiellement le cadre dans lequel la théorie de Tix et al. fonctionne sans accroc. Dans ce cas en effet,  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  et  $\mathbf{V}_{\leq 1\ w_k}(X)$  (resp.  $\mathbf{V}_1(X)$  et  $\mathbf{V}_{1\ w_k}(X)$ , à condition que  $X$  ait aussi un plus petit élément) coïncident par la proposition 3.7.12. Comme d’autre part  $\mathbf{V}_{\leq 1\ w_k}(X)$  (resp.  $\mathbf{V}_{1\ w_k}(X)$ ) est homéomorphe à  $\mathbf{P}_{\leq 1\ w_k}^\Delta(X)$  (resp.  $\mathbf{P}_{1\ w_k}^\Delta(X)$ ) par le théorème 11.1.2, l’espace  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{V}_{\leq 1}(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{V}_1(X))$ ) est donc isomorphe à l’espace  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1\ w_k}^\Delta(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ w_k}^\Delta(X))$ ).

La dernière différence avec le modèle de Tix et al. est donc que  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1\ w_k}(X)$  (resp.  $\nabla \mathbf{P}_{1\ w_k}(X)$ ) n’est pas a priori homéomorphe à  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1\ w_k}^\Delta(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ w_k}^\Delta(X))$ ). Le théorème 11.7.11 n’établit en effet que l’existence d’une surrection de Galois dont les deux composantes sont continues, pas d’un homéomorphisme, de notre modèle dans celui de Tix et al. — si l’on ignore la différence entre valuations étendues et probabilités. Nous montrons maintenant dans le reste de cette section que les deux modèles sont effectivement isomorphes, dès que  $X$  est un cpo continu, le cadre dans lequel se placent Tix et al..

Pour ceci, nous commençons par caractériser quels compacts de  $\mathbf{P}_{\leq 1\ w_k}^\Delta(X)$  sont les cœurs de prévisions basses continues. On sait que tous ces compacts sont convexes. Ils vérifient une propriété de convexité plus forte, que nous définissons plus bas, et qui est en quelque sorte une forme de “convexité infinie”. Nous avons déjà vu une telle forme de convexité infinie à la proposition 3.12.23 et suivantes. L’idée est similaire à la théorie dite de Choquet, laquelle culmine au théorème de Choquet, qui énonce que pour toute partie  $Q$  compacte et convexe d’un espace vectoriel normé  $E$ , tout point de  $Q$  est le barycentre (dans un sens proche de celui de la proposition 3.12.23) d’une probabilité (au sens de la théorie de la mesure) à support dans l’ensemble des points extrêmes de  $Q$ . (Un point  $z$  de  $Q$  est *extrême* si et seulement si, dès que l’on peut écrire  $z = \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y$ , avec  $0 < \alpha < 1$ , alors  $x$  ou  $y$  n’est pas dans  $Q$ .) Notre notion de barycentre et de “convexité infinie” sera définie de façon différente, et peut-être plus élémentaire.

**Définition 11.7.13 (Barycentre)** *Pour toute probabilité  $\mathcal{P}$  sur  $Y = P_{w_k}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_{w_k}^\Delta(X)$ ),*

$P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ , le barycentre de  $\mathcal{P}$  est la fonction qui à tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  associe :

$$\text{Bary}(\mathcal{P})(f) = \int_{G \in Y} G(f) d\mathcal{P}$$

Lorsque  $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{G_i}$ ,  $\text{Bary}(\mathcal{P})(f) = \sum_{i=1}^n a_i G_i(f)$ . Comme  $\mathcal{P}$  est une probabilité,  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , donc  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est effectivement un barycentre, au sens du lemme 3.12.20, de  $G_1, \dots, G_n$ .

Les espaces usuels de prévisions linéaires sont stables par cette notion plus générale de barycentre.

**Lemme 11.7.14** Soit  $Y = P_{\text{wk}}^\Delta(X)$  (resp.,  $P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ). Pour toute probabilité  $\mathcal{P}$  sur  $Y$ ,  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est dans  $Y$ .

Soit  $Y = \mathbf{P}_{\text{wk}}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ). Pour toute probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $Y$ ,  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est dans  $Y$ .

*Démonstration.* On vérifie que  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est positivement homogène : c'est parce que  $G$  est positivement homogène pour tout  $G \in Y$ , et la proposition 4.2.12. Elle est croissante, car tout  $G \in Y$  l'est, et par le lemme 4.1.2. Elle est linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Bary}(\mathcal{P})(f + g) &= \int_{G \in Y} G(f + g) d\mathcal{P} \\ &= \int_{G \in Y} [G(f) + G(g)] d\mathcal{P} \quad \text{puisque tout } G \in Y \text{ est linéaire} \\ &= \int_{G \in Y} G(f) d\mathcal{P} + \int_{G \in Y} G(g) d\mathcal{P} = \text{Bary}(\mathcal{P})(f) + \text{Bary}(\mathcal{P})(g) \end{aligned}$$

par le corollaire 4.3.3, puisque  $\mathcal{P}$  est une valuation.

Lorsque  $\mathcal{P}$  est une probabilité continue et  $Y$  est un espace de prévisions continues (deuxième partie du lemme), pour toute famille dirigée  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions continues bornées de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ , de borne supérieure  $f$ ,

$$\begin{aligned} \text{Bary}(\mathcal{P})(f) &= \int_{G \in Y} G(f) d\mathcal{P} \\ &= \int_{G \in Y} \sup_{i \in I} G(f_i) d\mathcal{P} \quad \text{puisque tout } G \in Y \text{ est continu} \\ &= \sup_{i \in I} \int_{G \in Y} G(f_i) d\mathcal{P} = \sup_{i \in I} \text{Bary}(\mathcal{P})(f_i) \end{aligned}$$

par la proposition 4.2.1, comme  $\mathcal{P}$  est continue. Donc  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est une prévision continue.

Lorsque  $Y$  est un espace de prévisions sous-normalisées, pour tout  $f$  et tout  $a \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} \text{Bary}(\mathcal{P})(a + f) &= \int_{G \in Y} G(a + f) d\mathcal{P} \\ &\leq \int_{G \in Y} [a + G(f)] d\mathcal{P} \end{aligned}$$

puisque tout  $G \in Y$  est sous-normalisé, et l'intégrale de Choquet est croissante en la fonction intégrée (lemme 4.1.2). Cette dernière intégrale vaut :

$$a\mathcal{P}(Y) + \int_{G \in Y} G(f)d\mathcal{P} = a + \text{Bary}(\mathcal{P})(f)$$

en utilisant le fait que  $\mathcal{P}$  est une probabilité. Donc  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est sous-normalisée. De même, lorsque  $Y$  est un espace de prévisions normalisées,  $\text{Bary}(\mathcal{P})(a + f) = a + \text{Bary}(\mathcal{P})(f)$ , et  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est donc normalisée.  $\square$

Définissons maintenant comme à la proposition 3.12.32 une notion de barycentre. Commentons par faire quelques remarques sur la notion de support d'un jeu.

**Fait 11.7.15** *Un jeu  $\nu$  sur  $X$  est à support dans une partie  $A$  de  $X$  si et seulement si  $\nu^\dagger(A) = \nu(X)$ , ou de façon équivalente  $\nu^\perp(X \setminus A) = 0$ .*

C'est une conséquence directe de la définition de  $\nu^\dagger$  (définition 6.2.1).

Nous avons remarqué peu après la définition 3.12.24 que la notion de support par elle-même n'avait en général aucun sens. Elle en a cependant un dans le cas des jeux convexes :

**Proposition 11.7.16 (Support)** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour tout jeu convexe  $\nu$  sur  $X$ , il existe un plus petit compact saturé  $Q$  tel que  $\nu$  soit à support dans  $Q$ .*

*On appelle ce compact saturé  $Q$  le support de  $\nu$ .*

*Démonstration.* Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  la famille des compacts saturés de  $X$  tels que  $\nu$  soit à support dans  $Q_i$ . Cette famille est non vide, car  $X$  étant compact en fait partie. Elle est filtrante : si  $\nu$  est à support à la fois dans  $Q_i$  et dans  $Q_j$ , alors, en utilisant le point 2 du théorème 6.2.6 et le fait que  $\nu$  est convexe,  $\nu^\perp(X \setminus (Q_i \cap Q_j)) = \nu^\perp((X \setminus Q_i) \cup (X \setminus Q_j)) \leq \nu^\perp(X \setminus Q_i) + \nu^\perp(X \setminus Q_j) - \nu^\perp((X \setminus Q_i) \cap (X \setminus Q_j))$ . Or  $\nu^\perp(X \setminus Q_i)$  et  $\nu^\perp(X \setminus Q_j)$  sont nuls par hypothèse, et  $\nu^\perp((X \setminus Q_i) \cap (X \setminus Q_j)) \geq 0$ , donc  $\nu^\perp(X \setminus (Q_i \cap Q_j)) = 0$ . On en déduit que  $\nu$  est à support dans  $Q_i \cap Q_j$ , lequel est compact saturé puisque  $X$  est cohérent.

Puisque  $X$  est bien filtrant,  $\bigcap_{i \in I} Q_i$  est alors un compact saturé, et par le point 1 du théorème 6.2.6,

$$\nu^\perp\left(X \setminus \bigcap_{i \in I} Q_i\right) = \nu^\perp\left(\bigcup_{i \in I} (X \setminus Q_i)\right) = \sup_{i \in I} \nu^\perp(X \setminus Q_i) = 0$$

Donc  $\nu$  est à support dans  $\bigcap_{i \in I} Q_i$ , qui est alors clairement le plus petit compact saturé  $Q$  tel que  $\nu$  soit à support dans  $Q$ .  $\square$

### ▷ Exercice 11.1

*Soit  $X$  un espace stablement compact. Calculer le support de la crédibilité simple  $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{Q_i}$ .*

**Lemme 11.7.17** *Soit  $\nu$  un jeu sur un espace topologique  $X$ , et  $Q$  un compact saturé de  $X$ . Alors  $\nu$  est à support dans  $Q$  si et seulement si, pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$\int_{x \in X} f(x)d\nu \geq \nu(X) \cdot \min_{x \in Q} f(x) = \nu(X) \cdot f_*(Q) \quad (11.6)$$

*Démonstration.* Si (11.6) est valide, alors pour tout ouvert  $U$  contenant  $Q$ , en posant  $f = \chi_U$ , on obtient  $\nu(U) \geq \nu(X)$ , donc  $\nu(U) = \nu(X)$ . Réciproquement, supposons que  $\nu$  soit à support dans  $Q$ . Posons  $a = \min_{x \in Q} f(x)$ . Notons que  $a$  est bien défini, par le fait 5.4.2. De plus, si  $t < a$ , alors  $f^{-1}]t, +\infty[$  contient  $Q$ , donc  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[) = \nu(X)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &\geq \int_0^a \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &= \int_0^a \nu(X) dt = a\nu(X) \end{aligned}$$

On a ici utilisé le fait que puisque  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[)$  et  $\nu(X)$  ne diffèrent qu'en un nombre fini de valeurs de  $t$  ( $t = a$  au plus), leurs intégrales de Riemann sont égales.  $\square$

Nous pouvons maintenant définir la notion de "convexité infinie" dont nous avons parlé plus haut.

**Définition 11.7.18 (Fortement convexe)** Soit  $Y = P_{wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = P_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = P_{1, wk}^\Delta(X)$  (resp.,  $Y = \mathbf{P}_{wk}^\Delta(X)$ , ou  $Y = \mathbf{P}_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = \mathbf{P}_{1, wk}^\Delta(X)$ ). Une partie  $\mathcal{A}$  de  $Y$  est fortement convexe si et seulement si, pour toute probabilité (resp., et continue)  $\mathcal{P}$  à support dans  $\mathcal{A}$ ,  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est dans  $\mathcal{A}$ .

On notera  $\text{Conv}(\mathcal{A})$  l'espace de tous les barycentres  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  de probabilités (resp., et continues)  $\mathcal{P}$  à support dans  $\mathcal{A}$ .

Ceci généralise la notion de convexité usuelle sur  $Y$ . Le fait que  $\mathcal{A}$  soit fortement convexe implique que, en particulier, pour toute probabilité simple  $\mathcal{P}$  à support dans  $\mathcal{A}$ ,  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est dans  $\mathcal{A}$ . Or  $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{G_i}$  est à support dans  $\mathcal{A}$  si et seulement si tout les  $G_i$  sont dans  $\mathcal{A}$  (voir le lemme 3.12.25), et alors  $\text{Bary}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n a_i G_i$  est un barycentre (au sens du lemme 3.12.20), de  $G_1, \dots, G_n$ . Le lemme 3.12.20 implique donc que  $\mathcal{A}$  soit convexe :

**Fait 11.7.19** Toute partie fortement convexe est convexe. Pour toute partie  $\mathcal{A}$ ,  $\text{conv}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Conv}(\mathcal{A})$ .

**Proposition 11.7.20 (Le cœur est fortement convexe)** Soit  $X$  un espace topologique,  $F$  une prévision basse sur  $X$ . Les cœurs  $\text{Coeur}_1(F)$  et  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F)$  de  $F$  sont fortement convexes dans  $Y$ , où  $Y$  est  $P_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$ , ou  $P_{1, wk}^\Delta(X)$  selon le cas.

Si  $F$  est de plus continue et  $X$  est stablement localement relativement compact, alors  $\text{CCoeur}_{\leq 1}(F)$  est fortement convexe dans  $Y = \mathbf{P}_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$ .

Si  $F$  est continue et  $X$  est stablement relativement compact, alors  $\text{CCoeur}_1(F)$  est fortement convexe dans  $Y = \mathbf{P}_{1, wk}^\Delta(X)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{Q}$  l'un quelconque des cœurs mentionnés. Considérons une probabilité  $\mathcal{P}$  (continue dans les deuxième et troisième parties de la proposition) à support dans  $\mathcal{Q}$ . Par le lemme 11.7.17,

$$\int_{G \in Y} \varphi(G) d\mathcal{P} \geq \min_{G \in \mathcal{Q}} \varphi(G)$$

pour toute fonction continue bornée  $\varphi$  de  $Y$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  arbitraire, et posons  $\varphi(G) = G(f)$ . On observe que  $\varphi$  est continue, par la définition de la topologie faible (définition 11.1.1). Elle est bornée car  $G$  étant (sous-)normalisée,  $\varphi(G) \leq \sup_{x \in X} f(x)$ . L'inégalité ci-dessus se lit alors  $Bary(\mathcal{P})(f) \geq \prod Q(f)$ . Comme  $f$  est arbitraire,  $\prod Q \leq Bary(\mathcal{P})$ , donc  $Bary(\mathcal{P})$  est dans le cœur (continu, sous-normalisé, normalisé, selon le cas, grâce au lemme 11.7.14) de  $\prod Q$ . Or, par le théorème 11.7.11,  $\prod Q = F$ .  $\square$

Le lemme clé permettant de démontrer la réciproque est le suivant.

**Lemme 11.7.21** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact (resp., et compact), et  $Y$  l'espace  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^{\Delta}(X)$ ). Soit  $\mathcal{Q}$  un compact saturé non vide de  $Y$ , et  $G \in Y$  tel que  $\prod Q \leq G$ . Alors il existe une probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $Y$ , à support dans  $\mathcal{Q}$ , telle que  $Bary(\mathcal{P}) \leq G$ .*

*Démonstration.* Éliminons d'abord un cas trivial, celui où  $\prod Q(\chi_X) = 0$ . Dans ce cas, en effet, le minimum étant atteint (puisque  $\mathcal{Q}$  est compact), il existe  $G' \in \mathcal{Q}$  tel que  $G'(\chi_X) = 0$ . Ceci est impossible dans le cas normalisé ( $Y = \mathbf{P}_1^{\Delta}(X)$ ). Dans le cas sous-normalisé, la prévision  $G'$  ainsi obtenue est identiquement nulle : pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $G'(f) \leq G'(\sup_{x \in X} f(x) \cdot \chi_X) = \sup_{x \in X} f(x) \cdot G'(\chi_X) = 0$ . La probabilité simple  $\mathcal{P} = \delta_{G'}$  convient alors : en effet,  $Bary(\mathcal{P})(f)$  vaut alors  $G'(f) = 0$ , ce qui est bien inférieur ou égal à  $G(f)$ .

Supposons donc  $\prod Q(\chi_X) \neq 0$ . Nous allons utiliser, de nouveau, le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, en nous plaçant dans le cône ordonné  $\langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . Pour tout  $\varphi \in \langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , posons  $q(\varphi) = \min_{G \in \mathcal{Q}} \varphi(G) = \varphi_*(\mathcal{Q})$ . Ceci est bien défini, par le fait 5.4.2. La fonction  $q$  est sur-linéaire :  $q(a\varphi) = aq(\varphi)$  est clair, et  $q(\varphi + \varphi') \geq q(\varphi) + q(\varphi')$  est une inégalité facile. De plus,  $q$  est croissante, de façon évidente.

Posons maintenant  $p(\varphi) = \inf_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi(G') \leq G'(f)}} G(f)$ . S'il n'existe aucun  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  tel que cette condition soit vérifiée,  $p(\varphi)$  vaut  $+\infty$ .

Montrons que  $p(a\varphi) = ap(\varphi)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ . Si  $a = 0$ ,  $p(0) = 0$  car lorsque  $\varphi = 0$ , on peut prendre  $f = 0$ , et alors on a bien  $\varphi(G') \leq G'(f)$  pour tout  $G' \in \mathcal{Q}$ . Sinon,

$$\begin{aligned} p(a\varphi) &= \inf_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot a\varphi(G') \leq G'(f)}} G(f) \\ &= \inf_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi(G') \leq G'(f/a)}} G(f) \\ &= a \inf_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi(G') \leq G'(f/a)}} G(f/a) = ap(\varphi) \end{aligned}$$

Montrons ensuite que  $p$  est sous-additive. On a :

$$\begin{aligned}
p(\varphi) + p(\varphi') &= \inf_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi(G') \leq G'(f)}} G(f) + \inf_{\substack{g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi'(G') \leq G'(g)}} G(g) \\
&= \inf_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi(G') \leq G'(f), \varphi'(G') \leq G'(g)}} G(f + g) \\
&\quad \text{puisque } G \text{ est linéaire} \\
&\geq \inf_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot (\varphi + \varphi')(G') \leq G'(f + g)}} G(f + g) \\
&\quad \text{puisque tout } G' \in Y \text{ est linéaire} \\
&\geq \inf_{\substack{h \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot (\varphi + \varphi')(G') \leq G'(h)}} G(h) = p(\varphi + \varphi')
\end{aligned}$$

Donc  $p$  est sous-linéaire. Il se trouve que  $p$  est aussi croissante. Finalement,  $q \leq p$ . En effet, et c'est ici que nous utilisons l'hypothèse  $\prod \mathcal{Q} \leq G$ , fixons  $\varphi$  ; alors pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  tel que  $\forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi(G') \leq G'(f)$ , on a  $G(f) \geq \prod \mathcal{Q}(f) = \min_{G' \in \mathcal{Q}} G'(f) \geq \min_{G' \in \mathcal{Q}} \varphi(G') = q(\varphi)$ . Comme  $f$  est quelconque, on peut prendre les bornes inférieures de chaque côté, et l'on en conclut  $p(\varphi) \geq q(\varphi)$ .

On peut donc appliquer le théorème du sandwich de Roth 3.12.2 : il existe une fonction linéaire croissante  $\mathcal{G}_0$  de  $\langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\overline{\mathbb{R}^+}$  telle que  $q \leq \mathcal{G}_0 \leq p$ .

Montrons qu'alors  $\mathcal{G}_0$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Rappelons que  $\prod \mathcal{Q}(\chi_X) \neq 0$ , donc il existe une constante  $\epsilon > 0$  telle que  $G'(\chi_X) \geq \epsilon$  pour tout  $G' \in \mathcal{Q}$ . Pour  $\varphi = \chi_Y$ , il existe alors une fonction  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  telle que  $G'(f) \geq \varphi(G')$  pour tout  $G' \in \mathcal{Q}$ , à savoir  $f = 1/\epsilon \cdot \chi_X$ . Donc  $p(\varphi) = p(\chi_Y)$  ne vaut pas  $+\infty$ . Ceci implique  $\mathcal{G}_0(\chi_Y) \neq +\infty$ , puisque  $\mathcal{G}_0 \leq p$ . Pour tout  $\varphi \in \langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ,  $\mathcal{G}_0(\varphi) \leq \sup_{G' \in Y} \varphi(G')$ .  $\mathcal{G}_0(\chi_Y)$  est donc différent de  $+\infty$ . Donc  $\mathcal{G}_0$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , et est en conséquence une prévision linéaire sur  $Y$ .

Posons  $a = \inf_{\mathcal{U} \supseteq \mathcal{Q}} \mathcal{G}_0(\chi_{\mathcal{U}})$ , où  $\mathcal{U}$  parcourt les ouverts de  $Y$  contenant  $\mathcal{Q}$ . On note que, comme  $q \leq \mathcal{G}_0$ , en particulier pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $\mathcal{Q}$ ,  $q(\chi_{\mathcal{U}}) \leq \mathcal{G}_0(\chi_{\mathcal{U}})$ . Or  $q(\chi_{\mathcal{U}}) = \min_{G' \in \mathcal{Q}} \chi_{\mathcal{U}}(G') = 1$ , donc  $\mathcal{G}_0(\chi_{\mathcal{U}}) \geq 1$ . On en déduit que  $a \geq 1$ . Posons  $\mathcal{G}_1 = 1/a \cdot \mathcal{G}_0$ . Alors  $\mathcal{G}_1(\chi_Y) = 1$ , en particulier  $\mathcal{G}_1$  est une prévision linéaire normalisée ; et  $\mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_0 \leq p$ .

Posons  $\mathcal{G} = \mathfrak{r}(\mathcal{G}_1)$ . Comme  $X$  est stablement localement relativement compact (resp., et compact dans le cas normalisé), par le théorème 4.5.11,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  (resp.,  $\mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X)$ ) est stablement compact, donc  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  (resp.  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ) aussi, par la proposition 11.4.2 (resp. 11.3.2).. Puisque  $Y$  est stablement compact, il est stablement relativement compact, et l'on peut appliquer le lemme 11.2.18 :  $\mathcal{G}$  est une prévision linéaire continue normalisée sur  $Y$ . Il existe donc une probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $Y$  telle que  $\mathcal{G} = \alpha_e(\mathcal{P})$ , à savoir  $\mathcal{P} = \gamma_e(\mathcal{G})$ .

D'autre part,  $\mathcal{G} \leq \mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_0 \leq p$ . Pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , en posant  $\varphi = \lambda G' \in Y \cdot G'(f)$  on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\varphi) &= \int_{G' \in Y} \varphi(G') d\mathcal{P} = \int_{G' \in Y} G'(f) d\mathcal{P} = \text{Bary}(\mathcal{P})(f) \\
p(\varphi) &= \inf_{\substack{g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot \varphi(G') \leq G'(g)}} G(g) = \inf_{\substack{g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{Q} \cdot G'(f) \leq G'(g)}} G(g) \leq G(f)
\end{aligned}$$

Donc  $Bary(\mathcal{P}) \leq G$ , comme annoncé.

Il ne reste plus qu'à montrer que  $\mathcal{P}$  est à support dans  $\mathcal{Q}$ . Pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $\mathcal{Q}$ , on rappelle que par définition  $a \leq \mathcal{G}_0(\chi_{\mathcal{U}})$ , donc  $\mathcal{G}_1(\chi_{\mathcal{U}}) \geq 1$ , donc  $\mathcal{G}_1(\chi_{\mathcal{U}}) = 1$  puisque  $\mathcal{G}_1$  est normalisée, et ce pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $\mathcal{Q}$ . Par définition de  $\mathcal{G} = \tau(\mathcal{G}_1)$ , et en rappelant que la base  $B$  a été définie à la proposition 11.2.11 (en remplaçant ici  $X$  par  $Y$ ),

$$\mathcal{G}(\chi_{\mathcal{U}}) = \sup_{h \in B, h \ll \chi_{\mathcal{U}}} \mathcal{G}_1(h)$$

Pour tout  $h \in B$ , écrivons  $h = 1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{\mathcal{U}_k}$ , où les  $\mathcal{U}_k$  forment une suite décroissante d'ouverts. Par le lemme 11.2.10,  $h \ll \chi_{\mathcal{U}}$  si et seulement si pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ ,  $\mathcal{U}_k \subseteq \chi_{\mathcal{U}}^{-1}]k/2^K, +\infty[$ . Puisque  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U}$ , et que  $Y$  est stablement compact, donc en particulier localement compact, il existe un compact saturé  $\mathcal{Q}_1$  tel que  $\mathcal{Q} \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{Q}}_1 \subseteq \mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{U}$ . Définissons  $h$  de sorte que  $N = 2^K - 1$ ,  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \dots = \mathcal{U}_N = \overset{\circ}{\mathcal{Q}}_1$ . Alors  $h \in B$ ,  $h \ll \chi_{\mathcal{U}}$ , et  $\mathcal{G}_1(h) = 1/2^K \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_1(\chi_{\mathcal{U}_k}) = 1 - 1/2^K$  : en effet,  $\mathcal{G}_1(\chi_{\mathcal{U}_k}) = 1$  puisque  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U}_k$ . Donc  $\mathcal{G}(\chi_{\mathcal{U}}) \geq 1 - 1/2^K$ . Comme  $K$  est arbitraire, et  $\mathcal{G}$  est normalisée,  $\mathcal{G}(\chi_{\mathcal{U}}) = 1$ . Autrement dit,  $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 1$ . Comme  $\mathcal{U}$  est un ouvert arbitraire contenant  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{P}$  est bien à support dans  $\mathcal{Q}$ .  $\square$

**Corollaire 11.7.22** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Pour tout compact saturé non vide  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ,  $CCoeur_{\leq 1}(\sqcap \mathcal{Q}) = \uparrow Conv(\mathcal{Q})$ .*

*Si  $X$  est de plus compact, alors pour tout compact saturé non vide  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ,  $CCoeur_1(\sqcap \mathcal{Q}) = \uparrow Conv(\mathcal{Q})$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{Q}$  un compact saturé non vide  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ . Par le théorème 11.7.11, on a  $\mathcal{Q} \subseteq CCoeur_{\leq 1}(\sqcap \mathcal{Q})$ . Par la proposition 11.7.20, on en déduit  $Conv(\mathcal{Q}) \subseteq CCoeur_{\leq 1}(\sqcap \mathcal{Q})$ . Comme  $CCoeur_{\leq 1}(\sqcap \mathcal{Q})$  est clos par le haut,  $\uparrow Conv(\mathcal{Q}) \subseteq CCoeur_{\leq 1}(\sqcap \mathcal{Q})$ . Réciproquement, si  $G \in CCoeur_{\leq 1}(\sqcap \mathcal{Q})$ , c'est-à-dire si  $\sqcap \mathcal{Q} \leq G$ , alors par le lemme 11.7.21, il existe une probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $Y$ , à support dans  $\mathcal{Q}$ , telle que  $Bary(\mathcal{P}) \leq G$ . Par définition,  $Bary(\mathcal{P}) \in Conv(\mathcal{Q})$ , donc  $G \in \uparrow Conv(\mathcal{Q})$ . Ceci établit l'inclusion inverse, donc l'égalité. Le cas normalisé se démontre de manière similaire.  $\square$

On en déduit un *isomorphisme* entre les espaces adéquats de prévisions basses continues et d'ensembles fortement convexes de valuations continues.

**Théorème 11.7.23 (Isomorphisme)** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact (resp., et compact).  $CCoeur_{\leq 1}$  (resp.,  $CCoeur_1$ ) et  $\sqcap$  définissent un isomorphisme entre  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ ) et l'espace des compacts saturés non vides et fortement convexes de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ), ordonné par inclusion inverse  $\supseteq$ .*

*Démonstration.* Traitons du cas sous-normalisé, le cas normalisé étant similaire. D'abord,  $CCoeur_{\leq 1}$  est bien à valeurs dans l'espace des compacts saturés non vides fortement convexes de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , par le théorème 11.7.11 et la proposition 11.7.20. Le fait que  $\sqcap$  soit à valeurs dans les prévisions basses continues sous-normalisées est aussi une conséquence du théorème 11.7.11. Ce même théorème établit aussi que  $\sqcap$  et  $CCoeur_{\leq 1}$  préservent l'ordre et  $\sqcap \circ CCoeur_{\leq 1}$  égale l'identité. Dans l'autre sens, pour tout compact saturé non vide fortement convexe  $\mathcal{Q}$ ,  $\uparrow Conv(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ , donc  $CCoeur_{\leq 1}(\sqcap \mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$  par le corollaire 11.7.22.  $\square$

### 11.7.2 Le cas angélique : la peau

Tix et al. proposent aussi des modèles traitant du mélange de tirages probabilistes et de choix angéliques ( $\mathcal{H}^{cvx}(\overline{\mathbf{V}}(X))$ ), fondé sur le cône convexe bas  $\mathcal{H}^{cvx}$  d'une part, et du mélange de tirages probabilistes et de choix chaotiques ( $\mathcal{P}\ell^{cvx}(\overline{\mathbf{V}}(X))$ ), fondé sur le cône biconvexe  $\mathcal{P}\ell^{cvx}$ .

La relation des prévisions hautes au cône convexe bas, en premier, est duale de celle des prévisions basses au cône convexe haut. Nous montrons ci-dessous que ce n'est plus une surrection de Galois de l'espace des prévisions vers l'espace des fermés convexes de prévisions linéaires, mais une insertion de Galois en sens inverse.

On remarque d'abord que les peaux sont fermées dans la topologie faible.

**Lemme 11.7.24** *Pour toute fonctionnelle  $F$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,*

- *$Peau(F)$  est fermé dans l'espace des fonctionnelles linéaires de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ , muni de la topologie faible ;*
- *$CPeau(F)$  est fermé dans l'espace des fonctionnelles linéaires continues de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ , muni de la topologie faible ;*
- *$Peau_1(F)$  est fermé dans l'espace  $P_{1\ wk}^\Delta(X)$  des prévisions linéaires normalisées sur  $X$ , muni de la topologie faible ;*
- *$CPeau_1(F)$  est fermé dans  $\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$  ;*
- *$Peau_{\leq 1}(F)$  est fermé dans l'espace  $P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$  des prévisions linéaires sous-normalisées sur  $X$ , muni de la topologie faible ;*
- *$CPeau_{\leq 1}(F)$  est fermé dans  $\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ .*

*Démonstration.* Pour chaque cas, soit  $P$  l'espace de peaux concerné, et  $E$  l'espace environnant. On a alors

$$\begin{aligned} P &= \{G \in E \mid G \leq F\} = \bigcap_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle} \{G \in E \mid G(f) \leq F(f)\} \\ &= \bigcap_{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle} (E \setminus [f > F(f)]) \end{aligned}$$

qui est donc fermé. □

**Définition 11.7.25** *Pour tout sous-espace convexe  $Z$  d'un cône topologique  $C$ , notons  $\mathcal{H}^{cvx}(Z)$  l'espace des fermés non vides convexes de  $Z$ .  $\mathcal{H}^{cvx}(Z)$  est ordonné, comme  $\mathcal{H}(Z)$ , par inclusion  $\subseteq$ .*

**Théorème 11.7.26** *Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout fermé non vide  $C$  de l'espace  $P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$  des prévisions linéaires sous-normalisées sur  $X$ , équipé de la topologie faible, posons :*

$$\bigsqcup C(f) = \sup_{G \in C} G(f)$$

*pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ . Alors  $\bigsqcup C$  est une prévision haute sous-normalisée, et si  $C$  est un sous-ensemble de l'espace  $P_1^\Delta(X)$  des prévisions linéaires normalisées sur  $X$ , alors  $\bigsqcup C$*

est normalisée. Si  $C$  est un fermé non vide de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , alors  $\bigsqcup C$  est une prévision haute continue sous-normalisée. Si  $C$  est un fermé non vide de  $\mathbf{P}_{1\ wk}^{\Delta}(X)$ , alors  $\bigsqcup C$  est une prévision haute continue normalisée.

Si  $X$  est stablement localement compact,  $\bigsqcup \dashv CPeau_{\leq 1}$  définit une insertion de Galois de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$ , ainsi que de  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$ , sur  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ .

Si  $X$  est stablement compact,  $\bigsqcup \dashv CPeau_1$  est une insertion de Galois de  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ wk}^{\Delta}(X))$  ainsi que de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{1\ wk}^{\Delta}(X))$ , sur  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$ .

*Démonstration.* De façon similaire au lemme 11.7.9, on note que

$$\begin{aligned} \bigsqcup C(f) &= \int_{G \in \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)} G(f) d\epsilon_C \quad \text{par le lemme 6.1.6} \\ &= (\alpha_{\epsilon}(\epsilon_C); \vartheta)(f) \end{aligned}$$

où  $\vartheta(G) = G$  pour tout  $G$ . Comme  $\epsilon_C$  est une plausibilité continue, donc concave,  $\alpha_{\epsilon}(\epsilon_C)$  est une prévision haute continue, par le fait 10.1.3. Elle est de plus normalisée. Par la proposition 11.1.4 et la proposition 11.3.3,  $\bigsqcup C = \alpha_{\epsilon}(\epsilon_C); \vartheta$  est donc une prévision haute sous-normalisée, continue dès que  $C$  ne contient que des prévisions continues, normalisée dès que  $C$  ne contient que des prévisions normalisées.

Supposons maintenant  $X$  stablement localement compact. Pour toute prévision haute continue sous-normalisée  $F$ ,  $CPeau_{\leq 1}(F)$  est non vide par le théorème 11.7.6. Il est facile de vérifier que  $CPeau_{\leq 1}(F)$  est convexe.  $CPeau_{\leq 1}(F)$  est aussi fermé par le lemme 11.7.24, donc bien dans  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ wk}^{\Delta}(X))$ .

Si  $F \leq F'$ , il est d'autre part clair que  $CPeau_{\leq 1}(F) \subseteq CPeau_{\leq 1}(F')$ . Si  $C \subseteq C'$ , il est aussi clair que  $\bigsqcup C \leq \bigsqcup C'$ .

Finalement, pour vérifier que l'on a une insertion de Galois  $\bigsqcup \dashv CPeau_{\leq 1}$ , nous devons vérifier que  $\bigsqcup CPeau_{\leq 1}(F) = F$  pour tout  $F \in \Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ , et  $C \subseteq CPeau_{\leq 1}(\bigsqcup C)$  pour tout  $C \in \mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$ . Or on a bien  $\bigsqcup CPeau_{\leq 1}(F)(f) = \sup_{G \in CPeau_{\leq 1}(F)} G(f) = F(f)$  par le théorème 11.7.6. D'autre part, pour tout  $G \in C$ ,  $\bigsqcup C(f) = \sup_{G' \in C} G'(f) \geq G(f)$ , donc  $G \in CPeau_{\leq 1}(\bigsqcup C)$ . On en déduit  $C \subseteq CPeau_{\leq 1}(\bigsqcup C)$ .

On raisonne de même dans le cas de prévisions normalisées, en utilisant le théorème 11.7.5 au lieu du théorème 11.7.6.  $\square$

Dans le cas démoniaque,  $\sqcap$  et  $CCoeur_{\leq 1}$  (resp.,  $CCoeur_1$ ) étaient continues. Ici, nous avons :

**Lemme 11.7.27** *La fonction  $\sqcap$  est continue de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  vers  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ , et de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{1\ wk}^{\Delta}(X))$  vers  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$ .*

*Démonstration.* Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille dirigée d'éléments de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$ . Par le lemme 3.4.1, sa borne supérieure  $C$  est  $cl(\bigcup_{i \in I} C_i)$ . Or, par le lemme 6.1.6,

$$\sqcap C(f) = \int_{G \in \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)} G(f) d\epsilon_C$$

Ceci a un sens, car la fonction qui à  $G$  associe  $G(f)$  est continue : c'est la définition même de la topologie faible (définition 11.1.1). Par la proposition 6.3.19, la fonction  $C \mapsto \epsilon_C$  est Scott-continue, donc  $\epsilon_C$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $\epsilon_{C_i}$ ,  $i \in I$ . Donc :

$$\begin{aligned} \bigsqcup C(f) &= \int_{G \in \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X)} G(f) d \sup_{i \in I} \epsilon_{C_i} \\ &= \sup_{i \in I} \int_{G \in \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X)} G(f) d \epsilon_{C_i} \\ &= \sup_{i \in I} \bigsqcup C_i(f) \end{aligned}$$

en utilisant la proposition 4.2.5 et le lemme 6.1.6 de nouveau. On raisonne de même dans le cas normalisé.  $\square$

Il ne semble pas qu'en général  $CPeau_{\leq 1}$  ou  $CPeau_1$  soient Scott-continues, ce qui empêche de conclure directement que  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  est un rétract de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X))$  ou de  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X))$ , contrairement au cas des prévisions basses (corollaire 11.7.12). Nous y reviendrons à la section 11.9.

Si les différentes variantes de peaux sont convexes, elles ne seront pas nécessairement fortement convexes. La raison est que nous devons remplacer la notion de support par celle de co-support. Rappelons que  $\nu$  est à co-support dans une partie  $A$  de  $X$  si et seulement si  $\nu(X \setminus cl(A)) = 0$  (définition 3.12.26).

**Lemme 11.7.28** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour tout jeu  $\nu$  sur  $X$ ,*

- $\nu$  est à support dans le compact saturé  $Q$  de  $X$  si et seulement si  $\nu^{\perp}$  est à co-support dans le fermé  $Q$  de  $X^d$  ;
- $\nu$  est à co-support dans le fermé  $F$  de  $X$  si et seulement si  $\nu^{\perp}$  est à support dans le compact saturé  $F$  de  $X^d$ .

*Démonstration.* Par le fait 11.7.15,  $\nu$  est à support dans  $Q$  si et seulement si  $\nu^{\perp}(X \setminus Q) = 0$ , ce qui revient à dire que  $\nu^{\perp}$  est à co-support dans  $Q$ . Pour la deuxième partie du lemme,  $\nu^{\perp}$  est à support dans  $F$  si et seulement si  $\nu^{\perp\perp}(X \setminus F) = 0$ , si et seulement si  $\nu(X \setminus F) = 0$ , par le lemme 6.2.7.  $\square$

**Proposition 11.7.29 (Co-support)** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour tout jeu concave  $\nu$  sur  $X$ , il existe un plus petit fermé  $F$  tel que  $\nu$  soit à co-support dans  $F$ .*

*On appelle ce fermé  $F$  le co-support de  $\nu$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 11.7.28, deuxième partie, et la proposition 11.7.16.  $\square$

▷ **Exercice 11.2**

*Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute valuation continue  $\nu$  sur  $X$ , notons  $L$  l'intersection du support  $Q$  et du co-support  $F$  de  $\nu$ . Montrer que  $\nu$  est à support et à co-support dans  $L$ . De plus, si  $\nu$  n'est pas la valuation nulle, alors  $L$  est une lentille.*

Le lemme suivant est analogue au lemme 11.7.17 pour les co-supports.

**Lemme 11.7.30** *Soit  $\nu$  un jeu sur un espace topologique  $X$ , et  $F$  un fermé de  $X$ . Alors  $\nu$  est à co-support dans  $Q$  si et seulement si, pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ ,*

$$\oint_{x \in X} f(x) d\nu \leq \nu(X) \cdot \sup_{x \in F} f(x) = \nu(X) \cdot f^*(F) \quad (11.7)$$

*Démonstration.* Si (11.7) est valide, alors en posant  $f = \chi_{X \setminus F}$ , on obtient  $\nu(X \setminus F) \leq 0$ , donc  $\nu$  est à co-support dans  $F$ . Réciproquement, supposons que  $\nu$  soit à co-support dans  $F$ . Posons  $a = \sup_{x \in F} f(x)$ . Pour tout  $t \geq a$ ,  $f^{-1}]t, +\infty[$  n'intersecte pas  $F$ , sinon il existerait un  $x \in F$  tel que  $f(x) > t \geq a \geq f(x)$ , une contradiction. Donc  $f^{-1}]t, +\infty[ \subseteq X \setminus F$  pour tout  $t \geq a$ , d'où  $\nu(f^{-1}]t, +\infty[) = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &= \int_0^a \nu(f^{-1}]t, +\infty[) dt \\ &\leq \int_0^a \nu(X) dt = a\nu(X) \end{aligned}$$

□

**Définition 11.7.31 (Co-fortement convexe)** *Soit  $Y = P_{wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = P_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = P_{1, wk}^\Delta(X)$  (resp.,  $Y = \mathbf{P}_{wk}^\Delta(X)$ , ou  $Y = \mathbf{P}_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = \mathbf{P}_{1, wk}^\Delta(X)$ ). Une partie  $\mathcal{A}$  de  $Y$  est co-fortement convexe si et seulement si, pour toute probabilité (resp., et continue)  $\mathcal{P}$  à co-support dans  $\mathcal{A}$ ,  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  est dans  $\mathcal{A}$ .*

*On notera  $\text{Conv}^*(\mathcal{A})$  l'espace de tous les barycentres  $\text{Bary}(\mathcal{P})$  de probabilités (resp., et continues)  $\mathcal{P}$  à co-support dans  $\mathcal{A}$ .*

Lorsque  $\mathcal{A}$  est co-fortement convexe, toute probabilité simple  $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{G_i}$  à co-support dans  $\mathcal{A}$  doit avoir un barycentre dans  $\mathcal{A}$ . Ce barycentre est  $\sum_{i=1}^n a_i G_i$ . Le lemme 3.12.27 et le lemme 3.12.20 impliquent donc que  $\mathcal{A}$  soit convexe :

**Fait 11.7.32** *Toute partie co-fortement convexe est convexe. Pour toute partie  $\mathcal{A}$ ,  $\text{conv}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Conv}^*(\mathcal{A})$ .*

**Proposition 11.7.33 (La peau est co-fortement convexe)** *Soit  $X$  un espace topologique,  $F$  une prévision haute sur  $X$ . Les peaux  $\text{Peau}_1(F)$  et  $\text{Peau}_{\leq 1}(F)$  de  $F$  sont co-fortement convexes dans  $Y$ , où  $Y$  est  $P_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$ , ou  $P_{1, wk}^\Delta(X)$  selon le cas.*

*Si  $F$  est de plus continue et  $X$  est stablement localement relativement compact, alors  $C\text{Peau}_{\leq 1}(F)$  est co-fortement convexe dans  $Y = \mathbf{P}_{\leq 1, wk}^\Delta(X)$ .*

*Si  $F$  est continue et  $X$  est stablement relativement compact, alors  $C\text{Peau}_1(F)$  est co-fortement convexe dans  $Y = \mathbf{P}_{1, wk}^\Delta(X)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  l'une quelconque des peaux mentionnées. Considérons une probabilité  $\mathcal{P}$  (continue dans les deuxième et troisième parties de la proposition) à support dans  $\mathcal{F}$ . Par le lemme 11.7.30,

$$\int_{G \in Y} \varphi(G) d\mathcal{P} \leq \sup_{G \in \mathcal{F}} \varphi(G)$$

pour toute fonction continue bornée  $\varphi$  de  $Y$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  arbitraire, et posons  $\varphi(G) = G(f)$ . On observe que  $\varphi$  est continue, par la définition de la topologie faible (définition 11.1.1). Elle est bornée car  $G$  étant (sous-)normalisée,  $\varphi(G) \leq \sup_{x \in X} f(x)$ . L'inégalité ci-dessus se lit alors  $Bary(\mathcal{P})(f) \leq \bigsqcup \mathcal{F}(f)$ . Comme  $f$  est arbitraire,  $Bary(\mathcal{P}) \leq \bigsqcup \mathcal{F}$ , donc  $Bary(\mathcal{P})$  est dans la peau (continue, sous-normalisée, normalisée, selon le cas, grâce au lemme 11.7.14) de  $\bigsqcup \mathcal{F}$ . Or, par le théorème 11.7.26,  $\bigsqcup \mathcal{F} = F$ .  $\square$

L'étude du cas angélique est, comme d'habitude, plus compliquée que celle du cas démoniaque. Nous opérons par dualité convexe-concave. Notons d'abord que, lorsque  $X$  est stablement compact,  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$  est stablement compact par le théorème 11.6.5. La fonction  $_{-}^\perp$  qui à  $G' \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d$  associe  $G'^\perp$  a donc un sens. Par la proposition 11.3.2,  $\alpha_e$  et  $\gamma_e$  fournissent un hoéomorphisme entre  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$  et  $\mathbf{V}_{1\,wk}(X)$ , donc aussi entre  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d$  et  $\mathbf{V}_{1\,wk}(X)^d$ . Notons temporairement  $\Phi$  la fonction  $\lambda \nu' \in \mathbf{V}_{1\,wk}(X)^d \cdot \nu'^\perp$ . Par le théorème 11.5.19, point 5,  $\alpha_e(\nu')^\perp = \alpha_e(\nu'^\perp)$ , donc  $_{-}^\perp = \alpha_e \circ \Phi \circ \gamma_e$ . Or  $\Phi$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{V}_{1\,wk}(X)^d$  sur  $\mathbf{V}_{1\,wk}(X^d)$  par le corollaire 6.4.9. On en déduit que :

**Fait 11.7.34** *Soit  $X$  un espace stablement compact.  $_{-}^\perp$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d$  sur  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X^d)$ . Son inverse est  $_{-}^\perp$  elle-même.*

La dernière partie vient de la proposition 11.5.18.

**Lemme 11.7.35** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Notons  $_{-}^\perp$  l'homéomorphisme de  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d$  sur  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X^d)$  qui à  $G'$  associe  $G'^\perp$ . Pour toute probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$ ,*

$$(Bary(_{ - }^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp = Bary(\mathcal{P})$$

*Démonstration.* Faisons un peu de typage. D'abord,  $\mathcal{P}$  est un élément de  $\mathbf{V}_1(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X))$ . Par le théorème 6.2.11, la fonction qui à  $\mathcal{P}$  associe  $\mathcal{P}^\perp$  est un isomorphisme de  $\mathbf{V}_1(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X))$  sur  $\mathbf{V}_1^{op}(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d)$ . En particulier,  $\mathcal{P}^\perp \in \mathbf{V}_1(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d)$ . On en déduit que  $_{-}^\perp[\mathcal{P}^\perp] \in \mathbf{V}_1(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X^d))$ , par le lemme 4.2.9. Donc  $Bary(_{ - }^\perp[\mathcal{P}^\perp]) \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X^d)$ , d'où  $(Bary(_{ - }^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$ . Le côté droit  $Bary(\mathcal{P})$  est lui aussi dans  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$ . Les deux côtés de l'égalité sont donc bien dans le même espace.

Calculons :

$$\begin{aligned}
Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]) &= \lambda g \in \langle X^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot \int_{G' \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X^d)} G'(g) d_{-^\perp}[\mathcal{P}^\perp] \\
&= \lambda g \in \langle X^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d} G^\perp(g) d\mathcal{P}^\perp \quad \text{par la proposition 4.2.11} \\
&= \lambda g \in \langle X^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot - \inf_{\substack{\varphi \in \langle \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R} \rangle \\ \varphi \supseteq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot -G^\perp(g)}} \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} \varphi(G) d\mathcal{P}
\end{aligned}$$

Pour tout  $g \in \langle X^d \rightarrow \mathbb{R} \rangle$ , et toute constante  $a \geq -\inf_{x \in X} g(x)$ , on a donc par le lemme 11.5.1 :

$$Bary(\widehat{-^\perp[\mathcal{P}^\perp]})(g) = - \inf_{\substack{\varphi \in \langle \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R} \rangle \\ \varphi \supseteq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot -G^\perp(g+a)}} \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} \varphi(G) d\mathcal{P} - a$$

On en déduit que, pour tout  $h \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , avec  $a \geq \sup_{x \in X} h(x)$  :

$$(Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp(h) = \sup_{\substack{g \in \langle X^d \rightarrow \mathbb{R} \rangle \\ g \supseteq^d -h}} \left[ \inf_{\substack{\varphi \in \langle \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R} \rangle \\ \varphi \supseteq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot -G^\perp(g+a)}} \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} \varphi(G) d\mathcal{P} + a \right]$$

Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , montrons d'abord que  $(Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp(\chi_U) \leq Bary(\mathcal{P})(\chi_U)$ . Pour tout  $g \in \langle X^d \rightarrow \mathbb{R} \rangle$  avec  $g \supseteq^d -\chi_U$ , on a  $\chi_U \supseteq -g$  par le fait 11.5.6. Donc :

$$\begin{aligned}
G^\perp(g+a) &= G^\perp(g) + a \quad \text{puisque } G^\perp \text{ est normalisée} \\
&= \sup_{f \supseteq -g} -G(f) + a \\
&\geq -G(\chi_U) + a
\end{aligned}$$

Pour tout  $\varphi' \in \langle \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R} \rangle$  avec  $\varphi' \geq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot G(\chi_U) - a$ , on a donc  $\varphi' \geq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot -G^\perp(g+a)$ . Par le lemme 11.5.7, il existe alors une fonction  $\varphi \in \langle \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R} \rangle$  telle que  $\varphi' \geq \varphi \supseteq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot -G^\perp(g+a)$ . Donc :

$$\inf_{\substack{\varphi' \in \langle \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R} \rangle \\ \varphi' \geq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot G(\chi_U) - a}} \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} \varphi'(G) d\mathcal{P} \geq \inf_{\substack{\varphi \in \langle \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R} \rangle \\ \varphi \supseteq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot -G^\perp(g+a)}} \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} \varphi(G) d\mathcal{P}$$

Le côté gauche de cette égalité vaut exactement  $Bary(\mathcal{P})(\chi_U) - a$ . Il suffit de prendre  $\varphi' = \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot G(\chi_U) + a$ , et de réaliser que  $Bary(\mathcal{P})$  est normalisé. Donc :

$$\begin{aligned}
(Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp(\chi_U) &\leq \sup_{\substack{g \in \langle X^d \rightarrow \mathbb{R} \rangle \\ g \supseteq^d -\chi_U}} Bary(\mathcal{P})(\chi_U) - a + a \\
&= Bary(\mathcal{P})(\chi_U)
\end{aligned}$$

Réciproquement, montrons que pour tous ouverts  $V$  et  $U$  de  $X$  tels que  $V \Subset U$ ,  $Bary(\mathcal{P})(\chi_V) \leq (Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp(\chi_U)$ . Comme  $X$  est localement compact, il existe un compact saturé  $Q$  de  $X$  tel que  $V \subseteq Q \subseteq U$  par le lemme 3.4.11. Alors  $g = -\chi_Q$  est telle que  $g \sqsupseteq -\chi_U$  par la définition 11.5.4. Donc :

$$(Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp(\chi_U) \geq \inf_{\substack{\varphi \in (\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R}) \\ \varphi \sqsupseteq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot -G^\perp(a - \chi_Q)}} \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} \varphi(G) d\mathcal{P} + a$$

Estimons  $-G^\perp(a - \chi_Q) = \inf_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ f \sqsupseteq -(a - \chi_Q)}} G(f)$ . Dès que  $f \sqsupseteq -(a - \chi_Q)$ , on a  $f \geq -(a - \chi_Q) = \chi_Q - a \geq \chi_V - a$ , donc  $-G^\perp(a - \chi_Q) \geq \inf_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ f \geq \chi_V - a}} G(f) \geq G(\chi_V - a) = G(\chi_V) - a$ , puisque  $G$  est normalisée. On en déduit que :

$$\begin{aligned} (Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp(\chi_U) &\geq \inf_{\substack{\varphi \in (\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X) \rightarrow \mathbb{R}) \\ \varphi \geq \lambda G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)^d \cdot G(\chi_V) - a}} \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} \varphi(G) d\mathcal{P} + a \\ &= \int_{G \in \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)} G(\chi_V) d\mathcal{P} - a + a = Bary(\mathcal{P})(\chi_V) \end{aligned}$$

Soit  $\nu = \gamma_e(Bary(\mathcal{P}))$ ,  $\nu' = \gamma_e((Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp)$ . Nous avons établi que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\nu'(U) \leq \nu(U)$ , et d'autre part que  $\nu'(U) \geq \nu(V)$  pour tout  $V \Subset U$ . Comme  $X$  est localement relativement compact, tout ouvert  $U$  de  $X$  est l'union de la famille dirigée des ouverts  $V$  tels que  $V \Subset U$ . Puisque  $\nu$  est une valuation continue,  $\nu(U) = \sup_{V \Subset U} \nu(V) \leq \nu'(U)$ . Donc  $\nu = \nu'$ . Comme  $\alpha_e$  et  $\gamma_e$  forment un isomorphisme par la proposition 11.3.2, on en déduit  $Bary(\mathcal{P}) = \alpha_e(\nu) = \alpha_e(\nu') = (Bary(-^\perp[\mathcal{P}^\perp]))^\perp$ .  $\square$

**Lemme 11.7.36** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ , et  $\nu$  un jeu à support dans  $A \subseteq X$ . Alors  $f[\nu]$  est à support dans l'image directe  $f(A) \subseteq Y$ .

*Démonstration.* Pour tout ouvert  $V$  de  $Y$  contenant  $f(A)$ , on a  $A \subseteq f^{-1}(V)$ . Comme  $\nu$  est à support dans  $A$ ,  $\nu(f^{-1}(V)) = \nu(X)$ . Or  $\nu(f^{-1}(V)) = f[\nu](V)$  par définition, et  $\nu(X) = \nu(f^{-1}(Y)) = f[\nu](Y)$ , donc  $f[\nu](V) = f[\nu](Y)$ .  $\square$

**Lemme 11.7.37** Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  vers  $Y$ , et  $\nu$  un jeu sur  $X$ . Si  $f[\nu]$  est à co-support dans le fermé  $F$  de  $Y$ , alors  $\nu$  est à co-support dans  $f^{-1}(F) \subseteq X$ .

*Démonstration.* D'abord,  $f^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ , donc  $\nu(X \setminus cl(f^{-1}(F))) = \nu(X \setminus f^{-1}(F)) = \nu(f^{-1}(X \setminus F)) = f[\nu](X \setminus F) = 0$ .  $\square$

On en déduit :

**Lemme 11.7.38** Soit  $X$  un espace stablement compact, et  $\mathcal{F}$  un fermé de  $Y = \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$ . Notons  $\mathcal{F}^\perp = \{P^\perp \mid P \in \mathcal{F}\}$ . Alors :

$$Conv^*(\mathcal{F}) = Conv(\mathcal{F}^\perp)^\perp$$

*Démonstration.* Notons que  $Y$  est stablement compact par le théorème 11.6.5, et que, puisque  $_{-}\perp$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X)^d$  sur  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X^d)$  (fait 11.7.34), donc aussi de  $Y$  sur  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X^d)^d$ ,  $\mathcal{F}^{\perp}$  est un fermé de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X^d)^d$ , donc un compact saturé de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X^d)$ . Alors  $\text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})$  est un élément de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X^d)$ , donc  $\text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp}$  est un élément de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X)^d$ , donc de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X)$ , comme  $\text{Conv}^*(\mathcal{F})$ .

Montrons d'abord l'inclusion  $\text{Conv}^*(\mathcal{F}) \subseteq \text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp}$ . Soit  $\nu$  un élément quelconque de  $\text{Conv}^*(\mathcal{F})$ . Il existe par définition une probabilité continue  $\mathcal{P}$  à co-support dans  $\mathcal{F}$ , telle que  $\nu = \text{Bary}(\mathcal{P})$ . Par le lemme 11.7.35,  $\nu = (\text{Bary}(_{\perp}[\mathcal{P}^{\perp}]))^{\perp}$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est à co-support dans  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}^{\perp}$  est à support dans  $\mathcal{F}$  par le lemme 11.7.28. En utilisant le lemme 11.7.36,  $_{\perp}[\mathcal{P}^{\perp}]$  est à support dans  $\mathcal{F}^{\perp}$ . Donc  $\text{Bary}(_{\perp}[\mathcal{P}^{\perp}]) \in \text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})$ , d'où l'on déduit que  $\nu \in \text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp}$ .

Pour l'inclusion inverse  $\text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} \subseteq \text{Conv}^*(\mathcal{F})$ , soit  $\nu$  un élément quelconque de  $\text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp}$ , que nous écrivons en conséquence  $\nu^{\perp} = \text{Bary}(\mathcal{P})$ , où  $\mathcal{P}$  est une probabilité continue à support dans  $\mathcal{F}^{\perp}$ . Par le lemme 11.7.28,  $\mathcal{P}^{\perp}$  est à co-support dans  $\mathcal{F}^{\perp}$ . Puisque  $_{\perp}$  est son propre inverse (fait 11.7.34),  $\mathcal{P}^{\perp} = _{\perp}[_{\perp}[\mathcal{P}^{\perp}]]$ . Le lemme 11.7.37 implique donc que  $_{\perp}[\mathcal{P}^{\perp}]$  est à co-support dans  $\mathcal{F}$ . Or  $\nu^{\perp} = \text{Bary}(\mathcal{P})$ , donc  $\nu = \text{Bary}(_{\perp}[\mathcal{P}^{\perp}])$  en utilisant le lemme 11.7.35 et le fait que  $_{\perp}$  soit son propre inverse. Donc  $\nu \in \text{Conv}^*(\mathcal{F})$ .  $\square$

**Lemme 11.7.39** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour toute prévision haute continue normalisée  $F$  sur  $X$ ,  $\text{CPeau}_1(F)^{\perp} = \text{CCoeur}_1(F^{\perp})$ .*

*Démonstration.* Pour toute prévision linéaire continue normalisée  $G$  sur  $X$ ,  $G$  appartient à  $\text{CPeau}_1(F)^{\perp}$  si et seulement si  $G$  est de la forme  $G'^{\perp}$ , avec  $G' \leq F$ . Puisque  $_{\perp}$  renverse l'ordre (lemme 11.5.20),  $G \in \text{CPeau}_1(F)^{\perp}$  si et seulement si  $G = G'^{\perp}$  avec  $F^{\perp} \leq G'$ , c'est-à-dire si et seulement si  $F^{\perp} \leq G$ , autrement dit  $G \in \text{CCoeur}_1(F^{\perp})$ .  $\square$

**Proposition 11.7.40** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Pour tout fermé non vide  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^{\Delta}(X)$ ,  $\text{CPeau}_1(\bigsqcup \mathcal{F}) = \downarrow \text{Conv}^*(\mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} \text{CPeau}_1(\bigsqcup \mathcal{F})^{\perp} &= \text{CCoeur}_1((\bigsqcup \mathcal{F})^{\perp}) \quad \text{par le lemme 11.7.39} \\ &= \text{CCoeur}_1(\bigsqcap \mathcal{F}^{\perp}) \quad \text{puisque } _{\perp} \text{ renverse l'ordre, par le lemme 11.5.20} \\ &= \uparrow \text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp}) \end{aligned}$$

par le corollaire 11.7.22. En appliquant  $_{\perp}$  (qui est son propre inverse), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{CPeau}_1(\bigsqcup \mathcal{F}) &= \uparrow \text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} \\ &= \downarrow \text{Conv}(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} \quad \text{puisque } _{\perp} \text{ renverse l'ordre} \\ &= \downarrow \text{Conv}^*(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

par le lemme 11.7.38.  $\square$

Pour passer au cas sous-normalisé, on utilise l'astuce d'Alvarez-Manilla. Rappelons que  $X_\perp$  est l'espace  $X$  avec un nouvel élément  $\perp$ , et  $X_\perp$  comme unique nouvel ouvert ajouté (lemme 6.3.8), que  $\nu_\perp^1$  est le jeu tel que  $\nu_\perp^1(X_\perp) = 1$ ,  $\nu_\perp^1(U) = \nu(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  (lemme 6.3.9). On rappelle aussi que,  $X$  étant un ouvert de  $X_\perp$ , pour tout jeu  $\nu$  sur  $X_\perp$  la restriction  $\nu|_X$  est bien définie (lemme 3.12.29).

**Lemme 11.7.41** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. La fonction qui à  $\nu \in \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  associe  $\nu_\perp^1 \in \mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X_\perp)$  est un homéomorphisme, d'inverse la fonction qui à  $\nu \in \mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X_\perp)$  associe  $\nu|_X$ .*

*Démonstration.* D'abord, pour tout  $\nu \in \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $\nu_\perp^1$  est bien dans  $\mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X_\perp)$ . C'est une valuation continue par le lemme 6.3.9, et elle est clairement normalisée. La fonction qui à  $\nu$  associe  $\nu_\perp^1$  est continue, car l'image réciproque de l'ouvert  $[U > r]$  de  $\mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X_\perp)$  vaut l'ouvert  $[U > r]$  de  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  si  $U$  est un ouvert de  $X$ ; sinon  $U$  est  $X_\perp$  tout entier, et l'image réciproque est  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  tout entier si  $r < 1$ , le vide si  $r \geq 1$ .

Réciproquement, pour tout  $\nu \in \mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X_\perp)$ ,  $\nu|_X$  est une valuation continue par le lemme 3.12.29, qui est sous-normalisée de façon évidente. L'image réciproque de  $[U > r]$  par la fonction qui à  $\nu$  associe  $\nu|_X$  est juste l'ouvert  $[U > r]$  de  $\mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X_\perp)$ , donc cette fonction est continue.

Ces deux fonctions sont ensuite inverses l'une de l'autre : pour  $\nu \in \mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ ,  $(\nu_\perp^1)|_X$  envoie tout ouvert  $U$  de  $X$  vers  $\nu_\perp^1(U) = \nu(U)$ , et est donc identique à  $\nu$ , et pour tout  $\nu \in \mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X_\perp)$ ,  $(\nu|_X)_\perp^1$  envoie l'ouvert  $X_\perp$  vers  $1 = \nu(X_\perp)$ , et tout ouvert  $U$  de  $X$  vers  $\nu|_X(U) = \nu(U)$ , donc coïncide avec  $\nu$ .  $\square$

**Lemme 11.7.42** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. La fonction  $\epsilon^\Delta$  qui à tout  $G \in \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  associe  $\tau(G_\perp)$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  sur  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X_\perp)$ , dont l'inverse est donné par la fonction  $\eta^\Delta$  qui à tout  $G \in \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X_\perp)$  associe  $G_\chi$ .*

*Démonstration.* D'abord, pour tout  $G \in \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $\tau(G_\perp)$  est une prévision linéaire continue normalisée sur  $X_\perp$  par le lemme 11.4.6. En utilisant l'homéomorphisme  $\alpha_e, \gamma_e$  donné à la proposition 11.3.2,  $G$  s'écrit  $\alpha_e(\nu)$ , où  $\nu$  est une valuation continue sous-normalisée sur  $X$ , et alors  $\tau(G_\perp) = G_\perp = \alpha_e(\nu_\perp^1)$ , toujours par le lemme 11.4.6. La fonction qui à  $G$  associe  $\tau(G_\perp)$  est donc la composée de  $\alpha_e$ , de l'homéomorphisme donné au lemme 11.7.41 qui à  $\nu$  associe  $\nu_\perp^1$ , et de  $\gamma_e$ . C'est donc aussi un homéomorphisme.

Son inverse est la fonction qui à  $G \in \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X_\perp)$  associe  $\alpha_e(\gamma_e(G)|_X)$ . Cependant, on peut montrer directement que cet inverse est la fonction qui à tout  $G \in \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X_\perp)$  associe  $G_\chi$ . Dans une direction, pour tout  $G \in \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X_\perp)$ ,  $(G_\chi)_\perp$  est la fonction qui à tout  $f' \in \langle X_\perp \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  associe  $f'(\perp) + G_\chi(f'|_X - f'(\perp)\chi_X)$ ; en posant  $f = f'|_X - f'(\perp)\chi_X$ , on réalise que  $f_0 = f' - f'(\perp)$ , donc que  $G_\chi(f) = G(f_0) = G(f' - f'(\perp))$ . Comme  $G$  est normalisée,  $f'(\perp) + G_\chi(f'|_X - f'(\perp)\chi_X) = f'(\perp) + G(f' - f'(\perp)) = G(f')$ , donc  $(G_\chi)_\perp = G$ . Puisque  $G$  est continue,  $\tau((G_\chi)_\perp) = G$ . Réciproquement, pour tout  $G \in \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ , on a  $(\tau(G_\perp))_\chi = G$  par le lemme 11.4.8.  $\square$

**Lemme 11.7.43** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Pour toute probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ,  $\text{Bary}(\epsilon^\Delta[\mathcal{P}]) = \epsilon^\Delta(\text{Bary}(\mathcal{P}))$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , rappelons que  $f_0$  est la fonction de  $X_\perp$  vers  $\mathbb{R}^+$  qui à  $x \in X$  associe  $f(x)$ , et à  $\perp$  associe 0. De plus,  $G'(f_0) = G'_\perp(f) = \eta^\Delta(G')(f)$ . On a :

$$\begin{aligned} \text{Bary}(\epsilon^\Delta[\mathcal{P}])(f_0) &= \int_{G' \in \mathbf{P}_{1\text{wk}}^\Delta(X_\perp)} G'(f_0) d\epsilon^\Delta[\mathcal{P}] \\ &= \int_{G \in \mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X)} \epsilon^\Delta(G)(f_0) d\mathcal{P} \quad \text{par la proposition 4.2.11} \\ &= \int_{G \in \mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X)} \eta^\Delta(\epsilon^\Delta(G))(f) d\mathcal{P} = \text{Bary}(\mathcal{P})(f) \end{aligned}$$

puisque  $\eta^\Delta$  est l'inverse de  $\epsilon^\Delta$ . On en déduit que  $\eta^\Delta(\text{Bary}(\epsilon^\Delta[\mathcal{P}])) = \text{Bary}(\mathcal{P})$ , c'est-à-dire  $\text{Bary}(\epsilon^\Delta[\mathcal{P}]) = \epsilon^\Delta(\text{Bary}(\mathcal{P}))$ .  $\square$

On en déduit l'analogie de la proposition 11.7.40 dans le cas sous-normalisé.

**Proposition 11.7.44** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Pour tout fermé non vide  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X)$ ,  $C\text{Peau}_{\leq 1}(\bigsqcup \mathcal{F}) = \downarrow \text{Conv}^*(\mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* Notons temporairement  $\epsilon^\Delta$  l'homéomorphisme qui à  $G \in \mathbf{P}_{1\text{wk}}^\Delta(X)$  associe  $\tau(G_\perp) \in \mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X_\perp)$ , et  $\eta^\Delta$  celui qui à tout  $G \in \mathbf{P}_{1\text{wk}}^\Delta(X_\perp)$  associe  $G_\perp \in \mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X)$  (lemme 11.7.42).

Notons que  $\epsilon^\Delta$  étant continue est croissante, et de même pour  $\eta^\Delta$ , donc  $\epsilon^\Delta$  et  $\eta^\Delta$  forment aussi un isomorphisme d'ordre, pour les ordres de spécialisation sous-jacents. Il est facile de voir que l'ordre de spécialisation de  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^\Delta(X_\perp)$ , comme celui de  $\mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X)$ , est l'ordre  $\leq$  usuel :  $G$  est plus petit ou égal que  $G'$  dans l'ordre de spécialisation si et seulement si, pour tous  $f$  et  $r$ ,  $G(f) > r$  implique  $G'(f) > r$ , si et seulement si  $G(f) \leq G'(f)$  pour tout  $f$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \epsilon^\Delta(C\text{Peau}_{\leq 1}(\bigsqcup \mathcal{F})) &= \epsilon^\Delta\{G \in \mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X) \mid G \leq \bigsqcup \mathcal{F}\} \\ &= \{\epsilon^\Delta(G) \in \mathbf{P}_{1\text{wk}}^\Delta(X_\perp) \mid \epsilon^\Delta(G) \leq \bigsqcup \epsilon^\Delta(\mathcal{F})\} \\ &= C\text{Peau}_1(\bigsqcup \epsilon^\Delta(\mathcal{F})) \\ &= \downarrow \text{Conv}^*(\epsilon^\Delta(\mathcal{F})) \end{aligned}$$

par la proposition 11.7.40, sachant que  $X_\perp$  est stablement compact, par le lemme 6.3.8.

D'autre part, toujours parce que  $\epsilon^\Delta$  est un isomorphisme d'ordre, on a  $\epsilon^\Delta(\downarrow \text{Conv}^*(\mathcal{F})) = \downarrow \epsilon^\Delta(\text{Conv}^*(\mathcal{F}))$ . Il ne reste plus qu'à établir que  $\epsilon^\Delta(\text{Conv}^*(\mathcal{F})) = \text{Conv}^*(\epsilon^\Delta(\mathcal{F}))$ , ce qui terminera de démontrer la proposition.

Tout élément  $G$  de  $\epsilon^\Delta(\text{Conv}^*(\mathcal{F}))$  est de la forme  $G = \epsilon^\Delta(\text{Bary}(\mathcal{P}))$ , où  $\mathcal{P}$  est une probabilité continue sur  $\mathbf{P}_{\leq 1\text{wk}}^\Delta(X)$  à co-support dans  $\mathcal{F}$ . Par le lemme 4.2.9,  $\epsilon^\Delta[\mathcal{P}]$  est une probabilité continue sur  $\mathbf{P}_{1\text{wk}}^\Delta(X_\perp)$ . Comme  $\mathcal{P} = \eta^\Delta[\epsilon^\Delta[\mathcal{P}]]$  est à co-support dans  $\mathcal{F}$ ,  $\epsilon^\Delta[\mathcal{P}]$  est à co-support dans  $\eta^{\Delta^{-1}}(\mathcal{F}) = \epsilon^\Delta(\mathcal{F})$  par le lemme 11.7.37. De plus,  $\text{Bary}(\epsilon^\Delta[\mathcal{P}]) = G$  par le lemme 11.7.43, donc  $G$  est dans  $\text{Conv}^*(\epsilon^\Delta(\mathcal{F}))$ .

Réciproquement, tout élément  $G$  de  $Conv^*(\epsilon^\Delta(\mathcal{F}))$  s'écrit  $Bary(\mathcal{P})$ , où  $\mathcal{P}$  est une probabilité continue sur  $\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X_\perp)$  à co-support dans  $\epsilon^\Delta(\mathcal{F})$ . Par le lemme 4.2.9,  $\eta^\Delta[\mathcal{P}]$  est une probabilité continue sur  $\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ . Par le lemme 11.7.36,  $\mathcal{P} = \epsilon^\Delta[\eta^\Delta[\mathcal{P}]]$  étant à co-support dans  $\epsilon^\Delta(\mathcal{F})$ ,  $\eta^\Delta[\mathcal{P}]$  est à co-support dans  $\mathcal{F}$ . De plus,  $G = Bary(\mathcal{P}) = Bary(\epsilon^\Delta[\eta^\Delta[\mathcal{P}]]) = \epsilon^\Delta(Bary(\eta^\Delta[\mathcal{P}]))$  par le lemme 11.7.43, donc  $G \in \epsilon^\Delta(Conv^*(\mathcal{F}))$ . Ceci termine de démontrer que  $\epsilon^\Delta(Conv^*(\mathcal{F})) = Conv^*(\epsilon^\Delta(\mathcal{F}))$ , et donc la démonstration de la proposition.  $\square$

**Théorème 11.7.45 (Isomorphisme)** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact (resp., et compact).  $C\text{Peau}_{\leq 1}$  (resp.,  $C\text{Peau}_1$ ) et  $\sqcup$  définissent un isomorphisme entre  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$ ) et l'espace des fermés non vides et co-fortement convexes de  $\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$ ), ordonné par inclusion.*

*Démonstration.* Traitons du cas sous-normalisé en premier. D'abord,  $C\text{Peau}_{\leq 1}$  est bien à valeurs dans l'espace des fermés non vides co-fortement convexes de  $\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ , par la proposition 11.7.33. Le fait que  $\sqcup$  soit à valeurs dans les prévisions basses continues sous-normalisées est aussi une conséquence du théorème 11.7.26. Ce même théorème établit aussi que  $\sqcup$  et  $C\text{Peau}_{\leq 1}$  préservent l'ordre et  $\sqcup \circ C\text{Peau}_{\leq 1}$  égale l'identité. Dans l'autre sens, pour tout fermé non vide co-fortement convexe  $\mathcal{F}$ ,  $\downarrow Conv^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ , donc  $C\text{Peau}_{\leq 1}(\sqcup \mathcal{F}) = \mathcal{F}$  par la proposition 11.7.44. Dans le cas normalisé, on utilise la proposition 11.7.40 à la place de cette dernière.  $\square$

▷ **Exercice 11.3**

*Montrer l'analogie suivant du lemme 11.7.21 pour les peaux. Soit  $X$  un espace stablement localement compact (resp., et compact), et  $Y$  l'espace  $\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$ ). Soit  $\mathcal{F}$  un fermé non vide de  $Y$ , et  $G \in Y$  tel que  $G \leq \sqcup \mathcal{F}$ . Montrer qu'il existe alors une probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $Y$ , à co-support dans  $\mathcal{F}$ , telle que  $G \leq Bary(\mathcal{P})$ .*

### 11.7.3 Le cas chaotique : fourchettes, et le corps

Par imitation de la proposition 7.5.9, on définit :

**Définition 11.7.46 (Fourchette)** *Une fourchette sur  $X$  est un couple  $F = (F^-, F^+)$ , où  $F^-$  est une prévision basse,  $F^+$  est une prévision haute, et :*

$$F^-(h + h') \leq F^-(h) + F^+(h') \leq F^+(h + h') \quad (11.8)$$

*pour toutes fonctions continues bornées  $h$  et  $h'$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .*

*Cette fourchette est continue si et seulement si  $F^-$  et  $F^+$  sont continues, colinéaire si et seulement si  $F^-$  et  $F^+$  sont colinéaires, linéaire si et seulement si  $F^-$  et  $F^+$  sont linéaires. Elle est normalisée, resp. sous-normalisée, si et seulement si  $F^-$  et  $F^+$  sont normalisées, resp. sous-normalisées.*

*L'espace  $\mathbf{F}(X)$  est l'espace des fourchettes continues sur  $X$ , ordonné par l'ordre  $\leq \times \leq$ . L'espace  $\mathbf{F}_1(X)$ , resp.  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$ , est le sous-espace des fourchettes continues normalisées, resp. sous-normalisées, sur  $X$ .*

On appellera *topologie faible sur un espace de fourchettes sur  $X$  la trace sur cet espace de la topologie produit de  $P_{wk}(X) \times P_{wk}(X)$* . On notera  $\mathbf{F}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{F}_{1\ wk}(X)$ , et  $\mathbf{F}_{\leq 1\ wk}(X)$  respectivement les espaces  $\mathbf{F}(X)$ ,  $\mathbf{F}_1(X)$  et  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  munis de leur topologie faible.

La définition est formée de sorte que, pour toute estimation continue  $\nu$  sur  $X$ ,  $(\alpha_{\mathcal{C}}(\nu^\uparrow), \alpha_{\mathcal{C}}(\nu^\downarrow))$  soit une fourchette continue. C'est une conséquence facile de la proposition 7.5.9 et du théorème 10.1.8. La condition (11.8), avec le fait que  $F^-(h) + F^-(h') \leq F^-(h+h')$  et  $F^+(h+h') \leq F^+(h) + F^+(h')$ , est exactement la condition (c) de Walley (1991, section 2). Cependant, nous autorisons n'importe quel couple  $(F^-, F^+)$  vérifiant ces conditions à définir une fourchette. Walley se contente d'observer que si  $F^-$  est une prévision cohérente (au sens de Walley), on peut poser  $F^+(h) = -F^-(-h)$ , et alors  $(F^-, F^+)$  est une fourchette.

Pour toute prévision  $F$ , on peut voir  $F(h)$  comme une sorte de moyenne généralisée de la fonction  $h$ . Pour toute fourchette  $F = (F^-, F^+)$ , on peut penser à  $F^-$  comme à la partie pessimiste de  $F$ , telle que  $F^-(h)$  sera la plus petite moyenne de  $h$  envisageable, et  $F^+(h)$  sera la plus grande. Si l'on prend  $h' = 0$  dans (11.8), on voit en effet que  $F^-(h) \leq F^+(h)$  pour tout  $h \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ .

Il est facile de voir que  $\mathbf{F}_1(X)$  et  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  sont des cpos.  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  a un plus petit élément,  $(0, 0)$ . Si  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ ,  $\mathbf{F}_1(X)$  a aussi un plus petit élément, qui est  $(\alpha_{\mathcal{C}}(\delta_\perp), \alpha_{\mathcal{C}}(\delta_\perp))$ , où  $\alpha_{\mathcal{C}}(\delta_\perp)(h) = h(\perp)$ .

Voici quelques exemples de fourchettes (continues). D'abord, si  $F$  est une prévision linéaire (continue), alors  $(F, F)$  est une fourchette (continue). Plus généralement, les fourchettes linéaires sont simples à décrire :

**Lemme 11.7.47** *Soient  $F^-, F^+$  deux prévisions linéaires. Alors  $(F^-, F^+)$  est une fourchette si et seulement si  $F^- \leq F^+$ .*

*Démonstration.* Si  $(F^-, F^+)$  est une fourchette, on a vu plus haut que  $F^- \leq F^+$ . Réciproquement, si  $F^- \leq F^+$ ,

$$F^-(h+h') = F^-(h) + F^-(h') \leq F^-(h) + F^+(h') \leq F^+(h) + F^+(h') = F^+(h+h')$$

par linéarité. □

Plus généralement, si  $\nu$  est une estimation continue, alors, comme on l'a rappelé plus haut,  $(\alpha_{\mathcal{C}}(\nu^\uparrow), \alpha_{\mathcal{C}}(\nu^\downarrow))$  est une fourchette continue. De plus, cette fourchette sera toujours colinéaire. La construction suivante fournit encore un autre moyen de construire des fourchettes. Nous verrons plus loin que c'est en fait le cas général. Rappelons (corollaire 3.5.11) qu'une lentille forte est une lentille  $L = Q \cap C$  avec non seulement  $Q = \uparrow L$  (comme pour toute lentille) mais encore  $C = \downarrow L$ , autrement dit, telle que  $\downarrow L$  soit fermée. L'espace  $\mathcal{P}L(X)$  est l'espace des lentilles fortes.

**Lemme 11.7.48** *Pour toute lentille  $L = Q \cap C$ , où  $Q = \uparrow L$  et  $C = cl(L)$ , de l'espace  $P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$  (resp.,  $P_{1\ wk}^\Delta(X)$ ) des prévisions linéaires sous-normalisées (resp., normalisées) sur  $\bar{X}$ , équipé de la topologie faible, posons :*

$$\bigsqcup L = (\bigsqcup Q, \bigsqcup C)$$

Si  $L$  est une lentille forte, alors  $\sqcap \sqcup L$  est une fourchette sous-normalisée (resp., normalisée). Si  $L$  est une lentille forte de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  (resp., de  $\mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ), alors c'est une fourchette continue sous-normalisée (resp., normalisée).

*Démonstration.* Soit  $L$  une lentille de  $P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , resp.  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , resp.  $P_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , resp.  $\mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ . Par le théorème 11.7.26,  $\sqcup \mathcal{C}$  est une prévision haute sous-normalisée (resp. normalisée, resp. et continue). Par le lemme 11.7.9,  $\sqcap \mathcal{Q}$  est une prévision basse sous-normalisée (resp. normalisée, resp. et continue). Ensuite, on note que :

$$(\sqcap \mathcal{Q})(h) = \inf_{G \in \mathcal{Q}} G(h) = \inf_{G \in L} G(h)$$

puisque  $\mathcal{Q} = \uparrow L$ . D'autre part,

$$(\sqcup \mathcal{C})(h) = \sup_{G \in \mathcal{C}} G(h) = \sup_{G \in L} G(h)$$

parce que  $\mathcal{C} = \downarrow L$ ; ceci n'est vrai que parce que  $L$  est une lentille forte.

Alors :

$$\begin{aligned} (\sqcap \mathcal{Q})(h + h') &= \inf_{G \in L} G(h + h') = \inf_{G \in L} [G(h) + G(h')] \\ &\leq \inf_{G \in L} [G(h) + \sup_{G \in L} G(h')] = \inf_{G \in L} G(h) + \sup_{G \in L} G(h') \\ &= (\sqcap \mathcal{Q})(h) + (\sqcup \mathcal{C})(h) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (\sqcap \mathcal{Q})(h) + (\sqcup \mathcal{C})(h) &= \inf_{G \in L} G(h) + \sup_{G \in L} G(h') = \sup_{G \in L} [\inf_{G \in L} G(h) + G(h')] \\ &\leq \sup_{G \in L} [G(h) + G(h')] = \sup_{G \in L} G(h + h') = (\sqcup \mathcal{C})(h + h') \end{aligned}$$

d'où la validité des inégalités (11.8). □

La réciproque est donnée par la notion de corps d'une fourchette, et ses variantes.

**Définition 11.7.49 (Corps)** Soit  $X$  un espace topologique. Pour toute fourchette  $F = (F^-, F^+)$  sur  $X$ , on appelle corps  $\text{Corps}(F)$  de  $F$  l'intersection  $\text{Coeur}(F^-) \cap \text{Peau}(F^+)$ .

On définit de même le corps continu  $\text{CCorps}(F) = \text{CCoeur}(F^-) \cap \text{CPeau}(F^+)$ , le corps normalisé  $\text{Corps}_1(F) = \text{Coeur}_1(F^-) \cap \text{Peau}_1(F^+)$ , le corps continu normalisé  $\text{CCorps}_1(F) = \text{CCoeur}_1(F^-) \cap \text{CPeau}_1(F^+)$ , le corps sous-normalisé  $\text{Corps}_{\leq 1}(F) = \text{Coeur}_{\leq 1}(F^-) \cap \text{Peau}_{\leq 1}(F^+)$ , le corps continu sous-normalisé  $\text{CCorps}_{\leq 1}(F) = \text{CCoeur}_{\leq 1}(F^-) \cap \text{CPeau}_{\leq 1}(F^+)$ .

**Proposition 11.7.50 (Le corps est une lentille forte convexe)** Soit  $X$  un espace topologique, et  $F$  une fourchette sur  $X$ . Les ensembles  $\text{Corps}(F)$ ,  $\text{CCorps}(F)$ ,  $\text{Corps}_1(F)$ ,  $\text{Corps}_{\leq 1}(F)$ ,  $\text{CCorps}_1(F)$ ,  $\text{CCorps}_{\leq 1}(F)$  sont convexes : si  $G_1, G_2$  sont dans un de ces ensembles, et  $\alpha \in [0, 1]$ , alors  $\alpha G_1 + (1 - \alpha)G_2$  est dans le même ensemble.

Si  $F$  est sous-normalisée, alors  $Corps_{\leq 1}(F)$  est une lentille forte de  $P_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ,  $Coeur_{\leq 1}(F) = \uparrow Corps_{\leq 1}(F)$  et  $Peau_{\leq 1}(F) = \downarrow Corps_{\leq 1}(F)$ . Si  $F$  est normalisée,  $Corps_1(F)$  est une lentille forte de  $P_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ,  $Coeur_1(F) = \uparrow Corps_1(F)$  et  $Peau_1(F) = \downarrow Corps_1(F)$ .

Si  $X$  est stablement localement relativement compact, alors  $CCorps_{\leq 1}(F)$  est une lentille forte de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  pour toute fourchette continue sous-normalisée  $F$ ,  $CCoeur_{\leq 1}(F) = \uparrow CCorps_{\leq 1}(F)$  et  $CPeau_{\leq 1}(F) = \downarrow CCorps_{\leq 1}(F)$ .

Si  $X$  est stablement relativement compact, alors  $CCorps_1(F)$  est une lentille forte de  $\mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  pour toute fourchette continue normalisée  $F$ ,  $CCoeur_1(F) = \uparrow CCorps_1(F)$  et  $CPeau_1(F) = \downarrow CCorps_1(F)$ .

*Démonstration.* La convexité du corps et de ses variantes est évidente, comme intersection de deux convexes.

Supposons  $F = (F^-, F^+)$  sous-normalisée. On a  $Corps_{\leq 1}(F) = Coeur_{\leq 1}(F^-) \cap Peau_{\leq 1}(F^+)$ . Pour montrer que ceci est une lentille forte, nous montrons d'abord que : (\*) pour tout  $G \in Coeur_{\leq 1}(F^-)$ , on peut trouver  $G_0 \in Corps_{\leq 1}(F)$  avec  $G_0 \leq G$ .

Soit  $F'(h) = \inf_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ f+g \geq h}} (F^+(f) + G(g))$ . Ceci est bien défini, car il existe toujours  $f, g$  telles que  $f + g \geq h$ , par exemple  $f = 0$  et  $g = h$ . Ceci implique notamment que  $F' \leq G$ . D'autre part, pour toutes fonctions  $f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  telles que  $f + g \geq h$ ,  $F^+(f) + G(g) \geq F^+(f) + F^-(g)$  (puisque  $G \in Coeur_{\leq 1}(F^-)$ )  $\geq F^-(f + g)$  (par (11.8))  $\geq F^-(h)$ . Donc  $F^- \leq F' \leq G$ .

On observe maintenant que  $F'$  est une prévision haute. D'abord,  $F'(0) = 0$  (en prenant  $f = g = 0$ ), et pour  $\alpha > 0$ ,  $F'(\alpha h) = \inf_{f+g \geq \alpha h} (F^+(f) + G(g)) = \inf_{f'+g' \geq h} (F^+(\alpha f') + G(\alpha g)) = \alpha F'(h)$ . Ensuite,  $F'$  est clairement croissante, et :

$$\begin{aligned} F'(h) + F'(h') &= \inf_{f+g \geq h, f'+g' \geq h'} (F^+(f) + G(g) + F^+(f') + G(g')) \\ &\geq \inf_{f+g \geq h, f'+g' \geq h'} (F^+(f + f') + G(g + g')) \\ &\quad \text{(puisque } F^+ \text{ est haute et } G \text{ est linéaire)} \\ &\geq \inf_{f''+g'' \geq h+h'} (F^+(f'') + G(g'')) = F'(h + h') \end{aligned}$$

Donc  $F'$  est haute.

Rappelons que  $F^- \leq F' \leq G$ . Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, il existe une fonctionnelle linéaire croissante  $G_0$  telle que  $F^- \leq G_0 \leq F'$ . Puisque  $G_0 \leq F'$ ,  $G_0$  n'atteint pas la valeur  $+\infty$ , donc  $G_0$  est une prévision linéaire. Elle est sous-normalisée :  $G_0(\chi_X) \leq F'(\chi_X) \leq G(\chi_X) \leq 1$  puisque  $G$  est sous-normalisée, donc  $G_0(a + f) = aG_0(\chi_X) + G_0(f) \leq a + G_0(f)$ , puisque  $G_0$  est linéaire. Comme  $F^- \leq G_0$ ,  $G_0$  est dans  $Coeur_{\leq 1}(F^-)$ . D'autre part,  $G_0 \leq F'$  ; il est facile de voir que  $F' \leq F^+$  (prendre  $g = 0$  dans la définition), donc  $G_0 \leq F^+$ , c'est-à-dire  $G_0 \in Peau_{\leq 1}(F^+)$ . Donc  $G_0 \in Corps_{\leq 1}(F) = Coeur_{\leq 1}(F^-) \cap Peau_{\leq 1}(F^+)$ . Puisque  $G_0 \leq F' \leq G$ , on obtient (\*).

On démontre de même que : (\*\*) pour tout  $G \in Peau_{\leq 1}(F^+)$ , il existe  $G_0 \in Corps_{\leq 1}(F)$  avec  $G \leq G_0$ . La démonstration est similaire. Posons  $F''(h) = \sup_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ f+g \leq h}} (F^-(f) + G(g))$ . Ceci est bien défini, car  $F^-(f) + G(g)$  est majoré, par exemple par  $F^-(h) + G(h)$ . En prenant

$f = 0$ , et  $g = h$  quelconque, on obtient  $F'' \geq G$ . D'autre part, si  $f + g \leq h$  alors  $F^-(f) + G(g) \leq F^-(f) + F^+(g)$  (puisque  $G \in \text{Peau}_{\leq 1}(F^+)$ )  $\leq F^+(f + g) \leq F^+(h)$  (par (11.8)). Donc  $G \leq F'' \leq F^+$ .

On observe ensuite que  $F''$  est une prévision basse. Lorsque  $h = 0$ , les seules fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $f + h \leq h$  sont  $f = g = 0$ , donc  $F''(0) = 0$ ; et pour  $\alpha > 0$ ,  $F''(\alpha h) = \sup_{f+g \leq \alpha h} (F^-(f) + G(g)) = \sup_{f'+g' \leq h} (F^-(\alpha f') + G(\alpha g')) = \alpha F''(h)$ . Donc  $F''$  est positivement homogène. Comme  $F''$  est clairement croissante,  $F''$  est une prévision. De plus,

$$\begin{aligned} F''(h) + F''(h') &= \sup_{f+g \leq h, f'+g' \leq h'} (F^-(f) + G(g) + F^-(f') + G(g')) \\ &\leq \sup_{f+g \leq h, f'+g' \leq h'} (F^-(f + f') + G(g + g')) \\ &\quad \text{(puisque } F^- \text{ est basse et } G \text{ linéaire)} \\ &\leq \sup_{f''+g'' \leq h+h'} (F^-(f'') + G(g'')) = F''(h + h') \end{aligned}$$

Donc  $F''$  est basse.

Rappelons que  $G \leq F'' \leq F^+$ . Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, il existe une fonctionnelle linéaire croissante  $G_0$  telle que  $F'' \leq G_0 \leq F^+$ . Puisque  $G_0 \leq F^+$ ,  $G_0$  ne prend pas la valeur  $+\infty$ , donc  $G_0$  est une prévision linéaire. Elle est sous-linéaire, car  $G_0(\chi_X) \leq F^+(\chi_X) \leq 1$ ,  $F^+$  étant sous-normalisée. Puisque  $G_0 \leq F^+$ ,  $G_0 \in \text{Peau}_{\leq 1}(F^+)$ . D'autre part,  $G_0 \geq F''$  et  $F'' \geq F^-$  (prendre  $g = 0$  dans la définition), donc  $G_0 \in \text{Coeur}_{\leq 1}(F^-)$ , d'où  $G_0 \in \text{Corps}_{\leq 1}(F)$ . On obtient (\*\*) en rappelant que  $G \leq F'' \leq G_0$ .

Par (\*), on obtient en particulier que  $\text{Corps}_{\leq 1}(F)$  est non vide, sachant que  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F^-)$  est non vide par le théorème 11.4.9. De plus,  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F^-) = \uparrow \text{Corps}_{\leq 1}(F)$ . En effet, (\*) énonce l'inclusion  $\subseteq$ , et l'inclusion réciproque  $\supseteq$  est évidente. Enfin,  $\text{Peau}_{\leq 1}(F^+) = \downarrow \text{Corps}_{\leq 1}(F)$ : (\*\*) énonce l'inclusion  $\subseteq$ , et l'inclusion réciproque est évidente. En particulier, puisque  $\text{Coeur}_{\leq 1}(F^-)$  est compact saturé (proposition 11.7.7), et que  $\text{Peau}_{\leq 1}(F^+)$  est fermé (lemme 11.7.24),  $\text{Corps}_{\leq 1}(F)$  est une lentille forte de  $P_{\leq 1}^{\Delta} w_k(X)$ .

Lorsque  $F$  est normalisée, le raisonnement est similaire, en remplaçant partout les indices  $\leq 1$  par 1, et en utilisant le théorème 11.3.10 au lieu du théorème 11.4.9. En démontrant (\*) et (\*\*), nous devons maintenant vérifier que  $G_0$  est normalisée. Dans le cas de (\*), on a comme plus haut  $G_0(\chi_X) \leq 1$ ; de plus,  $G_0(\chi_X) \geq F^-(\chi_X) = 1$ , donc  $G_0(\chi_X) = 1$ ; comme  $G_0$  est linéaire,  $G_0(a + f) = G_0(a) + G_0(f) = a + G_0(f)$ , donc  $G_0$  est normalisée. Pour (\*\*), on a comme plus haut  $G_0(\chi_X) \leq 1$ ; de plus, l'hypothèse de (\*\*) est maintenant que  $G \in \text{Peau}_1(F^+)$ ; or  $G_0 \geq F'' \geq G$ , donc  $G_0(\chi_X) \geq 1$ , et  $G_0$  est encore normalisée.

Dans le cas où  $F$  est une fourchette continue, sous-normalisée ou normalisée, on remplace  $G_0$  par  $\tau(G_0)$ . Reprenons la démonstration en détail, par exemple dans le cas de fourchette continues normalisées. On démontre : (\*) pour tout  $G \in \text{CCoeur}_1(F^-)$ , on peut trouver  $G' \in \text{CCorps}_1(F)$  avec  $G' \leq G$ .

Soit  $F'(h) = \inf_{\substack{f, g \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ f+g \geq h}} (F^+(f) + G(g))$ . Comme plus haut,  $F'$  est une prévision haute, et  $F^- \leq F' \leq G$ . Par le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, on produit une prévision linéaire  $G_0$  telle que  $F^- \leq G_0 \leq F'$ .  $G_0$  est normalisée :  $F^- \leq G_0 \leq F' \leq G$ , donc  $1 = F^-(\chi_X) \leq$

$G_0(\chi_X) \leq G(\chi_X) = 1$ , donc  $G_0(a + f) = G_0(a) + G_0(f) = a + G_0(f)$ . Posons  $G' = \tau(G_0)$ . Par le lemme 11.2.18, comme  $X$  est stablement localement relativement compact et compact,  $G'$  est une prévision linéaire continue normalisée. De plus, comme  $F^- \leq G_0 \leq F'$  et  $F^-$  et  $F'$  sont continues, on a aussi  $F^- \leq G' \leq F'$ . Comme  $F^- \leq G'$ ,  $G' \in CCoeur_1(F^-)$ . Comme  $G' \leq F' \leq F^+$ ,  $G' \in CPeau_1(F^+)$ , donc  $G' \in CCorps_1(F)$ . De plus,  $G' \leq F' \leq G$ . On obtient ainsi (\*).

On démontre de même (\*\*) pour tout  $G \in CPeau_1(F^+)$ , il existe  $G' \in CCorps_1(F)$  avec  $G \leq G'$ , en construisant  $F''$  et  $G_0$ , puis  $G' = \tau(G_0)$ , comme plus haut.

On en déduit, comme plus haut, que  $CCoeur_1(F^-) = \uparrow CCorps_1(F)$  et  $CPeau_1(F^+) = \downarrow CCorps_1(F)$ . Par la proposition 11.7.8,  $CCoeur_1(F^-)$  est compact saturé, et par le lemme 11.7.24,  $CPeau_1(F^+)$  est fermé. De plus, (\*) implique que  $CCorps_1(F)$  est non vide, car  $CCoeur_1(F^-)$  est non vide par le théorème 11.3.10, sachant que  $X$  est stablement localement relativement compact.

Le raisonnement est similaire dans le cas sous-normalisé, en utilisant le théorème 11.4.9 au lieu du théorème 11.3.10, et le lemme 11.4.4 au lieu du lemme 11.2.18 dans la démonstration de la version adéquate de (\*) et de (\*\*).  $\square$

Les résultats précédents tendent à montrer une relation forte entre fourchettes et lentilles fortes de valuations sur  $X$ . On peut cependant étendre la construction du lemme 11.7.48 non seulement au cas des lentilles, mais même des  $\mathbf{A}$ -valuations continues. Soit  $\alpha$  une  $\mathbf{A}$ -évaluation continue sur  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} w_k(X)$ , resp.  $\mathbf{P}_{1 w_k}^{\Delta}(X)$ . On peut alors définir l' $\mathbf{A}$ -estimation  $\mathfrak{u}_\alpha$  (définition 7.2.4 par  $\mathfrak{u}_\alpha(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}) = 1$  si  $\alpha(\mathcal{U}) = 1$  et  $\alpha(\mathcal{V}) = 0$ , et  $\mathfrak{u}_\alpha(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}) = 0$  sinon, pour tous ouverts  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  de  $Z$  — en posant  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} w_k(X)$ , resp.  $Z = \mathbf{P}_{1 w_k}^{\Delta}(X)$ ). Par le lemme 7.4.8, si  $Z$  est stablement compact, alors  $\mathfrak{d}(\mathfrak{u}_\alpha) = \delta_\alpha$ . Grâce aux propositions 7.5.4 et 7.5.6, on déduit de  $\mathfrak{u}_\alpha^\uparrow$  et  $\mathfrak{u}_\alpha^\downarrow$  la fourchette continue  $F_\alpha = (F_\alpha^-, F_\alpha^+) = (\alpha_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{u}_\alpha^\uparrow), \alpha_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{u}_\alpha^\downarrow))$ , où :

$$\begin{aligned} F_\alpha^-(H) &= \int_{G \in Z} H(G) d\mathfrak{u}_\alpha^\uparrow = \int_{\alpha' \in \mathcal{P}_\mathcal{V}(Z)} \min_{\alpha'} H d\mathfrak{d}(\mathfrak{u}_\alpha) \\ &= \int_{\alpha' \in \mathcal{P}_\mathcal{V}(Z)} \min_{\alpha'} H d\delta_\alpha = \min_{\alpha} H \\ F_\alpha^+(H) &= \int_{G \in Z} H(G) d\mathfrak{u}_\alpha^\downarrow = \int_{\alpha' \in \mathcal{P}_\mathcal{V}(Z)} \sup_{\alpha'} H d\mathfrak{d}(\mathfrak{u}_\alpha) \\ &= \int_{\alpha' \in \mathcal{P}_\mathcal{V}(Z)} \sup_{\alpha'} H d\delta_\alpha = \sup_{\alpha} H \end{aligned}$$

Ensuite, on observe que, de même que les prévisions basses et les prévisions hautes, les fourchettes admettent une notion de composition séquentielle.

**Proposition 11.7.51 (Composition séquentielle)** *Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $F = (F^-, F^+)$  une fourchette sur  $X$ , et  $\vartheta$  une fonction continue bornée de  $X$  vers l'espace des fourchettes sur  $Y$ , muni de la topologie faible. Autrement dit,  $\vartheta$  est définie par le fait que pour tout  $x \in X$ ,  $\vartheta(x)$  est une fourchette  $(\vartheta^-(x), \vartheta^+(x))$ , et de plus  $\vartheta^-$  et  $\vartheta^+$  sont continues et bornées, au sens de la définition 11.1.3.*

La composition séquentielle  $F; \vartheta$  est la fonctionnelle  $(F^-; \vartheta^-, F^+; \vartheta^+)$ . Alors  $F; \vartheta$  est une fourchette, elle est continue (resp. sous-normalisée, resp. normalisée) dès que  $F$  et toutes les  $\vartheta(x)$ ,  $x \in X$ , le sont.

*Démonstration.* D'abord,  $F^-; \vartheta^-$  est une prévision basse (resp., et continue) et  $F^+; \vartheta^+$  est une prévision haute (resp., et continue), toujours (resp., à condition que  $F$  et les  $\vartheta(x)$  soient continues), par la proposition 11.1.4. Le cas normalisé s'obtient en appliquant la proposition 11.3.3, et le cas sous-normalisé par la proposition 11.4.3. Il reste à montrer que  $F; \vartheta$  est une fourchette :

$$\begin{aligned}
(F^-; \vartheta^-)(h + h') &= F^-(\lambda x \cdot \vartheta^-(x)(h + h')) \\
&\leq F^-(\lambda x \cdot \vartheta^-(x)(h) + \vartheta^+(x)(h')) \\
&\quad \text{puisque } (\vartheta^-(x), \vartheta^+(x)) \text{ est une fourchette et } F^- \text{ est croissante} \\
&= F^-((\lambda x \cdot \vartheta^-(x)(h)) + (\lambda x \cdot \vartheta^+(x)(h'))) \\
&\leq F^-(\lambda x \cdot \vartheta^-(x)(h)) + F^+(\lambda x \cdot \vartheta^+(x)(h')) \\
&\quad \text{puisque } (F^-, F^+) \text{ est une fourchette} \\
&= (F^-; \vartheta^-)(h) + (F^+; \vartheta^+)(h')
\end{aligned}$$

La deuxième inégalité  $(F^-; \vartheta^-)(h) + (F^+; \vartheta^+)(h') \leq (F^+; \vartheta^+)(h + h')$  se démontre de manière similaire.  $\square$

On a alors :

**Proposition 11.7.52** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact (resp., et compact). Pour toute  $\mathbf{A}$ -valuation continue  $\alpha$  sur  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ), posons :*

$$\begin{aligned}
\prod \sqcup \alpha &= (\lambda h \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot \min_{\alpha}(\lambda G \cdot G(h)), \\
&\quad \lambda h \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot \sup_{\alpha}(\lambda G \cdot G(h)))
\end{aligned}$$

Alors  $\prod \sqcup \alpha$  est une fourchette continue sous-normalisée (resp., normalisée).

*Démonstration.* Par le théorème 11.6.5, l'espace  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  (resp.,  $Z = \mathbf{P}_{1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ) est stablement compact.

On remarque maintenant que  $\prod \sqcup \alpha(h) = F_{\alpha}; \vartheta$ , où  $\vartheta = (\vartheta^-, \vartheta^+)$  est définie par  $\vartheta^-(G) = \vartheta^+(G) = G$ , et où  $F_{\alpha} = (F_{\alpha}^-, F_{\alpha}^+)$  a été introduite dans la discussion précédant la proposition 11.7.51. En effet,  $(F_{\alpha}^-; \vartheta^-)(h) = F_{\alpha}^-(\lambda G \cdot G(h)) = \min_{\alpha}(\lambda G \cdot G(h))$ , et de même  $(F_{\alpha}^+; \vartheta^+)(h) = \sup_{\alpha}(\lambda G \cdot G(h))$ .

Clairement, et en rappelant que  $G$  est une prévision linéaire continue (puisque  $G \in Z$ ) sous-normalisée (resp., normalisée),  $\vartheta(G)$  est une fourchette continue sous-normalisée (resp., normalisée). De plus,  $\vartheta$  est bornée puisque pour tout  $h$ , la fonction qui à  $G$  associe  $G(f)$  est majorée par  $\sup_{x \in X} f(x)$ ,  $G$  étant sous-normalisée. On a vu que  $F_{\alpha}$  était aussi une fourchette continue. Elle est clairement normalisée. Par la proposition 11.7.51,  $F_{\alpha}; \vartheta$  est donc une fourchette continue sous-normalisée, resp. normalisée.  $\square$

Notons que la confusion de notation entre  $\prod \sqcup \alpha$  et  $\prod \sqcup L$  est bénigne : par la proposition 3.6.3, tout  $\alpha$  donne naissance à un élément  $(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$  de  $\mathcal{P}'_{\vee}(Z)$ , où  $\mathcal{Q}$  est l'intersection

de tous les ouverts  $\mathcal{U}$  de  $Z$  tels que  $\alpha(\mathcal{U}) = 1$ , et  $\mathcal{C}$  est le complémentaire dans  $Z$  de l'intersection de tous les ouverts  $\mathcal{V}$  tels que  $\alpha(\mathcal{V}) = 0$ . De plus,  $L = \mathcal{Q} \cap \mathcal{C}$  est une lentille,  $\sup_{\alpha}(\lambda G \cdot G(h)) = \sup_{G \in \mathcal{C}} G(h) = \bigsqcup \mathcal{C}(h)$  (voir le lemme 7.5.5, et le théorème 11.7.26), et  $\min_{\alpha}(\lambda G \cdot G(h)) = \min_{G \in \mathcal{Q}} G(h) = \bigsqcap \mathcal{Q}(h)$  (voir le lemme 7.5.3, et le lemme 11.7.9), donc  $\bigsqcap \bigsqcup \alpha = \bigsqcap \bigsqcup L$ . On en déduit :

**Corollaire 11.7.53** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact (resp., et compact). Pour tout  $(\mathcal{Q}, \mathcal{C}) \in \mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$  (resp.,  $(\mathcal{Q}, \mathcal{C}) \in \mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ ), posons :*

$$\bigsqcap \bigsqcup (\mathcal{Q}, \mathcal{C}) = (\bigsqcap \mathcal{Q}, \bigsqcup \mathcal{C})$$

Alors  $\bigsqcap \bigsqcup (\mathcal{Q}, \mathcal{C})$  est une fourchette continue sous-normalisée (resp., normalisée).

On a plusieurs opérations  $\bigsqcap \bigsqcup$ , qui opèrent sur des lentilles fortes, sur des  $\mathbf{A}$ -valuations, ou sur des couples  $(\mathcal{Q}, \mathcal{F})$  vérifiant les propriétés de la proposition 3.6.3. Les relations entre ces différentes variantes et les corps correspondants ne sont apparemment pas suffisantes pour affirmer l'existence d'une correspondance de Galois. Définissons donc la notion plus faible suivante, qui est juste la notion de rétract adaptée aux ensembles ordonnés, ou de façon équivalente un rétract d'espaces Alexandroff-discrets.

**Définition 11.7.54** *Un rétract d'ordre d'un ensemble ordonné  $Y$  est un ensemble ordonné  $Z$  tel qu'il existe deux fonctions croissantes  $s : Z \rightarrow Y$  (la section d'ordre) et  $r : Y \rightarrow Z$  (la rétraction d'ordre) telles que  $r(s(z)) = z$  pour tout  $z \in Z$ .*

Si  $s, r$  forment un couple d'une section et d'une rétraction d'ordre, il faut et il suffit que  $s(r(y)) \leq y$  pour tout  $y \in Y$  pour que  $s \dashv r$  soit une surrection de Galois ; il faut et il suffit que  $y \leq s(r(y))$  pour tout  $y \in Y$  pour que  $r \dashv s$  soit une insertion de Galois.

On note que le corollaire 11.7.12 énonce en particulier que  $\nabla P_{1 \text{ wk}}(X)$  est un rétract (donc aussi un rétract d'ordre) de  $\mathcal{Q}(P_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$  et de  $\mathcal{Q}^{cvx}(P_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , que  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$  est un rétract (donc aussi un rétract d'ordre) de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$  et de  $\mathcal{Q}^{cvx}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , dès que  $X$  est stablement relativement compact. Le théorème 11.7.26 implique lui que  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$  est un rétract d'ordre de  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$  et de  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , dès que  $X$  est stablement compact. On a des résultats similaires dans le cas sous-normalisé lorsque  $X$  est stablement localement relativement compact, resp. stablement localement compact.

**Définition 11.7.55** *Pour tout sous-espace convexe  $Z$  d'un cône topologique  $C$ , notons  $\mathcal{PL}^{cvx}(Z)$  le sous-espace de  $\mathcal{PL}(Z)$  formé des lentilles fortes  $L$  qui sont convexes, et  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(Z)$  le sous-espace de  $\mathcal{P}\ell(Z)$  formé des lentilles  $L$  qui sont convexes, au sens où pour tous  $a, b \in L$ , pour tout  $r \in [0, 1]$ ,  $r \cdot a + (1 - r) \cdot b \in L$ .  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(Z)$  et  $\mathcal{PL}^{cvx}(Z)$  sont ordonnés, comme  $\mathcal{P}\ell(X)$  et  $\mathcal{PL}(X)$ , par  $\sqsubseteq_{EM}$ .*

**Théorème 11.7.56** *Si  $X$  est un espace stablement compact, alors  $C\text{Corps}_1$  est une section d'ordre de  $\mathbf{F}_1(X)$  dans  $\mathcal{PL}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , dans  $\mathcal{PL}^{cvx}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , dans  $\mathcal{P}\ell(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , et dans  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ . La rétraction d'ordre associée est  $\bigsqcap \bigsqcup$ .*

*Si  $X$  est un espace stablement localement compact, alors  $C\text{Corps}_{\leq 1}$  est une section d'ordre de  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  dans  $\mathcal{PL}(\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , dans  $\mathcal{PL}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , dans  $\mathcal{P}\ell(\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ , et enfin dans  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X))$ . La rétraction d'ordre associée est  $\bigsqcap \bigsqcup$ .*

*Démonstration.* Nous ne traitons que le cas normalisé, le cas sous-normalisé étant entièrement similaire.

D'abord, par la proposition 11.7.50,  $CCorps_1$  est une fonction de  $\mathbf{F}_1(X)$  vers  $\mathcal{P}L^{cvx}(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X))$ , donc aussi vers n'importe lequel des autres espaces de lentilles mentionné dans l'énoncé. Si  $F = (F^-, F^+)$  est une fourchette inférieure ou égale  $F' = (F'^-, F'^+)$ , c'est-à-dire  $F^- \leq F'^-$  et  $F^+ \leq F'^+$ , alors  $CCoeur_1(F^-) \supseteq CCoeur_1(F'^-)$  par le théorème 11.7.11 et  $CPeau_1(F^+) \subseteq CPeau_1(F'^+)$  par le théorème 11.7.26. Puisque  $CCoeur_1(F) = \uparrow CCorps_1(F)$  et  $CPeau_1(F) = \downarrow CCorps_1(F)$  par la proposition 11.7.50, on en déduit  $CCorps_1(F) \sqsubseteq_{EM} CCorps_1(F')$ . Donc  $CCorps_1$  est croissante.

Réciproquement,  $\prod \sqcup$  est une fonction de  $\mathcal{P}L^{cvx}(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X))$  ou  $\mathcal{P}l(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X))$  vers  $\mathbf{F}_1(X)$  par le lemme 11.7.48. Plus généralement, pour toute lentille  $L$ , pas nécessairement forte,  $(\uparrow L, cl(L))$  est dans  $\mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X))$  par le lemme 3.6.4,  $\prod \sqcup L = \prod \sqcup (\uparrow L, cl(L))$  est une fourchette continue normalisée par le corollaire 11.7.53. Donc  $\prod \sqcup$  est une fonction de n'importe lequel des espaces de lentilles mentionné dans l'énoncé vers  $\mathbf{F}_1(X)$ . De plus,  $\prod \sqcup$  est croissante : si  $L \sqsubseteq_{EM} L'$ , alors  $\uparrow L \supseteq \uparrow L'$  donc  $\prod \uparrow L \leq \prod \uparrow L'$ , et  $cl(L) \subseteq cl(L')$  donc  $\sqcup cl(L) \leq \sqcup cl(L')$ ; donc  $\prod \sqcup L (\leq \times \leq) \prod \sqcup L'$ .

Le fait que  $CCoeur_1 \dashv \prod$  soit une surrection de Galois (théorème 11.7.11) énonce en particulier que  $\prod CCoeur_1(F^-) = F^-$  pour toute fourchette continue normalisée  $F = (F^-, F^+)$ . Le fait que  $\sqcup \dashv CPeau_1$  soit une insertion de Galois (théorème 11.7.26) implique lui que  $\sqcup CPeau_1(F^+) = F^+$ . On en déduit  $\prod \sqcup CCorps_1(F) = F$  pour toute fourchette continue normalisée.  $\square$

#### ▷ Exercice 11.4

Essayez de démontrer que  $CCorps_1 \dashv \prod \sqcup$  est une surrection de Galois, ou bien que  $\prod \sqcup \dashv CCorps_1$  est une insertion de Galois, en étendant la démonstration du théorème 11.7.56, dans le cas où  $X$  est stablement compact. Qu'est-ce qui ne fonctionne pas ?

On retrouve ainsi, modulo les petites différences déjà présentes entre nos modèles et ceux de Tix et al. (2005) dans les cas démoniaque et angélique, une correspondance entre le modèle biconvexe de Tix et al., formé des lentilles convexes de  $\overline{\mathbf{V}}(X)$ , et notre modèle formé de fourchettes continues normalisées. Comme plus haut, notre modèle est en un sens plus fin que celui de Tix et al.. Cette finesse est cependant capturée par la notion moins précise de rétraction d'ordre. En passant à des notions de convexité similaires à celles de convexité forte et co-forte, on obtiendra un isomorphisme. C'est une application directe des résultats des sections 11.7.1 et 11.7.2.

**Définition 11.7.57 (Bi-fortement convexe)** Soit  $Y = P_{wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = P_{\leq 1\,wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = P_{1\,wk}^\Delta(X)$  (resp.,  $Y = \mathbf{P}_{wk}^\Delta(X)$ , ou  $Y = \mathbf{P}_{\leq 1\,wk}^\Delta(X)$  ou  $Y = \mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$ ). Une partie  $A$  de  $Y$  est bi-fortement convexe si et seulement si, pour toute probabilité (resp., et continue)  $\mathcal{P}$  à support dans  $A$ ,  $Bary(\mathcal{P})$  est dans  $\uparrow A$ , et pour toute probabilité (resp., et continue)  $\mathcal{P}$  à co-support dans  $A$ ,  $Bary(\mathcal{P})$  est dans  $\downarrow A$ .

**Proposition 11.7.58** Soit  $X$  un espace stablement localement compact (resp., et compact). Pour toute lentille  $\mathcal{L}$  de  $\mathbf{P}_{\leq 1\,wk}^\Delta(X)$  (resp., de  $\mathbf{P}_{1\,wk}^\Delta(X)$ ),  $CCorps_{\leq 1}(\prod \sqcup \mathcal{L}) = \uparrow Conv(\mathcal{L}) \cap \downarrow Conv^*(\mathcal{L})$  (resp.,  $CCorps_1(\prod \sqcup \mathcal{L}) = \uparrow Conv(\mathcal{L}) \cap \downarrow Conv^*(\mathcal{L})$ ).

*Démonstration.* On commence par réaliser que, pour toute probabilité continue  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}$  est à support dans  $\mathcal{L}$  si et seulement si  $\mathcal{P}$  est à support dans  $\uparrow \mathcal{L}$ . En effet, les ouverts  $\mathcal{U}$  contenant  $\mathcal{L}$  sont exactement ceux contenant  $\uparrow \mathcal{L}$ , tout ouvert étant clos par le haut. On en déduit que  $Conv(\mathcal{L}) = Conv(\uparrow \mathcal{L})$ . D'autre part, par définition même du co-support,  $Conv^*(\mathcal{L}) = Conv^*(cl(\mathcal{L}))$ .

Par le corollaire 11.7.22 et la proposition 11.7.44,  $\uparrow Conv(\mathcal{L}) \cap \downarrow Conv^*(\mathcal{L}) = CCoeur_{\leq 1}(\prod \uparrow \mathcal{L}) \cap CPeau_{\leq 1}(\prod cl(\mathcal{L})) = CCorps_{\leq 1}(\prod \prod (\mathcal{L}))$ . On raisonne de même dans le cas normalisé, en utilisant la proposition 11.7.40 au lieu de la proposition 11.7.44.  $\square$

**Théorème 11.7.59 (Isomorphisme)** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact (resp., et compact).  $CCorps_{\leq 1}$  (resp.,  $CCorps_1$ ) et  $\prod \prod$  définissent un isomorphisme entre  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{F}_1(X)$ ) et l'espace des lentilles fortes bi-fortement convexes de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^{\Delta}{}_{wk}(X)$ ), ordonné par  $\sqsubseteq_{EM}$ .*

*Démonstration.* Par les théorèmes 11.7.23 et 11.7.45, ou bien directement en utilisant la proposition 11.7.58.  $\square$

## 11.8 Complétude

Nous avons démontré un résultat de correction à la section 11.1, qui exprime que toute composition séquentielle de coups entre le joueur probabiliste  $P$  et l'adversaire démoniaque  $C$  résultait en une prévision basse continue. C'est la conséquence principale de la proposition 11.1.4.

Soit en effet  $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$ , une suite d'espaces d'états. Ceci généralise la vue que nous avons au chapitre 8, où nous n'avions qu'un espace d'états  $X$ . (Mais nous ne considérons pas d'étiquettes  $\ell \in L$  ici, par souci de simplification.) Une partie entre  $P$  et  $C$  consiste en une fonction de transition  $\vartheta_k$  continue bornée de  $X_k$  vers  $\mathbf{P}_{wk}(X_{k+1})$ . Par exemple,  $\vartheta_k(x)$  peut être la fonctionnelle d'intégration  $\alpha_C(\nu_k)$  d'une crédibilité continue sur  $X_{k+1}$ , représentant un tirage probabiliste par  $P$  suivi d'un choix démoniaquement non déterministe par  $C$ .

La proposition 11.1.4 implique qu'alors, pour tout état initial  $x_0 \in X_0$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour toute fonction  $f \in \langle X_k \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , la composition séquentielle :

$$F(f) = \vartheta_0(x_0)(\lambda x_1 \cdot \vartheta_1(x_1)(\dots, \lambda x_k \cdot \vartheta(x_k)(f) \dots)) \quad (11.9)$$

définit une prévision basse continue sur  $X_k$ . On peut lire cette définition, intuitivement, comme suit. Supposons que  $P$  affiche ses préférences, en affirmant qu'il gagnera  $f(x_k)$  euros s'il arrive à atteindre l'état  $x_k$ , dans une partie à  $2k$  coups. Alors  $F(f)$  décrit le plus petit gain moyen qu'il pourra prétendre obtenir :  $C$  cherche à minimiser ce gain moyen, et une fois la stratégie de  $C$  établie, le gain moyen est obtenu en intégrant sur tous les choix probabilistes de  $P$ .

L'existence d'un *plus petit* gain moyen est garantie par le théorème 11.7.4, ou par le théorème 11.7.3 dans le cas normalisé. En effet, ce théorème dit que, quelle que soit la fonction de gain  $f$  affichée par  $P$ , on peut trouver une prévision linéaire sous-normalisée  $G \in Coeur_{\leq 1}(F)$  telle que  $F(f) = G(f)$ . Moyennant quelques détails inessentiels à ce stade, une prévision linéaire  $G$  est une fonctionnelle d'intégration par rapport à une valuation sous-normalisée  $\nu$  ; voir

la proposition 10.1.7. Lorsque  $G$  est normalisée, calculer  $G(f)$  revient exactement à calculer la moyenne des valeurs de  $f$  le long de la probabilité  $\nu$ . (Lorsque  $F$  est sous-normalisée, ce qui représente typiquement la possibilité de ne pas pouvoir sortir de certains états,  $G(f)$  est aussi une moyenne, à renormalisation près.)

Les détails inessentiels plus haut tiennent au fait qu'il n'y a pas réellement de bijection entre prévisions linéaires et valuations. Mais ceci se répare facilement puisque  $F$  est continue. Lorsque  $X_k$  est stablement localement relativement compact, on pourra alors choisir  $G$  continue, ce qui garantira qu'il existe effectivement une valuation continue  $\nu$  telle que  $G = \alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$ .

L'existence d'une prévision linéaire  $G$  (resp. continue, resp. normalisée) assurant le plus petit gain moyen est établie, mais il n'est pas clair que  $C$  puisse la trouver. Notre hypothèse de travail, au cours des chapitres précédents, a toujours été en effet que  $C$  devait choisir parmi un ensemble *compact* d'états successeurs.

C'est ici que les propositions 11.7.7 et 11.7.8 interviennent. Elles énoncent en effet que l'ensemble des choix possibles pour  $C$ , qui est l'une des formes de cœurs, est compact, à condition d'équiper l'espace des  $G$  possibles de la topologie faible. Lorsqu'on insiste pour que  $G$  soit continue, on doit en plus supposer que  $X_k$  soit stablement localement relativement compact, ou même stablement relativement compact dans le cas normalisé.

On peut donc simuler  $F$  en juste deux coups :  $C$  choisit un élément  $G$  du cœur (resp. continu, resp. normalisé si  $F$  est normalisée), et  $P$  tire au hasard selon (la valuation associée à)  $G$ . Notons que ce résultat est vrai lorsque  $F$  est de la forme (11.9), mais aussi lorsque  $F$  est n'importe quelle prévision basse continue.

On a donc le résultat remarquable suivant, qui exprime en particulier que toute partie peut être simulée par une partie en deux coups seulement. Dans le premier coup,  $\vartheta_0(*)$ ,  $P$  ne joue pas, et seul  $C$  choisit un élément  $G \in X_1$  dans le compact  $Q = CCoeur_1(F)$ . Au deuxième coup,  $P$  se contente de tirer au hasard selon  $\gamma_{\mathcal{C}}(G)$ , et  $C$  ne fait rien.

**Proposition 11.8.1 (Complétude, démoniaque, normalisée)** *Soit  $X$  un espace stablement relativement compact. Posons  $X_0 = \{*\}$ ,  $X_2 = X$ . Pour toute prévision basse continue normalisée  $F$  sur  $X$ , il existe un espace  $X_1 = \mathbf{P}_{1\ wk}^{\Delta}(X)$ , et deux fonctions continues bornées  $\vartheta_i : X_i \rightarrow \nabla \mathbf{P}_{1\ wk}^*(X_{i+1})$  telles que  $F = \vartheta_0(*)$ ;  $\vartheta_1$ .*

*Explicitement,*

- $\vartheta_0(*) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}})$ , où  $\mathcal{Q} = CCoeur_1(F)$ ;
- $\vartheta_1(G) = G$ .

*Démonstration.* D'abord,  $\vartheta_0$  et  $\vartheta_1$  sont continues, trivialement. Clairement,  $\vartheta_0(*)$  et  $\vartheta_1(G)$  sont des prévisions basses colinéaires continues et normalisées pour tout  $G$ . Finalement,

$$\begin{aligned} (\vartheta_0(*) ; \vartheta_1)(f) &= \vartheta_0(*) (\lambda G \cdot \vartheta_1(G)(f)) = \vartheta_0(*) (\lambda G \cdot G(f)) \\ &= \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}}) (\lambda G \cdot G(f)) = \int_{G \in X_1} G(f) d\mathbf{u}_{\mathcal{Q}} \\ &= \inf_{G \in \mathcal{Q}} G(f) \quad \text{par la proposition 4.2.2} \\ &= F(f) \end{aligned}$$

par le théorème 11.7.3, puisque  $\mathcal{Q} = CCoeur_1(F)$ .  $\square$

On a de même le résultat suivant dans le cas sous-normalisé, en utilisant le théorème 11.7.4 à la place du théorème 11.7.3.

**Proposition 11.8.2 (Complétude, démoniaque, sous-normalisée)** *Soit  $X$  un espace stablement localement relativement compact. Posons  $X_0 = \{*\}$ ,  $X_2 = X$ . Pour toute prévision basse continue sous-normalisée  $F$  sur  $X$ , il existe un espace  $X_1 = \mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ , et deux fonctions continues bornées  $\vartheta_i : X_i \rightarrow \nabla \mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^*(X_{i+1})$  telles que  $F = \vartheta_0(*)$ ;  $\vartheta_1$ .*

*Explicitement,*

- $\vartheta_0(*) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}})$ , où  $\mathcal{Q} = CCoeur_{\leq 1}(F)$ ;
- $\vartheta_1(G) = G$ .

Dans le cas angélique, on obtient un résultat de même nature, en utilisant cette fois-ci les théorèmes 11.7.5 et 11.7.6. D'autre part, on utilise le lemme 6.1.6 au lieu de la proposition 4.2.2.

**Proposition 11.8.3 (Complétude, angélique, normalisée)** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Posons  $X_0 = \{*\}$ ,  $X_2 = X$ . Pour toute prévision basse continue normalisée  $F$  sur  $X$ , il existe un espace  $X_1 = \mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$ , et deux fonctions continues bornées  $\vartheta_i : X_i \rightarrow \Delta \mathbf{P}_{1\ wk}^*(X_{i+1})$  telles que  $F = \vartheta_0(*)$ ;  $\vartheta_1$ .*

*Explicitement,*

- $\vartheta_0(*) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}})$ , où  $\mathcal{C} = CPeau_1(F)$ ;
- $\vartheta_1(G) = G$ .

**Proposition 11.8.4 (Complétude, angélique, sous-normalisée)** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Posons  $X_0 = \{*\}$ ,  $X_2 = X$ . Pour toute prévision basse continue normalisée  $F$  sur  $X$ , il existe un espace  $X_1 = \mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ , et deux fonctions continues  $\vartheta_i : X_i \rightarrow \Delta \mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^*(X_{i+1})$  telles que  $F = \vartheta_0(*)$ ;  $\vartheta_1$ .*

*Explicitement,*

- $\vartheta_0(*) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}})$ , où  $\mathcal{C} = CPeau_1(F)$ ;
- $\vartheta_1(G) = G$ .

Dans le cas chaotique finalement, on a le pendant du théorème de correction qu'est la proposition 11.7.51.

**Proposition 11.8.5 (Complétude, chaotique, normalisée)** *Soit  $X$  un espace stablement compact. Posons  $X_0 = \{*\}$ ,  $X_2 = X$ . Pour toute fourchette continue normalisée  $F$  sur  $X$ , il existe un espace  $X_1 = \mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$ , et deux fonctions continues bornées  $\vartheta_i$  de  $X_i$  vers l'espace  $\mathbf{F}_{1\ wk}^\Delta(X_{i+1})$  des fourchettes colinéaires continues normalisées sur  $X_{i+1}$  avec la topologie faible, telles que  $F = \vartheta_0(*)$ ;  $\vartheta_1$ .*

*Explicitement,*

- $\vartheta_0(*) = (\alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}}), \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}}))$ , où  $\mathcal{Q} = Coeur_1(F)$ , et  $\mathcal{C} = CPeau_1(F)$ ;
- $\vartheta_1(G) = (G, G)$ .

*Démonstration.* On vérifie  $\vartheta_0(*)$  est une fourchette continue normalisée. Il est clair que  $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}})$  est une prévision basse continue normalisée et que  $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}})$  est une prévision haute continue normalisée, par la proposition 11.3.2. Pour vérifier l'équation (11.8), on note que par la proposition 11.7.50,  $\mathcal{Q} = \uparrow L$  et  $\mathcal{C} = \downarrow L$ , où  $L = CCorps_1(F)$ . Donc :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}})(H + H') &= \min_{G \in \mathcal{Q}} (H(G) + H'(G)) = \min_{G \in L} (H(G) + H'(G)) \\ &\leq \min_{G \in L} H(G) + \sup_{G \in L} H'(G) \\ &= \min_{G \in \mathcal{Q}} H(G) + \sup_{G \in \mathcal{C}} H'(G) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}})(H) + \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}})(H') \end{aligned}$$

et de même  $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}})(H) + \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}})(H') \leq \max_{G \in L} (H(G) + H'(G)) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}})(H + H')$ .

La vérification du fait que  $F = \vartheta_0(*)$ ;  $\vartheta_1$  est ensuite une conséquence facile de la proposition 11.8.1 et de la proposition 11.8.3.  $\square$

**Proposition 11.8.6 (Complétude, chaotique, sous-normalisée)** *Soit  $X$  un espace stablement localement compact. Posons  $X_0 = \{*\}$ ,  $X_2 = X$ . Pour toute fourchette continue normalisée  $F$  sur  $X$ , il existe un espace  $X_1 = \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X)$ , et deux fonctions continues bornées  $\vartheta_i$  de  $X_i$  vers l'espace  $\mathbf{F}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X_{i+1})$  des fourchettes colinéaires continues normalisées sur  $X_{i+1}$  avec la topologie faible, telles que  $F = \vartheta_0(*)$ ;  $\vartheta_1$ .*

*Explicitement,*

- $\vartheta_0(*) = (\alpha_{\mathcal{Q}}(\mathbf{u}_{\mathcal{Q}}), \alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\mathcal{C}}))$ , où  $\mathcal{Q} = Cœur_{\leq 1}(F)$ , et  $\mathcal{C} = CPeau_{\leq 1}(F)$ ;
- $\vartheta_1(G) = (G, G)$ .

*Démonstration.* Comme pour la proposition 11.8.5, en utilisant la proposition 11.4.2 au lieu de la proposition 11.3.2, la proposition 11.8.2 au lieu de la proposition 11.8.1, et la proposition 11.8.4 au lieu de la proposition 11.8.3.  $\square$

Ces résultats montrent que les notions de prévisions basses, de prévisions hautes, et de fourchettes, sont des notions qui représentent de façon adéquate et minimale des mélanges de choix probabilistes et non déterministes en nombre quelconque. Les théorèmes de complétude sont spectaculaires : toute alternance d'un nombre quelconque de coups de P et C peut être résumée en seulement deux coups, de C d'abord, de P ensuite. . . mais dans un jeu beaucoup plus gros, où l'espace des états entre les deux coups est  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^{\Delta}(X)$  (ou  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^{\Delta}(X)$ ) plutôt que  $X$ .

On pouvait conjecturer un tel résultat. Intuitivement, il suffit pour simuler une partie à nombre quelconque de coups, de laisser C jouer quel sera sa *stratégie* de jeu. On ne laissera plus C jouer : C s'est engagé sur une stratégie, en avance, et on appliquera la stratégie en question pour simuler les coups que C aurait joués. On peut alors jouer la partie complète en laissant jouer P aléatoirement, comme avant, mais en appliquant la stratégie de C de façon déterministe. Ceci fait du système de transitions ludique sous-jacent un système de Markov — les coups déterministes sont des coups probabilistes triviaux, tirés selon une valuation de Dirac. Or, n'importe quelle composition séquentiels de coups probabilistes est encore un coup probabiliste, que P peut donc simuler en juste un coup.

Les constructions des propositions 11.8.1 à 11.8.6 sont relativement simples, une fois l'existence et les propriétés des cœurs, peaux, et corps établies. Un défaut de ces constructions est qu'il

est nécessaire de considérer des fonctions de transition passant de  $X_0$  à  $X_1$  et de  $X_1$  à  $X_2$ , où les espaces  $X_0$ ,  $X_1$ , et  $X_2$  sont relativement disjoints, et surtout où les fonctions de transition  $\vartheta_0$  et  $\vartheta_1$  sont complètement différentes. En somme, nous avons changé les règles du jeu en cours de route. Nous verrons une construction plus compliquée à la section 12.4, qui évite ce défaut.

## 11.9 Domaines de prévisions continues

En prévision du chapitre 12, où nous chercherons à décrire des sémantiques de langages de programmation d'ordre supérieur présentant des choix non-déterministes et probabilistes, nous examinons les structures de cpo ou de domaine que peuvent avoir les différents espaces de prévisions continues que nous considérons. Nous obtiendrons des théorèmes de structure d'autant plus fin que nous en saurons plus sur l'espace de base  $X$ , et nous concentrerons donc en particulier sur le cas où  $X$  est un cpo continu, possiblement cohérent, voire un domaine continu. Comme d'habitude, nous examinons les cas démoniaque, angélique, et chaotique dans l'ordre.

### 11.9.1 Domaines de prévisions basses

Nous savions déjà que l'espace  $\nabla P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  de prévisions basses, continues et sous-normalisées était stablement compact (proposition 11.6.3), que  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$  était stablement compact si  $X$  était stablement localement relativement compact et que  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$  était stablement compact si  $X$  était stablement relativement compact (théorème 11.6.5). Ces résultats s'appliquent aux espaces de prévisions basses continues, munies de leur topologie faible. Dans le cas de la topologie de Scott, on a des résultats du même type, et un peu plus.

**Théorème 11.9.1** *Soit  $X$  un espace topologique. L'espace des prévisions basses normalisées  $\nabla P_1(X)$  (resp. sous-normalisées  $\nabla P_{\leq 1}(X)$ ) sur  $X$  est un domaine stablement compact.*

*Si  $X$  est stablement localement relativement compact,  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  est un domaine stablement compact, avec comme plus petit élément la fonctionnelle qui à tout  $f$  associe 0.*

*Si  $X$  est stablement relativement compact,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$  est un domaine stablement compact, de plus petit élément la prévision basse  $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_X)$ , qui à  $f$  associe  $\min_{x \in X} f(x)$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 11.6.3,  $P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  et  $P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  sont stablement compacts. Par la proposition 3.3.2,  $\mathcal{Q}(P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X))$  et  $\mathcal{Q}(P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X))$  sont donc des domaines stablement compacts. Par le corollaire 11.7.12,  $\nabla P_1(X)$  (resp.,  $\nabla P_{\leq 1}(X)$ ) est un rétract de  $\mathcal{Q}(P_{1 \text{ wk}}^\Delta(X))$  (resp.,  $\mathcal{Q}(P_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X))$ ), et est donc stablement compact, par le lemme 3.2.2, et un domaine par le lemme 3.2.5.

Lorsque  $X$  est stablement localement relativement compact (resp. et compact),  $\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ) est stablement compact, par le théorème 11.6.5. Comme ci-dessus, on en déduit grâce à la proposition 3.3.2 que  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X))$ ) est un domaine stablement compact. Par le corollaire 11.7.12,  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ ) est un rétract de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X))$  (resp.  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X))$ ), donc un domaine stablement compact par le lemme 3.2.5 et le lemme 3.2.2.

De plus,  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  a un élément minimal, la prévision  $\alpha_e(0)$  qui à tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  associe 0.

Lorsque  $X$  est stablement relativement compact,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$  a un plus petit élément, qui est l'image par la rétraction  $\sqcap$  du plus petit élément  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X))$  — en effet,  $\mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  est un compact (saturé) par le théorème 11.6.5. On peut vérifier directement que ce plus petit élément est la fonctionnelle qui à  $f$  associe  $\min_{x \in X} f(x)$ , c'est-à-dire  $\alpha_e(u_X)$ . Comme  $X$  est compact,  $\alpha_e(u_X)$  est bien une prévision basse continue normalisée. D'autre part, toute prévision basse continue normalisée  $F$  est telle que  $F(f) \geq F(\min_{x \in X} f(x)\chi_X + 0) = \min_{x \in X} f(x) + F(0) = \min_{x \in X} f(x)$ .  $\square$

Notons que la borne supérieure de deux prévisions basses  $F$  et  $G$  n'est pas la fonctionnelle qui à  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  associe  $\sup_{x \in X} (F(x), G(x))$ , laquelle n'est pas concave en général. La borne supérieure est donnée par la construction du lemme 3.2.5 : on construit le cœur de  $F$ , celui de  $G$ , on prend leur union, puis on projette par  $\sqcap$ .

Dans le cas où  $X$  est un cpo continu, on peut en dire bien plus. Commençons par définir une notion utile, le pendant de la notion de valuation simple dans le monde des prévisions.

**Définition 11.9.2 (Prévision linéaire simple)** Une prévision linéaire simple sur un espace topologique  $X$  est une fonctionnelle de la forme  $\alpha_e(\nu)$ , où  $\nu$  est une valuation simple sur  $X$ .

Lorsque  $\nu$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$ ,  $\alpha_e(\nu)$  est la fonctionnelle qui à tout  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  associe  $\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ . C'est une simple combinaison linéaire de  $n$  valeurs prises par la fonction  $f$ . On peut en particulier voir ceci comme un procédé d'échantillonnage de  $f$ , suivi d'un calcul de moyenne.

**Fait 11.9.3** Les prévisions linéaires simples sur  $X$  sont les fonctionnelles de la forme  $\lambda f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ , où  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$  et  $x_1, \dots, x_n \in X$ .

On note que :

**Lemme 11.9.4** Soit  $X$  un cpo continu (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ). Alors  $\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X) = \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^\Delta(X) = \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^\Delta(X)$ ) est un cpo continu, et une base en est donnée par les prévisions linéaires simples sous-normalisées (resp., normalisées).

*Démonstration.* Par la proposition 3.7.12,  $\mathbf{V}_{\leq 1 \text{ wk}}(X) = \mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{V}_{1 \text{ wk}}(X) = \mathbf{V}_1(X)$ ) est un cpo continu, dont une base est formée des valuations simples sous-normalisées par le théorème de Jones (resp., des valuations simples normalisées par le théorème d'Edalat). On en déduit le résultat via l'isomorphisme  $\alpha_e, \gamma_e$  (proposition 11.4.2, resp. 11.3.2).  $\square$

Ceci signifie que l'on peut approcher la valeur de n'importe quelle prévision linéaire continue  $F$ , par le bas, par des fonctions de la forme  $\lambda f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$  inférieures ou égales à  $F$ .

On peut de même fournir des approximations finies de n'importe quelle prévision basse continue, lorsque  $X$  est un cpo continu cohérent.

**Théorème 11.9.5** Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ).

L'espace  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ ) des prévisions basses continues sous-normalisées (resp., normalisées) est un domaine stablement compact avec un plus petit élément. Une base en est donnée par les prévisions de la forme  $\prod \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est un ensemble fini de prévisions linéaires simples sous-normalisées (resp., normalisées).

*Démonstration.* Par le lemme 11.9.4 et le lemme 3.3.3, l'espace  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)) = \mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta wk}(X))$  (resp.,  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_1^\Delta(X)) = \mathcal{Q}(\mathbf{P}_1^{\Delta wk}(X))$ ) est un cpo continu, dont une base est formée par les compacts finitaires  $\uparrow \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est un ensemble fini de prévisions linéaires simples sous-normalisées (resp., normalisées).

Comme  $X$  est un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément),  $X$  est stablement localement compact (resp., et compact). Par le théorème 11.7.11,  $CCoeur_{\leq 1}$  (resp.,  $CCoeur_1$ ) et  $\prod$  forment respectivement une section et une rétraction de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X))$  (resp.,  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_1^\Delta(X))$ ) sur  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ ). On peut alors utiliser le lemme 3.2.4 et en déduire que  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ ) est un cpo continu, dont une base est donnée par les  $\prod \uparrow \mathcal{E} = \prod \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est un ensemble fini de prévisions linéaires simples sous-normalisées (resp., normalisées). Il est de plus stablement compact par le théorème 11.6.5.

Ensuite, c'est un domaine : tout couple de prévisions basses continues  $F_1$  et  $F_2$  a une borne inférieure  $F$ , qui est juste la fonctionnelle qui à tout  $f$  associe  $\min(F_1(f), F_2(f))$ . On peut soit vérifier directement que c'est bien une prévision basse continue, ou bien invoquer le fait que  $F = \prod(CCoeur_{\leq 1}(F_1) \cup CCoeur_{\leq 1}(F_2))$  (dans le cas sous-normalisé ; remplacer  $CCoeur_{\leq 1}$  par  $Coeur_1$  dans le cas normalisé).

Finalement, le plus petit élément de  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  est la prévision nulle, et celui de  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$  est  $\alpha_e(\delta_\perp)$ , la fonctionnelle qui à tout  $f$  associe  $f(\perp)$ .  $\square$

En particulier, si  $X$  est un domaine continu, alors  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  aussi, et si  $X$  est un domaine continu avec un plus petit éléments, alors  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  et  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$  aussi. On peut approcher par le bas n'importe quel élément par des minima d'un nombre fini de prévisions simples. Ceci fournit une représentation effective des prévisions basses continues.

On note finalement que le théorème d'isomorphisme 11.7.23 se simplifie dans le cas où  $X$  est un cpo continu cohérent, au sens où l'on peut remplacer la condition relativement complexe de convexité forte par celle plus simple, de convexité. Ce sera la proposition 11.9.9. La notion de cône continu additif a été définie à la définition 3.12.5.

**Lemme 11.9.6** Soit  $X$  un cpo continu. Alors  $\mathbf{P}^\Delta(X)$  est un cône continu additif.

*Démonstration.*  $\mathbf{P}^\Delta(X)$  est clairement un cône ordonné. Par le théorème 10.1.8, il est isomorphe à  $\mathbf{V}(X)$ , lequel est un ensemble ordonné continu puisque  $X$  est un cpo continu. Pour toute famille dirigée  $(G_i, G'_i)_{i \in I}$  de couples de prévisions linéaires continues ayant une borne supérieure  $(G, G')$ , on a pour tout  $f : \sup_{i \in I}(G_i + G'_i)(f) = \sup_{i \in I} G_i(f) + \sup_{j \in I} G'_j(f) = G(f) + G'(f)$ , puisque l'addition des réels positifs ou nuls est Scott continue. Donc l'addition des prévisions linéaires continues est Scott-continue. On conclut de même que la multiplication scalaire  $\cdot$ , définie par  $(a \cdot G)(f) = aG(f)$ , est Scott-continue elle aussi. Donc  $\mathbf{P}^\Delta(X)$  est un cône continu.

Montrons maintenant que ce cône continu est additif. Il est équivalent de démontrer que le cône continu  $\mathbf{V}(X)$  est additif.

Supposons  $\nu_1 \ll \nu'_1$  et  $\nu_2 \ll \nu'_2$ . Par la propriété d'interpolation raffinée, on peut trouver deux valuations simples telles que  $\nu_1 \leq \sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll \nu'_1$  et  $\nu_2 \leq \sum_{x \in A} b_x \delta_x \ll \nu'_2$ , où  $A$  est une partie finie de  $X$  (et  $A$  est le même ensemble dans les deux séries d'inégalités, sans qu'on y perde en généralité). Pour toute partie  $B$  close par le haut dans  $A$ , on a  $\sum_{x \in B} a_x < \nu'_1(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$  et  $\sum_{x \in B} b_x < \nu'_2(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$  par le lemme 3.7.7, donc  $\sum_{x \in B} (a_x + b_x) < (\nu'_1 + \nu'_2)(\bigcup_{x \in B} \uparrow x)$ . De nouveau, par le lemme 3.7.7 on en déduit  $\sum_{x \in A} (a_x + b_x) \delta_x \ll \nu'_1 + \nu'_2$ . Puisque clairement  $\nu_1 + \nu_2 \leq \sum_{x \in A} (a_x + b_x) \delta_x$ , il s'ensuit que  $\nu_1 + \nu_2 \ll \nu'_1 + \nu'_2$ .  $\square$

On rappelle qu'un sous-ensemble linéairement saturé est l'intersection de la famille des ouverts convexes qui le contiennent (corollaire 3.12.17).

**Lemme 11.9.7** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ). Tout compact saturé convexe de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^\Delta(X)$ ) est linéairement saturé.*

*Démonstration.* Soit  $C = \mathbf{P}^\Delta(X)$ . Par le lemme 11.9.6,  $C$  est un cône continu additif. Soit  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$  (resp.,  $Z = \mathbf{P}_1^\Delta(X)$ ).  $Z$  est clairement convexe, et nous prétendons que  $Z$  est un sous-espace topologique de  $C$ . Il y a une subtilité ici : ceci revient à dire que la topologie (de Scott) de  $Z$  est la topologie induite par la topologie (de Scott encore) de  $C$ . Or une topologie induite par une topologie de Scott n'est en général pas une topologie de Scott. Dans le cas qui nous occupe, cependant, les topologies de Scott sur  $C$  et sur  $Z$  coïncident avec les topologies faibles par la proposition 3.7.12, et la topologie induite par une topologie faible est encore la topologie faible.

On peut donc appliquer le corollaire 3.12.17 : tout compact saturé convexe  $Q$  de  $Z$  est linéairement saturé.  $\square$

**Lemme 11.9.8** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ). Tout compact saturé convexe de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^\Delta(X)$ ) est fortement convexe.*

*Démonstration.* Soit  $C = \mathbf{P}^\Delta(X)$ . Nous voyons maintenant  $C$  comme un simple cône ordonné. Soit  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$  (resp.,  $Z = \mathbf{P}_1^\Delta(X)$ ). Par la proposition 11.4.2 (resp., 11.3.2),  $Z$  est isomorphe à  $\mathbf{V}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{V}_1(X)$ ), lequel est un cpo continu par le théorème de Jones (resp., le théorème d'Edalat). Pour tout compact saturé convexe  $\mathcal{Q}$  de  $Z$ ,  $\mathcal{Q}$  est linéairement saturé par le lemme 11.9.7. On peut donc appliquer la proposition 3.12.35, et définir l'application barycentre  $\text{bary}^\mathcal{Q}$ .

Pour tout ouvert  $\mathcal{U}_0$  de  $Z$  contenant  $\mathcal{Q}$ , pour toute probabilité simple  $\mathcal{P} = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{G_i}$  sur  $Z$  avec  $G_0, G_1, \dots, G_n \in \mathcal{U}_0$ , on a :

$$\text{Bary}(\mathcal{P})(f) = \int_{G \in Z} G(f) d\mathcal{P} = \sum_{i=0}^n s_i G_i(f)$$

Donc :

$$\text{Bary}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^n s_i G_i = \text{bary}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{P})$$

Par unicité de  $\text{bary}^{\mathcal{U}_0}$  (proposition 3.12.32),  $\text{bary}^{\mathcal{U}_0}$  et  $\text{Bary}$  coïncident en tant que fonctions de  $\mathbf{V}_1(Z; \mathcal{U}_0)$  vers  $\mathcal{U}_0$ . Par la proposition 3.12.35, pour toute probabilité continue  $\mathcal{P}$  à support dans  $\mathcal{Q}$ ,  $\text{bary}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) = \text{bary}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{P})$ , où  $\mathcal{U}_0$  est n'importe quel ouvert convexe  $\mathcal{U}_0$  contenant  $\mathcal{Q}$ , donc  $\text{bary}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) = \text{Bary}(\mathcal{P})$ . Toujours par la proposition 3.12.35,  $\text{bary}^{\mathcal{Q}}$  est à valeurs dans  $\mathcal{Q}$ , donc  $\text{Bary}(\mathcal{P}) \in \mathcal{Q}$ . Comme  $\mathcal{P}$  est une probabilité continue arbitraire à support dans  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q}$  est fortement convexe.  $\square$

**Proposition 11.9.9 (Isomorphisme)** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ).  $\text{CCoeur}_{\leq 1}$  (resp.,  $\text{CCoeur}_1$ ) et  $\sqcap$  définissent un isomorphisme entre  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\nabla \mathbf{P}_1(X)$ ) et l'espace  $\mathcal{Q}^{\text{cvx}}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} \text{wk}(X)) = \mathcal{Q}^{\text{cvx}}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X))$  (resp.,  $\mathcal{Q}^{\text{cvx}}(\mathbf{P}_1^{\Delta} \text{wk}(X)) = \mathcal{Q}^{\text{cvx}}(\mathbf{P}_1^{\Delta}(X))$ ), ordonné par inclusion inverse  $\supseteq$ .*

*Démonstration.* D'abord, on rappelle que  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X) = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} \text{wk}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^{\Delta}(X) = \mathbf{P}_1^{\Delta} \text{wk}(X)$ ), par le lemme 11.9.4.  $X$ , muni de sa topologie de Scott, est stablement localement compact (resp., stablement compact). On peut donc appliquer le théorème 11.7.23. Mais il est équivalent pour un compact saturé (non vide) d'être convexe ou d'être fortement convexe : la direction facile est le fait 11.7.19, la réciproque est le lemme 11.9.8.  $\square$

La seule différence entre le modèles des prévisions basses continues sous-normalisées (resp., normalisées) et celui de Tix et al. (2005), dans le cadre des cpos — plus restreint que celui des espaces topologiques qui nous occupait jusqu'alors — est donc que ce dernier est  $\mathcal{Q}^{\text{cvx}}(\overline{\mathbf{V}}(X))$ , et que le nôtre est essentiellement  $\mathcal{Q}^{\text{cvx}}(\mathbf{V}_{\leq 1}(X))$  (resp.,  $\mathcal{Q}^{\text{cvx}}(\mathbf{V}_1(X))$ ). De plus, nous avons besoin de supposer que  $X$  est cohérent pour ceci, ce que ne supposent pas Tix et al..

## 11.9.2 Domaines de prévisions hautes

La situation est plus complexe dans le cas du mélange de probabilités et de non-déterminisme angélique, c'est-à-dire dans le cas des prévisions hautes. Pour être précis, le cas de la topologie faible est tout aussi simple :  $\Delta P_{\leq 1} \text{wk}(X)$  est stablement compact (proposition 11.6.3),  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1} \text{wk}(X)$  est stablement compact si  $X$  est stablement localement relativement compact, et  $\Delta \mathbf{P}_1 \text{wk}(X)$  est stablement compact si  $X$  est stablement relativement compact (théorème 11.6.5). Mais qu'en est-il de la topologie de Scott ?

Par le lemme 3.2.4 et le lemme 3.2.2, pour montrer qu'un espace de prévisions basses est un cpo continu, resp. stablement compact, il suffit de montrer que c'est un rétract d'un espace  $Y$  ayant les mêmes propriétés. Un candidat naturel pour  $Y$  est l'espace de Hoare au-dessus d'un espace des prévisions linéaires continues, par le théorème 11.7.26. La section serait  $\text{CPeau}_{\leq 1}$ ,  $\text{CPeau}_1$ , et la rétraction serait  $\sqsubset$ .

Le hic est que l'on ne sait pas si  $\text{CPeau}_{\leq 1}$ , resp.  $\text{CPeau}_1$ , est continue. Le but des résultats qui suivent est de montrer que ces fonctions sont effectivement continues, à condition que  $X$  soit un cpo continu.

On commence par observer un résultat de structure.

**Proposition 11.9.10** *Si  $X$  est un cpo continu (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ), alors  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} \text{wk}(X))$  (resp.,  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_1^{\Delta} \text{wk}(X))$ ) aussi.*

Une base de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  (resp.,  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_1^{\Delta}{}_{wk}(X))$ ) est donnée par l'ensemble  $B_{\Delta}(X)$  des fermés finitaires non vides de prévisions linéaires simples (sous-normalisées, resp. normalisées) sur  $X$ .

*Démonstration.* Application directe du lemme 11.9.4 et de la proposition 3.4.5.  $\square$

**Proposition 11.9.11** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent. La fonction  $CPeau_{\leq 1}$  est continue de  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  vers  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$ .*

*Si  $X$  est un cpo continu coérent, avec un plus petit élément  $\perp$ , alors  $CPeau_1$  est continue de  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$  vers  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_1^{\Delta}{}_{wk}(X))$ .*

*Démonstration.* Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille dirigée de prévisions hautes continues sous-normalisées sur  $X$ , nous devons montrer que  $CPeau_{\leq 1}(\sup_{i \in I} F_i) = cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ . L'inclusion  $cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i)) \subseteq CPeau_{\leq 1}(\sup_{i \in I} F_i)$  est claire,  $CPeau_{\leq 1}$  étant croissante, et comme  $CPeau_{\leq 1}(\sup_{i \in I} F_i)$  est fermé par le lemme 11.7.24.

Réciproquement, pour tout  $G \in CPeau_{\leq 1}(\sup_{i \in I} F_i)$ , c'est-à-dire  $G \leq \sup_{i \in I} F_i$ , montrons que  $G \in cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ . À ce point, notons que l'argument suivant est faux : en écrivant  $G$  sous la forme de la borne supérieure d'une famille dirigée de prévisions linéaires sous-normalisées simples  $G_j$ ,  $j \in J$ , avec  $G_j \ll G$ , puisque  $G \leq \sup_{i \in I} F_i$  on déduit que  $G_j \leq F_i$  pour un certain  $i$ , donc  $G_j \in cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ , et le fermé  $cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$  étant stable par bornes supérieures dirigées,  $G = \sup_{j \in J} G_j$  est dans  $cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ . Cet argument est faux car on a  $G_j \ll G$  dans  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X)$ , mais  $G \leq \sup_{i \in I} F_i$  dans  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  — un autre espace — et l'on ne peut donc pas en conclure qu'il existe un  $i \in I$  tel que  $G_j \leq F_i$ .

À la place, on remarque que  $G \leq \sup_{i \in I} F_i$ , et  $F_i = \bigsqcup CPeau_{\leq 1}(F_i)$  par le théorème 11.7.26, donc  $G \leq \bigsqcup \bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i)$ . En particulier,  $G \leq \bigsqcup \mathcal{F}$ , où  $\mathcal{F}$  est le fermé  $cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$  dans  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ . Mais ceci signifie que  $G \in CPeau_{\leq 1}(\bigsqcup \mathcal{F})$ , donc que  $G \in \downarrow Conv^*(\mathcal{F})$  par la proposition 11.7.44. En d'autres termes, il existe une probabilité continue  $\mathcal{P}$  sur  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$ , à co-support dans  $\mathcal{F}$ , telle que  $G \leq Bary(\mathcal{P})$ .

Or  $Y = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X) = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  est un cpo continu par le lemme 11.9.4, et a un plus petit élément, la prévision nulle. Par le lemme 11.9.4 de nouveau,  $Y$  étant un cpo continu ayant un plus petit élément,  $\mathbf{P}_1^{\Delta}(Y) = \mathbf{P}_1^{\Delta}(Y)$  est un cpo continu, et une base en est donnée par les prévisions linéaires simples normalisées. Soit donc  $\mathcal{P}_j$ ,  $j \in J$ , une famille dirigée de prévisions linéaires simples normalisées bien en-dessous de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbf{P}_1^{\Delta}(Y)$ , et de borne supérieure égale à  $\mathcal{P}$ .

Montrons que pour tout  $j \in J$ , il existe un  $i \in I$  tel que  $\mathcal{P}_j$  soit à co-support dans  $CPeau_{\leq 1}(F_i)$ . Écrivons  $\mathcal{P}_j = a_0 \delta_{\perp} + \sum_{k=1}^n a_k \delta_{G_k}$ , tous les  $a_k$ ,  $k \geq 1$ , étant non nuls, et tous les  $G_k$  étant différents de l'élément le plus petit de  $Y$ , que nous notons  $\perp$ . Puisque  $\mathcal{P}_j \ll \mathcal{P}$ , par la propriété d'interpolation raffinée, il existe une probabilité simple normalisée  $\mathcal{P}'$  de la forme  $b_0 \delta_{\perp} + \sum_{\ell=1}^p b_{\ell} \delta_{G'_{\ell}}$  (tous les  $b_{\ell}$  étant non nuls) telle que  $\mathcal{P}_j \ll \mathcal{P}' \ll \mathcal{P}$ . Puisque  $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}$  est à co-support dans  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}'(Y \setminus \mathcal{F}) \leq \mathcal{P}(Y \setminus \mathcal{F}) = 0$ , donc  $\mathcal{P}'$  est à co-support dans  $\mathcal{F}$ . Par le lemme 3.12.27, tous les  $G'_{\ell}$  sont donc dans  $\mathcal{F}$ . Puisque  $\mathcal{P}_j \ll \mathcal{P}'$ , par le lemme 3.7.8, il existe une matrice  $(t_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}}$  dans

$\mathbb{R}^+$  telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \ell \leq p} t_{k\ell} &= a_k \quad \text{pour tout } k, 1 \leq k \leq n \\ \sum_{1 \leq k \leq n} t_{ij} &< b_\ell \quad \text{pour tout } \ell, 1 \leq \ell \leq p \end{aligned}$$

et telle que les seules entrées  $t_{ij}$  non nulles de la matrice sont telles que  $G_k \ll G'_\ell$ . On note alors que :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j &= a_0 \delta_\perp + \sum_{k=1}^n a_k \delta_{G_k} = a_0 \delta_\perp + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p t_{k\ell} \delta_{G_k} \\ &= a_0 \delta_\perp + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p \\ G_k \ll G'_\ell}} t_{k\ell} \delta_{G_k} \end{aligned}$$

Les seuls coefficients  $a_k$  non nuls avec  $k \geq 2$  sont donc ceux pour lesquels il existe un  $\ell, 1 \leq \ell \leq p$ , tel que  $G_k \ll G'_\ell$ . Comme par hypothèse tous les  $a_k$  sont non nuls, et que  $G'_\ell \in \mathcal{F}$ , c'est que  $G_k \in \downarrow \mathcal{F}$ , pour tout  $k, 1 \leq k \leq n$ . Comme  $\perp$  est le plus petit élément de  $Y$ , on a  $\perp \ll \perp$ , donc  $\perp \in \downarrow \mathcal{F}$ . On en déduit que  $\{\perp, G_1, \dots, G_n\} \subseteq \downarrow \mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $\downarrow \{\perp, G_1, \dots, G_n\} \ll \mathcal{F}$  dans  $\mathcal{H}(Y)$ , par la proposition 3.4.5. Puisque  $\mathcal{F} = cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$  est la borne supérieure de la famille dirigée  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{H}(Y)$ , il existe donc un  $i \in I$  tel que  $\downarrow \{\perp, G_1, \dots, G_n\} \subseteq CPeau_{\leq 1}(F_i)$ . Donc  $\perp, G_1, \dots, G_n \in CPeau_{\leq 1}(F_i)$ . Par le lemme 3.12.27,  $\mathcal{P}_j = a_0 \delta_\perp + \sum_{k=1}^n a_k \delta_{G_k}$  est donc à co-support dans  $CPeau_{\leq 1}(F_i)$ .

Nous avons établi que pour tout  $j \in J$ , il existe un  $i_j = i \in I$  tel que  $\mathcal{P}_j$  soit à co-support dans  $CPeau_{\leq 1}(F_{i_j})$ . Alors  $Bary(\mathcal{P}_j) \in CPeau_{\leq 1}(F_{i_j})$ , puisque la peau est convexe. En particulier,  $Bary(\mathcal{P}_j) \in cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ . Or :

$$\begin{aligned} Bary(\mathcal{P})(f) &= \int_{G \in Y} G(f) d\mathcal{P} \\ &= \sup_{j \in J} \int_{G \in Y} G(f) d\mathcal{P}_j \quad \text{par la proposition 4.2.5} \end{aligned}$$

Donc  $Bary(\mathcal{P})$  est la borne supérieure de la famille dirigée des  $Bary(\mathcal{P}_j)$ , lesquels sont tous dans le Scott-fermé  $cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ . Donc  $Bary(\mathcal{P})$  est aussi dans  $cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ . Comme  $G \leq Bary(\mathcal{P})$  et  $cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$  est clos par le bas,  $G \in cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i))$ .

L'argument est similaire dans le cas normalisé, en utilisant la proposition 11.7.40 au lieu de la proposition 11.7.44. De plus, au lieu d'invoquer que  $\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X) = \mathbf{P}_{\leq 1 \ w_k}^\Delta(X)$  a un plus petit élément, la prévision nulle, nous utilisons le fait que  $\alpha_{\mathbb{C}}(\delta_\perp)$  est le plus petit élément de  $\mathbf{P}_1^\Delta(X) = \mathbf{P}_{1 \ w_k}^\Delta(X)$ .  $\square$

Soit  $\downarrow \mathcal{E}$  un fermé finitaire non vide de  $\mathbf{P}_{\leq 1 \ w_k}^\Delta(X)$ .  $E$  est donc un ensemble fini  $\{F_1, \dots, F_m\}$ , de prévisions simples sous-normalisées, disons définies par  $F_j(f) = \sum_{i=1}^{n_j} a_{ji} f(x_{ji})$ . L'image de

$\downarrow \mathcal{E}$  par  $\sqcup$  est la prévision haute sous-normalisée qui à  $f$  associe  $\sup_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} a_{ji} f(x_{ji})$ . Nous allons démontrer que de telles prévisions hautes forment une base de  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ , ce qui est le pendant dans le cadre angélique du théorème 11.9.1.

**Théorème 11.9.12** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent. La fonction  $CPeau_{\leq 1}$  forme une section et  $\sqcup$  une rétraction de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  sur  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ .  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  et  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  sont des domaines stablement compacts.*

*Si de plus  $X$  a un plus petit élément  $\perp$ , alors  $CPeau_{\leq 1}$  forme une section et  $\sqcup$  une rétraction de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  sur  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$ .  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  et  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$  sont des domaines stablement compacts.*

*Démonstration.* De nouveau, traitons du cas sous-normalisé, le cas normalisé est entièrement similaire. Par la proposition 11.9.11,  $CPeau_{\leq 1}$  est continue. Comme  $X$  est un cpo continu, il est sobre et localement compact. Comme  $X$  est cohérent, il est donc stablement localement compact. Par le théorème 11.7.26,  $CPeau_{\leq 1}$  et  $\sqcup$  forment donc respectivement une section et une rétraction.

Comme  $X$  est stablement localement compact (stablement compact dans le cas normalisé), par le théorème 4.5.11,  $\mathbf{V}_{\leq 1}{}_{wk}(X)$  est stablement compact, donc  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)$  aussi, par le théorème 11.1.2. Par le lemme 11.9.4, comme  $X$  est un cpo continu,  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X) = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X)$  est un cpo continu. Donc  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  est aussi un domaine, par la proposition 3.4.5, et  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X)) = \mathcal{H}_u(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  (par la proposition 3.4.19) =  $\mathcal{H}^{op}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))^d$  (par la proposition 3.4.17) est le dual de de Groot de l'espace  $\mathcal{H}^{op}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$ , qui est stablement compact par la proposition 3.4.13. Donc  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X))$  est un domaine stablement compact.

Puisque  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  en est un rétract, c'est donc aussi un domaine stablement compact, par le lemme 3.2.5 et le lemme 3.2.2.  $\square$

On peut de nouveau simplifier le théorème d'isomorphisme 11.7.45, et remplacer la condition de convexité co-forte par la notion plus simple de convexité.

**Lemme 11.9.13** *Soit  $X$  un cpo continu (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ). Tout fermé convexe de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^{\Delta}(X)$ ) est co-fortement convexe.*

*Démonstration.* Soit  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^{\Delta}(X)$ ),  $\mathcal{F}$  un fermé convexe de  $Z$ , et  $\mathcal{P}$  une probabilité continue quelconque sur  $Z$ , à co-support dans  $\mathcal{F}$ . Autrement dit,  $\mathcal{P}(Z \setminus \mathcal{F}) = 0$ . Par le lemme 11.9.4, on peut écrire  $\mathcal{P}$  sous forme de borne supérieure d'une famille dirigée  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  bien en-dessous de  $\mathcal{P}$ . Puisque  $\mathcal{P}_i \leq \mathcal{P}$ , en particulier  $\mathcal{P}_i(Z \setminus \mathcal{F}) = 0$ , donc  $\mathcal{P}_i$  est à co-support dans  $\mathcal{F}$ . Par le lemme 3.12.27, on peut donc écrire  $\mathcal{P}_i$  sous la forme  $\sum_{j=1}^n a_j \delta_{G_j}$ , où tous les  $G_j$  sont dans  $\mathcal{F}$ , et  $a_1 + \dots + a_n = 1$ . Comme  $\mathcal{F}$  est convexe,  $Bary(\mathcal{P}_i) = \sum_{j=1}^n a_j G_j$  est dans  $\mathcal{F}$ . Par la définition de  $Bary$  et la proposition 4.2.5,  $(Bary(\mathcal{P}_i))_{i \in I}$  est une famille dirigée de borne supérieure égale à  $Bary(\mathcal{P})$ .  $Bary(\mathcal{P})$  est donc borne supérieure d'une famille dirigée d'éléments de  $\mathcal{F}$ . Comme ce dernier est (Scott-)fermé,  $Bary(\mathcal{P}) \in \mathcal{F}$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est arbitraire,  $\mathcal{F}$  est co-fortement convexe.  $\square$

**Proposition 11.9.14 (Isomorphisme)** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ).  $CPeau_{\leq 1}$  (resp.,  $CPeau_1$ ) et  $\sqcup$  définissent un isomorphisme entre  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\Delta \mathbf{P}_1(X)$ ) et l'espace  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)) = \mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X))$  (resp.,  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)) = \mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{P}_1^\Delta(X))$ ), ordonné par inclusion  $\subseteq$ .*

*Démonstration.* D'abord, on rappelle que  $\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X) = \mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^\Delta(X) = \mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$ ), par le lemme 11.9.4.  $X$ , muni de sa topologie de Scott, est stablement localement compact (resp., stablement compact). On peut donc appliquer le théorème 11.7.45. Mais il est équivalent pour un fermé (non vide) d'être convexe ou d'être cofortement convexe : la direction facile est le fait 11.7.32, la réciproque est le lemme 11.9.13.  $\square$

De nouveau, la seule différence entre le modèles des prévisions hautes continues sous-normalisées (resp., normalisées) et celui de Tix et al. (2005), dans le cadre des cpos est donc que ce dernier est  $\mathcal{H}^{cvx}(\overline{\mathbf{V}}(X))$ , et que le nôtre est essentiellement  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{V}_{\leq 1}(X))$  (resp.,  $\mathcal{H}^{cvx}(\mathbf{V}_1(X))$ ). De plus, nous avons besoin de nouveau de supposer que  $X$  est cohérent pour ceci, ce que ne supposent pas Tix et al..

### 11.9.3 Domaines de fourchettes

Le cas du mélange de tirages probabilistes et de non-déterminisme chaotique est maintenant simple à traiter.

**Théorème 11.9.15** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ). La fonction  $CCorps_{\leq 1}$  (resp.,  $CCorps_1$ ) forme une section et  $\prod \sqcup$  une rétraction de l'espace  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{F}_1(X)$ ) dans l'espace  $\mathcal{P}\ell(Z) = \mathcal{P}L(Z)$ , où  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X) = \mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$  (resp.,  $Z = \mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X) = \mathbf{P}_1^\Delta(X)$ ).*

*L'espace  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{F}_1(X)$ ) est un cpo continu cohérent et compact, et une base en est donnée par les fourchettes continues de la forme  $(\prod \mathcal{E}, \sqcup \mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}$  parcourt les ensembles finis non vides de prévisions linéaires simples. Son plus petit élément est  $(\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X), \{\lambda f \cdot 0\})$  (resp.,  $(\mathbf{P}_1^\Delta(X), \{\lambda f \cdot f(\perp)\})$ ).*

*Démonstration.* Rappelons que  $\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X) = \mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$ , resp.  $\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X) = \mathbf{P}_1^\Delta(X)$ , par le lemme 11.9.4. L'espace  $Z$  indiqué est, toujours par ce lemme, est cpo continu. Puisque  $X$  est un cpo continu cohérent (resp., et compact), il est stablement localement compact (resp., stablement compact). Donc  $Z$  est stablement compact par le théorème 11.6.5. C'est en particulier un cpo continu cohérent, donc  $\mathcal{P}\ell(Z) = \mathcal{P}L(Z)$  par la proposition 3.5.12.

Une des conséquences du théorème 11.7.56 est que  $CCorps_{\leq 1}$  (resp.,  $CCorps_1$ ) est une fonction croissante de  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{F}_1(X)$ ) dans l'un quelconque des espaces  $\mathcal{P}\ell(Z) = \mathcal{P}L(Z)$  ou  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(Z) = \mathcal{P}L^{cvx}(Z)$ , et que  $\prod \sqcup$  est une fonction croissante de ces derniers espaces vers  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{F}_1(X)$ ).

Montrons que  $CCorps_{\leq 1}$  est continue de  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  vers  $\mathcal{P}\ell(Z)$ . Le cas normalisé, c'est-à-dire de  $CCorps_1$  sera similaire. Par le théorème 11.7.11,  $CCoeur_{\leq 1}$  (resp.,  $CCoeur_1$ ) est continue. La proposition 11.9.11 nous garantit que  $CPeau_{\leq 1}$  (resp.,  $CPeau_1$ ) est elle aussi continue.

Soit donc  $((F_i^-, F_i^+))_{i \in I}$  une famille dirigée de fourchettes continues sous-normalisées (resp., normalisées), de borne supérieure  $(F^-, F^+)$ . Alors  $CCorps_{\leq 1}(F^-, F^+) = CCoeur_{\leq 1}(F^-) \cap CPeau_{\leq 1}(F^+) = \bigcap_{i \in I} CCoeur_{\leq 1}(F_i^-) \cap cl(\bigcup_{i \in I} CPeau_{\leq 1}(F_i^+))$ . Par la proposition 11.7.50,  $\mathcal{L}_i = CCorps_{\leq 1}(F_i^-, F_i^+)$  est une lentille forte (convexe), et telle que si l'on pose  $\mathcal{Q}_i = \uparrow \mathcal{L}_i$  et  $\mathcal{F}_i = \downarrow \mathcal{L}_i$ , alors  $\mathcal{Q}_i = CCoeur_{\leq 1}(F_i^-)$  et  $\mathcal{F}_i = CPeau_{\leq 1}(F_i^+)$  (en particulier,  $\mathcal{F}_i$  est fermé et égal à  $cl(\mathcal{L}_i)$ ). On en déduit  $CCorps_{\leq 1}(F^-, F^+) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i \cap cl(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i)$ , autrement dit que  $CCorps_{\leq 1}(F^-, F^+)$  est la borne supérieure dans  $\mathcal{P}l(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X))$  des  $\mathcal{L}_i$ ,  $i \in I$ , par le lemme 3.5.4, c'est-à-dire des  $CCorps_{\leq 1}(F_i^-, F_i^+)$ ,  $i \in I$ .

Par le théorème 11.7.11,  $\sqcap$  est continue de  $\mathcal{Q}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X))$  vers  $\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ , et le lemme 11.7.27 énonce que  $\sqcup$  est continue de  $\mathcal{H}(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X))$  vers  $\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ . Pour toute famille dirigée de lentilles  $\mathcal{L}_i \in \mathcal{P}l(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta} wk(X))$ ,  $i \in I$ , notons  $\mathcal{Q}_i = \uparrow \mathcal{L}_i$ ,  $\mathcal{F}_i = cl(\mathcal{L}_i)$ . La borne supérieure de cette famille est  $\mathcal{L} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{F}$ , où  $\mathcal{Q} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$  et  $\mathcal{F} = cl(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i)$  par le lemme 3.5.4. Alors  $\sqcap \sqcup (\mathcal{L}) = (\sqcap \mathcal{Q}, \sqcup \mathcal{F}) = (\sup_{i \in I} \sqcap \mathcal{Q}_i, \sup_{i \in I} \sqcup \mathcal{F}_i) = \sup_{i \in I} \sqcap \sqcup \mathcal{L}_i$ . Donc  $\sqcap \sqcup$  est elle aussi continue. (Le cas normalisé est similaire.)

Donc  $CCorps_{\leq 1}$  (resp.,  $CCorps_1$ ) forme une section et  $\sqcap \sqcup$  une rétraction, comme annoncé.

Rappelons que  $Z$  est un cpo continu cohérent. On peut donc appliquer la proposition 3.5.13 :  $\mathcal{P}l(Z)$  est un cpo continu, et une base en est donnée par les lentilles finitaires  $\langle \mathcal{E} \rangle$ , où  $\mathcal{E}$  est un ensemble fini non vide de prévisions linéaires simples. Par le lemme 3.2.4,  $\mathbf{F}_{\leq 1}(Z)$  (resp.,  $\mathbf{F}_1(Z)$ ), qui en est un rétract, est aussi un cpo continu, et une base en est donnée par les fourchettes de la forme  $\sqcap \sqcup \langle E \rangle = (\sqcap \uparrow \mathcal{E}, \sqcup \downarrow \mathcal{E})$  (en utilisant le lemme 3.5.6)  $= (\sqcap \mathcal{E}, \sqcup \mathcal{E})$ .

Rappelons que  $Z$  est aussi stablement compact, et est donc un cpo continu cohérent et compact.  $Z$  a de plus un plus petit élément, la prévision nulle (resp., la fonction qui à  $f$  associe  $f(\perp)$ ), et que nous noterons  $\perp_Z$ . Par le théorème 3.5.30,  $\mathcal{P}l(Z)$  est donc aussi cohérent et compact, et a un plus petit élément,  $\{\perp_Z\}$ . Puisque  $\mathcal{P}l(Z)$  est un cpo continu, cohérent et compact, il est stablement compact, donc son rétract  $\mathbf{F}_{\leq 1}(Z)$  (resp.  $\mathbf{F}_1(Z)$ ) l'est aussi, par le lemme 3.2.2. C'est donc un cpo continu, cohérent et compact. De plus, l'image par la rétraction du plus petit élément de  $\mathcal{P}l(Z)$ , c'est-à-dire  $(\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X), \{\lambda f \cdot 0\})$  (resp.,  $(\mathbf{P}_1^{\Delta}(X), \{\lambda f \cdot f(\perp)\})$ ) est le plus petit élément de  $\mathbf{F}_{\leq 1}(Z)$  (resp.  $\mathbf{F}_1(Z)$ ).  $\square$

Finalement, on peut de nouveau simplifier l'énoncé du théorème d'isomorphisme 11.7.59 en remplaçant la condition complexe de convexité bi-forte par celle de convexité.

**Lemme 11.9.16** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ). Toute lentille forte convexe de  $\mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X)$  (resp.,  $\mathbf{P}_1^{\Delta}(X)$ ) est bi-fortement convexe.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{L}$  une lentille forte convexe. Notamment,  $\mathcal{Q} = \uparrow \mathcal{L}$  est un compact saturé,  $\mathcal{F} = \downarrow \mathcal{L}$  est fermé (et donc  $\mathcal{F} = cl(\mathcal{L})$ ), et  $\mathcal{L} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{F}$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{F}$  sont convexes. Par exemple, pour tous  $G_1, G_2 \in \mathcal{Q}$ , et  $\alpha \in [0, 1]$ , par définition il existe  $G'_1, G'_2 \in \mathcal{L}$  tels que  $G'_1 \leq G_1$  et  $G'_2 \leq G_2$ . Puisque  $\mathcal{L}$  est convexe,  $\alpha G'_1 + (1 - \alpha)G'_2$  est dans  $\mathcal{L}$ . Mais comme  $\alpha G'_1 + (1 - \alpha)G'_2 \leq \alpha G_1 + (1 - \alpha)G_2$ , on a donc  $\alpha G_1 + (1 - \alpha)G_2 \in \mathcal{Q}$ , donc  $mathcal{Q}$  est convexe. On procède de même pour  $\mathcal{F}$ . Par le lemme 11.9.8,  $\mathcal{Q}$  est donc fortement convexe, et le lemme 11.9.13 nous indique que  $\mathcal{F}$  est co-fortement convexe. On en déduit aisément que  $\mathcal{L}$  est bi-fortement convexe.  $\square$

**Proposition 11.9.17** *Soit  $X$  un cpo continu cohérent (resp., et avec un plus petit élément  $\perp$ ). Soit  $Z = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}{}_{wk}(X) = \mathbf{P}_{\leq 1}^{\Delta}(X)$  (resp.,  $Z = \mathbf{P}_1^{\Delta}{}_{wk}(X) = \mathbf{P}_1^{\Delta}(X)$ ).  $CCorps_{\leq 1}$  (resp.,  $CCorps_1$ ) et  $\square \sqcup$  définissent un isomorphisme entre  $\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$  (resp.,  $\mathbf{F}_1(X)$ ) et l'espace  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(Z) = \mathcal{P}L^{cvx}(Z)$  des lentilles (fortes) convexes sur  $Z$ , ordonné par  $\sqsubseteq_{EM}$ .*

*Démonstration.* Par le théorème 11.7.59, et en observant que les notions de convexité et de convexité bi-forte coïncident pour les lentilles fortes. Toute lentille forte convexe est en effet bi-fortement convexe par le lemme 11.9.16, et réciproquement, pour toute lentille  $\mathcal{L}$  bi-fortement convexe, pour tout probabilité simple  $\mathcal{P} = \sum_{i=0}^n s_i \delta_{G_i}$  telle que  $G_i \in \mathcal{L}$  pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{P}$  est à la fois à support dans  $\mathcal{L}$  et à co-support dans  $\mathcal{L}$ , donc  $\sum_{i=0}^n s_i G_i = \text{Bary}(\mathcal{P})$  est à la fois dans  $\uparrow \mathcal{L}$  et dans  $\downarrow \mathcal{L}$ , donc dans  $\mathcal{L}$ .  $\square$

De nouveau, la seule différence entre le modèles des fourchettes continues sous-normalisées (resp., normalisées) et celui de Tix et al. (2005), dans le cadre des cpos est donc que ce dernier est  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(\overline{\mathbf{V}}(X))$ , et que le nôtre est essentiellement  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(\mathbf{V}_{\leq 1}(X))$  (resp.,  $\mathcal{P}\ell^{cvx}(\mathbf{V}_1(X))$ ).



# Chapitre 12

## Monades de prévisions continues

Nous utilisons maintenant tout ce que nous savons pour donner une sémantique dénotationnelle à un langage de programmation fonctionnel riche, qui inclut des primitives de choix non déterministe et probabiliste. Nous utiliserons pour ceci une approche à base de *monade*. Le concept de monade est fondamental en théorie des catégories (Mac Lane, 1971). En informatique, c'est Moggi (Moggi, 1991) qui a remarqué que le concept de monade (forte) permettait d'intégrer de façon naturelle grand nombre de notions d'effets de bord dans un  $\lambda$ -calcul typé.

Nous commençons par présenter la notion de monade, et de monade forte, sur quelques exemples relevant de notre sujet à la section 12.1. Nous présentons ensuite le  $\lambda$ -calcul monadique de Moggi à la section 12.2. Ces deux sections présentent des définitions et des résultats connus ; seuls les exemples que nous prenons sont nouveaux. Il n'aurait donc pas été a priori déraisonnable de faire ces présentations au chapitre 2, à part que nous n'aurions pas utilisé ces notions pendant une dizaine de chapitres.

— MANQUE UN PLAN DU CHAPITRE.
-------------------------------

### 12.1 Les monades par l'exemple

#### 12.1.1 Catégories

D'abord, le concept de monade ne s'explique que dans une catégorie donnée. Définissons rapidement la notion.

Un *graphe*  $\mathbf{G}$  est la donnée d'une collection de choses appelées *objets* et d'un ensemble de choses appelées *morphismes*. Tout morphisme  $f$  a un objet *source*  $A$  et un objet *destination*  $B$ . On dira aussi que  $f$  va *de*  $A$  *vers*  $B$ , et l'on notera  $f : A \rightarrow B$ .

Une *catégorie*  $\mathbf{C}$  est un graphe muni d'une opération partielle, dite de *composition* et notée  $\circ$ , telle que si  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  alors  $g \circ f$  est définie et va de  $A$  vers  $C$ , et vérifiant quelques lois évidentes. En premier, il existe pour chaque objet  $A$  un morphisme  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  tel que  $f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$  pour tout  $f : A \rightarrow B$ . En second, la composition est associative lorsqu'elle est définie : si  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$ , alors  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

Par exemple, étant donné un graphe  $\mathbf{G}$ , le graphe dont les morphismes sont tous les chemins  $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$  ( $n \geq 0$ ) obtenus en concaténant des morphismes  $f_1 : A_0 \rightarrow A_1$ ,  $f_1 : A_1 \rightarrow A_2, \dots, f_n : A_{n-1} \rightarrow A_n$ ,  $\text{id}_A$  étant le chemin de longueur 0 de  $A$  vers  $A$ , et la composition étant la concaténation, est une catégorie.  $\mathbf{C}$  est la catégorie libre sur  $\mathbf{G}$ .

Il existe des catégories bien plus grosses. La catégorie **Set**, par exemple, a pour objets tous les ensembles, et comme morphismes  $f : A \rightarrow B$  toutes les applications de  $A$  vers  $B$ . La catégorie **Top**, qui nous intéressera davantage, a pour objets les espaces topologiques, et comme morphismes les fonctions continues. La catégorie **Cpo** est celle des cpos et des fonctions Scott-continues. La catégorie **Ord** est celle des ensembles partiellement ordonnés, et des fonctions croissantes.

Un *isomorphisme* dans une catégorie  $\mathbf{C}$ , entre  $A$  et  $B$ , ou en abrégé un *iso*, est un couple formé de deux morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow A$  tels que  $g \circ f = \text{id}_A$  et  $f \circ g = \text{id}_B$ . Il est fréquent de mentionner juste l'une des deux composantes, et de dire que  $f$ , ou bien  $g$ , est un iso. On dit alors que  $A$  et  $B$  sont *isomorphes*. Dans **Top**, les isos sont les homéomorphismes. Dans **Cpo** et **Ord**, ce sont les isomorphismes d'ordre. Notons que les isomorphismes d'ordre dans **Cpo** sont aussi automatiquement des homéomorphismes pour les espaces topologiques sous-jacents.

Un *morphisme de graphes*, du graphe  $\mathbf{G}_1$  vers  $\mathbf{G}_2$ , est la donnée de deux fonctions,  $\mathbf{F}_0$  qui à tout objet de  $\mathbf{G}_1$  associe un objet de  $\mathbf{G}_2$ , et  $\mathbf{F}_1$  qui à tout morphisme de  $\mathbf{G}_1$  associe un morphisme de  $\mathbf{G}_2$ , de sorte que :

- si  $f : A \rightarrow B$  dans  $\mathbf{G}_1$ , alors  $\mathbf{F}_1(f) : \mathbf{F}_0(A) \rightarrow \mathbf{F}_0(B)$  ;
- $\mathbf{F}_1(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathbf{F}_0}$  ;
- si  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  dans  $\mathbf{G}_1$ , alors  $\mathbf{F}_1(g \circ f) = \mathbf{F}_1(g) \circ \mathbf{F}_1(f)$ .

On notera en général de la même façon  $\mathbf{F}_0$  et  $\mathbf{F}_1$ , par exemple  $\mathbf{F}$ . Un *foncteur* de la catégorie  $\mathbf{C}$  vers la catégorie  $\mathbb{C}$  est un morphisme de graphes de  $\mathbf{C}$  vers  $\mathbb{C}$ . Les foncteurs abondent dans la nature. En voici un lié à notre propos.

**Lemme 12.1.1** *La fonction qui à tout objet  $X$  de **Top** associe  $\mathbf{Cd}(X)$ , muni de sa topologie de Scott, et à tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  associe  $\mathbf{Cd}(f) : \mathbf{Cd}(X) \rightarrow \mathbf{Cd}(Y)$  défini par  $\mathbf{Cd}(f)(\nu) = f[\nu]$ , est un foncteur.*

*Démonstration.* (Voir la définition 4.2.8 pour la notation  $f[\nu]$ .) On doit d'abord vérifier que  $\mathbf{Cd}(f)$  envoie bien toute crédibilité vers une crédibilité : c'est le lemme 4.2.9. Puis, que  $\mathbf{Cd}(f)$  est bien une fonction continue de  $\mathbf{Cd}(X)$  vers  $\mathbf{Cd}(Y)$  : c'est le lemme 4.2.10. On doit ensuite vérifier que  $\mathbf{Cd}(f)(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathbf{Cd}(X)}$ , c'est-à-dire que  $f[\text{id}_X]$  est la fonction identité. Or  $f[\text{id}_X](\nu)(U) = \text{id}_X[\nu](U) = \nu(\text{id}_X^{-1}(U)) = \nu(U)$ , donc  $f[\text{id}_X](\nu) = \nu$ . On doit finalement vérifier que  $\mathbf{Cd}(g) \circ \mathbf{Cd}(f) = \mathbf{Cd}(g \circ f)$  si  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  : or pour tout  $\nu \in \mathbf{Cd}(A)$ , pour tout ouvert  $U$  de  $C$ ,  $[\mathbf{Cd}(g) \circ \mathbf{Cd}(f)](\nu)(U) = \mathbf{Cd}(g)(\mathbf{Cd}(f)(\nu))(U) = g[\mathbf{Cd}(f)(\nu)](U) = \mathbf{Cd}(f)(\nu)(g^{-1}(U)) = f[\nu](g^{-1}(U)) = \nu(f^{-1}(g^{-1}(U))) = \nu((g \circ f)^{-1}(U)) = (g \circ f)[\nu](U) = \mathbf{Cd}(g \circ f)(\nu)(U)$ .  $\square$

On peut définir de même des foncteurs  $\mathbf{Cd}_1, \mathbf{Cd}_{\leq 1}, \mathbf{Cd}_{wk}, \mathbf{Cd}_{1\ wk}, \mathbf{Cd}_{\leq 1\ wk}, \mathbf{J}, \mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{V}, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{Pb}, \mathbf{Pb}_1, \dots, \mathbf{F}, \dots, \mathcal{Q}, \mathcal{H}, \mathcal{H}_u, \mathcal{Pl}, \mathcal{QH}$ . Ceci est laissé en exercice au lecteur.

Tous ces foncteurs vont de **Top** dans **Top**. Un foncteur d'une catégorie  $\mathbf{C}$  dans la même catégorie  $\mathbf{C}$  est appelé un *endofoncteur* de  $\mathbf{C}$ .

### 12.1.2 Monades

Regardons de plus près le foncteur  $\mathcal{Q}$  par exemple. Son action sur les morphismes  $f : A \rightarrow B$  est donnée par  $\mathcal{Q}(f)(Q) = \uparrow f(Q)$ , pour tout compact saturé non vide de  $A$ . Notons que  $f(Q)$  est alors compact, puisque  $f$  est continue, et que  $\uparrow f(Q)$  est donc compact et saturé. Ce foncteur est remarquable en ce qu'il existe :

- une famille de morphismes  $\eta_A : A \rightarrow \mathcal{Q}(A)$ , qui à  $x \in A$  associe le compact finitaire  $\uparrow x \in \mathcal{Q}(A)$  ;
- et une opération d'extension qui produit un morphisme  $f^\dagger : \mathcal{Q}(A) \rightarrow \mathcal{Q}(B)$  à partir de tout morphisme  $f : A \rightarrow B$ , définie par  $f^\dagger(Q) = \bigcup_{x \in Q} f(x)$  ;

vérifiant une série de conditions, que nous détaillerons ci-avant. Notons d'abord que  $f^\dagger$  est bien définie. Le point le plus délicat consiste à vérifier que, pour tout compact saturé  $Q$  de  $A$ ,  $f^\dagger(Q)$  est compact. Soit donc  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $f^\dagger(Q)$  dans  $B$ . C'est aussi un recouvrement ouvert de  $f(x)$  pour tout  $x \in Q$ . Comme  $f(x)$  est compact, il existe un ensemble fini  $I_x$  tel que  $(U_i)_{i \in I_x}$  recouvre déjà  $f(x)$ . Posons  $V_x = \bigcup_{i \in I_x} U_i$ , donc  $f(x) \subseteq V_x$ , c'est-à-dire  $x \in f^{-1}(V_x)$ . La famille des  $(f^{-1}(V_x))_{x \in Q}$  est donc un recouvrement ouvert de  $Q$ . Comme  $Q$  est compact, il existe un ensemble fini  $E$  de points de  $Q$  tel que  $(f^{-1}(V_x))_{x \in E}$  recouvre  $Q$ . Ceci signifie que  $(U_i)_{i \in \bigcup_{x \in E} I_x}$  est un recouvrement fini de  $f^\dagger(Q)$ . Donc  $f^\dagger(Q)$  est compact.

La première propriété remarquable est que  $\eta_A$  est définie sans faire référence à  $A$ . En termes de langages de programmation, et plus précisément en faisant référence au polymorphisme de langages comme ML,  $\eta_A$  est polymorphe en  $A$  : pour calculer  $\eta_A(x)$ , on regarde  $x$ , mais pas l'espace  $A$ . Pour définir la notion par la négative,  $\eta_A(x)$  ne calcule pas en se demandant si  $A$  est compact, ou si  $A$  est fini, ou si  $A$  a telle ou telle autre propriété, pour déterminer comment calculer  $\eta_A(x)$ . Cette propriété porte un nom :  $\eta_A$  est *naturelle* en  $A$ .

Formellement, soient  $F$  et  $G$  deux foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}$ . Une collection de morphismes  $f_A : F(A) \rightarrow G(A)$ , indexée par les objets  $A$  de  $\mathcal{C}$ , est appelée une *transformation* de  $F$  vers  $G$ . (On notera que ceci est encore bien défini lorsque  $F$  et  $G$  ne sont que des fonctions des objets de  $\mathcal{C}$  vers ceux de  $\mathcal{C}$ .) Elle est *naturelle* si et seulement si, pour tout morphisme  $g : A \rightarrow B$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $G(g) \circ f_A = f_B \circ F(g)$ . On dira aussi que  $f_A$  est naturelle *en*  $A$ . Il est pratique d'utiliser une notation diagrammatique, très classique en théorie des catégories, pour représenter cette formule. La naturalité de  $f_A$  est exprimée par le fait que le diagramme de droite *commute*, c'est-à-dire que toute composée de morphismes partant du même objet et arrivant au même objet doit fournir le même morphisme :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & F(A) & \xrightarrow{f_A} & G(A) \\
 \downarrow g & & \downarrow F(g) & & \downarrow G(g) \\
 B & & F(B) & \xrightarrow{f_B} & G(B)
 \end{array}$$

Dans le cas  $f_A = \eta_A$ , le foncteur  $F$  est le foncteur identité ( $F(A) = A$ ,  $F(g) = g$ ), le foncteur  $G$  est  $\mathcal{Q}$ , et la naturalité exprime que si l'on part de  $x \in A$ , que l'on calcule  $\eta_A(x) = \uparrow x \in \mathcal{Q}(A)$  (flèche allant à droite), puis l'image de ce dernier par  $\mathcal{Q}(g)$ , soit  $\uparrow g(\uparrow x) \in \mathcal{Q}(B)$  (en bas), on obtient le même résultat que si commence par appliquer  $g$  à  $x$  puis on applique  $\eta_B$  à  $g(x)$ , donnant  $\uparrow g(x)$ .

Les autres propriétés remarquables de  $\eta$  et de  $_{-}^{\dagger}$  sont :

- $\eta_X^{\dagger} = \text{id}_{\mathcal{Q}(X)}$ . En effet,  $\eta_X^{\dagger}(Q) = \bigcup_{x \in Q} \uparrow x = Q$ .
- Pour tout morphisme  $f : X \rightarrow \mathcal{Q}(Y)$ ,  $f^{\dagger} \circ \eta_X = f$ . En effet,  $f^{\dagger}(\eta_X(x)) = f^{\dagger}(\uparrow x) = \bigcup_{y \in \uparrow x} f(y) = f(x)$ , puisque toute fonction continue  $f$  est croissante pour l'ordre de spécialisation sous-jacent.
- Pour tous morphismes  $f : Y \rightarrow \mathcal{Q}(Z)$  et  $g : X \rightarrow \mathcal{Q}(Y)$ ,  $f^{\dagger} \circ g^{\dagger} = (f^{\dagger} \circ g)^{\dagger}$ . En effet,  $(f^{\dagger} \circ g^{\dagger})(Q) = f^{\dagger}(\bigcup_{x \in Q} g(x)) = \bigcup_{y \in \bigcup_{x \in Q} g(x)} f(y) = \bigcup_{\exists x \in Q, y \in g(x)} f(y) = \bigcup_{x \in Q} \bigcup_{y \in g(x)} f(y)$  alors que  $(f^{\dagger} \circ g)^{\dagger}(Q) = \bigcup_{x \in Q} f^{\dagger}(g(x)) = \bigcup_{x \in Q} \bigcup_{y \in g(x)} f(y)$ .
- Pour tout morphisme  $g : X \rightarrow Y$ ,  $\mathcal{Q}(g) = (\eta_Y \circ g)^{\dagger}$ . En effet,  $(\eta_Y \circ g)^{\dagger}(Q) = \bigcup_{x \in Q} \eta_Y(g(x)) = \bigcup_{x \in Q} \uparrow g(x) = \uparrow g(Q) = \mathcal{Q}(g)(Q)$ .

Ces propriétés s'interprètent intuitivement. Un compact saturé  $Q \in \mathcal{Q}(X)$  est un ensemble de choix  $x \in Q$  pour un adversaire non-déterministe démoniaque  $C$ . Un morphisme  $f : X \rightarrow \mathcal{Q}(Y)$  dénote une relation de transition, qui à chaque état  $X$  associe un ensemble (compact) de successeurs possibles. La fonction  $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{Q}(X)$  code tout élément  $x$  sous forme d'un ensemble de choix qui est essentiellement déterministe. C'est clair lorsque  $X$  est  $T_1$ , c'est-à-dire que son préordre de spécialisation est l'égalité, auquel cas  $\eta_X(x) = \{x\}$  : le seul choix possible est de prendre  $x$  lui-même. (Dans le cas général, le choix inclut aussi tous les éléments  $x'$  tels que  $x \leq x'$ .) Lorsque  $f : X \rightarrow \mathcal{Q}(Y)$ , le morphisme  $f^{\dagger} : \mathcal{Q}(X) \rightarrow \mathcal{Q}(X)$  dit quels seront les choix de  $C$  en partant d'un ensemble  $Q \in \mathcal{Q}(X)$  de possibilités de départ. Ceci sert pour représenter la composition séquentielle : si l'on peut passer de  $X$  à  $Y$  via  $f : X \rightarrow \mathcal{Q}(Y)$ , puis de  $Y$  à  $Z$  via  $g : Y \rightarrow \mathcal{Q}(Z)$ , alors on peut passer de  $X$  à  $Z$  via  $g^{\dagger} \circ f$ , qui calcule d'abord l'ensemble  $f(x)$  des successeurs possibles de  $x \in X$ , puis applique  $g^{\dagger}$  pour trouver tous les successeurs possibles de ces successeurs. À l'opposé,  $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{Q}(X)$  représente la transition "ne rien faire". La propriété  $\eta_X^{\dagger} = \text{id}_{\mathcal{Q}(X)}$  exprime que "ne rien faire" ne change rien à l'ensemble  $Q$  des choix possibles initialement. La propriété  $f^{\dagger} \circ \eta_X = f$  énonce que si l'on ne fait rien dans une première étape, puis que l'on fait un choix selon  $f$ , on obtient la même chose que si l'on fait directement un choix selon  $f$ . La propriété  $f^{\dagger} \circ g^{\dagger} = (f^{\dagger} \circ g)^{\dagger}$  se lit peut-être mieux si l'on considère la formulation équivalente  $f^{\dagger} \circ g^{\dagger} \circ h = (f^{\dagger} \circ g)^{\dagger} \circ h$  (pour tout  $h$ ) : elle énonce que si l'on fait [un choix suivant  $h$ , puis un suivant  $g$ ], puis un suivant  $f$ , on obtient le même résultat que si l'on fait un choix suivant  $h$ , puis [un choix suivant  $g$ , puis un suivant  $f$ ]. Finalement, la propriété  $\mathcal{Q}(g) = (\eta_Y \circ g)^{\dagger}$  définit l'action du foncteur  $\mathcal{Q}$  sur les morphismes  $g : X \rightarrow Y$ . Cette action consiste à convertir  $g$  en une fonction de transition de  $X$  vers  $\mathcal{Q}(Y)$ , puis à l'étendre aux ensembles  $Q \in \mathcal{Q}(X)$  de choix sur  $X$ .

Ce style de structure porte un nom : c'est un *triplet de Kleisli* (Manes, 1976).

**Définition 12.1.2 (Triplet de Kleisli)** *Un triplet de Kleisli sur une catégorie  $\mathcal{C}$  est un triplet  $(T, \eta, _{-}^{\dagger})$ , où  $T$  est une fonction des objets de  $\mathcal{C}$  vers les objets de  $\mathcal{C}$ ,  $\eta$  est une transformation du foncteur identité vers  $T$ , et  $f^{\dagger}$  est un morphisme de  $T(X)$  vers  $T(Y)$  pour tout  $f : X \rightarrow T(Y)$ , tel que :*

1.  $\eta_X^{\dagger} = \text{id}_{T(X)}$  pour tout objet  $X$  ;
2.  $f^{\dagger} \circ \eta_X = f$  pour tout morphisme  $f : X \rightarrow T(Y)$  ;

3.  $f^\dagger \circ g^\dagger = (f^\dagger \circ g)^\dagger$  pour tous morphismes  $f : Y \rightarrow \mathbf{T}(Z)$  et  $g : X \rightarrow \mathbf{T}(Y)$  ;

On notera que l'on ne demande pas, ci-dessus, que  $\mathbf{T}$  soit un endofoncteur, ou que  $\eta$  soit une transformation naturelle. C'est parce que ces deux propriétés sont des conséquences de la définition. Comme suggéré plus haut, on peut étendre  $\mathbf{T}$  en un endofoncteur en posant  $\mathbf{T}(g) = (\eta_Y \circ g)^\dagger$  pour tout  $g : X \rightarrow Y$ . On vérifie que  $\mathbf{T}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}$ , par la propriété 1, et que  $\mathbf{T}(f) \circ \mathbf{T}(g) = \mathbf{T}(f \circ g)$  par les propriétés 3 et 2. Alors  $\eta$  est naturelle, c'est-à-dire  $\mathbf{T}(g) \circ \eta_X = \eta_Y \circ g$  pour tout morphisme  $g : X \rightarrow Y$ , par la propriété 2.

La transformation naturelle  $\eta$  est appelée l'*unité* du triplet de Kleisli.

Étant donné un triplet de Kleisli  $(\mathbf{T}, \eta, \dashv)$ , on peut définir une nouvelle catégorie  $\mathbf{Kleisli}(\mathbf{T})$ , sa *catégorie de Kleisli*, dont les objets sont les mêmes que ceux de  $\mathbf{C}$ , mais dont les morphismes  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  sont les morphismes  $f : X \rightarrow \mathbf{T}(Y)$  de  $\mathbf{C}$ . L'identité  $\text{id}_X$  sur  $X$  dans  $\mathbf{Kleisli}(\mathbf{T})$  est l'unité du triplet  $\bar{\eta}_X$ , et la composition  $\circ'$  dans  $\mathbf{Kleisli}(\mathbf{T})$  est définie par  $\bar{g} \circ' \bar{f} = g^\dagger \circ f$ , pour tous  $f : X \rightarrow \mathbf{T}(Y)$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbf{T}(Z)$  dans  $\mathbf{C}$ .

On peut penser à la catégorie  $\mathbf{Kleisli}(\mathbf{T})$  comme à une catégorie dont les morphismes de  $X$  vers  $Y$  sont des *relations* entre éléments de  $X$  et éléments de  $Y$ , lorsque que les morphismes de  $X$  vers  $Y$  dans  $\mathbf{C}$  sont vus comme des fonctions.

Notons qu'on peut appliquer l'opérateur d'extension à l'identité sur  $\mathbf{T}(X)$ . Le morphisme résultant  $\mu_X = \text{id}_{\mathbf{T}X}^\dagger : \mathbf{T}^2(X) \rightarrow \mathbf{T}(X)$  s'appelle la *multiplication* du triplet de Kleisli. L'interprétation de ce que fait la multiplication n'est pas toujours des plus faciles. Dans le cas  $\mathbf{T} = \Omega$ , la multiplication est l'union distribuée : pour tout compact saturé non vide  $\Omega$  dont les éléments sont des compacts saturés non vides,  $\mu_X(\Omega) = \bigcup_{Q \in \Omega} Q$ . La multiplication a quatre propriétés intéressantes :

- $\mu_X$  est naturelle en  $X$ , c'est-à-dire  $\mathbf{T}(g) \circ \mu_X = \mu_Y \circ \mathbf{T}^2(g)$  pour tout  $g : X \rightarrow Y$  ;
- $\mu_X \circ \eta_{\mathbf{T}(X)} = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}$  (neutre à gauche) ;
- $\mu_X \circ \mathbf{T}(\eta_X) = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}$  (neutre à droite) ;
- $\mu_X \circ \mu_{\mathbf{T}(X)} = \mu_X \circ \mathbf{T}(\mu_X)$  (associativité).

On vérifie la naturalité de  $\mu$  :  $\mathbf{T}(g) \circ \mu_X = (\eta_Y \circ g)^\dagger \circ \text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger = ((\eta_Y \circ g)^\dagger)^\dagger$  par la propriété 3, et  $\mu_Y \circ \mathbf{T}^2(g) = \text{id}_{\mathbf{T}(Y)}^\dagger \circ (\eta_{\mathbf{T}(Y)} \circ (\eta_Y \circ g)^\dagger)^\dagger = (\text{id}_{\mathbf{T}(Y)}^\dagger \circ \eta_{\mathbf{T}(Y)} \circ (\eta_Y \circ g)^\dagger)^\dagger = (\text{id}_{\mathbf{T}(Y)} \circ (\eta_Y \circ g)^\dagger)^\dagger = ((\eta_Y \circ g)^\dagger)^\dagger$  par les propriétés 3, 2. On montre la propriété de neutre à gauche :  $\mu_X \circ \eta_{\mathbf{T}(X)} = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger \circ \eta_{\mathbf{T}(X)} = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}$  par la propriété 2 ; de neutre à droite :  $\mu_X \circ \mathbf{T}(\eta_X) = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger \circ (\eta_{\mathbf{T}(X)} \circ \eta_X)^\dagger = (\text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger \circ \eta_{\mathbf{T}(X)} \circ \eta_X)^\dagger = \eta_X^\dagger = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}$  par les propriétés 3, 2, et 1 ; enfin l'associativité :  $\mu_X \circ \mu_{\mathbf{T}(X)} = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger \circ \text{id}_{\mathbf{T}^2(X)}^\dagger = (\text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger)^\dagger$  par la propriété 3, et  $\mu_X \circ \mathbf{T}(\mu_X) = \text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger \circ (\eta_{\mathbf{T}(X)} \circ \text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger)^\dagger = (\text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger \circ \eta_{\mathbf{T}(X)} \circ \text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger)^\dagger = (\text{id}_{\mathbf{T}(X)}^\dagger)^\dagger$  par les propriétés 3 et 2.

Cette nouvelle structure porte elle aussi un nom :

**Définition 12.1.3 (Monade)** Une monade sur une catégorie  $\mathbf{C}$  est un triplet  $(\mathbf{T}, \eta, \mu)$  formé d'un endofoncteur  $\mathbf{T}$  sur  $\mathbf{C}$ , d'une transformation naturelle  $\eta : \cdot \rightarrow \mathbf{T}(\cdot)$ , et d'une transforma-

tion naturelle  $\mu : T^2(\cdot) \rightarrow T(\cdot)$  tels que les diagrammes suivants commutent :

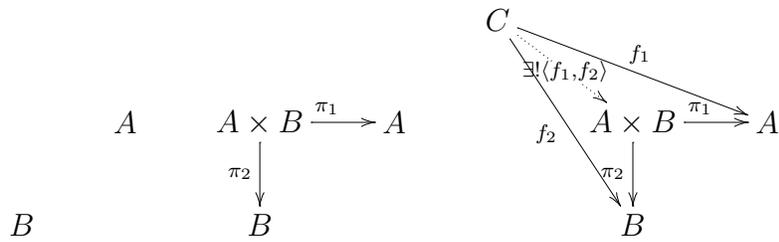
$$\begin{array}{ccc}
 & T(X) & \\
 \text{id}_{T(X)} \nearrow & \uparrow \mu_X & \nwarrow \text{id}_{T(X)} \\
 T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} T^2(X) & \xleftarrow{T(\eta_X)} T(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T^3(X) & \xrightarrow{\mu_{T(X)}} T^2(X) & \\
 T(\mu_X) \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T^2(X) & \xrightarrow{\mu_X} T(X) & 
 \end{array}$$

Il se trouve que monades et triplets de Kleisli sont fondamentalement la même structure. On a vu que tout triplet de Kleisli engendrait une monade. Réciproquement, étant donnée une monade  $(T, \eta, \mu)$ , on peut définir un triplet de Kleisli en posant  $f^\dagger = \mu_Y \circ T(f)$  pour tout  $f : X \rightarrow T(Y)$ . Les vérifications des propriétés des triplets de Kleisli sont laissées en exercice.

### 12.1.3 Limites

La plupart des catégories qui nous intéresseront seront équipées de structures supplémentaires. Un *objet terminal* 1 est un objet tel qu'il existe un unique morphisme  $! : A \rightarrow 1$  de n'importe quel objet  $A$  vers 1. Dans **Top**, les objets terminaux sont les singletons  $\{*\}$ , équipés de l'unique topologie possible. En général, les objets terminaux sont définis à *isomorphisme près*, c'est-à-dire que tout objet isomorphe à un objet terminal est encore terminal, et que deux objets terminaux sont toujours isomorphes. De plus, l'isomorphisme est unique.

Un *produit* de deux objets  $A$  et  $B$  est un objet  $A \times B$  muni de deux morphismes  $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$  et  $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$  (la première et la second projection, respectivement) tels que pour tous morphismes  $f_1 : C \rightarrow A$  et  $f_2 : C \rightarrow B$ , il existe un unique morphisme  $\langle f_1, f_2 \rangle : C \rightarrow A \times B$  tel que  $\pi_1 \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_1$  et  $\pi_2 \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_2$ . L'unicité implique (et est en fait équivalente à) l'équation  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \text{id}_{A \times B}$ . Dans **Top**, un produit est le produit cartésien usuel :  $A \times B$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  avec  $x \in A, y \in B$ , équipé de la topologie produit, engendrée par les produits  $U \times V$  d'ouverts  $U$  de  $A$  et  $V$  de  $B$ . La première projection  $\pi_1$  envoie  $(x, y)$  vers  $x$ ,  $\pi_2$  envoie  $(x, y)$  vers  $y$ , et  $\langle f_1, f_2 \rangle(z) = (f_1(z), f_2(z))$ . Ceci est résumé par le triple diagramme :



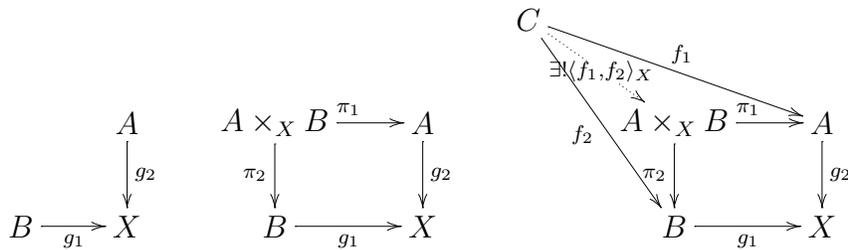
qui se lit comme suit : étant donné juste deux objets (à gauche), l'objet  $A \times B$  existe, ainsi que les deux projections  $\pi_1$  et  $\pi_2$  (diagramme du milieu), de plus dans toute situation dessinée à droite, en ne regardant que les flèches continues, il existe un unique morphisme en pointillés qui rend les triangles ainsi créés commutatifs. Encore une fois, les produits sont uniques à isomorphisme près.

Ces constructions sont des cas particuliers de limites. Soit  $\mathcal{J}$  une catégorie quelconque, typiquement la catégorie libre sur un graph  $\mathcal{G}$ . On peut penser à  $\mathcal{J}$  comme à une forme de diagramme.

Un foncteur  $F$  de  $\mathbf{J}$  vers  $\mathbf{C}$  est un modèle de ce diagramme à l'intérieur de la catégorie  $\mathbf{C}$ . Un cône<sup>1</sup> pour  $F$  est un objet  $A$  de  $\mathbf{C}$ , ainsi qu'une famille de morphismes  $\pi_J$ , un pour chaque objet  $J$  de  $\mathbf{J}$ , tels que pour tout morphisme  $j : J \rightarrow J'$  dans  $\mathbf{J}$ ,  $F(j) \circ \pi_J = \pi_{J'}$ . Une limite  $\lim F$  de  $F$  est un cône universel  $(A, (\pi_J)_{J \text{ objet de } \mathbf{J}})$ , c'est-à-dire un cône tel que pour tout autre cône  $(A', (\pi'_J)_{J \text{ objet de } \mathbf{J}})$ , il existe un unique morphisme  $h : A' \rightarrow A$  dans  $\mathbf{C}$  tel que  $\pi'_J = \pi_J \circ h$  pour tout objet  $J$  de  $\mathbf{J}$ . Cette propriété d'universalité dit en gros que  $A$  est "le plus gros" objet qui soit sommet d'un cône.

Par exemple, les produits de  $A$  et de  $B$  sont obtenus comme les limites de foncteurs  $F$  tels que  $F(*_1) = A$ ,  $F(*_2) = B$ , de la catégorie libre au-dessus du graphe  $\mathbf{G}$  à deux objets  $*_1$  et  $*_2$  et aucun morphisme. Les objets terminaux sont les limites de l'unique foncteur de la catégorie vide vers  $\mathbf{C}$ . Si l'objet terminal et le produit sont uniques à isomorphisme près, c'est parce que c'est en fait le cas pour toute limite. On parlera donc de la limite de  $F$ , par un abus traditionnel de langage, sachant que ceci est à isomorphisme (unique) près.

Si l'on considère la catégorie libre au-dessus du graphe  $*_1 \rightarrow *_2 \leftarrow *_3$ , et le foncteur qui envoie ce graphe vers la situation décrite dans le diagramme de gauche ci-dessous :



alors une limite de ce foncteur est appelé un *produit fibré* ("pullback" en anglais) de  $A$  et de  $B$  au-dessus de  $X$ , et est noté  $A \times_X B$ , les morphismes  $g_1$  et  $g_2$  étant usuellement laissés implicites. Le cône caractéristique est donné dans le diagramme du milieu, et la propriété universelle est donnée par l'existence d'un unique morphisme  $\langle f_1, f_2 \rangle_X$  dans le diagramme de droite. Dans  $\mathbf{Top}$ , le produit fibré canonique est l'espace  $\{(x, y) \in A \times B \mid g_1(x) = g_2(y)\}$ , équipé de la topologie induite par l'inclusion dans  $A \times B$ . Si  $f_1$  et  $f_2$  rendent le diagramme du milieu commutatif, c'est-à-dire si  $f_1(z) = f_2(z)$  pour tout  $z \in C$ , alors  $\langle f_1, f_2 \rangle_X$  est la fonction qui à  $z \in C$  associe  $(f_1(z), f_2(z)) \in A \times_X B$ .

### 12.1.4 Monades monoïdales, commutatives

Supposons que  $\mathbf{C}$  est une catégorie équipée d'un objet terminal et où les produits  $A \times B$  de deux objets  $A$  et  $B$  existent toujours. Étant donnée une monade  $(\mathbf{T}, \eta, \mu)$  sur  $\mathbf{C}$ , un médiateur  $\mathbf{d}_{\dots}$  est une famille de morphismes  $\mathbf{d}_{A,B} : \mathbf{T}A \times \mathbf{T}B \rightarrow \mathbf{T}(A \times B)$  qui est naturelle en ses deux arguments  $A$  et  $B$ , et qui rend les diagrammes suivants commutatifs. On note  $\ell_A : 1 \times A \rightarrow A$  la seconde projection,  $r_A : A \times 1 \rightarrow A$  la première projection, et  $\alpha_{A,B,C} : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$  le morphisme  $\langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle \rangle$ . Ce sont toujours des isos. (Dans  $\mathbf{Top}$ ,  $\ell_A$  envoie  $(*, x)$  vers  $x$ ,  $r_A$  envoie  $(x, *)$  vers  $x$ , et  $\alpha_{A,B,C}$  envoie  $((x, y), z)$  vers  $(x, (y, z))$ .)

<sup>1</sup>Rien à voir avec la notion de cône de la section 2.9.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
1 \times \mathbf{T}B & & \mathbf{T}A \times 1 \\
\eta_1 \times \text{id}_{\mathbf{T}B} \downarrow & \searrow \ell_{\mathbf{T}B} & \text{id}_{\mathbf{T}A} \times \eta_1 \downarrow \\
\mathbf{T}(1) \times \mathbf{T}B & & \mathbf{T}A \times \mathbf{T}1 \\
\mathbf{d}_{1,B} \downarrow & & \mathbf{d}_{A,1} \downarrow \\
\mathbf{T}(1 \times B) \xrightarrow{\mathbf{T}\ell_B} \mathbf{T}B & & \mathbf{T}(A \times 1) \xrightarrow{\mathbf{T}r_A} \mathbf{T}A
\end{array} & & \begin{array}{ccc}
A \times B & \xrightarrow{\eta_A \times \eta_B} & \mathbf{T}A \times \mathbf{T}B \\
& \searrow \eta_{A \times B} & \downarrow \mathbf{d}_{A,B} \\
& & \mathbf{T}(A \times B)
\end{array} \\
(12.1) & & (12.2)
\end{array} \tag{12.3}$$

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbf{T}A \times \mathbf{T}B) \times \mathbf{T}C & \xrightarrow{\mathbf{d}_{A,B} \times \text{id}_{\mathbf{T}C}} & \mathbf{T}(A \times B) \times \mathbf{T}C & \xrightarrow{\mathbf{d}_{A \times B, C}} & \mathbf{T}((A \times B) \times C) \\
\downarrow \alpha_{\mathbf{T}A, \mathbf{T}B, \mathbf{T}C} & & & & \downarrow \mathbf{T}\alpha_{A, B, C} \\
\mathbf{T}A \times (\mathbf{T}B \times \mathbf{T}C) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{T}A} \times \mathbf{d}_{B, C}} & \mathbf{T}A \times \mathbf{T}(B \times C) & \xrightarrow{\mathbf{d}_{A, B \times C}} & \mathbf{T}(A \times (B \times C))
\end{array} \tag{12.4}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{T}^2 A \times \mathbf{T}^2 B & \xrightarrow{\mathbf{d}_{\mathbf{T}A, \mathbf{T}B}} & \mathbf{T}(\mathbf{T}A \times \mathbf{T}B) & \xrightarrow{\mathbf{T}\mathbf{d}_{A, B}} & \mathbf{T}^2(A \times B) \\
\downarrow \mu_A \times \mu_B & & & & \downarrow \mu_{A \times B} \\
\mathbf{T}A \times \mathbf{T}B & \xrightarrow{\mathbf{d}_{A, B}} & \mathbf{T}(A \times B) & & 
\end{array} \tag{12.5}$$

Une monade munie d'un médiateur est appelée une monade *monoïdale*. Par exemple, la monade  $\mathcal{Q}$ , munie du médiateur  $\mathbf{d}_{A,B} : \mathcal{Q}(X) \times \mathcal{Q}(Y) \rightarrow \mathcal{Q}(X \times Y)$  qui à  $(Q_1, Q_2)$  associe  $Q_1 \times Q_2$ , est monoïdale. Le diagramme (12.1) énonce que, pour tout  $Q \in \mathbf{T}B$ ,  $\uparrow \ell_B(\uparrow * \times Q) = Q$ , c'est-à-dire  $\uparrow Q = Q$ . Le diagramme (12.2) exprime une condition symétrique. Le diagramme (12.3) énonce que le médiateur est compatible avec l'unité, ici  $\uparrow x \times \uparrow y = \uparrow(x, y)$ . (12.4) requiert que le médiateur soit compatible avec l'associativité du produit ; ici, que pour tous compacts saturés  $Q_1$  de  $A$ ,  $Q_2$  de  $B$ ,  $Q_3$  de  $C$ , l'image par  $\alpha_{A,B,C}$  de  $(Q_1 \times Q_2) \times Q_3$  coïncide avec  $Q_1 \times (Q_2 \times Q_3)$ . Finalement, (12.5) demande que le médiateur soit compatible avec la multiplication ; ici, que pour tous compacts de compacts  $\mathcal{Q}_1 \in \mathbf{T}^2 A$  et  $\mathcal{Q}_2 \in \mathbf{T}^2 B$ ,  $\bigcup_{Q \in \uparrow\{Q_1 \times Q_2 \mid Q_1 \in \mathcal{Q}_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_2\}} Q = \left(\bigcup_{Q_1 \in \mathcal{Q}_1} Q_1\right) \times \left(\bigcup_{Q_2 \in \mathcal{Q}_2} Q_2\right)$ . (Indication : rappelons que, comme l'ordre sur les espaces de compacts est l'inclusion inverse,  $\uparrow\{Q_1 \times Q_2 \mid Q_1 \in \mathcal{Q}_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_2\}$  est l'ensemble de tous les compacts saturés non vides *inclus* dans un produit  $Q_1 \times Q_2$ , avec  $Q_1 \in \mathcal{Q}_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_2$ .)

En somme,  $\mathcal{Q}$  définit une monade monoïdale sur  $\mathbf{Top}$ .

Une monade *commutative* est une monade monoïdale dont le médiateur est compatible avec le commutateur  $\mathbf{c}_{A,B} : A \times B \rightarrow B \times A$ , défini par  $\mathbf{c}_{A,B} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$ , c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute. (Dans  $\mathbf{Top}$ ,  $\mathbf{c}_{A,B}$  envoie  $(x, y)$  vers  $(y, x)$ .)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{T}A \times \mathbf{T}B & \xrightarrow{\mathbf{d}_{A, B}} & \mathbf{T}(A \times B) \\
\downarrow \mathbf{c}_{\mathbf{T}A, \mathbf{T}B} & & \downarrow \mathbf{T}\mathbf{c}_{A, B} \\
\mathbf{T}B \times \mathbf{T}A & \xrightarrow{\mathbf{d}_{B, A}} & \mathbf{T}(B \times A)
\end{array} \tag{12.6}$$

La monade  $\mathcal{Q}$  est commutative. Le diagramme (12.6) exprime que, partant de  $(Q_1, Q_2)$ , on calcule la même chose en calculant  $Q_1 \times Q_2$  puis en appliquant  $\mathbf{T}\mathbf{c}_{A,B}$ , ce qui donne  $\uparrow$

$\{(y, x) | (x, y) \in Q_1 \times Q_2\} = Q_2 \times Q_1$ , ou en calculant d'abord  $(Q_2, Q_1)$  puis en appliquant  $\mathbf{d}_{B,A}$ , ce qui donne  $Q_2 \times Q_1$ .

Une autre monade commutative est celle,  $\mathbf{V}$ , des valuations continues sur  $\mathbf{Top}$ . L'unité de la monade  $\eta_A$  envoie  $x \in A$  vers la valuation de Dirac  $\delta_x$ . L'extension de  $f : X \rightarrow \mathbf{V}Y$  est calculée par intégration :

$$f^\dagger(\nu)(U) = \int_{x \in X} f(x)(U) d\nu$$

pour tout  $\nu \in \mathbf{V}(X)$ , et tout ouvert  $U$  de  $Y$ . La mesure de l'ouvert  $U$  est calculée en faisant la moyenne le long de  $\nu$  de la mesure de  $U$  par la valuation  $f(x)$ , lorsque  $x$  parcourt tout  $X$ . Le médiateur  $\mathbf{d}_{A,B}$  envoie  $\nu_1 \in \mathbf{V}(A)$  et  $\nu_2 \in \mathbf{V}(B)$  vers la valuation produit  $\nu_1 \otimes \nu_2$ , dont nous avons rappelé la définition à la section 3.8.

Vérifions-le, pour comprendre quelles propriétés sont en jeu. La propriété 1 des triplets de Kleisli est vraie parce que :

$$\eta_X^\dagger(\nu)(U) = \int_{x \in X} \eta_X(x)(U) d\nu = \int_{x \in X} \delta_x(U) d\nu = \int_{x \in X} \chi_U(x) d\nu = \nu(U)$$

La propriété 2 vient de ce que :

$$(f^\dagger \circ \eta_X)(x)(U) = f^\dagger(\delta_x)(U) = \int_{y \in X} f(y)(U) d\delta_x = f(x)(U)$$

c'est-à-dire du fait qu'intégrer une fonction  $g$  par rapport à  $\delta_x$  calcule  $g(x)$ . La propriété 3 est plus complexe. On a d'une part :

$$\begin{aligned} (f^\dagger \circ g^\dagger)(\nu)(U) &= \int_{y \in Y} f(x)(U) dg^\dagger(\nu) \\ (f^\dagger \circ g)^\dagger(\nu)(U) &= \int_{x \in X} f^\dagger(g(x))(U) d\nu = \int_{x \in X} \left( \int_{y \in Y} f(y)(U) dg(x) \right) d\nu \end{aligned}$$

Pour montrer que ces deux quantités sont égales, nous devons comprendre ce que vaut l'intégrale d'une fonction  $h$  par rapport à une extension  $g^\dagger(\nu)$ . On commence par la calculer lorsque  $h$  est une fonction étagée à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , de la forme donnée au lemme 4.1.6, soit  $h = 1/2^K \sum_{k=1}^N \chi_{U_k}$ , avec  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_k$ . On a d'abord :

$$\begin{aligned} \int_{y \in Y} h(y) dg^\dagger(\nu) &= \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^N g^\dagger(\nu)(U_k) = \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^N \int_{x \in X} g(x)(U_k) d\nu \\ &= \int_{x \in X} \frac{1}{2^K} \sum_{k=1}^N g(x)(U_k) d\nu \\ &\quad \text{parce que l'intégration par rapport à une valuation est additive} \\ &= \int_{x \in X} \left( \int_{y \in Y} h(y) dg(x) \right) d\nu \end{aligned}$$

On conclut ensuite par le lemme 4.1.6 pour établir cette égalité pour n'importe quelle fonction continue bornée  $h$ , en particulier pour  $h(y) = f(y)(U)$ . La propriété 3 dépend donc, cruciallement en fait, du fait que l'intégration par rapport à une valuation  $\nu$  est additive (une conséquence facile des propositions 4.3.1 et 4.3.2, par exemple). C'est l'échec de cette propriété dans le cas des jeux, des jeux convexes, des jeux totalement convexes, des jeux concaves, et des jeux totalement concaves, qui est responsable du fait qu'aucun des foncteurs  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_{\leq 1}$ ,  $\mathbf{Cd}$ ,  $\mathbf{Cd}_1$ ,  $\mathbf{Cd}_{\leq 1}$ ,  $\mathbf{Pb}$ ,  $\mathbf{Pb}_1$ ,  $\mathbf{Pb}_{\leq 1}$  entre autres ne donne lieu à une monade. (Noter au passage que l'action du foncteur  $\mathbf{V}$  sur les morphismes  $g : X \rightarrow Y$  est donnée par  $\mathbf{V}(g)(\nu) = (\eta_Y \circ g)^\dagger(\nu) = g[\nu]$ , comme au lemme 12.1.1. La vérification est laissée au lecteur. Nous n'avons donc pas triché en changeant l'action du foncteur sur les morphismes.)

Une autre façon de voir ceci est de se rappeler que la propriété 3 énonce essentiellement l'associativité de la composition séquentielle. C'était le cas pour la monade  $\mathcal{Q}$ . C'est encore le cas pour la monade  $\mathbf{V}$ . Mais ce n'est plus le cas pour les foncteurs de jeux. On peut expliquer ceci en rappelant que la composition séquentielle de deux prévisions colinéaires n'est pas une prévision colinéaire. La composition séquentielle  $f^\dagger \circ g$  de deux fonctions de transitions  $f : Y \rightarrow \mathbf{J}(Z)$  et  $g : X \rightarrow \mathbf{J}(Y)$  fournit elle toujours une fonction de transition de  $X$  vers  $\mathbf{J}(Z)$ . Cette dernière ne fournit donc qu'une approximation de la composition séquentielle obtenue dans le monde des prévisions. Mais cette approximation de composition n'est pas associative.

Passons maintenant à la vérification du fait que  $\mathbf{V}$  est une monade commutative sur  $\mathbf{Top}$ . Le diagramme (12.1) exprime que, en rappelant que  $1 = \{*\}$ , pour tout  $\nu \in \mathbf{TB}$ ,  $\ell_B[\delta_* \otimes \nu] = \nu$ . Le diagramme (12.2) exprime que  $r_A[\nu \otimes \delta_*] = \nu$ . (12.3) énonce que  $\delta_x \otimes \delta_y = \delta_{(x,y)}$ , c'est un cas particulier du lemme 3.8.1. (12.4) énonce l'associativité du produit de valuations :  $\mathbf{V}(\alpha_{A,B,C})((\nu \otimes \nu') \otimes \nu'') = \nu \otimes (\nu' \otimes \nu'')$ . Ceci résulte de l'unicité des valuations produits, et du fait que pour tous ouverts  $U$  de  $A$ ,  $V$  de  $B$ ,  $W$  de  $C$ ,  $((\nu \otimes \nu') \otimes \nu'')((U \times V) \times W) = \nu(U)\nu'(V)\nu''(W) = (\nu \otimes (\nu' \otimes \nu''))(U \times (V \times W))$ . Le diagramme (12.6) est justifié par un argument similaire.

Le diagramme (12.5) est plus complexe à interpréter. Comme souvent en matière de catégories, le plus simple est de raisonner de façon abstraite, sans chercher tout de suite à comprendre ce que l'on calcule. Notons d'abord que pour toute valuation  $\nu \in \mathbf{V}^2(A)$ ,

$$\mu_A(\nu)(U) = \int_{\nu \in \mathbf{V}(A)} \nu(U) d\nu$$

Partant de  $\nu \in \mathbf{V}^2(A)$  et de  $\nu' \in \mathbf{V}^2(B)$ ,  $d_{\mathbf{V}(A), \mathbf{V}(B)}$  fabrique  $\nu \otimes \nu' \in \mathbf{V}^2(A) \times \mathbf{V}^2(B)$ , puis  $\mathbf{V}(d_{A,B})$  l'envoie vers la valuation  $d_{A,B}[\nu \otimes \nu']$ , enfin  $\mu_{A \times B}$  l'envoie vers la valuation sur  $A \times B$  qui à tout ouvert  $W \subseteq A \times B$  associe :

$$\begin{aligned} \int_{\nu'' \in \mathbf{V}(A \times B)} \nu''(W) d d_{A,B}[\nu \otimes \nu'] &= \int_{(\nu, \nu') \in \mathbf{V}(A) \times \mathbf{V}(B)} d_{A,B}(\nu, \nu')(W) d(\nu \otimes \nu') \\ &\quad \text{par le théorème de changement de variables} \\ &\quad \text{(proposition 4.2.11)} \\ &= \int_{(\nu, \nu') \in \mathbf{V}(A) \times \mathbf{V}(B)} (\nu \otimes \nu')(W) d(\nu \otimes \nu') \end{aligned}$$

En particulier, lorsque  $W$  est un ouvert de la forme  $U \times V$ , ceci est égal à :

$$\begin{aligned} \int_{(\nu, \nu') \in \mathbf{V}(A) \times \mathbf{V}(B)} \nu(U) \nu'(V) d(\nu \otimes \nu') &= \int_{\nu \in \mathbf{V}(A)} \nu(U) d\nu \cdot \int_{\nu' \in \mathbf{V}(B)} \nu'(V) d\nu' \\ &= \mu_A(\nu)(U) \cdot \mu_B(\nu')(V) = (\mu_A(\nu) \otimes \mu_B(\nu'))(W) \end{aligned}$$

par le théorème de Jones-Fubini 4.6.2. Par unicité des valuations produits, donc,  $\mu_{(A \times B)}(\mathbf{d}_{A,B}[\nu \otimes \nu']) = \mu_A(\nu) \otimes \mu_B(\nu')$ , c'est-à-dire que le diagramme (12.5) commute. On notera que ceci dépend crucialement de la validité du théorème de Fubini et de l'unicité des valuations produits. Ces deux propriétés sont fausses dans le cas des jeux, des crédibilités et des plausibilités, comme on l'a vu pour la première fois à la section 5.7.

### 12.1.5 Monades fortes, continuations ; catégories cartésiennes closes

Il existe des monades non commutatives, même non monoïdales, mais qui ont quand même un degré suffisant de compatibilité avec la structure des produits de  $\mathbf{C}$ , ce sont les monades *fortes*. Un exemple typique de telles monades sont les monades de *continuations*.

La catégorie  $\mathbf{Top}$  ne fournit pas un exemple de catégorie bien adapté à l'illustration de ces notions. Nous allons donc à la place nous placer dans la catégorie  $\mathbf{Cpo}$  des cpo et des fonctions continues. Pour tous cpo  $X$  et  $Y$ , notons  $\langle X \rightarrow Y \rangle$  l'espace des fonctions continues de  $X$  vers  $Y$ , ordonné par l'ordre point à point :  $f \leq g$  si et seulement si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in X$ . Alors  $\langle X \rightarrow Y \rangle$  est encore un cpo, comme il est aisé de le vérifier. C'est donc un objet de  $\mathbf{Cpo}$ . Mais il y a clairement un rapport entre cet objet et l'ensemble des morphismes de  $X$  vers  $Y$ . D'un point de vue catégorique,  $\langle X \rightarrow Y \rangle$  est ce qu'on appelle un objet *exponentiel*. Il a la particularité qu'il existe :

- un morphisme d'*application*  $\text{App} : \langle X \rightarrow Y \rangle \times X \rightarrow Y$ , à savoir celui qui à  $(f, x)$  associe  $f(x)$  ; notons que  $\text{App}$  est bien une fonction continue, car pour toute famille dirigée de couples  $(f_i, x_i)_{i \in I}$ ,  $\text{App}(\sup_{i \in I} (f_i, x_i)) = \sup_{i \in I} f_i(\sup_{j \in I} x_j) = \sup_{i \in I} \sup_{j \in I} f_i(x_j)$  (car chaque  $f_i$  est continue) =  $\sup_{k \in I} f_k(x_k)$  (en exploitant que la famille est dirigée) =  $\sup_{i \in I} \text{App}(f_i, x_i)$  ;
- pour tout objet  $Z$ , et tout morphisme  $f : Z \times X \rightarrow Y$ , un morphisme  $\Lambda(f) : Z \rightarrow \langle X \rightarrow Y \rangle$  dit de *currification* ; ici,  $\Lambda(f)(z)$  est la fonction qui à  $x$  associe  $f(z, x)$  ; on peut de nouveau vérifier que  $\Lambda(f)$  est définie et continue pour toute fonction continue  $f$  ;

vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & \xrightarrow{\Lambda(f) \times \text{id}_X} & \langle X \rightarrow Y \rangle \times X \\ & \searrow f & \downarrow \text{App} \\ & & Y \end{array} \tag{12.7}$$

pour tout morphisme  $f : Z \times X \rightarrow Y$  (c'est la  $\beta$ -équivalence), et

$$\Lambda \left( Z \times X \xrightarrow{g \times \text{id}_X} \langle X \rightarrow Y \rangle \times X \xrightarrow{\text{App}} Y \right) = g \tag{12.8}$$

pour tout morphisme  $g : Z \rightarrow \langle X \rightarrow Y \rangle$  ( $\eta$ -équivalence). Ceci a un sens dans toute catégorie où tout couple d'objets  $Z, X$  a un produit  $Z \times X$ . La notation  $g_1 \times g_2$ , pour deux morphismes  $g_1$  et  $g_2$ , signifie  $\langle g_1 \circ \pi_1, g_2 \circ \pi_2 \rangle$ . Dans **Cpo** par exemple,  $g_1 \times g_2$  est la fonction qui à  $(x_1, x_2)$  associe  $(g_1(x_1), g_2(x_2))$ .

Une définition plus traditionnelle de l'exponentielle est de requérir l'existence d'un unique morphisme  $\Lambda(f)$  faisant commuter le diagramme (12.7). L'unicité est alors exactement équivalente à la commutation du diagramme (12.8). Comme pour les limites, si un objet exponentiel existe, il est unique à isomorphisme près, et  $\text{App}$  et  $\Lambda(f)$  sont déterminés de façon unique. Une catégorie dans laquelle  $\langle X \rightarrow Y \rangle$  existe pour tous objets  $X$  et  $Y$  est appelée *cartésienne close*.

Nous avons dit plus haut que **Top** ne serait pas une catégorie adéquate pour illustrer les notions de cette section. Le principal défaut de **Top** est qu'elle n'est pas cartésienne close. Disons qu'un objet  $X$  est *exponentiable* dans une catégorie  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $\langle X \rightarrow Y \rangle$  existe pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$ . On sait que les objets exponentiables de **Top** sont les espaces localement relativement compacts (Escardó and Heckmann, 2002). En général, on peut fabriquer de nombreuses sous-catégories **Top<sub>c</sub>** de **Top** qui sont cartésiennes closes, voir Escardó et al. (2004).

**Cpo** est beaucoup plus agréable de ce point de vue, et est cartésienne close.

On peut définir une monade dite de continuations dans toute catégorie cartésienne close. Fixons un objet *Ans*. Dans **Cpo**, *Ans* sera le cpo des *réponses*. L'espace  $\langle X \rightarrow \text{Ans} \rangle$  est appelé espace des *continuations* sur  $X$ .

Alors  $\mathcal{K}_{\text{Ans}}(X) = \langle \langle X \rightarrow \text{Ans} \rangle \rightarrow \text{Ans} \rangle$  définit un foncteur, le foncteur des continuations sur  $X$  à réponses dans *Ans*. L'action sur les morphismes  $f : X \rightarrow Y$  est donnée par  $\mathcal{K}_{\text{Ans}}(f) = \Lambda(\text{App} \circ (\text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Ans}}(X)} \times \Lambda(\text{App} \circ (\text{id}_{\langle Y \rightarrow \text{Ans} \rangle} \times f))))$ . De façon plus explicite, dans **Cpo**,

$$\mathcal{K}_{\text{Ans}}(f) = \lambda F \in \mathcal{K}_{\text{Ans}}(X) \cdot \lambda \kappa \in \langle Y \rightarrow \text{Ans} \rangle \cdot F(\kappa \circ f)$$

Ceci est utilisé en sémantique des langages de programmation. Alors que les sémantiques en style direct permettent de décrire la sémantique d'une expression  $e$  comme une expression  $\llbracket e \rrbracket$  dans un espace  $X$ , les sémantiques en style de passage à la continuation prennent un autre argument  $\kappa \in \langle X \rightarrow \text{Ans} \rangle$ , qui décrit quelle sera la réponse que fournira l'environnement dans lequel s'exécute  $e$  une fois que  $e$  aura terminé. La fonction sémantique prend  $\kappa$  en argument, et  $\llbracket e \rrbracket \kappa$  est alors la réponse de l'environnement dans lequel on calcule  $e$ . On note que  $\llbracket e \rrbracket$  envoie toute continuation  $\kappa$  vers une réponse, et est donc dans  $\langle \langle X \rightarrow \text{Ans} \rangle \rightarrow \text{Ans} \rangle$ .

On a déjà vu des foncteurs similaires. Par exemple,  $\mathbf{P}(X)$  est un espace de fonctionnelles continues de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Ce sont des cas où les réponses fournies par les prévisions sont des valeurs numériques, typiquement un gain effectué à la fin du calcul.

Lorsque  $\text{Ans} = \mathbb{S}$ , l'espace de Sierpiński,  $\kappa$  est un test, un prédicat portant sur la valeur de  $e$ , et  $\llbracket e \rrbracket \kappa \in \mathbb{S}$  est vrai si et seulement si le calcul de  $e$  réussit le test  $\kappa$ . On peut alors remarquer, comme Heckmann (1990, chapitre 19) que l'espace des fonctionnelles continues, linéaires et non triviales  $\mathcal{U}_*(X) = \langle \langle X \rightarrow \mathbb{S} \rangle \xrightarrow{\text{lin}^*} \mathbb{S} \rangle$ , c'est-à-dire des fonctionnelles continues  $F : \langle X \rightarrow \mathbb{S} \rangle \rightarrow \mathbb{S}$  qui préservent les bornes inférieures finies ( $F(\inf_{i=1}^n f_i) = \inf_{i=1}^n F(f_i)$ , où dans le cas  $n = 0$  ceci signifie  $F(\chi_X) = 1$ ) et qui ne sont pas identiquement nulles, est isomorphe à l'espace des filtres Scott-ouverts d'ouverts de  $X$ . En effet, une fonction  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{S} \rangle$  est de la forme  $\chi_U$  pour un unique ouvert  $U$  de  $X$ , d'où un isomorphisme clair entre  $\langle X \rightarrow \mathbb{S} \rangle$  et  $\mathcal{O}(X)$ . Une fonction

Scott-continue de  $\langle X \rightarrow \mathbb{S} \rangle$ , c'est alors un Scott-ouvert d' $\mathcal{O}(X)$ , et une fonction linéaire est un filtre d' $\mathcal{O}(X)$ . Rappelons que, si  $X$  est sobre (par exemple si  $X$  est un cpo continu), l'espace des filtres Scott-ouverts non triviaux d'ouverts est isomorphe à  $\mathcal{Q}(X)$ . Donc  $\mathcal{U}_*(X)$  est isomorphe à  $\mathcal{Q}(X)$  dès que  $X$  est sobre.

Un exemple similaire est celui de l'isomorphisme entre l'espace  $\mathbf{P}_{wk}^\Delta(X)$  des prévisions linéaires continues sur  $X$  et l'espace  $\mathbf{V}_{wk}(X)$  des valuations continues sur  $X$ . C'est l'un des cas du théorème de représentation 11.1.2.

Tous ces foncteurs donnent naissance à des monades. On le montre sur le prototype de ces foncteurs,  $\mathcal{K}_{Ans}$ . Il est remarquable que l'unité et la multiplication de toutes ces monades seront définies par les mêmes formules, aux types des variables près. Pour  $\mathcal{K}_{Ans}$ , on a :

$$\begin{aligned} \eta_X(x) &= \lambda \kappa \in \langle X \rightarrow Ans \rangle \cdot \kappa(x) \quad \text{pour tout } x \in X \\ \mu_X(\mathcal{F}) &= \lambda \kappa \in \langle X \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathcal{K}_{Ans}(X) \cdot F(\kappa)) \quad \text{pour } \mathcal{F} \in \mathcal{K}_{Ans}^2(X) \\ f^\dagger(F) &= \lambda \kappa \in \langle Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda x \in X \cdot f(x)(\kappa)) \\ &\quad \text{pour } f : X \rightarrow \mathcal{K}_{Ans}(Y), F \in \mathcal{K}_{Ans}(X) \end{aligned}$$

Ces formules sont valables dans **Cpo**. Dans une catégorie cartésienne close générale, on devrait écrire :

$$\begin{aligned} \eta_X : X \rightarrow \mathcal{K}_{Ans}(X) &= \Lambda(\mathbf{App} \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle) \\ \mu_X : \mathcal{K}_{Ans}(\mathcal{K}_{Ans}(X)) \rightarrow \mathcal{K}_{Ans}(X) &= \Lambda(\mathbf{App} \circ (\text{id}_{\mathcal{K}_{Ans}(\mathcal{K}_{Ans}(X))} \times \Lambda(\mathbf{App} \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle))) \\ f^\dagger &= \Lambda(\mathbf{App} \circ (\mathcal{K}_{Ans}(f) \times \Lambda(\mathbf{App} \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle))) \\ &\quad \text{pour } f : X \rightarrow \mathcal{K}_{Ans}(Y) \end{aligned}$$

Nous ne raisonnerons pas avec ces dernières formules, qui sont relativement abscones. On notera seulement que, si dans la formule (du groupe supérieur) pour  $f^\dagger(F)$  l'on renomme  $f$  en  $\delta$  et  $\kappa$  en  $f$ , l'on obtient la formule  $\delta^\dagger(F) = \lambda f \cdot F(\lambda x \cdot \delta(x)(f))$ . Ceci est *exactement* la formule définissant la composition séquentielle de  $F$  avec  $\delta$ , voir la définition 11.1.3. Ce n'est pas un hasard. Dans une monade de continuation ou similaire (de filtres Scott-ouverts d'ouverts à la Heckmann, de prévisions continues — basses, hautes, linéaires, peu importe — sauf les prévisions colinéaires, qui ne forment pas une monade), ce sera toujours le cas.

Nous avons dit que les monades de continuations ne seraient pas monoidales en général. Mais elles seront toujours fortes :

**Définition 12.1.4 (Force tensorielle)** Soit  $(\mathbf{T}, \eta, \mu)$  une monade sur  $\mathcal{C}$ . Une force tensorielle pour cette monade est une transformation  $\mathbf{t}_{X,B} : X \times \mathbf{T}B \rightarrow \mathbf{T}(X \times B)$  naturelle en  $X$  et en  $B$ , telle que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc} 1 \times \mathbf{T}Y & \xrightarrow{\mathbf{t}_{1,Y}} & \mathbf{T}(1 \times Y) \\ & \searrow \ell_{\mathbf{T}Y} & \downarrow \mathbf{T}\ell_Y \\ & & \mathbf{T}Y \end{array} \quad (12.9)$$

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\text{id}_X \times \eta_Y} & X \times \mathbf{T}Y \\ & \searrow \eta_{X \times Y} & \downarrow \mathbf{t}_{X,Y} \\ & & \mathbf{T}(X \times Y) \end{array} \quad (12.10)$$

$$\begin{array}{ccc}
(X \times Y) \times \mathbf{T}Z & \xrightarrow{\mathbf{t}_{X \times Y, Z}} & \mathbf{T}((X \times Y) \times Z) \\
\downarrow \alpha_{X, Y, \mathbf{T}Z} & & \downarrow \mathbf{T}\alpha_{X, Y, Z} \\
X \times (Y \times \mathbf{T}Z) & \xrightarrow{\text{id}_X \times \mathbf{t}_{Y, Z}} X \times \mathbf{T}(Y \times Z) \xrightarrow{\mathbf{t}_{X, Y \times Z}} \mathbf{T}(X \times (Y \times Z)) & 
\end{array} \quad (12.11)$$

$$\begin{array}{ccc}
X \times \mathbf{T}^2 Y & \xrightarrow{\mathbf{t}_{X, \mathbf{T}Y}} \mathbf{T}(X \times \mathbf{T}Y) \xrightarrow{\mathbf{T}\mathbf{t}_{X, Y}} \mathbf{T}^2(X \times Y) \\
\text{id}_X \times \mu_Y \downarrow & & \downarrow \mu_{X \times Y} \\
X \times \mathbf{T}Y & \xrightarrow{\mathbf{t}_{X, Y}} & \mathbf{T}(X \times Y)
\end{array} \quad (12.12)$$

Lorsque c'est le cas, on dit que  $(\mathbf{T}, \eta, \mu, \mathbf{t}_{\dots})$  est une monade forte.

On dira, par abus de langage, que  $\mathbf{T}$  elle-même est une monade forte. On vérifie que  $\mathbf{T} = \mathcal{K}_{Ans}$  est une monade forte. La force tensorielle est

$$\mathbf{t}_{X, Y}(x, F) = \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)) \quad \text{pour } x \in X, F \in \mathcal{K}_{Ans}(Y)$$

Nous n'écrivons pas la forme de  $\mathbf{t}_{X, Y}$  dans une catégorie cartésienne close générale, par souci de lisibilité. Le diagramme (12.9) se lit comme suit. On note que  $\ell_Y$  envoie  $(*, y)$  vers  $y$ . Le chemin allant à droite puis en bas envoie  $(*, F)$  vers  $\lambda\kappa \in \langle 1 \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(*, y))$ , puis via  $\mathbf{T}(\ell_Y)$  vers  $\lambda\kappa \in \langle Y \rightarrow Ans \rangle \cdot (\lambda\kappa \in \langle 1 \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(*, y)))(\kappa \circ \ell_Y) = \lambda\kappa \in \langle Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(\ell_Y(*, y))) = \lambda\kappa \in \langle Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(y)) = \lambda\kappa \in \langle Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\kappa) = F = \mathbf{t}_{\mathbf{T}Y}(*, F)$ . Pour le diagramme (12.10), partons de  $(x, y) \in X \times Y$ , si l'on voyage vers la droite, on obtient  $(x, \lambda\kappa \in \langle Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \kappa(y))$ , puis en allant vers le bas on obtient  $\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot (\lambda\kappa \in \langle Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \kappa(y))(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)) = \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \kappa(x, y)$ , ce qui est bien ce qu'on obtient en franchissant la flèche diagonale. Le diagramme (12.11) exprime une autre évidence, la compatibilité entre la force tensorielle et l'associativité  $\alpha_{X, Y, Z}$ , qui à  $((x, y), z)$  associe  $(x, (y, z))$ . En partant de  $((x, y), F)$  (en haut à gauche), la flèche de droite calcule  $\lambda\kappa \in \langle (X \times Y) \times Z \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda z \in Z \cdot \kappa((x, y), z))$ , et  $\mathbf{T}(\alpha_{X, Y, Z})$  l'envoie vers  $\lambda\kappa \in \langle X \times (Y \times Z) \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda z \in Z \cdot \kappa(x, (y, z)))$ . En partant de nouveau de  $((x, y), F)$  mais en suivant la flèche vers le bas, on obtient  $(x, (y, F))$ , puis  $(x, \lambda\kappa \in \langle Y \times Z \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda z \in Z \cdot \kappa(y, z)))$  via  $\text{id}_X \times \mathbf{t}_{Y, Z}$ , puis  $\lambda\kappa \in \langle X \times (Y \times Z) \rightarrow Ans \rangle \cdot (\lambda\kappa \in \langle Y \times Z \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda z \in Z \cdot \kappa(y, z)))(\lambda(y, z) \in Y \times Z \cdot \kappa(x, (y, z))) = \lambda\kappa \in \langle X \times (Y \times Z) \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda z \in Z \cdot \kappa(x, (y, z)))$ . Finalement, vérifions le diagramme (12.12). Partons de  $(x, \mathcal{F}) \in X \times \mathbf{T}^2 Y$ . L'image de ceci par  $\mathbf{t}_{X, \mathbf{T}Y}$  vaut  $\lambda\kappa \in \langle X \times \mathbf{T}Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}Y \cdot \kappa(x, F))$ . Via  $\mathbf{T}\mathbf{t}_{X, Y}$ , on obtient  $\lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot (\lambda\kappa \in \langle X \times \mathbf{T}Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}Y \cdot \kappa(x, F)))(K \circ \mathbf{t}_{X, Y}) = \lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}Y \cdot K(\mathbf{t}_{X, Y}(x, F))) = \lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}Y \cdot K(\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y))))$ .

Ensuite, via la flèche vers le bas  $\mu_{X \times Y}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \\
 & \quad (\lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot \\
 & \quad \quad \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}Y \cdot K(\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)))))) \\
 & \quad (\lambda F \in \mathbf{T}X \cdot F(\kappa)) \\
 = & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \\
 & \quad \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}Y \cdot (\lambda F \in \mathbf{T}X \cdot F(\kappa))(\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)))) \\
 = & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}Y \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)))
 \end{aligned}$$

Repartant de  $(x, \mathcal{F})$ , mais en suivant la flèche  $\text{id}_X \times \mu_Y$  vers le bas, on obtient  $(x, \lambda\kappa \in \langle X \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathcal{K}_{Ans}(X) \cdot F(\kappa)))$ . En appliquant ensuite  $t_{X,Y}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \\
 & \quad (\lambda\kappa \in \langle X \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}X \cdot F(\kappa)))(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)) \\
 = & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(\lambda F \in \mathbf{T}X \cdot F(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)))
 \end{aligned}$$

ce qui est bien identique.

Toute monade monoïdale est forte : on peut toujours définir une force tensorielle  $t_{X,Y}$  à partir d'un médiateur  $d_{X,Y}$  par  $t_{X,Y} = d_{X,Y} \circ (\eta_X \times \text{id}_{\mathbf{T}Y})$ . (On laisse la vérification des équations en exercice.) En fait, toute monade monoïdale est forte de deux façons différentes. On peut définir en effet une *force tensorielle duale*  $t'_{X,Y} = d_{X,Y} \circ (\text{id}_{\mathbf{T}X} \times \eta_Y) : \mathbf{T}X \times Y \rightarrow \mathbf{T}(X \times Y)$ , telle que  $\mathbf{T}c_{Y,X} \circ t'_{Y,X} \circ c_{X,\mathbf{T}Y}$  est une force tensorielle. On appellera en général force tensorielle duale une transformation naturelle  $t'_{X,Y} : \mathbf{T}X \times Y \rightarrow \mathbf{T}(X \times Y)$  vérifiant les symétriques des équations de force tensorielle (définition 12.1.4).

On peut vérifier qu'une force tensorielle  $t$  et une force tensorielle duale  $t'$  définissent un médiateur si et seulement si les deux diagrammes suivants commutent. Le premier exprime que  $t$  et  $t'$  sont compatibles avec l'associativité  $\alpha$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times \mathbf{T}Y) \times Z \xrightarrow{t_{X,Y} \times \text{id}_Z} \mathbf{T}(X \times Y) \times Z \xrightarrow{t'_{X \times Y, Z}} \mathbf{T}((X \times Y) \times Z) & & (12.13) \\
 \alpha_{X, \mathbf{T}Y, Z} \downarrow & & \downarrow \mathbf{T}\alpha_{X, Y, Z} \\
 X \times (\mathbf{T}Y \times Z) \xrightarrow{\text{id}_X \times t'_{Y, Z}} X \times \mathbf{T}(Y \times Z) \xrightarrow{t_{X, Y \times Z}} \mathbf{T}(X \times (Y \times Z)) & & 
 \end{array}$$

Le second exprime que la force tensorielle et la force tensorielle duale commutent, au sens où :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{T}X \times \mathbf{T}Y \xrightarrow{t_{X,Y}} \mathbf{T}(\mathbf{T}X \times Y) & & (12.14) \\
 \downarrow t'_{X, \mathbf{T}Y} & & \downarrow \mathbf{T}t'_{X, Y} \\
 & & \mathbf{T}^2(X \times Y) \\
 & & \downarrow \mu_{X \times Y} \\
 \mathbf{T}(X \times \mathbf{T}Y) \xrightarrow{t_{X,Y}} \mathbf{T}^2(X \times Y) \xrightarrow{\mu_{X \times Y}} \mathbf{T}(X \times Y) & & 
 \end{array}$$

Le médiateur est alors la diagonale commune de  $\mathbf{T}X \times \mathbf{T}Y$  vers  $\mathbf{T}(X \times Y)$ .

Lorsque  $\mathbf{t}'$  est définie par  $\mathbf{t}'_{X,Y} = \mathbf{T}c_{Y,X} \circ \mathbf{t}'_{Y,X} \circ c_{X,\mathbf{T}Y}$ , le diagramme (12.13) commute automatiquement. Mais le diagramme (12.14) peut ne pas commuter. Sans en être une démonstration, regardons ce que signifierait la commutation de ce diagramme pour la monade forte  $\mathbf{T} = \mathcal{K}_{Ans}$ . Notons que dans ce cas,

$$\mathbf{t}'_{X,Y}(F, y) = \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda x \in X \cdot \kappa(x, y)) \quad \text{pour } y \in Y, F \in \mathcal{K}_{Ans}(X)$$

Partant de  $(F, G) \in \mathbf{T}X \times \mathbf{T}Y$ ,  $\mathbf{t}_{\mathbf{T}X, Y}$  produit  $\lambda\kappa \in \langle \mathbf{T}X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot G(\lambda y \in Y \cdot \kappa(F, y))$ .  $\mathbf{T}\mathbf{t}'_{X,Y}$  envoie ensuite ceci vers

$$\begin{aligned} & (\lambda\mathcal{F} \in \mathbf{T}(\mathbf{T}X \times Y) \cdot \lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot \mathcal{F}(K \circ \mathbf{t}'_{X,Y})) \\ & \quad (\lambda\kappa \in \langle \mathbf{T}X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot G(\lambda y \in Y \cdot \kappa(F, y))) \\ = & \lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot (\lambda\kappa \in \langle \mathbf{T}X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot G(\lambda y \in Y \cdot \kappa(F, y)))(K \circ \mathbf{t}'_{X,Y}) \\ = & \lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot G(\lambda y \in Y \cdot K(\mathbf{t}'_{X,Y}(F, y))) \\ = & \lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot \\ & \quad G(\lambda y \in Y \cdot K(\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda x \in X \cdot \kappa(x, y)))) \end{aligned}$$

Enfin,  $\mu_{X \times Y}$  envoie ceci vers :

$$\begin{aligned} & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \\ & \quad (\lambda K \in \langle \mathbf{T}(X \times Y) \rightarrow Ans \rangle \cdot \\ & \quad \quad G(\lambda y \in Y \cdot K(\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda x \in X \cdot \kappa(x, y)))))) \\ & \quad (\lambda F \in \mathbf{T}X \cdot F(\kappa)) \\ = & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot \\ & \quad G(\lambda y \in Y \cdot (\lambda F \in \mathbf{T}X \cdot F(\kappa))(\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda x \in X \cdot \kappa(x, y)))) \\ = & \lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot G(\lambda y \in Y \cdot F(\lambda x \in X \cdot \kappa(x, y))) \end{aligned}$$

On peut vérifier que l'autre chemin de  $\mathbf{T}X \times \mathbf{T}Y$  vers  $\mathbf{T}(X \times Y)$  dans le diagramme (12.14) envoie  $(F, G)$  vers

$$\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot F(\lambda x \in X \cdot G(\lambda y \in Y \cdot \kappa(x, y)))$$

Ces deux formules définissent en général des fonctions différentes. Intuitivement, la première promet d'effectuer les deux calculs  $F$  et  $G$  en commençant par  $G$ , la seconde les fait en commençant par  $F$ . En effet, par exemple,  $\lambda\kappa \in \langle X \times Y \rightarrow Ans \rangle \cdot G(\lambda y \in Y \cdot F(\lambda x \in X \cdot \kappa(x, y)))$  récupère la continuation  $\kappa$ , calcule  $G$  et met son résultat dans la variable  $y$ , puis calcule  $F$  et met son résultat dans  $y$ , et enfin envoie  $(x, y)$  à  $\kappa$ .

La notion de force tensorielle, plus faible que celle de médiateur, est essentiellement ce dont on a besoin pour disposer d'une notion de monade compatible avec une structure cartésienne close. Étant donné une force tensorielle  $\mathbf{t}$ , on peut définir une *force fonctorielle*  $st_{X,Y} : \langle X \rightarrow Y \rangle \rightarrow \langle \mathbf{T}X \rightarrow \mathbf{T}Y \rangle$  par  $st_{X,Y} = \Lambda(\mathbf{T}App \circ \mathbf{t}_{\langle X \rightarrow Y \rangle, X})$ . Alors  $st_{X,Y}$  est naturelle en  $X$  et en  $Y$ , et vérifie quelques autres propriétés, permettant de voir  $(\mathbf{T}, st_{-, -})$  comme un endofoncteur  $\mathcal{C}$ -enrichi sur la catégorie  $\mathcal{C}$  (voir Moggi 1991). La correspondance est bijective, et l'on peut retrouver  $\mathbf{t}_{X,Y}$  à partir de  $st_{X,Y}$ , par  $\mathbf{t}_{X,Y} = App \circ ((st_{Y, X \times Y} \circ \Lambda(id_{X \times Y})) \times id_{\mathbf{T}Y})$ .

### 12.1.6 Monades de prévisions continues

— PARLER DES MONADES DE PRÉVISIONS (HAUTES, BASSES, ENCADREMENTS). MONTRER QU'ELLES SONT FORTES SUR LA CATÉGORIE DES DOMAINES. (LA BONNE NOUVELLE C'EST QUE LES ESPACES DE PRÉVISIONS CORRESPONDANTES SONT DES DOMAINES, ÇA A ÉTÉ DUR À MONTRER, VOIR LA SECTION 11.9. MONADE FORTE AUSSI SUR LES CPO ? PAS SÛR. ET SUR **Top** ? PROBLÈME TYPIQUE DE CONTINUITÉ DE LA FORCE EN SES DEUX ARGUMENTS ; ELLE EST CONTINUE SUR CHACUN SÉPARÉMENT. . . DE TOUTE FAÇON, **Top** N'EST PAS CARTÉSIENNE CLOSE. Y A-T-IL UNE SOUS-CCC **Top<sub>c</sub>** (VOIR ESCARDÓ ET AL. 2004) DANS LAQUELLE LA FORCE EXISTERAIT ?

— AVANT QUE J'OUBLIE, POURQUOI LES DOMAINES (AVEC  $\perp$ , ZUT J'AI OUBLIÉ) SONT UNE CCC. UNE FONCTION EN ESCALIER EST  $[x_i \nearrow y_i]_{i=1}^n$  ENVOIE  $x$  VERS  $\sup_{1 \leq i \leq n, x_i \leq x} y_i$ . ON DEMANDE QUE : (\*) POUR TOUTE PARTIE  $I$  DE  $\{1, \dots, n\}$ , SI  $(x_i)_{i \in I}$  EST MAJORÉE ALORS  $(x_i)_{i \in I}$  AUSSI. C'EST BIEN DÉFINI CAR SOIT IL N'Y A PAS DE  $x_i \leq x$ , ET ÇA DONNE  $\perp$ , SOIT IL Y EN A, TOUS LES  $x_i \leq x$  SONT MAJORÉS PAR  $x$ , DONC TOUS LES  $y_i$  CONCERNÉS AUSSI PAR (\*); COMME ON EST DANS UN DOMAINE, LE SUP DES  $y_i$  CONCERNÉS EXISTE. TOUT  $f : X \rightarrow Y$  EST LIMITE D'UNE FAMILLE DIRIGÉE DE TELLES CHOSES ; À SAVOIR LES  $[x_i \nearrow y_i]_{i=1}^n$  TELS QUE  $y_i \ll f(x_i)$  POUR TOUT  $i$ . LA CONDITION (\*) EST VÉRIFIÉE CAR SI LES  $x_i$ ,  $i \in I$  SONT MAJORÉS PAR  $x$ , ALORS LES  $y_i$ ,  $i \in I$  SONT MAJORÉS PAR  $f(x)$ . DONC SI  $f \ll f'$  C'EST QU'IL EXISTE UNE FONCTION EN ESCALIER ENTRE  $f$  ET  $f'$ . LA RÉCIPROQUE EST STANDARD (UTILISER LE LEMME D'INTERPOLATION À UN MOMENT). DONC L'ESPACE DES FONCTIONS EST UN CPO CONTINU. C'EST UN DOMAINE : TRIVIAL. FINALEMENT, L'APPLICATION EST CONTINUE, CAR ELLE L'EST TOUJOURS POUR UNE TOPOLOGIE DE SCOTT. LA CURRIFICATION PRÉSERVE LA CONTINUITÉ, COMME DANS LES CPO AUSSI.

## 12.2 Le $\lambda$ -calcul monadique

Le  $\lambda$ -calcul monadique est un langage commode permettant de raisonner dans les catégories cartésiennes closes munies d'une monade forte. En même temps, c'est aussi un langage de programmation simple.

Les  $\lambda$ -termes monadiques sont décrits par la grammaire :

$M, N, P ::=$	$x$	variable
	$  MN$	application
	$  \lambda x \cdot M$	abstraction
	$  ()$	uplet vide
	$  (M, N)$	couple
	$  \text{fst } M$	première composante
	$  \text{snd } M$	seconde composante
	$  \text{val } M$	calcul trivial
	$  \text{let val } x = M \text{ in } N$	let-expression

modulo les règles usuelles de  $\alpha$ -renommage, exprimant que l'on peut renommer les variables liées à volonté. Par convention, la variable  $x$  est liée dans  $\lambda x \cdot M$ , avec comme portée le terme  $M$  tout entier ; et la variable  $x$  est liée dans  $\text{let val } x = M \text{ in } N$ , avec comme portée le terme  $N$ . Les règles de  $\alpha$ -renommage décrivent une relation  $\alpha$  définie par :

$$\begin{aligned} \lambda x \cdot M &\alpha \lambda y \cdot (M[x := y]) \\ &\text{si } x \text{ n'est pas liée dans } M \text{ et } y \text{ n'est ni liée ni libre dans } M \\ \text{let val } x = M \text{ in } N &\alpha \text{let val } y = M \text{ in } N[x := y] \\ &\text{si } x \text{ n'est pas liée dans } N \text{ et } y \text{ n'est ni liée ni libre dans } N \end{aligned}$$

Les ensembles  $\text{FV}(M)$  de variables *libres* et  $\text{BV}(M)$  de variables *liées* dans  $M$  sont définies par récurrence structurelle sur  $M$  par :

$$\begin{aligned} \text{FV}(x) &= \{x\} & \text{BV}(x) &= \emptyset \\ \text{FV}(MN) &= \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N) & \text{BV}(MN) &= \text{BV}(M) \cup \text{BV}(N) \\ \text{FV}(\lambda x \cdot M) &= \text{FV}(M) \setminus \{x\} & \text{BV}(\lambda x \cdot M) &= \text{BV}(M) \cup \{x\} \\ \text{FV}(() ) &= \emptyset & \text{BV}(() ) &= \emptyset \\ \text{FV}((M, N)) &= \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N) & \text{BV}((M, N)) &= \text{BV}(M) \cup \text{BV}(N) \\ \text{FV}(\text{fst } M) &= \text{FV}(M) & \text{BV}(\text{fst } M) &= \text{BV}(M) \\ \text{FV}(\text{snd } M) &= \text{FV}(M) & \text{BV}(\text{snd } M) &= \text{BV}(M) \\ \text{FV}(\text{val } M) &= \text{FV}(M) & \text{BV}(\text{val } M) &= \text{BV}(M) \\ \text{FV}(\text{let val } x = M \text{ in } N) &= \text{FV}(M) \cup (\text{FV}(N) \setminus \{x\}) & \text{BV}(\text{let val } x = M \text{ in } N) &= \text{BV}(M) \cup \text{BV}(N) \cup \{x\} \end{aligned}$$

On définit la  $\alpha$ -équivalence  $=_\alpha$  comme la plus petite congruence contenant  $\alpha$ . Une congruence est une relation d'équivalence compatible aux contextes. De façon explicite, si  $M =_\alpha M'$  et  $N =_\alpha N'$ , on demande que  $MN =_\alpha M'N'$ , si  $M =_\alpha M'$  alors  $\lambda x \cdot M =_\alpha \lambda x \cdot M'$ , etc.

On notera, comme il est l'usage, un terme  $M$  pour dénoter sa classe d'équivalence modulo  $=_\alpha$ . On s'autorisera à  $\alpha$ -renommer les termes tacitement. De plus, on fera des récurrences non pas sur la structure de  $M$ , qui n'est pas invariante modulo  $=_\alpha$ , mais sur la *taille*  $|M|$  de  $M$ , qui, elle, l'est : si  $M =_\alpha M'$  alors  $|M| = |M'|$ .

La lecture intuitive des  $\lambda$ -termes monadiques est la suivante : si  $M$  dénote une fonction, alors  $MN$  dénote le résultat de l'application de  $M$  à son argument  $N$  ;  $\lambda x \cdot M$  est la fonction qui à  $x$  associe la valeur de  $M$  (qui dépend en général de  $x$ ) ;  $()$  est le  $n$ -uplet vide, et  $(M, N)$  le couple dont les deux composantes sont  $M$  et  $N$ , tandis que  $\text{fst } M$  extrait la première composante du couple  $M$  et  $\text{snd } M$  en extrait la seconde composante ; les constructions  $\text{val}$  et  $\text{let}$  sont un peu plus compliquées. Typiquement,  $\text{val } M$  fabrique un processus de calcul qui termine trivialement en retournant  $M$  comme valeur. A contrario,  $\text{let val } x = M \text{ in } N$  prend un processus  $M$ , l'exécute, met sa valeur finale dans  $x$ , et continue en évaluant le processus  $N$  (qui dépend en général de  $x$ ).

Une façon de distinguer les rôles des termes : valeurs, fonctions, processus, est d'attribuer des types aux termes. Les *types monadiques* sont :

$\tau ::=$	$\alpha$	types de base
	$u$	type de $()$
	$\tau \times \tau$	produit : type des couples
	$\tau \rightarrow \tau$	types de fonctions
	$T\tau$	types de processus

où  $\alpha$  prend ses valeurs dans un ensemble fixé  $\Sigma$  de types de base.

L'attribution des types aux termes reflète l'intuition. On ne peut pas en général dire qu'un terme  $M$  a un type  $\tau$  dans l'absolu ; par exemple, une variable  $x$  n'a pas de type dans l'absolu. Nous aurons besoin de *contextes* de types  $\Gamma$  pour exprimer les hypothèses que nous faisons sur les types des variables. Un contexte est une liste finie d'*associations*  $x : \tau$  d'un type  $\tau$  à une variable  $x$ , les  $x$  étant deux à deux distinctes dans  $\Gamma$ . On notera  $\Gamma, \Delta$  la concaténation de deux contextes n'ayant aucune variable en commun, et  $x : \tau$  le contexte contenant juste l'association  $x : \tau$ .

On dira alors que le *jugement*  $\Gamma \vdash M : \tau$  est *dérivable* si et seulement si on peut le produire par un nombre fini d'applications des *règles de typage* décrites ci-dessous.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, x : \tau, \Delta \vdash x : \tau} (Var) \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash N : \tau_1}{\Gamma \vdash MN : \tau_2} (App) \qquad \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash M : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot M : \tau_1 \rightarrow \tau_2} (Lam) \\
 \\
 \frac{}{\Gamma \vdash () : u} (Unit) \qquad \frac{\Gamma \vdash M_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash M_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (M_1, M_2) : \tau_1 \times \tau_2} (Pair) \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \text{fst } M : \tau_1} (Fst) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \text{snd } M : \tau_2} (Snd) \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash M : T\tau_1 \quad \Gamma, x : \tau_1 \vdash N : T\tau_2}{\Gamma \vdash \text{let val } x = M \text{ in } N : T\tau_2} (Let) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \text{val } M : T\tau} (Val)
 \end{array}$$

Finalement, les  $\lambda$ -termes monadiques forment un langage de programmation, et l'on peut donc calculer. Le calcul correspond, via la *correspondance de Curry-Howard*, à une opération

de simplification des dérivations de typage. Par exemple, l'une des règles de ce calcul, la règle  $(\beta)$ , transforme toute sous-dérivation de la forme :

$$\frac{\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash M : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot M : \tau_1 \rightarrow \tau_2} (Lam) \quad \frac{\vdots \pi_2}{\Gamma \vdash N : \tau_1} (App)}{\Gamma \vdash (\lambda x \cdot M)N : \tau_2}$$

en la dérivation :

$$\frac{\vdots \pi_1[x := \pi_2]}{\Gamma \vdash M[x := N] : \tau_2}$$

où  $M[x := N]$  désigne le résultat du remplacement de  $x$  par  $N$  dans  $M$ , et  $\pi_1[x := \pi_2]$  désigne la preuve  $\pi_1$  dans laquelle toute instance de la règle  $(Var)$  de la forme  $\Gamma, x : \tau_1, \Delta \vdash x : \tau_1$  est remplacée par une copie  $\pi'_2$  de la preuve  $\pi_2$  (qui dérive  $\Gamma \vdash N : \tau_2$ ) dans laquelle on a ajouté systématiquement à gauche de tout jugement les hypothèses de  $\Delta$  ( $\pi'_2$  a donc pour conclusion  $\Gamma, \Delta \vdash N : \tau_1$ ); et dans laquelle tous les autres jugements  $\Gamma, x : \tau_1, \Delta \vdash P : \tau$  sont remplacés par  $\Gamma, \Delta \vdash P[x := N] : \tau$ .

La notation  $M[x := N]$  est intuitivement bien définie, mais a causé historiquement de nombreuses difficultés de nature formelle. Une définition correcte est de définir une première notion de substitution  $M[x := N]_0$  de la façon évidente lorsque  $x$  est *remplaçable* par  $N$  dans  $M$ , c'est-à-dire lorsque  $x$  n'est pas liée dans  $M$  et aucune variable libre dans  $N$  n'est liée dans  $M$ . Lorsque  $M =_\alpha M'$ ,  $N =_\alpha N'$  et  $x$  est remplaçable par  $N'$  dans  $M'$ , alors on pose  $M[x := N] = M'[x := N']_0$ . Ceci est bien défini, d'une part parce qu'on peut toujours trouver de tels  $M'$  et  $N'$ , d'autre part parce que tous les termes obtenus  $M'[x := N']_0$  sont  $\alpha$ -équivalents.

Par souci de lisibilité, les règles seront écrites en omettant la dérivation de typage et en ne gardant que le jugement qui en est la conclusion. La règle  $(\beta)$  s'écrira donc :

$$\Gamma \vdash (\lambda x \cdot M)N : \tau_2 \rightarrow \Gamma \vdash M[x := N] : \tau_2$$

Toutes les règles s'écriront alors  $\Gamma \vdash M_1 : \tau \rightarrow \Gamma \vdash M_2 : \tau$  pour certains termes  $M_1$  et  $M_2$ , et le même  $\Gamma$  et le même  $\tau$ . Nous écrirons donc ces règles le plus souvent  $M_1 \rightarrow M_2$ . Par exemple, la règle  $(\beta)$  s'écrit  $(\lambda x \cdot M)N \rightarrow M[x := N]$ . La seule écriture  $M_1 \rightarrow M_2$  permettra de retrouver la forme des jugements et des dérivations impliquées sans ambiguïté. Les règles du  $\lambda$ -calcul monadique sont alors les suivantes, écrites en format simplifié (sauf pour  $(P_0)$ , pour laquelle nous avons besoin d'explicitier que le type de  $M$  est  $u$ ) :

$$\begin{array}{ll} (\beta) & (\lambda x \cdot M)N \rightarrow M[x := N] \\ (\eta) & \lambda x \cdot Mx \rightarrow M \quad \text{si } x \notin \text{FV}(M) \\ (P_0) & \Gamma \vdash M : u \rightarrow \Gamma \vdash () : u \\ (P\beta_1) & \text{fst}(M_1, M_2) \rightarrow M_1 \\ (P\beta_2) & \text{snd}(M_1, M_2) \rightarrow M_2 \\ (P\eta) & (\text{fst } M, \text{snd } M) \rightarrow M \\ (T\beta) & \text{let val } x = \text{val } M \text{ in } N \rightarrow N[x := M] \\ (T\eta) & \text{let val } x = M \text{ in val } x \rightarrow M \\ (Ass) & \text{let val } x = (\text{let val } y = M \text{ in } N) \text{ in } P \rightarrow \text{let val } y = M \text{ in let val } x = N \text{ in } P \end{array}$$

Un exercice instructif consiste à montrer que pour toute règle  $M_1 \rightarrow M_2$ , ou plutôt  $\Gamma \vdash M_1 : \tau \rightarrow \Gamma \vdash M_2 : \tau$ , si  $\Gamma \vdash M_1 : \tau$  est dérivable, alors  $\Gamma \vdash M_2 : \tau$  aussi. Ce résultat, appelé *théorème d'auto-réduction*, exprime que le calcul (la réduction) ne change pas le type d'un terme. Si  $M$  doit calculer un entier, et  $M \rightarrow M'$ , alors  $M'$  aussi calculera un entier.

Le lien entre le  $\lambda$ -calcul monadique et les catégories est donné par la sémantique catégorique des  $\lambda$ -termes monadiques. Étant donnée une catégorie  $\mathbf{C}$  cartésienne close, et une monade forte  $(\mathbf{T}, \eta, \mu, \mathbf{t})$  sur  $\mathbf{C}$ , on peut d'abord interpréter tout type  $\tau$  comme un objet de  $\mathbf{C}$ , modulo la donnée d'un environnement de typage  $\rho$ , qui à chaque variable de type  $\alpha \in \Sigma$  associe un objet :

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \rrbracket \rho &= \rho(\alpha) & (12.15) \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \rho &= 1 \\ \llbracket \tau_1 \times \tau_2 \rrbracket \rho &= \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho \times \llbracket \tau_2 \rrbracket \rho \\ \llbracket \tau_1 \rightarrow \tau_2 \rrbracket \rho &= \langle \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho \rightarrow \llbracket \tau_2 \rrbracket \rho \rangle \\ \llbracket T\tau \rrbracket \rho &= \mathbf{T} \llbracket \tau \rrbracket \rho \end{aligned}$$

On peut ensuite étendre cette sémantique aux contextes  $\Gamma$  par :

$$\llbracket x_n : \tau_n, x_{n-1} : \tau_{n-1}, \dots, x_1 : \tau_1 \rrbracket \rho = (\dots((1 \times \llbracket \tau_n \rrbracket \rho) \times \llbracket \tau_{n-1} \rrbracket \rho) \times \dots) \times \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho$$

Notons  $\pi_i$  la projection de  $((\dots(A' \times A_i) \times \dots) \times A_2) \times A_1$  vers  $A_i$ ,  $\Delta$  le morphisme codiagonal  $\langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle$  de  $A$  vers  $A \times A$ . Notons aussi  $f^\dagger$  l'extension de  $f : A \rightarrow \mathbf{T}B$ , c'est-à-dire  $f^\dagger = \mu_B \circ \mathbf{T}f$ . Alors on peut interpréter tout  $\lambda$ -terme monadique  $M$  comme un morphisme dans  $\mathbf{C}$ . Plus précisément, on peut interpréter toute dérivation  $\pi$  d'un jugement de la forme  $\Gamma \vdash M : \tau$  comme un morphisme de  $\llbracket \Gamma \rrbracket \rho$  vers  $\llbracket \tau \rrbracket \rho$  par les clauses suivantes, voir la figure 12.1. Nous avons abrégé  $\pi$  en  $\Gamma \vdash M : \tau$ , voire juste  $M$ , par souci de lisibilité.

On peut démontrer que cette sémantique est *correcte*, quelles que soient la catégorie cartésienne close  $\mathbf{C}$  et la monade forte  $(\mathbf{T}, \eta, \mu, \mathbf{t})$ , au sens où, si  $\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \Gamma \vdash M' : \tau$ , alors  $\llbracket \Gamma \vdash M : \tau \rrbracket \rho = \llbracket \Gamma \vdash M' : \tau \rrbracket \rho$ . Si l'on note  $\equiv$  la relation de *convertibilité*, c'est-à-dire la plus petite relation d'équivalence contenant  $\rightarrow$ , ceci exprime que deux termes convertibles,  $M \equiv N$ , ont la même sémantique :  $\llbracket M \rrbracket \rho = \llbracket N \rrbracket \rho$ .

Cette sémantique est en fait aussi *complète* : il existe une catégorie cartésienne close  $\mathbf{C}$ , une monade forte  $(\mathbf{T}, \eta, \mu, \mathbf{t})$ , et un environnement de typage  $\rho$  tels que si  $\llbracket M \rrbracket \rho = \llbracket N \rrbracket \rho$ , alors  $M \equiv N$ . La construction est ce qu'on appelle un *modèle syntaxique*. Fixons une variable  $x$ . Les objets de  $\mathbf{C}$  sont les types  $\tau$ , et les morphismes de  $\tau_1$  vers  $\tau_2$  sont les classes d'équivalence de termes  $M$  tels que  $x : \tau_1 \vdash M : \tau_2$  soit dérivable, modulo convertibilité  $\equiv$ . L'identité sur  $\tau$  est  $x : \tau \vdash x : \tau$ , la composition est donnée par substitution :  $M \circ N$  est le terme  $M[x := N]$ , à  $\equiv$  près. Le type  $\mathbf{u}$  est un objet terminal, à cause de la règle  $(P_0)$ . Le type  $\tau_1 \times \tau_2$  est un produit de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , avec comme première projection  $x : \tau_1 \times \tau_2 \vdash \text{fst } x : \tau_1$  et comme seconde projection  $x : \tau_1 \times \tau_2 \vdash \text{snd } x : \tau_2$ . Le morphisme  $\langle M, N \rangle$  est juste le couple  $(M, N)$ . L'exponentielle  $\langle \tau_1 \rightarrow \tau_2 \rangle$  est le type  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ , l'application  $\text{App}$  est formée par application syntaxique, à savoir  $x : (\tau_1 \rightarrow \tau_2) \times \tau_1 \vdash \text{fst } x(\text{snd } x) : \tau_2$ , et la curriification  $\Lambda(M)$  de  $x : \tau_1 \times \tau_2 \vdash M : \tau_3$  est  $x : \tau_1 \vdash \lambda y. M[x := (x, y)] : \tau_2 \rightarrow \tau_3$ . L'action de la monade est définie par  $\mathbf{T}(\tau) = T\tau$ . L'unité  $\eta_\tau$  sur  $\tau$  est  $x : \tau \vdash \text{val } x : T\tau$ , et l'extension  $M^\dagger$  de  $x : \tau_1 \vdash M : \tau_2$  est  $x :$

$$\begin{aligned}
\llbracket \Gamma, x : \tau, \Delta \vdash x : \tau \rrbracket \rho &= \pi_i \quad \text{où } |\Delta| = i \\
\llbracket \Gamma \vdash MN : \tau_2 \rrbracket \rho &= \begin{array}{ccc} \llbracket \Gamma \rrbracket \rho & \xrightarrow{\Delta} & \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \times \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \\ & \searrow \llbracket M \rrbracket \rho \times \llbracket N \rrbracket \rho & \\ & \langle \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho \rightarrow \llbracket \tau_2 \rrbracket \rho \rangle \times \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho & \xrightarrow{\text{App}} \llbracket \tau_2 \rrbracket \rho \end{array} \\
\llbracket \Gamma \vdash \lambda x \cdot M : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \rrbracket \rho &= \Lambda \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \times \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho \xrightarrow{\llbracket M \rrbracket \rho} \llbracket \tau_2 \rrbracket \rho \right) \\
\llbracket \Gamma \vdash () : \mathbf{u} \rrbracket \rho &= \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \xrightarrow{!} 1 \\
\llbracket \Gamma \vdash (M, N) : \tau_1 \times \tau_2 \rrbracket \rho &= \langle \llbracket \Gamma \vdash M : \tau_1 \rrbracket \rho, \llbracket \Gamma \vdash N : \tau_2 \rrbracket \rho \rangle \\
\llbracket \Gamma \vdash \text{fst } M : \tau_1 \rrbracket \rho &= \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \xrightarrow{\llbracket M \rrbracket \rho} \llbracket \tau_1 \times \tau_2 \rrbracket \rho \xrightarrow{\pi_1} \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho \\
\llbracket \Gamma \vdash \text{snd } M : \tau_2 \rrbracket \rho &= \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \xrightarrow{\llbracket M \rrbracket \rho} \llbracket \tau_1 \times \tau_2 \rrbracket \rho \xrightarrow{\pi_2} \llbracket \tau_2 \rrbracket \rho \\
\llbracket \Gamma \vdash \text{let val } x = M \text{ in } N : T\tau_2 \rrbracket \rho &= \begin{array}{ccc} \llbracket \Gamma \rrbracket \rho & \xrightarrow{\Delta} & \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \times \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \\ & \searrow \text{id} \times \llbracket M \rrbracket \rho & \\ & \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \times \mathbf{T} \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho & \xrightarrow{\mathbf{t}_{\llbracket \Gamma \rrbracket \rho, \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho}} \mathbf{T} (\llbracket \Gamma \rrbracket \rho \times \llbracket \tau_1 \rrbracket \rho) \\ & \searrow (\llbracket N \rrbracket \rho)^\dagger & \\ & \mathbf{T} \llbracket \tau_2 \rrbracket \rho & \end{array} \\
\llbracket \Gamma \vdash \text{val } M : T\tau \rrbracket \rho &= \llbracket \Gamma \rrbracket \rho \xrightarrow{\llbracket M \rrbracket \rho} \llbracket \tau \rrbracket \rho \xrightarrow{\eta_{\llbracket \tau \rrbracket \rho}} \mathbf{T} \llbracket \tau \rrbracket \rho
\end{aligned}$$

FIG. 12.1 – Sémantique du  $\lambda$ -calcul monadique

$T\tau_1 \vdash \text{let val } y = x \text{ in } (M[x := y])$ . On peut vérifier que  $\eta_X^\dagger \equiv \text{id}_{T(X)}$  (c'est la règle  $(T\eta)$ ), que  $M^\dagger \circ \eta_X \equiv M$  (c'est la règle  $(T\beta)$ ), que  $M^\dagger \circ N^\dagger \equiv (M^\dagger \circ N)^\dagger$  (c'est la règle  $(TAss)$ ), donc  $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\eta}, \_^\dagger)$  est bien un triplet de Kleisli. L'action du foncteur  $\mathbf{T}$  sur  $x : \tau_1 \vdash M : \tau_2$  est  $x : T\tau_1 \vdash \text{let val } y = x \text{ in val}(M[x := y])$ , et la multiplication associée  $\mu_\tau$  est définie comme  $x : TT\tau \vdash \text{let val } y = x \text{ in } y : T\tau$ .

Cette monade, finalement, est forte. La force tensorielle  $t_{\tau_1, \tau_2}$  est donnée par la formule  $x : \tau_1 \times T\tau_2 \vdash \text{let val } y = \text{snd } x \text{ in val}(\text{fst } x, y) : T(\tau_1 \times \tau_2)$ . Vu que  $\ell_Y$  est le terme  $x : 1 \times Y \vdash \text{snd } x : Y$ , l'équation (12.9) énonce que  $(\text{let val } y = x \text{ in val}(\text{snd } y))[x := \text{let val } y = \text{snd } x \text{ in val}(\text{fst } x, y)] \equiv \text{snd } x$ ; modulo  $\alpha$ -conversion, le côté gauche est

$$\begin{aligned} & \text{let val } y = (\text{let val } z = \text{snd } x \text{ in val}(\text{fst } x, z)) \text{ in val}(\text{snd } y) \\ \equiv & \text{let val } z = \text{snd } x \text{ in let val } y = \text{val}(\text{fst } x, z) \text{ in val}(\text{snd } y) \quad (\text{par } (Ass)) \\ \equiv & \text{let val } z = \text{snd } x \text{ in val}(\text{snd }(\text{fst } x, z)) \quad (\text{par } (T\beta)) \\ \equiv & \text{let val } z = \text{snd } x \text{ in val } z \quad (\text{par } (P\beta_2)) \\ \equiv & \text{snd } x \quad \text{par } (T\eta) \end{aligned}$$

L'équation (12.10) exprime que  $\text{let val } y = \text{snd }(\text{fst } x, \text{val}(\text{snd } y)) \text{ in val}(\text{fst } x, y) \equiv \text{val } x$ , une conséquence des règles  $(P\beta_2)$ ,  $(T\eta)$ , et  $(P\eta)$ . L'équation (12.11) exprime que

$$\begin{aligned} & \text{let val } y = (\text{let val } z = \text{snd } x \text{ in val}(\text{fst } x, z)) \text{ in val}(\text{fst }(\text{fst } y), (\text{snd }(\text{fst } y), \text{snd } y)) \\ \equiv & (\text{let val } z = \text{snd }(\text{fst } x, \text{let val } y = \text{snd }(\text{snd } x) \text{ in val}(\text{fst }(\text{snd } x), y)) \text{ in val}(\text{fst } x, z)) \\ & [x := (\text{fst }(\text{fst } x), (\text{snd }(\text{fst } x), \text{snd } x))] \end{aligned}$$

ce que l'on peut vérifier : en utilisant  $(Ass)$ ,  $(T\beta)$ ,  $(P\beta_1)$  et  $(P\beta_2)$  sur le côté gauche, et  $(P\beta_1)$ ,  $(P\beta_2)$ ,  $(Ass)$ ,  $(T\eta)$  sur le côté droit, les deux côtés se réduisent à :

$$\text{let val } z = \text{snd } x \text{ in val}(\text{fst }(\text{fst } x), (\text{snd }(\text{fst } x), z))$$

L'équation (12.12) exprime que

$$\begin{aligned} & \text{let val } y = (\text{let val } z = x \text{ in val}(\text{let val } u = \text{snd } z \text{ in val}(\text{fst } z, u))) \text{ in } y \\ & [x := \text{let val } v = \text{snd } x \text{ in val}(\text{fst } x, v)] \\ \equiv & \text{let val } y = \text{snd }(\text{fst } x, \text{let val } z = \text{snd } x \text{ in } z) \text{ in val}(\text{fst } x, y) \end{aligned}$$

En réduisant par  $(Ass)$ ,  $(T\beta)$ ,  $(P\beta_1)$ ,  $(P\beta_2)$  à gauche et par  $(P\beta_2)$ , et  $(Ass)$  à droite, on obtient en effet le même terme :

$$\text{let val } v = \text{snd } x \text{ in let val } u = v \text{ in val}(\text{fst } x, u)$$

## 12.3 Approximation simpliciale et colinéarité

— ICI, ÇA DEVIENT LE BAZAR. CE SONT DE VIEILLES IDÉES, MAIS JE NE SAIS PAS OÙ ELLES MÈNENT (QUOIQUE : VOIR LE COMMENTAIRE À LA FIN DE LA SECTION 12.4).

Dans le cas fini, c'est encore l'approche géométrique qui va nous éclairer. Posons  $Y = [n]$ , de sorte que les éléments  $f$  de  $\langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  sont les  $(n+1)$ -uplets  $(f(0), f(1), \dots, f(n))$ . Les éléments normalisés par  $\sum_{i=0}^n f(i) = 1$  sont les points du simplexe standard  $\Delta_n$ , et les prévisions colinéaires continues  $F$  (basses, hautes) sont identifiables aux fonctions Scott-continues de  $\Delta_n$  vers  $\mathbb{R}^+$  (concaves, convexes).

Imaginons que  $\delta(x, -)$  soit une prévision colinéaire sur  $Y$  pour tout  $x \in X = [m]$ , et que  $F$  soit une prévision sur  $X$ . Toute prévision colinéaire  $\delta(x, -)$  sur  $Y = [n]$  est déterminée de façon unique par ses valeurs  $F(\underline{I}) \in \mathbb{R}^+$  en chacun des sommets  $\underline{I}$ ,  $I \in \mathbb{P}^*([n])$ , de la subdivision barycentrique  $SD(\Delta_n)$  de  $\Delta_n$ . (Voir la figure 10.3.)

Voyons comment l'on calcule  $F; \delta$ . Soit  $f$  un point de  $\Delta_n$ . Il existe une face maximale (non nécessairement unique) de  $SD(\Delta_n)$  à laquelle  $f$  appartient, disons  $\underline{I}_0 \subset \underline{I}_1 \subset \dots \subset \underline{I}_n$ , c'est-à-dire

$$f = \alpha_0 \underline{I}_0 + \alpha_1 \underline{I}_1 + \dots + \alpha_n \underline{I}_n$$

avec  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ . Alors, puisque  $\delta(x, -)$  est une prévision colinéaire,

$$\delta(x, f) = \alpha_0 \delta(x, \underline{I}_0) + \alpha_1 \delta(x, \underline{I}_1) + \dots + \alpha_n \delta(x, \underline{I}_n)$$

Donc

$$(F; \delta)(f) = F\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_i)\right)$$

Considérons un autre point  $g$  sur la même face  $\underline{I}_0 \subset \underline{I}_1 \subset \dots \subset \underline{I}_n$  que  $f$ ,

$$g = \beta_0 \underline{I}_0 + \beta_1 \underline{I}_1 + \dots + \beta_n \underline{I}_n$$

Alors

$$(F; \delta)(g) = F\left(\sum_{i=0}^n \beta_i \lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_i)\right)$$

Si  $F$  est linéaire sur l'enveloppe convexe des points  $\lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_0), \lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_1), \dots, \lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_n)$  dans  $\Delta_m$ , on a donc

$$\begin{aligned} (F; \delta)(f) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i F(\lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_i)) \\ (F; \delta)(g) &= \sum_{i=0}^n \beta_i F(\lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_i)) \\ (F; \delta)(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=0}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) F(\lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_i)) \end{aligned}$$

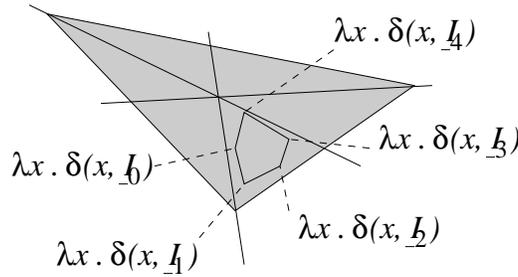


FIG. 12.2 –  $F; \delta$  est linéaire sur un polygone inclus dans une face de  $SD(\Delta_m)$

et donc  $(F; \delta)(\alpha f + \beta g) = \alpha(F; \delta)(f) + \beta(F; \delta)(g)$ . Ceci est par exemple le cas si  $F$  est colinéaire et tous les points  $\lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_0), \lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_1), \dots, \lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_n)$  sont sur la même face de  $SD(\Delta_m)$ , comme en figure 12.2, où  $m = 2$  et  $n = 4$ .

Si l’enveloppe convexe des  $\lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_i), 0 \leq i \leq n$ , n’est pas entièrement contenue dans une face unique de  $\Delta_m$ , la situation est plus compliquée en général. Regardons le cas où chacun des points  $\lambda x \cdot \delta(x, \underline{I}_i)$  est un sommet de  $SD(\Delta_m)$ .

Plus précisément, posons  $m = 2^{n+1} - 2$ , le nombre de sommets de  $SD(\Delta_n)$  moins 1. (Lorsque  $n = 2$ , alors  $m = 6$ . Comme  $\Delta_6$  est difficile à dessiner, nous considérerons comme exemple le cas  $n = 1, m = 2$ .) Pour chaque sommet  $\underline{I}, I \in \mathbb{P}^*([n])$ , de la subdivision barycentrique  $SD(\Delta_n)$ , posons  $\hat{I}$  l’unique fonctionnelle colinéaire telle que  $\hat{I}(\underline{I}) = 1$ , et  $\hat{I}(\underline{J}) = 0$  pour tout  $J \neq I$ . Les éléments  $x$  de  $X = [m]$  peuvent être identifiés avec les  $I \in \mathbb{P}^*([n])$ , par exemple en posant  $x = \ulcorner I \urcorner$ , où  $\ulcorner I \urcorner = \sum_{y \in I} 2^y - 1$ , c’est-à-dire en voyant  $x + 1$  comme l’ensemble  $I$  des positions dans l’écriture en binaire de  $x$  où l’on trouve un 1. Posons  $\delta(I, f) = \hat{I}(f)$ .

Alors  $\lambda I \cdot \delta(I, \underline{I}_i) = \lambda I \cdot \hat{I}(\underline{I}_i)$  est la fonction qui à  $I_i$  associe 1 et à tous les autres  $J \in \mathbb{P}^*([n])$  associe 0. C’est donc le  $(m + 1)$ -uplet ayant un 1 à la position  $\ulcorner I_i \urcorner$ , et des 0 à toutes les autres positions, c’est le sommet numéro  $\ulcorner I_i \urcorner$  de  $\Delta_m$ . Dans le cas  $n = 1, m = 2$ , ceci revient à ce qui est représenté sur la figure 12.3. Intuitivement, on prend  $\Delta_1$ , on ajoute un point au milieu du segment pour obtenir  $SD(\Delta_1)$ , puis on plie le segment en prenant ce nouveau point comme charnière. Ceci fait, on remplit le coin  $\wedge$  obtenu par un triangle, c’est-à-dire un  $\Delta_2$ .

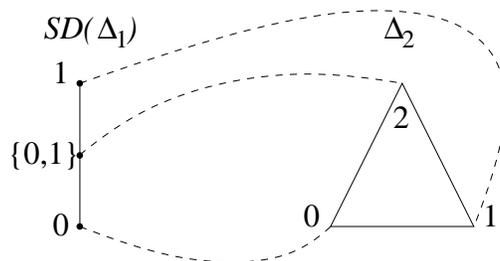


FIG. 12.3 – Repliage de  $SD(\Delta_n)$  sur le bord de  $\Delta_m$  pour  $n = 1, m = 2$

Lorsque  $n = 2, m = 6$ ,  $SD(\Delta_2)$  a 6 faces, que l’on replie sous forme des 6 faces adjacentes à un sommet donné (le centre de  $SD(\Delta_2)$ ) de  $\Delta_6$ . Ceci est bien sûr plus difficile à imaginer,  $\Delta_6$  étant un objet à 6 dimensions, à 7 faces de dimension 5, 21 faces de dimension 4, 35 faces de di-

mension 3, 35 faces de dimension 2, 21 de dimension 1, et 7 sommets de dimension 0. Une façon de projeter  $\Delta_6$  sur un plan, en dimension 2, est de le représenter sous forme du graphe complet à 7 sommets, voir la figure 12.4. On y a indiqué par des courbes pointillées la correspondance entre les sommets de  $SD(\Delta_2)$ , en bas à gauche, et ceux de  $\Delta_6$ , en haut à droite. On a aussi reporté les motifs décorant les faces de  $SD(\Delta_2)$  sur les face correspondantes de  $\Delta_6$  (sauf la face 6, 3, 4 de  $\Delta_6$ , correspondant à  $\{2\} \subset \{0, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$  de  $SD(\Delta_2)$ , et qui est cachée).

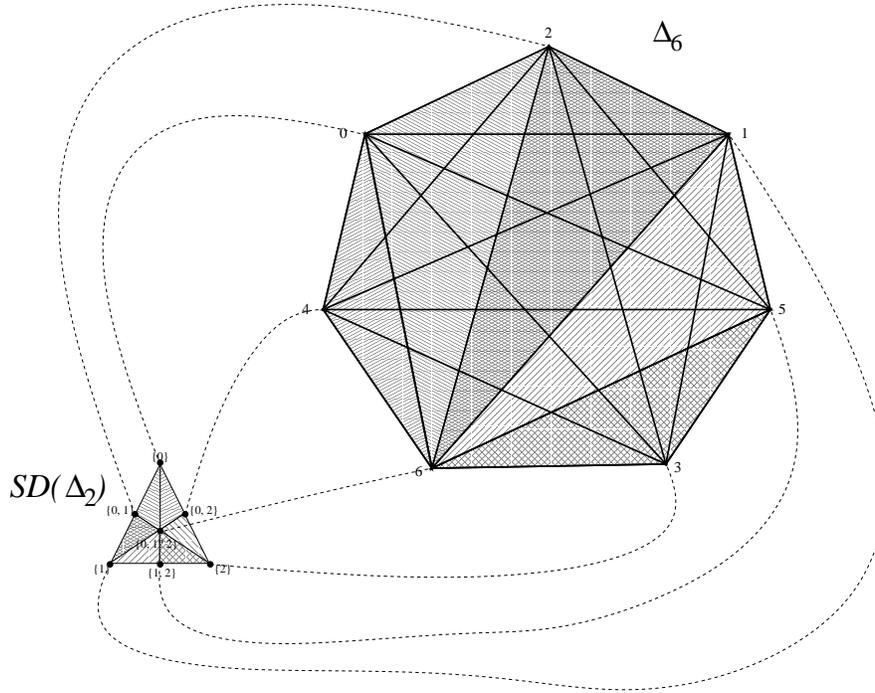


FIG. 12.4 – Repliage de  $SD(\Delta_n)$  sur le bord de  $\Delta_m$  pour  $n = 2, m = 6$

Revenons à  $F; \delta$ . Pour chaque face maximale  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$  de  $\Delta_n$ , les points  $\lambda x \cdot \delta(x, I_i), 0 \leq i \leq n$ , sont donc les sommets de  $\Delta_m, m = 2^{n+1} - 2$ . Si  $F$  est colinéaire sur  $X = [m]$ , elle est linéaire sur chacune des faces maximales de  $SD(\Delta_m)$ . Donc  $F; \delta$  sera linéaire sur chacune des faces de la subdivision barycentrique double  $SD^2(\Delta_n)$ , obtenue en reformant la subdivision barycentrique de chacune des faces maximales de  $SD(\Delta_n)$ . (Voir la figure 12.5 dans le cas  $n = 2$ .)

En somme, le graphe de  $F; \delta$  ressemblera à ce qui est dessiné en figure 12.6.

En général, on peut soupçonner que  $F; \delta_1; \delta_2; \dots; \delta_k$ , où  $F$  est colinéaire sur  $X = [m]$ , où  $n_{k-1} = 2^{n_k+1} - 2, n_{k-2} = 2^{n_{k-1}+1} - 2 = 2^{2^{n_k+1}-1} - 2, \dots, n_1 = 2^{n_2+1} - 2 = 2^{2^{\dots 2^{n_k+1}-1}-1} - 2$ , et  $m = 2^{n_1+1} - 2 = 2^{2^{\dots 2^{n_k+1}-1}-1} - 2$ , et  $\delta_1$  est une prévision colinéaire sur  $Y_1 = [n_1]$ ,  $\delta_2$  est une prévision colinéaire sur  $Y_2 = [n_2], \dots, \delta_k$  est une prévision colinéaire sur  $Y_k = [n_k]$ , sera une fonction linéaire par morceaux, qui seront les faces de la subdivision barycentrique  $SD^{k+1}(\Delta_n)$  itérée  $k + 1$  fois, où  $n = n_k$ .

Ce faisant, et si les  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$ , sont bien choisis, on peut imaginer que  $F; \delta_1; \delta_2; \dots; \delta_k$

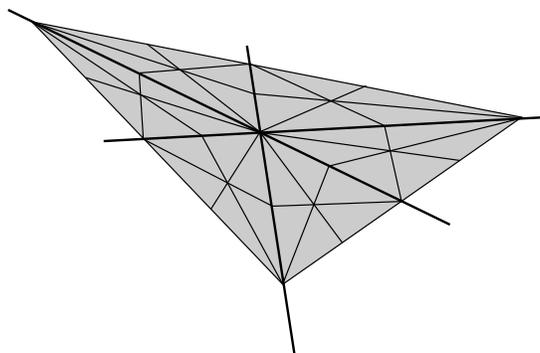


FIG. 12.5 –  $SD^2(\Delta_n)$  dans le cas  $n = 2$

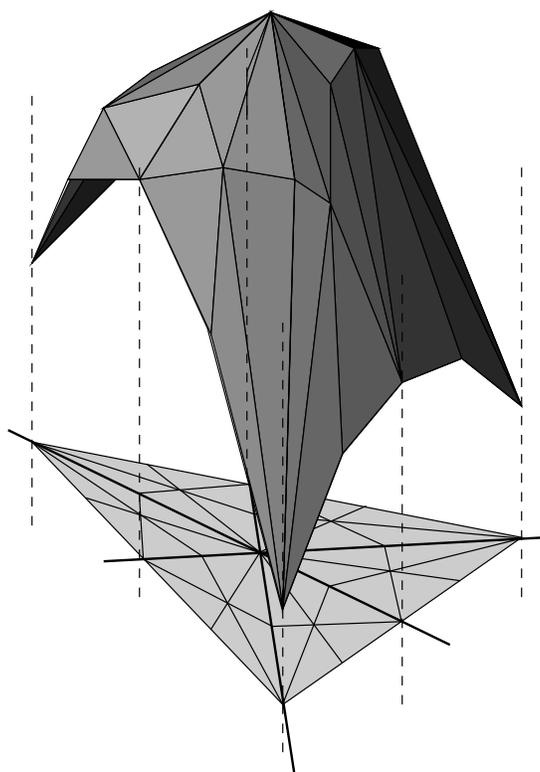


FIG. 12.6 –  $F; \delta$  dans un cas remarquable

convergera lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  vers n'importe quelle fonction  $G$  de  $\Delta_n$  vers  $\mathbb{R}^+$ . Pour être précis, ceci ne sera vrai que si  $G$  est continue en tant que fonction de  $\Delta_n$  muni de sa topologie métrique usuelle vers  $\mathbb{R}^+$  muni lui aussi de sa topologie métrique usuelle. Il suffira de choisir  $\delta_1, \dots, \delta_k$  comme plus haut de sorte que  $G$  et  $F; \delta_1; \delta_2; \dots; \delta_k$  coïncident sur les sommets de  $SD^{k+1}(\Delta_n)$ , et l'on pourra conclure à la convergence, car le diamètre des faces de  $SD^{k+1}(\Delta_n)$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , comme un  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1}$ . C'est la construction fondamentale sous-jacente au *théorème d'approximation simpliciale*, bien connu en topologie algébrique.

La construction géométrique ci-dessus donne l'intuition fondamentale, mais pêche par plusieurs aspects. D'abord, dans les cas qui nous intéressent,  $G$  sera continue de  $\Delta_n$  vers  $\mathbb{R}^+$  muni de sa topologie de Scott, et non de sa topologie métrique. D'autre part,  $G$  sera concave (resp. convexe), ce que nous n'avons pas utilisé, malgré ce que peuvent faire croire les figures. La plus grande infidélité que nous avons faite à la théorie des prévisions est cependant que nous avons considéré  $\delta(I, f) = \hat{I}(f)$ , mais  $\hat{I}$  n'est en général ni convexe ni concave.

Réparons ces défauts, en étudiant l'analogue de  $(F; \delta)(f) = F(\lambda I \in \mathbb{P}^*([n]) \cdot \hat{I}(f))$  lorsque  $\delta(I, f) = \hat{I}(f)$ , ceci dans le cas général où  $X$  n'est plus nécessairement fini. Rappelons le typage utilisé dans les expressions ci-dessus. D'abord,  $f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , et  $\hat{I} \in \mathbf{P}^*(X)$ , d'où  $\hat{I}(f) \in \mathbb{R}^+$ . La fonction  $\lambda I \in \mathbb{P}^*([n]) \cdot \hat{I}(f)$  s'étend en une fonction de  $\mathbf{P}^*(X)$  vers  $\mathbb{R}^+$ , qui à  $G = \sum_I \alpha_I \hat{I}$  associe  $\sum_I \alpha_I \hat{I}(f) = G(f)$ . Ceci s'étend donc en la fonction  $\lambda G \cdot G(f)$ , qui est dans  $\langle \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ .  $F$  peut donc être vue comme une prévision colinéaire sur  $\mathbf{P}(X)$ , et la composition  $F; \delta$  pour le  $\delta$  particulier ci-dessus, que nous noterons  $\mu_X(F)$ , est une prévision, qui n'est pas en général colinéaire, sur  $X$ .

En général, définissons :

**Définition 12.3.1** *Pour toute fonction continue  $h : X \rightarrow Y$ , notons  $\mathbf{P}(h) : \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}(Y)$  la fonction qui à  $F \in \mathbf{P}(X)$  associe  $\lambda f \in \langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot F(f \circ h)$ . Soit  $\eta_X : X \rightarrow \mathbf{P}(X)$  la fonction qui à  $x \in X$  associe  $\lambda f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot f(x)$ . Soit  $\mu_X : \mathbf{P}^2(X) \rightarrow \mathbf{P}(X)$  la fonction qui à  $F \in \mathbf{P}^2(X)$  associe  $\lambda f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot F(\lambda G \in \mathbf{P}(X) \cdot G(f))$ .*

*Pour toute fonction continue  $h : X \rightarrow \mathbf{P}(Y)$ , son extension  $h^\dagger : \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}(Y)$  est  $\mu_Y \circ \mathbf{P}(h)$ , c'est-à-dire :*

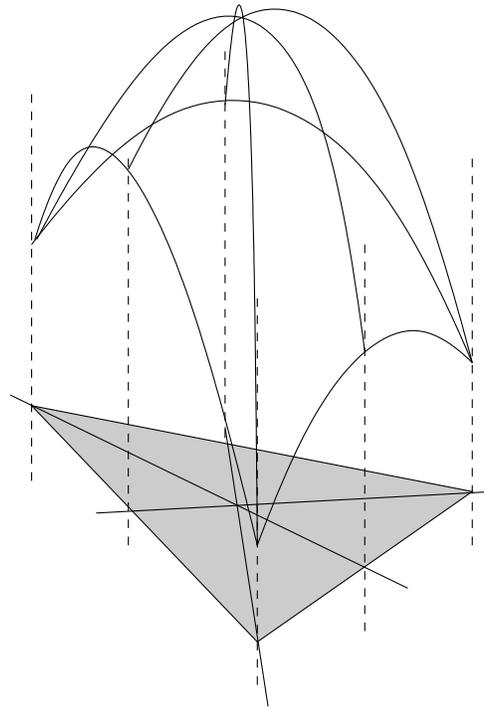
$$h^\dagger(F) = \lambda f \in \langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \cdot F(\lambda x \in X \cdot h(x)(f))$$

*pour tout  $F \in \mathbf{P}(X)$ .*

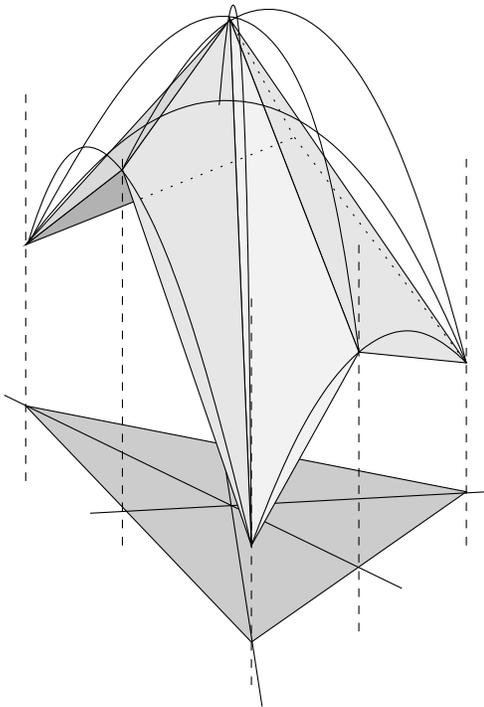
Ceci définit une *monade*.  $\mathbf{P}$  vérifie en effet  $\mathbf{P}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathbf{P}(X)}$  et  $\mathbf{P}(h \circ h') = \mathbf{P}(h) \circ \mathbf{P}(h')$ , c'est donc un *foncteur*. On a d'autre part  $\mu_X \circ \mathbf{P}(\eta_X) = \eta_X^\dagger = \text{id}_{\mathbf{P}(X)}$ ,  $\mu_X \circ \eta_{\mathbf{P}(X)} = \text{id}_{\mathbf{P}(X)}$ , et  $\mu_X \circ \mu_{\mathbf{P}(X)} = \mu_X \circ \mathbf{P}(\mu_X)$ , ce qui sont les trois équations reliant l'unité  $\eta$  à la multiplication  $\mu$  d'une monade. (En toute rigueur, nous devrions vérifier que  $\eta$  et  $\mu$  définissent des transformations naturelles.)

Il est bien connu que ces trois conditions sont équivalentes aux conditions suivantes, qui ne mentionnent cette fois-ci que l'unité  $\eta$  et l'opération d'extension :  $(\eta_X)^\dagger = \text{id}_{\mathbf{P}(X)}$ ; pour tout  $h : X \rightarrow \mathbf{P}(Y)$ ,  $h^\dagger \circ \eta_X = h$ ; pour tous  $h : X \rightarrow \mathbf{P}(Y)$ ,  $h' : Y \rightarrow \mathbf{P}(Z)$ ,  $h'^\dagger \circ h^\dagger = (h'^\dagger \circ h)^\dagger$ .

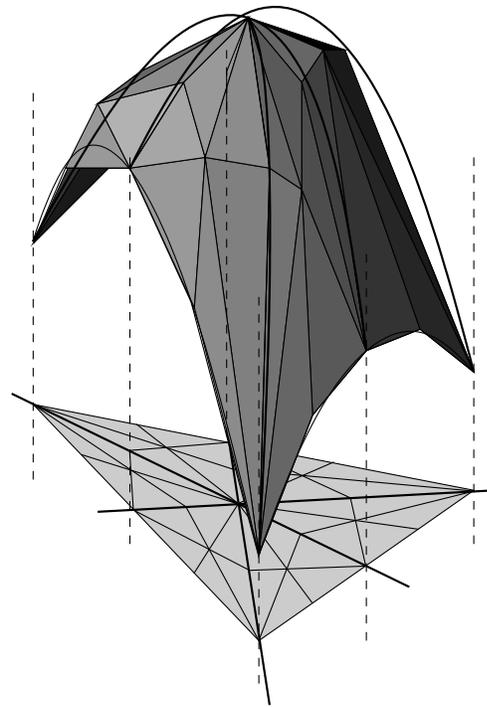
On passe de l'un à l'autre en définissant  $h^\dagger : \mathbf{P}(X) \rightarrow \mathbf{P}(Y)$  comme étant  $\mu_Y \circ \mathbf{P}(h)$ , et réciproquement  $\mu_X = \text{id}_{\mathbf{P}(X)}^\dagger$ . Ceci est, de nouveau, standard.



La fonctionnelle  $F$



Approximation sur  $SD(\Delta_n)$



Approximation sur  $SD^2(\Delta_n)$

FIG. 12.7 – Approximation simpliciale

Ce que nous avons noté  $F; \delta$ , pour  $F \in \mathbf{P}(X)$  et  $\delta : X \times \langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \rightarrow \mathbb{R}^+$  tel que  $\delta(x, -) \in \mathbf{P}(Y)$  pour tout  $x \in X$ , s'écrit  $(\lambda x \cdot \delta(x, -))^\dagger(F)$ . La construction  $\hat{I}$  ci-dessus est le cas particulier où  $\lambda x \cdot \delta(x, -)$  est l'identité de  $\mathbf{P}^*(X)$  vers  $\mathbf{P}(X)$ . Si l'on ignore temporairement la différence entre  $\mathbf{P}^*(X)$  et  $\mathbf{P}(X)$ ,  $F; \delta$  a donc des parentés avec  $\text{id}_{\mathbf{P}(X)}^\dagger(F) = \boldsymbol{\mu}_X(F)$ .

En général,  $F; \delta_1; \dots; \delta_n$  s'écrit  $(\lambda x \cdot \delta_n(x, -))^\dagger[\dots (\lambda x \cdot \delta_1(x, -))^\dagger(F)]$ . Ceci a un sens lorsque  $F \in \mathbf{P}(X_0)$ , et  $\delta_i(x, -) \in \mathbf{P}(X_i)$  pour tout  $x \in X_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Si l'on accepte des espaces d'états  $X_i$  suffisamment gros, à savoir  $X_i$  de la forme  $\mathbf{P}(X_{i-1})$  ou  $\mathbf{P}^*(X_{i-1})$ , on pourra comme ci-dessus regarder le cas plus simple où  $\lambda x \cdot \delta_i(x, -)$  est l'identité. Alors  $F; \delta_1; \dots; \delta_n$  s'écrit  $\boldsymbol{\mu}_{X_{n-1}} \boldsymbol{\mu}_{X_{n-2}} \cdots \boldsymbol{\mu}_{X_0}(F)$ .

Rappelons la question posée au début de la section 12.3 : l'espace  $\mathbf{P}(X)$  des prévisions continues (resp. l'espace  $\nabla \mathbf{P}(X)$  des prévisions basses continues, resp. l'espace  $\Delta \mathbf{P}(X)$  des prévisions hautes continues) est-il le plus petit cpo  $C_X$  qui contienne l'espace  $\mathbf{P}^*(X)$  des prévisions colinéaires continues (resp.  $\nabla \mathbf{P}^*(X)$ ,  $\Delta \mathbf{P}^*(X)$ ) et qui soit stable par composition séquentielle ?

## 12.4 La transformée d'une prévision

**Définition 12.4.1** Soit  $Y$  un espace de jeux continus sur  $X$ , muni de la topologie faible, et contenant le jeu nul et tous les  $a\delta_x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in X$ . Soit  $e$  une bijection croissante de  $\mathbb{R}^-$  sur  $]0, 1]$ . On définit pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $Y$ , la fonction  $[e]_{\mathcal{U}}$  de  $X$  vers  $[0, 1]$  par :

$$[e]_{\mathcal{U}}(x) = \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ \exists U \in \mathcal{O}(X) \cdot \\ x \in U \text{ et} \\ [U > r] \subseteq \mathcal{U}}} e(-r)$$

où la borne supérieure vaut 0 s'il n'existe pas de réel  $r \in \mathbb{R}^+$ , et d'ouvert  $U$  tel que  $x \in U$  et  $[U > r] \subseteq \mathcal{U}$ .

Typiquement,  $e$  sera la fonction exponentielle :  $e(-r) = e^{-r}$ .

**Lemme 12.4.2** Sous les hypothèses de la définition 12.4.1,  $[e]_{\mathcal{U}}$  est une fonction continue de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$ .

*Démonstration.* Lorsque  $t \geq 0$ , l'image réciproque par  $[e]_{\mathcal{U}}$  de l'ouvert  $]t, +\infty[$  est :

$$\begin{aligned} [e]_{\mathcal{U}}^{-1}]t, +\infty[ &= \{x \in X \mid \exists r \in \mathbb{R}^+, U \in \mathcal{O}(X) \cdot x \in U, [U > r] \subseteq \mathcal{U}, e(-r) > t\} \\ &= \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ e(-r) > t \\ U \in \mathcal{O}(X) \\ [U > r] \subseteq \mathcal{U}}} U \end{aligned}$$

C'est une union d'ouverts  $U$  de  $X$ , donc un ouvert. Lorsque  $t < 0$ ,  $[e]_{\mathcal{U}}^{-1}]t, +\infty[$  est  $X$  tout entier, qui est encore ouvert.  $\square$

**Lemme 12.4.3** *Sous les hypothèses de la définition 12.4.1, pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$  et tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $[e]_{[U>r]} = e(-r)\chi_U$ . D'autre part,  $[e]_\emptyset = 0$ , et  $[e]_Y = \chi_X$ .*

*Démonstration.* Par définition,

$$\begin{aligned} [e]_{[U>r]}(x) &= \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}^+ \\ \exists V \in \mathcal{O}(X) \\ x \in V \text{ et} \\ [V>s] \subseteq [U>r]}} e(-s) \\ &= \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}^+ \\ \exists V \in \mathcal{O}(X) \\ x \in V \\ V \subseteq U, s \geq r}} e(-s) \quad \text{par le lemme 8.3.3} \\ &= \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}^+ \\ \exists V \in \mathcal{O}(X) \\ x \in V \\ V \subseteq U}} e(-r) \quad \text{puisque } e \text{ est croissante} \end{aligned}$$

et ceci vaut  $e(-r)$  si  $x \in U$ , et 0 sinon. D'autre part, pour  $s \in \mathbb{R}^+$ ,  $[V > s] \subseteq \emptyset$  si et seulement si  $V = \emptyset$ , sinon  $(s+1)\delta_x$  serait dans  $[V > s]$  pour n'importe quel  $x \in V$ . Donc

$$[e]_\emptyset(x) = \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}^+ \\ \exists V \in \mathcal{O}(X) \\ x \in V \text{ et} \\ V = \emptyset}} e(-s) = 0$$

de par notre convention que la borne supérieure sur une famille vide de réels positifs ou nuls vaut 0. Finalement,

$$[e]_Y(x) = \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}^+ \\ \exists V \in \mathcal{O}(X) \\ x \in V}} e(-s) = 1$$

puisque  $e$  est une bijection sur  $]0, 1]$ . □

On peut généraliser un peu ce lemme en généralisant d'abord le lemme 8.3.3.

**Lemme 12.4.4** *Soit  $Y$  un espace de jeux continus sur  $X$ , muni de la topologie faible, et contenant le jeu nul et tous les  $a\delta_x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in X$ .*

*Soient  $n+1$  ouverts faibles  $[U > r]$ ,  $[V_1 > s_1]$ ,  $\dots$ ,  $[V_n > s_n]$ , où  $U$  est non vide, et supposons que  $V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n$  et  $s_1 \geq \dots \geq s_n \geq 0$ . Alors  $[U > r] \subseteq \bigcup_{i=1}^n [V_i > s_i]$  si et seulement si il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $[U > r] \subseteq [V_i > s_i]$ , c'est-à-dire tel que  $U \subseteq V_i$  et  $r \geq s_i$ .*

*Démonstration.* La direction si est évidente. Réciproquement, supposons  $[U > r] \subseteq \bigcup_{i=1}^n [V_i > s_i]$ .

Fixons  $a > r$ . Pour tout  $y \in U$ ,  $a\delta_y$  est dans  $[U > r]$ , donc il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $a\delta_y \in [V_i > s_i]$ . Comme  $s_i \geq 0$ , ceci implique  $a > s_i$  et  $y \in V_i$ . En particulier, tout  $y \in U$  est dans l'un des  $V_i$ , donc dans  $V_1$ . Donc  $U \subseteq V_1$ . Soit  $i$  l'entier le plus grand,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $U \subseteq V_i$ . Ceci a un sens car  $V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n$ .

Posons  $V_{n+1} = \emptyset$ . Comme  $U$  est non vide, il existe un élément  $y$  de  $U$  qui n'est pas dans  $V_{i+1}$ ; fixons-le. Par le même raisonnement que plus haut, pour tout  $a > r$ , il existe un indice  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tel que  $a > s_j$  et  $y \in V_j$ . Comme  $y \in V_i$  et  $y \notin V_{i+1}$ , nécessairement  $j \leq i$ . Puisque  $s_1 \geq \dots \geq s_n$ ,  $a > s_i$ . Tout  $a > r$  est donc supérieur strictement à  $s_i$ , d'où  $r \geq s_i$ . Puisque  $U \subseteq V_i$  et  $r \geq s_i$ , par le lemme 8.3.3,  $[U > r] \subseteq [V > s_i]$ .  $\square$

**Lemme 12.4.5** *Sous les hypothèses de la définition 12.4.1, pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$  et tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $Y$  de la forme  $\bigcup_{i=1}^n [U_i > r_i]$ , avec  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  et  $r_1 \geq \dots \geq r_n \geq 0$ ,*

$$[e]_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n (e(-r_i) - e(-r_{i-1})) \chi_{U_i}$$

où par extension l'on pose  $r_0 = +\infty$ , ce qui signifie par convention  $e(-r_0) = 0$ .

*Démonstration.* Par calcul :

$$\begin{aligned} [e]_{\mathcal{U}}(x) &= \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ \exists U \in \mathcal{O}(X) \cdot \\ x \in U \text{ et} \\ [U > r] \subseteq \mathcal{U}}} e(-r) \\ &= \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ \exists U \in \mathcal{O}(X) \cdot \\ x \in U \text{ et} \\ \exists i, 1 \leq i \leq n \cdot U \subseteq U_i, r \geq r_i} \subseteq \mathcal{U}} e(-r) \quad \text{par le lemme 12.4.4} \\ &= \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ \exists i, 1 \leq i \leq n \cdot \\ x \in U_i, r \geq r_i} \subseteq \mathcal{U}} e(-r) \end{aligned}$$

Puisque  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$ ,  $r_1 \geq \dots \geq r_n$ , et que  $e$  est croissante, la borne supérieure est atteinte pour  $i$  maximal tel que  $x \in U_i$  et  $r = r_i$ , auquel cas  $[e]_{\mathcal{U}}(x) = e(-r_i)$ ; ou bien  $x$  n'est dans aucun  $U_i$  et  $[e]_{\mathcal{U}}(x) = 0$ . Donc  $[e]_{\mathcal{U}}$  est la fonction étagée qui associe  $e(-r_n)$  aux éléments de  $U_n$ ,  $e(-r_{n-1})$  à ceux de  $U_{n-1} \setminus U_n$ , ...,  $e(-r_1)$  à ceux de  $U_1 \setminus U_2$ , et 0 aux autres. Mais ceci est exactement la fonction  $\sum_{i=1}^n (e(-r_i) - e(-r_{i-1})) \chi_{U_i}$ .  $\square$

On peut donc écrire n'importe quelle fonction étagée à valeurs dans  $[0, 1]$  sous la forme  $[e]_{\mathcal{U}}$ . De plus, on peut demander que  $\mathcal{U}$  soit de la forme spéciale  $\bigcup_{i=1}^n [U_i > r_i]$ , avec  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  et  $r_1 \geq \dots \geq r_n \geq 0$ . De façon explicite, si  $f$  est une fonction étagée  $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i}$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , avec  $U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n \neq \emptyset$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , alors  $a_1 + \dots + a_n \leq 1$ . Soit  $\ell$  ("logarithme") l'inverse de  $e$ . Posons  $r_1 = -\ell(a_1)$ ,  $r_2 = -\ell(a_1 + a_2)$ , ...,  $r_n = -\ell(a_1 + \dots + a_n)$ , et  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^n [U_i > r_i]$ . Alors le lemme 12.4.5 nous indique que  $[e]_{\mathcal{U}} = f$ . Écrivons ceci proprement, en le généralisant aux fonctions non étagées.

**Lemme 12.4.6** *Sous les hypothèses de la définition 12.4.1, soit  $\ell$  la fonction inverse de  $e$ . Pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , définissons  $\langle e \rangle_f$  comme valant l'ouvert faible  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} [f^{-1}t, +\infty[ > -\ell(t)]$ . Alors  $[e]_{\langle e \rangle_f} = f$ .*

*Démonstration.* Commençons par montrer que, pour tout ouvert  $U$  non vide,  $[U > r] \subseteq \langle e \rangle_f$  si et seulement si  $U \subseteq f^{-1}e(-r), +\infty[$ . Si  $U \subseteq f^{-1}e(-r), +\infty[$ , alors pour tout  $\nu \in [U > r]$ , on a  $\nu(U) > r$ , donc  $\nu(f^{-1}e(-r), +\infty[) > r$ , c'est-à-dire  $\nu \in [f^{-1}t, +\infty[ > -\ell(t)]$  pour  $t = e(-r)$ . Réciproquement, si  $[U > r] \subseteq \langle e \rangle_f$ , fixons  $a > r$  et  $y \in U$ . Alors  $a\delta_y$  est dans  $[U > r]$ , donc il existe un réel  $t$  tel que  $a\delta_y \in [f^{-1}t, +\infty[ > -\ell(t)]$ . Ceci revient à dire, puisque  $-\ell(t) \geq 0$ , que  $y \in f^{-1}t, +\infty[$  et  $a > -\ell(t)$ . En faisant varier  $a$ , on obtient  $r \geq -\ell(t)$ , c'est-à-dire  $t \geq e(-r)$ . En faisant varier  $y$ , on obtient  $U \subseteq \bigcup_{t \geq e(-r)} f^{-1}t, +\infty[ = f^{-1}e(-r), +\infty[$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}
 [e]_{\langle e \rangle_f}(x) &= \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ \exists U \in \mathcal{O}(X) \\ x \in U, [U > r] \subseteq \langle e \rangle_f}} e(-r) \\
 &= \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ x \in f^{-1}e(-r), +\infty[}} e(-r) \\
 &= \sup_{\substack{t \in ]0, 1[ \\ x \in f^{-1}t, +\infty[}} t \quad \text{en posant } t = e(-r) \\
 &= \sup_{\substack{t \in ]0, 1[ \\ t < f(x)}} t = f(x)
 \end{aligned}$$

puisque  $f$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ . □

**Fait 12.4.7** Sous les hypothèses de la définition 12.4.1, si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , alors  $[e]_{\mathcal{U}} \leq [e]_{\mathcal{V}}$ .

C'est une conséquence directe de la définition.

**Lemme 12.4.8** Sous les hypothèses de la définition 12.4.1,  $[e]_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}} = \min([e]_{\mathcal{U}}, [e]_{\mathcal{V}})$ .

*Démonstration.* Par le fait 12.4.7,  $[e]_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}} \leq \min([e]_{\mathcal{U}}, [e]_{\mathcal{V}})$ . Pour montrer l'inégalité réciproque, remarquons que  $[U_1 > r_1] \cap [U_2 > r_2] \supseteq [U_1 \cap U_2 > \max(r_1, r_2)]$  par le lemme 8.3.3. Donc, pour tous  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ , si  $x \in U_1$  et  $[U_1 > r_1] \subseteq \mathcal{U}$ , et si  $x \in U_2$  et  $[U_2 > r_2] \subseteq \mathcal{V}$ , alors  $x \in U_1 \cap U_2$ , et  $[U_1 \cap U_2 > \max(r_1, r_2)] \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ . Donc

$$\begin{aligned}
 [e]_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}}(x) &= \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ \exists U \in \mathcal{O}(X) \\ x \in U \text{ et} \\ [U > r] \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}}} e(-r) \\
 &\geq \sup_{\substack{r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X) \\ x \in U_1, x \in U_2 \\ [U_1 > r_1] \subseteq \mathcal{U} \\ [U_2 > r_2] \subseteq \mathcal{V}}} e(-\max(r_1, r_2)) \\
 &= \sup_{\substack{r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X) \\ x \in U_1, x \in U_2 \\ [U_1 > r_1] \subseteq \mathcal{U} \\ [U_2 > r_2] \subseteq \mathcal{V}}} \min(e(-r_1), e(-r_2))
 \end{aligned}$$

S'il existe un ouvert  $U_1$  tel que  $x \in U_1$  et  $[U_1 > r_1] \subseteq \mathcal{U}$ , et s'il existe aussi un ouvert  $U_2$  tel que  $x \in U_2$  et  $[U_2 > r_2] \subseteq \mathcal{V}$ , alors ceci est bien supérieur ou égal à  $\min([e]_{\mathcal{U}}(x), [e]_{\mathcal{V}}(x))$ . Si en revanche, par exemple il n'existe pas d'ouvert  $U_1$  tel que  $x \in U_1$  et  $[U_1 > r_1] \subseteq \mathcal{U}$ , alors ceci est trivialement supérieur ou égal à  $\min([e]_{\mathcal{U}}(x), [e]_{\mathcal{V}}(x))$ , qui est nul.  $\square$

D'autre part, une conséquence triviale du fait 12.4.7 est que :

**Fait 12.4.9** *Sous les hypothèses de la définition 12.4.1,  $[e]_{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}} \geq \max([e]_{\mathcal{U}}, [e]_{\mathcal{V}})$ .*

Nous pouvons maintenant définir la transformée d'une prévision quelconque.

**Définition 12.4.10 (Transformée en  $e$ )** *Soit  $Y$  un espace de jeux continus sur  $X$ , muni de la topologie faible, et contenant le jeu nul et tous les  $a\delta_x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in X$ . Soit  $e$  une bijection croissante de  $\mathbb{R}^-$  sur  $]0, 1]$ .*

*Pour toute fonctionnelle  $F$  de  $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$  vers  $\mathbb{R}^+$ , on pose  $e \otimes F$  la fonction qui à tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $Y$  associe  $F([e]_{\mathcal{U}})$ .*

**Lemme 12.4.11** *Sous les hypothèses de la définition 12.4.10, si  $F$  est une prévision sur  $X$ , alors  $e \otimes F$  est un jeu sur  $Y$  tel que  $(e \otimes F)(\langle e \rangle_f) = F(f)$  pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . Si  $F$  est  $\leq$ -convexe (ou pessimiste), alors  $e \otimes F$  est un jeu convexe. Si  $F$  est totalement  $\leq$ -convexe (ou démoniaque, ou linéaire), alors  $e \otimes F$  est une crédibilité. Si  $F$  est sous-normalisée, resp. normalisée, alors  $\nu$  aussi.*

*Démonstration.* D'abord,  $e \otimes F$  est monotone : si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , alors  $[e]_{\mathcal{U}} \leq [e]_{\mathcal{V}}$  par le fait 12.4.7, et l'on conclut car  $F$  est croissante. Pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , de plus,  $(e \otimes F)(\langle e \rangle_f) = F([e]_{\langle e \rangle_f}) = F(f)$  par le lemme 12.4.6.

Si  $F$  est  $\leq$ -convexe (voir la définition 10.4.1), alors

$$\begin{aligned} (e \otimes F)(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) + (e \otimes F)(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) &= F([e]_{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}}) + F([e]_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}}) \\ &\geq F(\max([e]_{\mathcal{U}}, [e]_{\mathcal{V}})) + F(\min([e]_{\mathcal{U}}, [e]_{\mathcal{V}})) \\ &\quad \text{par le fait 12.4.9 et le lemme 12.4.8} \\ &\geq F([e]_{\mathcal{U}}) + F([e]_{\mathcal{V}}) \quad \text{puisque } F \text{ est } \leq\text{-convexe} \\ &= (e \otimes F)(\mathcal{U}) + (e \otimes F)(\mathcal{V}) \end{aligned}$$

Si  $F$  est totalement  $\leq$ -convexe, alors pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} (e \otimes F) \left( \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i \right) &\geq F \left( \max_{i=1}^n [e]_{\mathcal{U}_i} \right) \quad \text{par le fait 12.4.9} \\ &\geq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} F(\min_{i \in I} [e]_{\mathcal{U}_i}) \\ &\quad \text{puisque } F \text{ est totalement } \leq\text{-convexe} \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} (e \otimes F) \left( \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) \quad \text{par le lemme 12.4.8} \end{aligned}$$

Finalement,  $(e \otimes F)(Y) = F([e]_Y) = F(\chi_X)$  par le lemme 12.4.3, et ceci vaut au plus 1 si  $F$  est sous-normalisée, et exactement 1 si  $F$  est normalisée.  $\square$

Le contenu du dernier lemme est que l'on peut retrouver la prévision  $F$  complètement à partir de la donnée de sa transformée  $e \otimes F$  : pour calculer  $F(f)$ , il suffit de calculer  $(e \otimes F)(\langle e \rangle_f)$ .

Le jeu  $e \otimes F$  donne lieu à un jeu sur  $Y$ , et  $Y$  est pratiquement n'importe quel espace de jeux, par exemple  $\mathbf{J}_{wk}(X)$ ,  $\mathbf{J}_{\leq 1 wk}(X)$  si  $F$  est sous-normalisée, ou  $\mathbf{J}_{1 wk}(X)$  si  $F$  est normalisée. Il donne donc naissance à une prévision colinéaire (sous-normalisée si  $F$  l'est, normalisée si  $F$  l'est) sur l'espace  $Y$ , à savoir  $\alpha_e(e \otimes F)$ .

Il est donc sensé d'évaluer  $\mu_X(\alpha_e(e \otimes F))$ , où  $\mu_X$  est la multiplication de la monade des prévisions (resp. sous-normalisées, resp. normalisées).

— À FINIR DE RÉDIGER. (J'AI LA PREUVE COMPLÈTE, MAIS ELLE N'EST PAS RÉDIGÉE. . . ) LE RÉSULTAT C'EST QUE COMME POUR L'APPROXIMATION SIMPLICIALE, ON PEUT APPROCHER AUSSI PRÈS QU'ON VEUT N'IMPORTE QUELLE PRÉVISION BASSE CONTINUE NORMALISÉE PAR UNE MULTIPLICATION ITÉRÉE D'UNE PRÉVISION BASSE CONTINUE NORMALISÉE *colinéaire*. LE GROS DU TRAVAIL EST DE MONTRER DES MAJORATIONS ET DES MINORATIONS, ASSEZ DIFFICILES MA FOI. . .



# **Cinquième partie**

## **Annexes**



# Solutions des exercices

▷ **2.1.**  $X$  n'est pas un cpo continu, parce qu'aucun élément n'est bien en-dessous de  $\omega$ . Soit en effet  $x \in X$ , et supposons  $x \ll \omega$ . À symétrie près, on peut supposer que  $x \in \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ . Or la suite  $0^*, 1^*, 2^*, \dots$  a  $\omega$  pour borne supérieure, mais aucun élément de la suite n'est supérieur ou égal à  $x$ . Puisqu'aucun élément n'est bien en-dessous de  $\omega$ , en particulier  $\omega$  n'est pas la borne supérieure des éléments qui sont bien en-dessous de lui.  $\square$

▷ **3.1.** La direction seulement si est évidente. Montrons la direction si. Nous devons montrer que de tout recouvrement ouvert  $(V_k)_{k \in K}$  de  $V$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini. Nous disposons de l'hypothèse, notons-la (H), selon laquelle c'est déjà vrai si tous les  $V_k$  proviennent de la famille  $B$ .

Pour tout  $k \in K$ ,  $V_k$  s'écrit  $\bigcup_{i \in I_k} \bigcap_{j \in J_i} V_{ij}$ , où tous les  $V_{ij}$  sont dans  $B$ , et chaque  $J_i$  est fini. On suppose ici que les familles  $I_k$  sont deux à deux disjointes, ce qui nous permet de choisir  $J_i$  et  $V_{ij}$  indépendants de  $k \in K$ , et allège un peu la notation. L'union  $\bigcup_{k \in K} V_k$  s'écrit alors  $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} V_{ij}$ , avec  $I = \bigcup_{k \in K} I_k$ .

Considérons l'ensemble  $\mathcal{J} = \prod_{i \in I} J_i$ . Les éléments de  $\mathcal{J}$  sont les fonctions qui à chaque  $i \in I$  associent un élément  $j \in J_i$ .  $V$  est inclus dans  $\bigcup_{k \in K} V_k = \bigcap_{f \in \mathcal{J}} \bigcup_{i \in I} V_{if(i)}$ . En particulier, pour tout  $f \in \mathcal{J}$ ,  $V \subseteq \bigcup_{i \in I} V_{if(i)}$ . Par l'hypothèse (H), puisque  $V_{if(i)} \in B$  pour tout  $i \in I$ , on a : (\*), pour tout  $f \in \mathcal{J}$ , il existe une sous-famille finie  $I_f$  de  $I$  telle que  $U \subseteq \bigcup_{i \in I_f} V_{if(i)}$ .

On peut équiper chaque ensemble  $J_i$  de la topologie discrète, ce qui en fait un espace compact, puisque  $J_i$  est fini. Par le théorème de Tychonoff,  $\mathcal{J}$ , muni de la topologie produit, est compact. Pour toute partie finie  $I_0$  de  $I$ , l'ensemble  $\tilde{I}_0$  des  $f \in \mathcal{J}$  tels que  $U \subseteq \bigcup_{i \in I_0} V_{if(i)}$  est un ouvert fermé de  $\mathcal{J}$ . En effet, c'est l'ensemble des  $f$  vérifiant une propriété ne dépendant que des valeurs de  $f(i)$  pour un nombre fini de valeurs de  $i$ . Plus précisément, si l'on pose  $I_0 = \{i_1, \dots, i_n\}$ , alors  $\tilde{I}_0 = \bigcup_{\substack{f_1 \in J_{i_1}, \dots, f_n \in J_{i_n} \\ U \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{ij f_j}}} \{f \in \mathcal{J} \mid f(i_1) = f_1 \text{ et } \dots \text{ et } f(i_n) = f_n\}$ , une

union finie d'ouverts fermés de  $\mathcal{J}$ . (Nous utilisons ici que  $\{f_1\}$  est un ouvert fermé de  $J_1, \dots, \{f_n\}$  est un ouvert fermé de  $J_n$ .) Par (\*), pour tout  $f \in \mathcal{J}$ , il existe une partie finie  $I_0 = I_f$  de  $I$  telle que  $f \in \tilde{I}_0$ . Donc les  $\tilde{I}_0, I_0$  fini inclus dans  $I$ , forment un recouvrement ouvert de  $\mathcal{J}$ . Puisque  $I_0 \subseteq I'_0$  implique  $\tilde{I}_0 \subseteq \tilde{I}'_0$ , cette famille est dirigée. Comme  $\mathcal{J}$  est compact, il existe donc une partie finie  $I_0$  de  $I$  telle que  $\mathcal{J} \subseteq \tilde{I}_0$ . Ceci signifie que pour tout  $f \in \mathcal{J}$ ,  $U \subseteq \bigcup_{i \in I_0} V_{if(i)}$ . Donc  $U \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{J}} \bigcup_{i \in I_0} V_{if(i)} = \bigcup_{i \in I_0} \bigcap_{j \in J_i} V_{ij}$ .

Puisque les  $I_k$  ont été choisis disjointes deux à deux, tout  $i \in I$  appartient à un unique  $I_k$  : soit  $k(i)$  la valeur de  $k$  correspondante. L'ensemble  $K_0 = \{k(i) \mid i \in I_0\}$  est alors fini,

et  $U \subseteq \bigcup_{i \in I_0} \bigcap_{j \in J_i} V_{ij} \subseteq \bigcup_{i \in I_0} V_{k(i)}$  (puisque  $V_{k(i)} = \bigcup_{i' \in I_{k(i)}} \bigcap_{j \in J_{i'}} V_{i'j}$  contient  $\bigcap_{j \in J_i} V_{ij}$ )  
 $= \bigcup_{k \in K_0} V_k$ . La famille  $(V_k)_{k \in K}$  est le sous-recouvrement fini de  $U$  cherché.  $\square$

▷ **3.2.** Le fait que  $\mathcal{P}_V(f)(\alpha)$  est stricte et monotone est clair. On a  $\mathcal{P}_V(f)(\alpha)(Y) = \alpha(f^{-1}(Y)) = \alpha(X) = 1$ . Si  $\mathcal{P}_V(f)(\alpha)(U) = 0$ , c'est que  $\alpha(f^{-1}(U)) = 0$ , donc  $\mathcal{P}_V(f)(\alpha)(U \cup V) = \alpha(f^{-1}(U \cup V)) = \alpha(f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) = \alpha(f^{-1}(V)) = \mathcal{P}_V(f)(\alpha)(V)$ . On démontre de même que si  $\mathcal{P}_V(f)(\alpha)(U) = 1$ , alors  $\mathcal{P}_V(f)(\alpha)(U \cap V) = \mathcal{P}_V(f)(\alpha)(V)$ .  $\square$

▷ **3.3.** La boule  $B_{x, < \epsilon}^{d_{\leq}}$  est l'ensemble des points  $y$  tels que  $d_{\leq}(x, y) < \epsilon$ , c'est-à-dire  $d_{\leq}(x, y) = 0$ . Cette boule ouverte est donc l'ensemble  $\uparrow x$ . C'est un ouvert d'Alexandroff. Réciproquement, tout ouvert d'Alexandroff  $U$  est l'union des  $\uparrow x$ ,  $x \in U$ .  $\square$

▷ **3.4.** Le trou  $T_{x, > \epsilon}^{d_{\leq}}$  est l'ensemble des points  $y$  tels que  $d_{\leq}(y, x) > \epsilon$ , c'est-à-dire  $d_{\leq}(y, x) = +\infty$ . Ce trou est donc le complémentaire de  $\downarrow x$ . Or la topologie engendrée par ces complémentaires est par définition la topologie haute de  $\leq$ . La topologie haute d'un préordre  $\leq$  étant en général strictement plus fine que la topologie d'Alexandroff, la topologie creuse d'une hémistance est en général strictement plus fine que la topologie de cette hémistance.  $\square$

▷ **3.5.** Si  $X$  est fini,  $X^{sym}$  aussi, donc  $X^{sym}$  est compact : (3) implique donc (2). L'implication (2)  $\Rightarrow$  (1) est le fait 3.10.26. Pour (1)  $\Rightarrow$  (3), fixons  $\epsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe un nombre fini d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $X$  tels que pour tout  $x \in X$ , il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $d^{sym}(x_i, x) < \epsilon$ . Or  $d^{sym}(x_i, x) < \epsilon$  si et seulement si  $x_i = x$ . Donc  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  est fini.  $\square$

▷ **3.6.**  $X$  est Kurzweil-Henstock-borné si et seulement si de tout recouvrement ouvert de la forme  $(B_{x, < \delta(x)}^{d^{sym}})_{x \in X}$  on peut extraire un sous-recouvrement fini. Cette formulation montre que  $X$  est Kurzweil-Henstock-borné dès que  $X^{sym}$  est compact. Pour la réciproque lorsque  $d$  est bornée, utilisons le lemme d'Alexander, et montrons que l'on peut extraire un sous-recouvrement fini de n'importe quel recouvrement de  $X$  par des boules ouvertes  $B_{x_i, < \epsilon_i}^{d^{sym}}$ ,  $i \in I$ . Pour tout  $x \in X$ , choisissons un  $i \in I$  tel que  $x \in B_{x_i, < \epsilon_i}^{d^{sym}}$ . Par le corollaire 3.10.5, il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B_{x, < \epsilon}^{d^{sym}} \subseteq B_{x_i, < \epsilon_i}^{d^{sym}}$  : posons  $\delta(x) = \epsilon$ . (Le fait que l'on puisse définir une telle fonction  $\delta$ , où  $\delta(x)$  est choisi parmi un certain nombre de possibilités pour chaque  $x$ , est possible par l'axiome du choix.) Comme  $X$  est Kurzweil-Henstock-borné, il existe une partie finie  $E$  de  $X$  telle que  $X$  est inclus dans l'union des  $B_{x, < \delta(x)}^{d^{sym}}$ ,  $x \in E$ . Par construction, pour chaque  $x \in E$ , il existe une boule  $B_{x_i, < \epsilon_i}^{d^{sym}}$  contenant  $B_{x, < \delta(x)}^{d^{sym}}$ . Ceci fournit une famille finie de boules  $B_{x_i, < \epsilon_i}^{d^{sym}}$  dont l'union contient  $X$ . Donc  $X^{sym}$  est compact.

Pour montrer que si  $X$  est Kurzweil-Henstock-borné alors  $X$  est totalement borné, il suffit de voir que  $X^{sym}$  est compact, et d'utiliser le fait 3.10.26. Pour montrer que la réciproque est fautive, considérons  $X = \{1/(n+1) | n \in \mathbb{N}\}$ , muni de la distance usuelle  $d$  sur  $\mathbb{R}$ .  $X = X^{sym}$  n'est pas compact, puisque l'on peut recouvrir  $X$  par l'union disjointe des boules  $B_{1/(n+1), < 1/((n+1)(n+2))}^d$ . L'union étant disjointe, il n'existe aucun sous-recouvrement strict (à fortiori fini) recouvrant  $X$ .

En revanche, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $1/(n+1) < \epsilon$  pour tout  $n \geq N$ . On peut alors recouvrir  $X$  par les boules  $B_{1/(n+1), < \epsilon}^d$ ,  $n < N$ , et la boule  $B_{1/(N+1), \epsilon}^d$ , contenant tous les points  $1/(n+1)$  pour tout  $n \geq N$ . Donc  $X$  est totalement borné.  $\square$

▷ **3.7.** L'argument est le même que celui de la proposition 3.10.57, à ceci près qu'ici c'est la fonction identité qui est un plongement de  $\mathcal{P}'_{\nu}(X)$  dans  $\mathcal{Q}'(X) \times \mathcal{H}_u(X)$ , soit topologique, soit isométrique.  $\square$

▷ **3.8.** Puisque  $X$  a un élément le plus petit (0),  $C$  est un cpo continu par le théorème d'Edalat. Pour toute famille dirigée  $(\nu_i, \nu'_i)_{i \in I}$  de couples de probabilités continues sur  $X$ ,  $\sup_{i \in I} \nu_i + \nu'_i = \sup_{i \in I} \nu_i + \sup_{i \in I} \nu'_i$  puisque l'addition est Scott-continue de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Donc l'addition des probabilités continues est continue. On raisonne de même pour établir que le produit scalaire est continu.

Montrons que  $C$  est additif. Si  $\nu_1 \ll \nu'_1$  et  $\nu_2 \ll \nu'_2$ , par la propriété d'interpolation raffinée, il existe deux probabilités simples  $\sum_{x \in A} a_x \delta_x$  et  $\sum_{x \in A} b_x \delta_x$  (où l'on peut supposer sans perdre en généralité que les deux sommes sont indexées par le même ensemble fini  $A$ ) telles que  $\nu_1 \ll \sum_{x \in A} a_x \delta_x \ll \nu'_1$  et  $\nu_2 \ll \sum_{x \in A} b_x \delta_x \ll \nu'_2$ . En particulier,  $\nu_1 + \nu_2 \leq \sum_{x \in A} (a_x + b_x) \delta_x$ . Montrons que  $\sum_{x \in A} (a_x + b_x) \delta_x \ll \nu'_1 + \nu'_2$ . On en déduira  $\nu_1 + \nu_2 \ll \nu'_1 + \nu'_2$ , donc que  $C$  sera additif. Utilisons le lemme 3.7.11 : pour tout  $B$  clos par le haut dans  $A \setminus \{0\}$ ,  $\sum_{x \in B} a_x < \nu'_1(\uparrow B)$ ,  $\sum_{x \in B} b_x < \nu'_2(\uparrow B)$ , donc  $\sum_{x \in B} (a_x + b_x) < (\nu'_1 + \nu'_2)(\uparrow B)$ , c'est-à-dire  $\sum_{x \in A} (a_x + b_x) \delta_x \ll \nu'_1 + \nu'_2$ , de nouveau par le lemme 3.7.11.

Montrons que  $\delta_{\delta_\omega}$  est une probabilité continue à support dans  $A$ . Pour tout ouvert  $U$  contenant  $A$ ,  $U$  étant clos par le haut contient  $\delta_\omega$ , puisque  $\delta_k \leq \delta_\omega$  pour n'importe quel  $k \in \mathbb{N}$ . Mais alors  $\delta_{\delta_\omega}(U) = 1$ . Donc  $\delta_{\delta_\omega}$  est à support dans  $A$ . Or  $\text{bary}(\delta_{\delta_\omega}) = \delta_\omega$ , qui n'est pas dans  $A$ . En effet, tout élément  $\sum_{i=0}^n s_i \delta_{k_i}$  de  $A$  appliqué à un ouvert  $\uparrow \ell$ , pour  $\ell \in \mathbb{N}$  suffisamment grand (strictement plus grand que tous les  $k_i$ ), retourne 0. Or  $\delta_\omega(\uparrow \ell) = 1$  pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ .  $\square$

▷ **4.1.** On note d'abord que les intégrales de Riemann-Stieltjes utilisées dans la définition de l'intégrale de Choquet-Stieltjes sont bien définies, comme intégrales de fonctions décroissantes par rapport à une fonction  $G$  croissante et patch-continue.

Disons que  $t$  est sur le plateau de  $G$  si et seulement s'il existe  $s > t$  tel que  $G(s) = G(t)$ . Si  $t$  n'est pas sur le plateau de  $G$ ,  $x \in (G \circ f)^{-1}]G(t), +\infty[$  si et seulement si  $G(f(x)) > G(t)$ . Ceci implique  $f(x) > t$ , et réciproquement  $f(x) > t$  implique  $G(f(x)) > G(t)$ , sinon  $t$  serait sur le plateau de  $G$ . Donc  $x \in (G \circ f)^{-1}]G(t), +\infty[$  si et seulement si  $f(x) \in ]t, +\infty[$ , autrement dit  $(G \circ f)^{-1}]G(t), +\infty[ = ]t, +\infty[$ .

Appelons *plateau* de  $G$  l'ensemble des éléments  $t$  qui sont sur un plateau de  $G$ , au sens ci-dessus. Pour tout élément  $t$  du plateau de  $G$ ,  $G^{-1}\{G(t)\}$  est un patch-fermé, et comme  $G$  est croissante, c'est un intervalle fermé, notons-le  $[t^-, t^+]$ .

Montrons ensuite que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $G$ -intégrables (sur un intervalle  $[a, b]$ ) qui ne diffèrent que sur le plateau de  $G$ , alors leurs  $G$ -intégrales coïncident. En effet, soit  $I_f$  la  $G$ -intégrale de  $f$ ,  $I_g$  celle de  $g$ . Pour toute subdivision pointée  $D$  de  $[a, b]$ , il existe une subdivision pointée  $D'$  de  $[a, b]$  telle que  $D \trianglelefteq D'$ , et telle que si l'on écrit  $D' = a_0, t_1, a_1, \dots, a_{n-1}, t_n, a_n$ ,

alors pour tout  $i$ , si  $t_i$  est sur le plateau de  $G$ , alors  $[a_{i-1}, a_i] \subseteq [t_i^-, t_i^+]$ . En effet, il suffit pour cela de redécouper  $D$  en y insérant  $t_i^-$  et  $t_i^+$  pour tous les  $i$  tels que  $t_i$  est sur le plateau de  $G$ . Par construction, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $f(t_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) = g(t_i)(G(a_i) - G(a_{i-1}))$  : si  $t_i$  est sur le plateau de  $G$ , et alors  $G(a_i) - G(a_{i-1}) = 0$  par construction, sinon  $f(t_i) = g(t_i)$  par hypothèse. Donc  $\int_{D'} f(t)dG(t) = \int_{D'} g(t)dG(t)$ .

Or pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une subdivision pointée  $D_0$  de  $[a, b]$  telle que pour toute  $D$  telle que  $D_0 \leq D$ ,  $|\int_D f(t)dG(t) - I_f| < \epsilon/2$  et  $|\int_D g(t)dG(t) - I_g| < \epsilon/2$ . C'est en particulier vrai pour  $D'$  construit comme ci-dessus à partir de  $D$ , donc  $|I_f - I_g| < \epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $I_f = I_g$ .

Rappelons maintenant que les fonctions qui à  $t$  associent  $(G \circ f)^{-1}G(t), +\infty[$  et  $]t, +\infty[$  respectivement ne diffèrent que sur le plateau de  $G$ . Donc :

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x)d\nu_G &= \int_0^{+\infty} \nu((G \circ f)^{-1}]G(t), +\infty[)dG(t) + \int_{-\infty}^0 [\nu((G \circ f)^{-1}]G(t), +\infty[) - \nu(X)]dG(t) \\ &= \int_0^{+\infty} \nu((G \circ f)^{-1}]s, +\infty[)ds + \int_{-\infty}^0 [\nu((G \circ f)^{-1}]s, +\infty[) - \nu(X)]ds \\ &= \oint_{x \in X} G(f(x))d\nu \end{aligned}$$

en utilisant la formule de changement de variables pour les intégrales de Riemann-Stieltjes, qui s'applique car  $G$  est croissante et patch-continue.  $\square$

▷ **4.2.** Par la formule d'intégration par parties de l'intégrale de Riemann-Stieltjes,

$$\begin{aligned} \oint_{x \in X} f(x)d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu(f^{-1}]t, +\infty[)dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)]dt \\ &= [t\nu(f^{-1}]t, +\infty[)]_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t d\nu(f^{-1}]t, +\infty[) \\ &\quad + [t(\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X))]_{t=-\infty}^0 - \int_0^{+\infty} t d[\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] \\ &= - \int_0^{+\infty} t d\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \int_0^{+\infty} t d[\nu(f^{-1}]t, +\infty[) - \nu(X)] \end{aligned}$$

$\square$

▷ **4.3.** On commence par démontrer que, pour tout ouvert de Scott  $U$  de  $[a, b]$ ,  $\tilde{G}(U) = \int_a^b \chi_U(t)dG(t)$ .

Si  $U$  est vide, c'est évident. Si  $U = [a, b]$ , l'intégrale de droite vaut  $\int_a^b 1dG(t) = G(b) - G(a) = \tilde{G}(U)$ . Considérons finalement le cas où  $U$  est de la forme  $]s, b]$ . Alors l'intégrale de droite vaut  $\int_a^s \chi_U(t)dG(t) + \int_s^b \chi_U(t)dG(t)$  par la relation de Chasles. Sur l'intervalle  $[a, s]$ ,  $\chi_U(t) = 0$ ; sur  $]s, b]$ ,  $\chi_U(t)$  ne diffère de la fonction constante égale à un qu'en un nombre fini de points (à savoir en  $t = s$ ), donc son intégrale coïncide avec celle de cette dernière fonction; on en déduit que l'intégrale de droite vaut  $0 + G(b) - G(s) = \tilde{G}(U)$ .

Lorsque  $f$  est une fonction étagée de la forme  $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{U_i}$ , où  $X = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n$  est une suite décroissante d'ouverts, et  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , l'intégrale de gauche vaut  $\sum_{i=0}^n a_i \tilde{G}(U_i) = \sum_{i=0}^n \int_a^b \chi_{U_i}(t) dG(t) = \int_a^b f(t) dG(t)$  par linéarité de l'intégrale de Riemann-Stieltjes en la fonction intégrée.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. Comme  $f$  est Scott-continue, elle est borne supérieure d'une famille de fonctions étagées  $f_K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , définies au lemme 4.1.6. Comme l'intégrale de Riemann-Stieltjes est Scott-cocontinue en la fonction décroissante intégrée ( $G$  étant patch-continue), elle est aussi Scott-continue en la fonction croissante intégrée (remplacer  $f_K$  par  $-f_K$ ), donc  $\int_a^b f(t) dG(t) = \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_a^b f_K(t) dG(t)$  est la borne supérieure des intégrales de Choquet de  $f_K$  par rapport à  $\tilde{G}$ . Mais ceci est l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\tilde{G}$ , par le lemme 4.1.6.  $\square$

▷ **4.4.** Les seuls ouverts non triviaux de  $\mathbf{A}$ , muni de la topologie de Scott (ou d'Alexandroff, ou haute) de l'ordre  $\sqsubseteq$  sont  $\{1\}$  et  $\{\mathbf{M}, 1\}$ . La topologie de la convergence simple sur  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbf{A}]_p$  est donc engendrée par les ensembles  $[U \mapsto \{1\}] = \{f \mid f(U) = 1\}$  et  $[U \mapsto \{\mathbf{M}, 1\}] = \{f \mid f(U) \neq 0\}$ . La trace de ces ensemble sur le sous-ensemble  $\mathcal{P}_v(X)$  est  $\square U$ , resp.  $\diamond U$ .  $\square$

▷ **4.5.** C'est un résultat dû à Tix (1995, lemme 5.3). Supposons que l'on puisse trouver deux parties fermées  $F'_1$  et  $F'_2$  non vides de  $Z'$  telles que  $cl(g(A)) \subseteq F'_1 \cup F'_2$ , c'est-à-dire telles que  $g(A) \subseteq F'_1 \cup F'_2$ . Alors  $A \subseteq g^{-1}(F'_1) \cup g^{-1}(F'_2)$ , donc  $cl(A) \subseteq g^{-1}(F'_1) \cup g^{-1}(F'_2)$ . Puisque  $cl(A)$  est irréductible,  $cl(A) \subseteq g^{-1}(F'_1)$  ou  $cl(A) \subseteq g^{-1}(F'_2)$ . Dans le premier cas,  $A \subseteq g^{-1}(F'_1)$ , donc  $g(A) \subseteq F'_1$ , donc  $cl(g(A)) \subseteq F'_1$ . Dans le deuxième cas,  $cl(g(A)) \subseteq F'_2$ . Donc  $cl(g(A))$  est irréductible.  $\square$

▷ **4.6.** C'est le lemme 5.8 de Tix (1995). Soit  $\mathcal{F}$  un fermé irréductible de  $[X \rightarrow Y]_p$ . Fixons  $x \in X$ ,  $Z = [X \rightarrow Y]_p$ ,  $Z' = Y$  et  $g$  la fonction  $pr_x$  qui à  $f$  associe  $f(x)$ . Par l'exercice 4.5, l'ensemble  $\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$  est d'adhérence irréductible dans  $Y$ . Puisque  $Y$  est sobre,  $cl(\mathcal{F}_x)$  est donc l'adhérence d'un unique point, notons-le  $h(x)$ . Ceci définit une fonction  $h$  de  $X$  vers  $Y$ . Montrons que  $h$  est continue, en montrant que l'image réciproque par  $h$  de tout fermé  $F$  de  $Y$  est fermée dans  $X$ . Or  $h^{-1}(F) = \{x \in X \mid h(x) \in F\} = \{x \in X \mid cl(\mathcal{F}_x) \subseteq F\} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \subseteq F\} = \{x \in X \mid \forall f \in \mathcal{F} \cdot f(x) \in F\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(F)$  est fermé, en tant qu'intersection de fermés. Donc  $h$  est continue.

Puisque  $cl(\mathcal{F}_x) = cl\{h(x)\} = \downarrow h(x)$  pour tout  $x \in X$ , pour tout  $f \in \mathcal{F}$  on a  $f(x) \leq h(x)$  pour tout  $x \in X$ . Par le lemme 4.5.19,  $f \leq h$ , c'est-à-dire  $f \in \downarrow h = cl\{h\}$ . Donc  $\mathcal{F} \subseteq cl\{h\}$ .

Pour tout ouvert  $\mathcal{V} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} [x_{ij} \mapsto V_{ij}]$  ( $n_i \geq 1$ ) de  $[X \rightarrow Y]_p$  contenant  $h$ , il existe un  $i \in I$  tel que  $h(x_{ij}) \in V_{ij}$  pour chaque  $j$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ . Puisque  $h(x_{ij}) \in V_{ij}$  et  $cl(h(x_{ij})) = cl(\mathcal{F}_{x_{ij}})$ ,  $V_{ij}$  intersecte  $cl(\mathcal{F}_{x_{ij}})$ , donc aussi  $\mathcal{F}_{x_{ij}}$  : soit  $f_{ij}$  un élément de  $\mathcal{F}$  tel que  $f_{ij}(x_{ij}) \in V_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ . Alors  $\inf_{1 \leq j \leq n_i} f_{ij}$  est une fonction continue, en tant que borne inférieure d'une famille finie de fonctions continues. Comme  $\mathcal{F}$  est clos par le bas, et  $n_i \geq 1$ ,  $\inf_{1 \leq j \leq n_i} f_{ij}$  est dans  $\mathcal{F}$ . Nous venons de montrer que l'ouvert  $\mathcal{V}$  intersectait  $\mathcal{F}$ . Ceci étant vrai pour tout ouvert  $\mathcal{V}$  contenant  $h$ ,  $h$  appartient à l'adhérence de  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire à  $\mathcal{F}$  puisque  $\mathcal{F}$  est fermé.

En résumé,  $\mathcal{F} \subseteq cl\{h\}$  et  $h \in \mathcal{F}$ , donc  $\mathcal{F} = cl\{h\}$ . Il ne reste qu'à montrer que  $[X \rightarrow Y]_p$  est  $T_0$ . Or par le lemme 4.5.19, son préordre de spécialisation est le préordre point à point, qui est un ordre car le préordre de spécialisation de  $Y$  est un ordre, puisque  $Y$  est sobre donc  $T_0$ .  $\square$

▷ **4.7.** C'est le lemme 5.9 de Tix (1995). Soit  $F$  un fermé irréductible de  $[f = g]$ . Soit  $F'$  l'adhérence de  $F$  dans  $X$ . Si  $F'$  est inclus dans l'union  $F'_1 \cup F'_2$  de deux fermés de  $X$ , alors  $F$  est inclus dans l'union des deux fermés  $[f = g] \cap F'_1$  et  $[f = g] \cap F'_2$  de  $[f = g]$ . Puisque  $F$  est irréductible, il est inclus dans l'un des deux, disons  $[f = g] \cap F'_1$ . On a alors  $F \subseteq F'_1$ , donc  $F' \subseteq F'_1$  puisque  $F'_1$  est fermé dans  $X$ . Donc  $F'$  est un fermé irréductible de  $X$ . Puisque  $X$  est sobre,  $F'$  est l'adhérence dans  $X$  d'un unique point  $x$ .

Montrons que  $x \in [f = g]$ . Supposons que  $f(x) \neq g(x)$ . En notant  $\leq$  l'ordre de spécialisation de  $Y$  (qui est un ordre car  $Y$  est  $T_0$ ), on a  $f(x) \not\leq g(x)$  ou  $g(x) \not\leq f(x)$ . Supposons  $f(x) \not\leq g(x)$ , c'est-à-dire  $f(x)$  n'est pas dans l'adhérence  $\downarrow g(x)$  de  $g(x)$  dans  $X$ . Donc  $x$  est dans  $f^{-1}(X \setminus \downarrow g(x))$ , qui est un ouvert de  $X$ . Cet ouvert intersecte  $F'$  (en  $x$ ), donc aussi  $F$ , dont  $F'$  est l'adhérence dans  $X$ . Soit  $x' \in f^{-1}(X \setminus \downarrow g(x)) \cap F$ . Puisque  $F \subseteq [f = g]$ ,  $f(x') = g(x')$ . Or  $f(x') \in X \setminus \downarrow g(x)$ , donc  $g(x') \not\leq g(x)$ . Mais  $x' \in F \subseteq F'$  et  $F'$  est l'adhérence de  $x$  dans  $X$ , donc  $x' \leq x$ , ce qui implique  $g(x') \leq g(x)$ , une contradiction. Donc  $x \in [f = g]$ .

Tout fermé  $F_1$  de  $[f = g]$  s'écrit comme l'intersection d'un fermé  $F'_1$  de  $X$  et de  $[f = g]$ . C'est en particulier le cas de  $F$ . Puisque  $F = F'_1 \cap [f = g]$ ,  $F'_1$  contient  $F$ , donc  $F'$ . Puisque  $F'$  est l'adhérence de  $x$  dans  $X$ ,  $F'_1$  contient  $x$ . Puisque  $x \in [f = g]$ ,  $F$  contient  $x$ . Réciproquement, si  $F_1 = F'_1 \cap [f = g]$  est un fermé quelconque de  $[f = g]$  contenant  $x$ , alors  $F'_1$  contient  $x$  donc aussi  $F'$ . Donc  $F_1$  contient  $F' \cap [f = g]$ , donc  $F$ .  $F$  est donc inclus dans l'adhérence de  $x$  dans  $[f = g]$ . Puisque  $x \in F$ ,  $F$  est exactement cette adhérence.

Il ne reste qu'à montrer que  $[f = g]$  est  $T_0$ . C'est évident, tout sous-espace d'un espace  $T_0$  (et  $X$  est sobre, donc  $T_0$ ) étant  $T_0$ .  $\square$

▷ **4.8.** C'est un résultat de Heckmann (1997). Une fonction  $\alpha$  de  $\mathcal{O}(X)$  vers  $\mathbf{A}$  est une  $\mathbf{A}$ -évaluation si et seulement si  $\alpha(\emptyset) = 0$ ,  $\alpha(X) = 1$ ,  $\alpha(U) * \alpha(U \cup V) = \alpha(U) * \alpha(V)$  pour tous ouverts  $U$  et  $V$  (où  $*$  est la fonction croissante donc continue définie par  $0*y = y$ ,  $M*y = 1*y = 1$ ),  $\alpha(U) \bar{*} \alpha(U \cap V) = \alpha(U) \bar{*} \alpha(V)$  pour tous ouverts  $U$  et  $V$  (où  $\bar{*}$  est la fonction croissante définie par  $1\bar{*}y = y$ ,  $M\bar{*}y = 0\bar{*}y = 0$ ).  $\mathcal{P}_V(X)$  est alors le sous-espace  $[f = g]$  de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbf{A}]_p$ , où  $f$  et  $g$  sont les deux fonctions de  $[\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbf{A}]_p$  vers  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A}^{\mathcal{O}(X)^2} \times \mathbf{A}^{\mathcal{O}(X)^2}$  qui à tout  $\alpha$  associent respectivement  $(\alpha(\emptyset), \alpha(X), (\alpha(U) * \alpha(U \cup V))_{U,V \in \mathcal{O}(X)}, (\alpha(U) \bar{*} \alpha(U \cap V))_{U,V \in \mathcal{O}(X)})$  et  $(0, 1, (\alpha(U) * \alpha(V))_{U,V \in \mathcal{O}(X)}, (\alpha(U) \bar{*} \alpha(V))_{U,V \in \mathcal{O}(X)})$ . On conclut par l'exercice 4.6 et l'exercice 4.7.  $\square$

▷ **4.9.** Intégrer une fonction  $g$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  le long de  $\nu$  revient à calculer  $\min(g(1), g(2))$ . En effet,  $\nu(g^{-1}]t, +\infty[)$  vaut 1 si et seulement si  $g(1) > t$  et  $g(2) > t$ , si et seulement si  $t < \min(g(1), g(2))$ . Alors, en utilisant la définition, c'est-à-dire l'équation (4.1) :

$$\int_{x \in X} g(x) d\nu = \int_0^{\min(g(1), g(2))} 1 dt + 0 = \min(g(1), g(2))$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 (\nu \times \nu')(W) &= \min_{x \in X} \left( \frac{1}{2} \chi_W(x, 1) + \frac{1}{2} \chi_W(x, 2) \right) \\
 (\nu \times \nu')(W) &= \frac{1}{2} \min_{x \in X} \chi_W(x, 1) + \frac{1}{2} \min_{x \in X} \chi_X(x, 2)
 \end{aligned}$$

Explicitement, voici deux contre-exemples :

$W$	$(\nu \times \nu')(W)$	$(\nu \times \nu')(W)$
$\{(1, 1), (2, 2)\}$	$\frac{1}{2}$	0
$\{(1, 2), (2, 1)\}$	$\frac{1}{2}$	0

□

▷ **4.10.** On a vu à l'exercice 4.9 que l'intégrale de  $g$  selon  $\nu$  valait  $\min(g(1), g(2))$ . Donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu &= \min_{x \in \{1, 2\}} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' \\
 &= \min_{x \in \{1, 2\}} \frac{1}{2} (f(x, 1) + f(x, 2)) = \min(1, 1) = 1
 \end{aligned}$$

D'autre part,  $f = \chi_{W_1} + \chi_{W_2}$ , où  $W_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$  et  $W_2 = \{(1, 1)\}$ . Donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y) d(\nu \times \nu') &= (\nu \times \nu')(W_1) + (\nu \times \nu')(W_2) \\
 &= \min_{x \in \{1, 2\}} \nu' \{y \mid (x, y) \in W_1\} + \min_{x \in \{1, 2\}} \nu' \{y \mid (x, y) \in W_1\} \\
 &= \min\left(\frac{1}{2}, 1\right) + \min\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Donc (4.4) n'est pas vérifiée. L'équation (4.5) est cependant valide, car  $\nu'$  est une valuation continue, ou parce que  $f$  est comonotone en son second argument, comme nous le verrons aux propositions 4.6.7 et 4.6.10 respectivement. En revanche, si l'on échange les rôles de  $\nu$  et de  $\nu'$ , et que l'on pose  $f'(x, y) = f(y, x)$ , on aura :

$$\int_{y \in Y} \int_{x \in X} f'(x, y) d\nu' d\nu = \int_{x \in X} \int_{y \in Y} f(x, y) d\nu' d\nu = 1$$

mais  $g = \chi_{W'_1} + \chi_{W'_2}$ , où  $W'_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$  et  $W'_2 = \{(1, 1)\}$ , donc, en notant que :

$$\begin{aligned}
 (\nu' \times \nu)(W) &= \int_{y \in Y} \int_{x \in X} \chi_W(x, y) d\nu' d\nu \\
 &= \min_{y \in \{1, 2\}} \left( \frac{1}{2} \chi_W(1, y) + \frac{1}{2} \chi_W(2, y) \right)
 \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in X \times Y} f'(x,y) d(\nu' \times \nu) &= (\nu' \times \nu)(W'_1) + (\nu \times \nu')(W'_2) \\ &= \min_{y \in \{1,2\}} \left(\frac{1}{2}, 1\right) + \min_{y \in \{1,2\}} \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ce qui fournit le contre-exemple souhaité.  $\square$

▷ **4.11.** Rappelons que  $(\nu \times \nu')(W) = \min_{x \in \{1,2\}} 1/2 \chi_W(x, 1) + 1/2 \chi_W(x, 2)$ . La table de  $\nu \times \nu'$  est donc donnée par :

$W$	$(\nu \times \nu')(W)$
$\emptyset$	0
$\{(1, 1)\}$	0
$\{(1, 2)\}$	0
$\{(2, 1)\}$	0
$\{(2, 2)\}$	0
$\{(1, 1), (1, 2)\}$	0
$\{(1, 1), (2, 1)\}$	$\frac{1}{2}$
$\{(1, 1), (2, 2)\}$	$\frac{1}{2}$
$\{(1, 2), (2, 1)\}$	$\frac{1}{2}$
$\{(1, 2), (2, 2)\}$	$\frac{1}{2}$
$\{(2, 1), (2, 2)\}$	0
$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$	$\frac{1}{2}$
$\{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$	$\frac{1}{2}$
$\{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$	$\frac{1}{2}$
$\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$	$\frac{1}{2}$
$X \times Y$	1

En particulier, si l'on choisit  $W_1 = \{(1, 1), (2, 1)\}$  et  $W_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ , on a  $(\nu \times \nu')(W_1 \cup W_2) = 1/2$ ,  $(\nu \times \nu')(W_1 \cap W_2) = 0$ ,  $(\nu \times \nu')(W_1) = 1/2$ ,  $(\nu \times \nu')(W_2) = 1/2$ , montrant ainsi que  $\nu \times \nu'$  n'est pas convexe. De même,  $\nu' \times \nu$ , qui a une table similaire à celle de  $\nu \times \nu'$ , n'est pas convexe.  $\square$

▷ **4.12.** Soit  $x$  un point hors de  $(U^{d,-(\epsilon)})^{d,-(\epsilon')}$ . Alors  $d(x, X \setminus U^{d,-(\epsilon)}) \leq \epsilon'$ . Pour tout  $\epsilon'' > 0$ , il existe donc un point  $y$  de  $X \setminus U^{d,-(\epsilon)}$  tel que  $d(x, y) \leq \epsilon' + \epsilon''$ . Comme  $y$  n'est pas dans  $U^{d,-(\epsilon)}$ ,  $d(y, X \setminus U) \leq \epsilon$ . Or, par le lemme 3.10.42,  $d(x, X \setminus U) \leq d(x, y) + d(y, X \setminus U) \leq \epsilon + \epsilon' + \epsilon''$ . Comme  $\epsilon''$  est un réel strictement positif arbitraire,  $d(x, X \setminus U) \leq \epsilon + \epsilon'$ , c'est-à-dire  $x \notin U^{d,-(\epsilon+\epsilon')}$ .  $\square$

▷ **4.13.** Supposons que  $x \notin (f^{-1}]t, +\infty]^{d,-(\epsilon)}$ . Alors  $d(x, X \setminus f^{-1}]t, +\infty]) \leq \epsilon$ , donc pour tout  $\epsilon' > 0$ , il existe  $y \in X \setminus f^{-1}]t, +\infty[$  tel que  $d(x, y) \leq \epsilon + \epsilon'$ . Puisque  $y \in X \setminus f^{-1}]t, +\infty[$ ,  $f(y) \leq t$ . Comme  $f$  est 1-lipschitzienne,  $f(x) \leq d(x, y) + f(y) \leq t + \epsilon + \epsilon'$ . Comme  $\epsilon'$  est arbitraire,  $f(x) \leq t + \epsilon$ , donc  $x \notin f^{-1}]t + \epsilon, +\infty[$ .  $\square$

▷ **5.1.** Notons que pour tout  $x \in X$ ,  $f_*(\uparrow x) = f(x)$ . Supposons  $f_*$  et  $g_*$  comonotones. S'il existait un couple de points  $x, x' \in X$  tels que  $f(x) < f(x')$  et  $g(x) > g(x')$ , alors on aurait  $f_*(\uparrow x) < f_*(\uparrow x')$  et  $g_*(\uparrow x) > g_*(\uparrow x')$ , ce qui contredirait la comonotonie de  $f_*$  et de  $g_*$ . Donc  $f$  et  $g$  sont comonotones.

Réciproquement, si  $f$  et  $g$  sont comonotones, par le lemme 4.4.2 il existe une fonction continue bornée  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  et deux fonctions Scott-continues bornées  $f', g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f = f' \circ h$  et  $g = g' \circ h$ . Alors pour tout compact saturé non vide  $Q$  de  $X$ ,  $f_*(Q) = \min_{x \in Q} f'(h(x)) = f'(\min_{x \in Q} h(x))$ ,  $f'$  étant croissante. (De manière explicite, soit  $x_0 \in Q$  tel que  $h(x_0)$  soit minimal. Pour tout  $x \in Q$ ,  $h(x_0) \leq h(x)$ , donc  $f'(h(x_0)) \leq f'(h(x))$ ; donc  $f'(h(x_0)) \leq \min_{x \in Q} f'(h(x))$ . Or  $x_0 \in Q$ , d'où l'égalité.) Nous avons donc démontré  $f_* = f' \circ h_*$ ; de même  $g_* = g' \circ h_*$ . Puisque  $h_*$  est continue par le lemme 5.4.3, et que  $f', g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont croissantes, on conclut par le lemme 4.4.2 que  $f_*$  et  $g_*$  sont comonotones.  $\square$

▷ **5.2.** Si  $\nu$  est une crédibilité continue sur  $X$ , il existe par la proposition 5.4.7 une unique valuation continue  $\nu^*$  sur  $\mathcal{Q}(X)$  telle que  $\nu(U) = \nu^*(\square U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ . Si  $\nu^*$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur  $\mathcal{Q}(X)$ , alors par Tix (1995, Satz 2.2)  $\nu^*$  est une valuation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{Q_i}$ , et il est alors facile de voir que  $\nu$  est la crédibilité simple  $\sum_{i=1}^n a_i u_{Q_i}$ . La difficulté est qu'il ne semble pas que  $\nu^*$  doive ne prendre qu'un nombre fini de valeurs, même lorsque  $\nu$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

La valuation  $P = \nu^*$  vérifie l'équation (5.5), donc  $\nu^*(\bigcup_{i=1}^n \square U_i)$  est multiple de  $a$ . Or comme  $\nu^*(\bigcup_{i=1}^n \square U_i)$  est majoré par  $\nu^*(\mathcal{Q}(X)) = \nu(X)$ ,  $\nu^*(\bigcup_{i=1}^n \square U_i)$  ne peut prendre qu'au plus  $\lfloor \nu(X)/a \rfloor$  valeurs distinctes non nulles. Comme  $P = \nu^*$  vérifie l'équation (5.4),  $\nu^*(U)$  ne prend pas plus de valeurs quand  $U$  parcourt les ouverts de  $\mathcal{Q}(X)$ . On conclut par le théorème de Tix (1995, Satz 2.2).  $\square$

▷ **5.3.**

$$\begin{aligned} (u_Q \times u_{Q'})(W) &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_W(x, y) du_{Q'} du_Q \\ &= \min_{x \in Q} \min_{y \in Q'} \chi_W(x, y) = \min_{(x, y) \in Q \times Q'} \chi_W(x, y) \end{aligned}$$

et cette quantité vaut 0 s'il existe un  $(x, y) \in Q \times Q'$  tel que  $(x, y) \notin W$ , 1 sinon. Donc  $u_Q \times u'_{Q'} = u_{Q \times Q'}$ . On calcule de même pour établir  $u_Q \times u'_Q = u_{Q \times Q'}$ .  $\square$

▷ **5.4.** Que  $\nu \times \nu'$  et  $\nu \times \nu'$  ne coïncident pas est une conséquence de l'exercice 4.9, où l'on notera que les jeux  $\nu$  et  $\nu'$  choisis sont des crédibilités simples. Ensuite, l'exercice 4.11 montre que  $\nu \times \nu'$  et  $\nu \times \nu'$  ne sont pas en général des crédibilités, même lorsque  $\nu$  et  $\nu'$  sont des crédibilités simples, alors que  $\nu \otimes \nu'$  est toujours une crédibilité simple dans ce cas.

▷ 6.1.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_F \times \mathbf{e}_{F'})(W) &= \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \chi_W(x, y) d\mathbf{e}_{F'} d\mathbf{e}_F \\
&= \sup_{x \in F} \sup_{y \in F'} \chi_W(x, y) = \sup_{(x, y) \in F \times F'} \chi_W(x, y)
\end{aligned}$$

et cette quantité vaut 1 s'il existe un  $(x, y) \in F \times F'$  tel que  $(x, y) \in W$ , 1 sinon. Donc  $\mathbf{e}_F \times \mathbf{e}_{F'} = \mathbf{e}_{F \times F'}$ . On calcule de même pour établir  $\mathbf{e}_Q \times \mathbf{e}_{Q'} = \mathbf{e}_{Q \times Q'}$ .  $\square$

▷ 7.1. L'inclusion  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i \subseteq \square C' \cap \bigcap_{j=1}^n \diamond G'_j$  est équivalente à la conjonction de : (a)  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i \subseteq \square C'$ , et de : (b)  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i \subseteq \diamond G'_j$  pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Or (b) est équivalent à  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i \cap \square(X \setminus G'_j) = \emptyset$ , puisque  $\square(X \setminus G'_j)$  est le complémentaire de  $\diamond G'_j$ . Par le lemme 7.1.4,  $\square C \cap \square(X \setminus G'_j) = \square(C \setminus G'_j)$ , donc (b) est équivalent à  $\square(C \setminus G'_j) \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i = \emptyset$ . Par le lemme 7.3.11, ceci est équivalent à l'existence d'un  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tel que  $C \setminus G'_j$  n'intersecte pas  $G_i$ , c'est-à-dire tel que  $C \cap G_i \subseteq G'_j$  : (b) est donc équivalent à la condition 1 de l'exercice.

Montrons que (a) est équivalent à la condition 2 de l'exercice. Le côté gauche  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i$  est vide si et seulement si  $C \cap G_i$  est vide pour un certain  $i$ , par le lemme 7.3.11. Il reste à démontrer que si  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i$  est non vide, alors (a) est équivalent à  $C \subseteq C'$ . Clairement,  $C \subseteq C'$  implique (a), montrons donc la réciproque : si  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i$  est non vide et est inclus dans  $\square C'$ , alors  $C \subseteq C'$ .

Commençons par le cas de  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ . Soit  $x$  un élément quelconque de  $C$ . Par le lemme 7.3.11, puisque  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i$  est non vide, on peut choisir un élément  $x_i$  de  $C \cap G_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Posons  $E = \{x, x_1, \dots, x_m\}$ , et  $L$  la lentille  $\langle E \rangle$ . Par construction,  $E \subseteq C$ . Écrivons  $C = U \setminus V$ , alors  $\uparrow E \subseteq U$  et  $cl(E) \subseteq X \setminus V$ , donc  $\langle E \rangle = \uparrow E \cap cl(E) \subseteq U \cap (X \setminus V) = C$ . Donc  $\langle E \rangle \in \square C$ . Par construction,  $\langle E \rangle$  est dans  $\diamond G_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , puisque  $x_i \in \langle E \rangle \cap G_i$ . Donc  $\langle E \rangle \in \square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i \subseteq \square C'$ . On en déduit que  $x \in \langle E \rangle \subseteq C'$ . Comme  $x$  est arbitraire dans  $C$ ,  $C \subseteq C'$ .

Dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ , on construit de même  $L = \langle E \rangle$ . On a  $L^*(U) = 1$  car  $\langle E \rangle \subseteq \uparrow E \subseteq U$  et  $L^*(V) = 0$  car  $\langle E \rangle \subseteq cl(E)$  ne rencontre pas  $V$ . Donc  $L^* \in \square C$ . Par construction,  $x_i \in \langle E \rangle \cap G_i = L \cap G_i$ . Si  $G_i$  est ouvert, alors  $L^*(G_i) \neq 0$ , donc  $L^* \in \diamond G_i$ . Si  $G_i$  est un fermé  $X \setminus W$ , alors  $x_i \in L \setminus W$ , donc  $L$  n'est pas inclus dans  $W$ , donc  $L^*(W) \neq 1$ , c'est-à-dire de nouveau  $L^* \in \diamond G_i$ . On a donc  $L^* \in \square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i \subseteq \square C'$ . Posons  $C' = U' \setminus V'$ . Donc  $L^*(U') = 1$  et  $L^*(V') = 0$ , c'est-à-dire  $L \subseteq U'$  et  $L \cap V' = \emptyset$ . Puisque  $x \in L$ ,  $x$  est dans  $U'$  et pas dans  $V'$ , donc  $x \in C'$ . Comme  $x$  est arbitraire dans  $C$ , de nouveau  $C \subseteq C'$ .  $\square$

▷ 7.2. Supposons  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i = \square C' \cap \bigcap_{j=1}^n \diamond G'_j$ . Si les deux côtés de l'égalité sont vides, alors on obtient 1 par le lemme 7.3.11. Sinon, chaque côté est inclus dans l'autre, donc par l'exercice 7.1,  $C \subseteq C'$ ,  $C' \subseteq C$  (donc  $C = C'$ ), pour tout  $j$  il existe  $i$  tel que  $C \cap G_i \subseteq G'_j$  (donc  $C \cap G_i \subseteq C' \cap G'_j$ ), et pour tout  $i$  il existe  $j$  tel que  $C' \cap G'_j \subseteq C \cap G_i$  (donc  $C' \cap G'_j \subseteq C \cap G_i$ ). Notons qu'il est impossible que  $C \cap G_i = \emptyset$  ou que  $C' \cap G'_j = \emptyset$ , par le lemme 7.3.11, puisque  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i$  et  $\square C' \cap \bigcap_{j=1}^n \diamond G'_j$  sont non vides. On a donc  $C = C'$ ,  $\{C \cap G_i \mid 1 \leq i \leq$

$m\} \subseteq^b \{C' \cap G'_j | 1 \leq j \leq n\}$  et  $\{C' \cap G'_j | 1 \leq j \leq n\} \subseteq^b \{C \cap G_i | 1 \leq i \leq m\}$ . Donc  $\{C \cap G_i | 1 \leq i \leq m\} = \{C' \cap G'_j | 1 \leq j \leq n\}$ , et la condition 2 est vérifiée.

Réciproquement, si la condition 1 est vérifiée, alors  $\square C \cap \bigcap_{i=1}^m \diamond G_i = \square C' \cap \bigcap_{j=1}^n \diamond G'_j = \emptyset$  par le lemme 7.3.11. Si c'est 2 qui est vraie, alors pour tout  $j$  il existe  $i$  tel que  $C \cap G_i = C' \cap G'_j$ , donc  $C \cap G_i \subseteq G'_j$ , et d'autre part  $C \subseteq C'$ , donc le côté gauche est inclus dans le côté droit par l'exercice 7.1 ; l'inclusion symétrique est démontrée de manière similaire.  $\square$

▷ **7.3.** D'abord, si  $\nu = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} a_A \mathbf{u}_A$ , il est facile de vérifier que  $\nu^\uparrow(U) = \sum_{A \subseteq U, A \neq \emptyset} a_A$ , donc  $\nu^\uparrow = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} a_A \mathbf{u}_A$ , et que  $\nu^\downarrow(V) = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} a_A - \sum_{A \neq \emptyset / A \cap V = \emptyset} a_A = \sum_{A \neq \emptyset / A \cap V \neq \emptyset} a_A$ , donc  $\nu^\downarrow = a_A \mathbf{e}_A$ .

Réciproquement, soit  $\nu^- = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} a_A \mathbf{u}_A$ ,  $\nu^+ = \sum_{A \subseteq X, A \neq \emptyset} b_A \mathbf{e}_A$ , et supposons que  $\nu^\uparrow = \nu^-$  et  $\nu^\downarrow = \nu^+$ . D'abord,  $\nu^-(X) = \nu^+(X)$ , donc la somme des  $a_A$  égale celle des  $b_A$  ; appelons  $s$  cette somme. Par le lemme 7.5.2 avec  $V = X \setminus U$ ,  $s \leq \sum_{A \subseteq U, A \neq \emptyset} a_A + \sum_{A \neq \emptyset / A \cap V \neq \emptyset} b_A \leq s$ . Comme  $\sum_{A \neq \emptyset / A \cap V \neq \emptyset} b_A = s - \sum_{A \neq \emptyset / A \cap V = \emptyset} b_A$ , on en déduit  $\sum_{A \subseteq U, A \neq \emptyset} a_A = \sum_{A \neq \emptyset / A \cap V = \emptyset} b_A$ , c'est-à-dire  $\sum_{A \subseteq U, A \neq \emptyset} a_A = \sum_{A \subseteq U, A \neq \emptyset} b_A$ . Posons  $g(U)$  cette quantité. Par la formule d'inversion de Möbius,  $a_A = \sum_{U \neq \emptyset, U \subseteq A} \mu(U, A) g(U) = b_A$ .  $\square$

▷ **7.4.** On utilise le théorème 7.3.23. Pour tout croissant  $C$ ,  $\llbracket f[\nu] \rrbracket^\%(\square C) = f[\nu](C) = \nu(f^{-1}(C)) = \llbracket \nu \rrbracket^\%(\square f^{-1}(C))$ . Posons  $C = U \setminus V$ , de sorte que  $f^{-1}(C) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$ . Par le lemme 7.1.2, on a  $\square f^{-1}(C) = \{\alpha \in \mathcal{P}_V(X) | \alpha(f^{-1}(U)) = 1 \text{ et } \alpha(f^{-1}(V)) = 0\} = \{\alpha \in \mathcal{P}_V(X) | \mathcal{P}_V(f)(\alpha)(U) = 1 \text{ et } \mathcal{P}_V(f)(\alpha)(V) = 0\} = \mathcal{P}_V(f)^{-1}(\square C)$ . Donc  $\llbracket f[\nu] \rrbracket^\%(\square C) = \llbracket \nu \rrbracket^\%(\mathcal{P}_V(f)^{-1}(\square C)) = \mathcal{P}_V(f)[\llbracket \nu \rrbracket^\%(\square C)]$ . Donc  $\llbracket f[\nu] \rrbracket$  et  $\mathcal{P}_V(f)[\llbracket \nu \rrbracket]$  sont toutes les deux des valuations continues (la deuxième par le lemme 4.2.9)  $P$  telles que  $P^\%(\square C) = f[\nu](C)$  pour tout croissant  $C$  de  $X$ . Comme  $P$  est unique par le théorème 7.3.23,  $\llbracket f[\nu] \rrbracket = \mathcal{P}_V(f)[\llbracket \nu \rrbracket]$ .  $\square$

▷ **7.5.** 1. On commence par démontrer que, pour tous  $s, t \in \mathbb{R}^+$  tels que  $s \leq t$ ,  $s^{1-\beta} t^\beta$  est une fonction croissante de  $\beta$ . En effet,  $\log(s^{1-\beta} t^\beta) = (1-\beta) \log s + \beta \log t = \beta(\log t - \log s) + \log s$  est croissante.

2. La proposition est facile à démontrer lorsque  $\nu$  est une estimation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{\alpha_i}$  sur  $X$ . En effet, posons  $s = \min_{\alpha_i} f$  et  $t = \sup_{\alpha_i} f$ . L'intégrale de  $f$ , qui vaut  $\sum_{i=1}^n a_i s^{1-\beta} t^\beta$  par la proposition 7.6.3, est alors croissante en  $\beta$  : il suffit de vérifier que  $s \leq t$ . Soit  $(Q_i, F_i)^* = \alpha_i$ , et  $x_i \in L_i = Q_i \cap F_i$  un élément tel que  $s = f(x_i)$ . Alors, comme  $x_i \in F_i$ ,  $f(x_i) \leq \sup_{x \in F} f(x) = t$ .

3. Lorsque  $X$  est un cpo continu, cohérent et compact, toute estimation continue  $\nu$  est borne supérieure, dans l'ordre  $\sqsubseteq_{\text{Est}}$ , d'une famille dirigée  $(\nu_i)_{i \in I}$  d'estimations simples, par la proposition 7.4.9. D'autre part, par l'isomorphisme de la proposition 7.4.6,  $\llbracket \nu \rrbracket$  est la borne supérieure

$\sup_{i \in I} \langle \nu_i \rangle$ . Alors, pour tout  $\beta \in ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned}
\iint_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \langle \nu \rangle \left( \square f^{-1} ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \cap \diamond f^{-1} ] t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty [ \right) dt \right] ds \\
&\quad \text{par la proposition 7.6.2} \\
&= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \sup_{i \in I} \langle \nu_i \rangle \left( \square f^{-1} ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \cap \diamond f^{-1} ] t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty [ \right) dt \right] ds \\
&= \sup_{i \in I} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \langle \nu_i \rangle \left( \square f^{-1} ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \cap \diamond f^{-1} ] t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty [ \right) dt \right] ds \\
&\quad \text{par le théorème de Scott-continuité} \\
&\quad \text{pour les intégrales de Riemann de fonctions décroissantes} \\
&= \sup_{i \in I} \iint_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu_i
\end{aligned}$$

Si  $\beta \leq \beta'$ , on a donc :

$$\begin{aligned}
\iint_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu &= \sup_{i \in I} \iint_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu_i \\
&\leq \sup_{i \in I} \iint_{x \in X}^{\beta'} f(x) d\nu_i = \iint_{x \in X}^{\beta'} f(x) d\nu
\end{aligned}$$

en utilisant le point 2.

4. Dans le cas général, on procède comme à la proposition 7.5.9. Pour toute fonction continue bornée  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut étendre  $f$  en une fonction  $\widehat{f}$  continue bornée de  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$  vers  $\mathbb{R}$ , telle que  $\widehat{f}(\eta_{\mathbb{S}}(x)) = f(x)$  pour tout  $x \in X$ , par la proposition 3.9.8. Pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned}
\iint_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \left[ \nu \left( f^{-1} ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \right) - \nu \left( f^{-1} ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \setminus f^{-1} ] t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty [ \right) \right] dt \right] ds \\
&= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \left[ \nu \left( \eta_{\mathbb{S}}^{-1}(\widehat{f}^{-1}) ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \right) - \nu \left( \eta_{\mathbb{S}}^{-1}(\widehat{f}^{-1}) ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \setminus \widehat{f}^{-1} ] t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty [ \right) \right] dt \right] ds \\
&= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \left[ \eta_{\mathbb{S}}[\nu] \left( \widehat{f}^{-1} ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \right) - \eta_{\mathbb{S}}[\nu] \left( \widehat{f}^{-1} ] s^{\frac{1}{1-\beta}}, +\infty [ \setminus \widehat{f}^{-1} ] t^{\frac{1}{\beta}}, +\infty [ \right) \right] dt \right] ds \\
&= \iint_{\vec{b} \in \mathbb{S}^{\circ(X)}}^{\beta} \widehat{f}(\vec{b}) d\eta_{\mathbb{S}}[\nu]
\end{aligned}$$

Mais cette dernière intégrale est croissante en  $\beta$  par le point 3., puisque  $\mathbb{S}^{\circ(X)}$  est un cpo continu, cohérent et compact (propositions 3.9.6 et 3.9.7).  $\square$

▷ **7.6.** C'est évident si  $\nu$  est une estimation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_{\alpha_i}$  sur  $X$ , en utilisant la proposition 7.6.3. En effet, la fonction qui à  $\beta \in ]0, 1[$  associe  $\sum_{i=1}^n a_i s^{1-\beta} \times t^{\beta}$  est patch-continue.

Plus précisément, soit  $a = \sup_{x \in X} f(x)$ , et supposons sans perte de généralité que  $a > 0$ . Alors la  $\beta$ -intégrale de  $f$  se calcule sur des valeurs de  $s$  et de  $t$  comprises entre 0 et  $a$ . Lorsque

$0 < s \leq t \leq a$ , la dérivée en  $\beta$  de  $\sum_{i=1}^n a_i s^{1-\beta} \times t^\beta$  est  $\sum_{i=1}^n a_i \log(t/s) s^{1-\beta} t^\beta$ . Ceci est positif ou nul, trouvons-en un majorant. D'une part,  $\log t s^{1-\beta} t^\beta \leq a \log a$ . D'autre part, la fonction qui à  $s$  associe  $-\log s s^{1-\beta}$  tend vers 0 lorsque  $s$  tend vers 0, et a pour dérivée en  $s$  la quantité  $-(1-\beta) \log s - 1) s^{-\beta}$ . Elle croît donc de  $s = 0$  à  $s = e^{-1/(1-\beta)}$ , puis décroît pour  $s > e^{-1/(1-\beta)}$ . Donc  $-\log s s^{1-\beta}$  atteint son maximum en  $e^{-1/(1-\beta)}$ , qui vaut donc  $1/(e(1-\beta))$ . On en déduit que  $\sum_{i=1}^n a_i \log(t/s) s^{1-\beta} t^\beta \leq \sum_{i=1}^n a_i (a^\beta / (e(1-\beta)) + a \log a) = \nu(X)(a^\beta / (e(1-\beta)) + a \log a)$ .

Pour tous  $\beta_1, \beta_2 \in ]0, 1[$ , avec  $\beta_1 \leq \beta_2$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \iint_{x \in X}^{\beta_2} f(x) d\nu - \iint_{x \in X}^{\beta_1} f(x) d\nu &\leq \nu(X) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left( \frac{a^\beta}{e(1-\beta)} + a \log a \right) d\beta \\ &\leq \nu(X) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left( \frac{a^\beta}{e(1-\beta_2)} + a \log a \right) d\beta \\ &= \nu(X) \left[ \frac{a^\beta}{e(1-\beta_2) \log a} + a\beta \log a \right]_{\beta_1}^{\beta_2} \\ &= \nu(X) \left( \frac{a^{\beta_2} - a^{\beta_1}}{e(1-\beta_2) \log a} + a(\beta_2 - \beta_1) \log a \right) \end{aligned}$$

Notons  $B_{\beta_1, \beta_2}$  la quantité  $(a^{\beta_2} - a^{\beta_1}) / (e(1-\beta_2) \log a) + a(\beta_2 - \beta_1) \log a$ . Il est clair que  $B_{\beta_1, \beta_2}$  tend vers 0 lorsque  $\beta_2$  tend vers  $\beta_1$ .

On en déduit la même inégalité lorsque  $\nu$  est une estimation continue quelconque sur un cpo continu, cohérent et compact  $X$ , en utilisant les propositions 7.4.9 et 7.4.6 : comme au point 3. de l'exercice 7.5,  $\nu$  est borne supérieure d'une famille dirigée d'estimations simples  $\nu_i, i \in I$ , et  $(\nu) = \sup_{i \in I} (\nu_i)$ . Pour tout  $i \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} \iint_{x \in X}^{\beta_2} f(x) d\nu_i &\leq \iint_{x \in X}^{\beta_1} f(x) d\nu_i + \nu_i(X) B_{\beta_1, \beta_2} \\ &\leq \iint_{x \in X}^{\beta_1} f(x) d\nu_i + \nu(X) B_{\beta_1, \beta_2} \end{aligned}$$

En prenant les bornes supérieures sur  $i \in I$  de chaque côté :

$$\iint_{x \in X}^{\beta_2} f(x) d\nu \leq \iint_{x \in X}^{\beta_1} f(x) d\nu + \nu(X) B_{\beta_1, \beta_2}$$

Cette inégalité est encore vraie lorsque  $X$  est un espace topologique quelconque, en utilisant le plongement  $\eta_S : X \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{O}(X)}$ , comme au point 4. de l'exercice 7.5.

En résumant, on a :

$$0 \leq \iint_{x \in X}^{\beta_2} f(x) d\nu - \iint_{x \in X}^{\beta_1} f(x) d\nu \leq \nu(X) B_{\beta_1, \beta_2}$$

pour tous  $\beta_1, \beta_2 \in ]0, 1[$  avec  $\beta_1 \leq \beta_2$ . L'inégalité de gauche est due à l'exercice 7.5. On en déduit aisément que la  $\beta$ -intégrale est patch-continue en tout  $\beta \in ]0, 1[$ .  $\square$

▷ 7.7. Par hypothèse,  $\nu$  est une estimation simple  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_{\alpha_i}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \inf_{\beta \in ]0,1[} \int_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n a_i \min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^{\beta} f \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1 \\ \sup_{\alpha_i} f \neq 0}}^n a_i \min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^{\beta} f \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ \sup_{\alpha_i} f \neq 0}}^n a_i \min_{\alpha_i} f = \sum_{i=1}^n a_i \min_{\alpha_i} f = \int_{x \in X} f(x) d\nu^{\uparrow} \end{aligned}$$

Pour les bornes supérieures, nous aurons besoin du fait que  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in X$ , ce qui implique que pour tout  $i$ ,  $\min_{\alpha_i} f \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in ]0,1[} \int_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu &= \lim_{\beta \rightarrow 1} \sum_{i=1}^n a_i \min_{\alpha_i}^{1-\beta} f \times \sup_{\alpha_i}^{\beta} f \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sup_{\alpha_i} f = \int_{x \in X} f(x) d\nu^{\downarrow} \end{aligned}$$

Si  $f$  s'annule, ceci n'est plus vrai. Par exemple, soit  $X = \{1, 2\}$ , avec la topologie discrète,  $\nu = \mathbf{e}_X$ , et  $f$  telle que  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 1$ . Alors :

$$\int_{x \in X}^{\beta} f(x) d\nu = 0$$

Mais  $\nu^{\downarrow} = \mathbf{e}_X$ , donc :

$$\int_{x \in X} f(x) d\nu^{\downarrow} = \sup_{x \in X} f(x) = 1$$

□

▷ 7.8. La formule d'intégration par parties pour les intégrales de Riemann-Stieltjes donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s) d\chi_{[a_1, b_1]}(s) &= [f\chi_{[a_1, b_1]}]_{s=a}^b - \int_a^b \chi_{[a_1, b_1]}(s) df(s) \\ &= [f\chi_{[a_1, b_1]}]_{s=a}^b - \int_a^{a_1} \chi_{[a_1, b_1]}(s) df(s) - \int_{a_1}^{b_1} \chi_{[a_1, b_1]}(s) df(s) - \int_{b_1}^b \chi_{[a_1, b_1]}(s) df(s) \end{aligned}$$

par la relation de Chasles, où si  $a = a_1$ , une intégrale de  $a$  à  $a_1$  dénote juste 0, et de même pour l'intégrale de  $b_1$  à  $b$  si  $b_1 = b$ . La fonction  $\chi_{[a_1, b_1]}$  ne diffère de 0 qu'en  $a_1$  sur l'intervalle  $[a, a_1]$ , et  $a_1$  n'est pas un point de discontinuité de  $f$ , donc l'intégrale de  $a$  à  $a_1$  est nulle ;  $\chi_{[a_1, b_1]}$  ne diffère

de 0 qu'en  $b_1$  sur l'intervalle  $[b_1, b]$ , et  $b_1$  n'est pas un point de discontinuité de  $f$ , donc l'intégrale de  $b_1$  à  $b$  est elle aussi nulle ; et sur l'intervalle  $[a_1, b_1]$ ,  $\chi_{[a_1, b_1]}$  vaut identiquement 1. Donc :

$$\int_a^b f(s) d\chi_{[a_1, b_1]}(s) = [f\chi_{[a_1, b_1]}]_{s=a}^b + f(a_1) - f(b_1)$$

□

▷ **7.9.** Fixons  $\epsilon > 0$  quelconque. Pour tout  $\eta > 0$ , posons  $M_\beta^\eta(s, t) = M_\beta(\max(s, \eta), \max(t, \eta)) + \min(0, s - \eta)$ . Alors, à  $\eta > 0$  fixé,  $M_\beta^\eta$  converge uniformément vers  $\max(s, \eta) + \min(0, s - \eta) = s$ . En réutilisant les arguments de la proposition 7.6.30, on en déduit que l'intégrale mixte :

$$\iint_{x \in X} f(x) d\nu_{M_\beta^\eta}$$

tend vers l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\nu^\uparrow$  lorsque  $\beta$  tend vers 0, et ce pour tout  $\eta$ . Pour chaque  $\eta > 0$ , l'écart entre l'intégrale mixte ci-dessus, par rapport à  $\nu_{M_\beta^\eta}$ , et l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\nu^\uparrow$  peut être bornée par  $\epsilon/2$  pour  $\beta$  suffisamment proche de 0, disons  $\beta < \delta$ . Nous allons maintenant déterminer une valeur de  $\eta$  (indépendamment de  $\beta$ ) telle que l'écart entre l'intégrale mixte ci-dessus, par rapport à  $\nu_{M_\beta^\eta}$ , et l'intégrale mixte par rapport à  $\nu_{M_\beta}$  soit d'au plus  $\epsilon/2$ . Ainsi, pour  $\beta < \delta$ , l'écart entre l'intégrale mixte par rapport à  $\nu_{M_\beta}$  et l'intégrale de Choquet de  $f$  par rapport à  $\nu^\uparrow$  sera bornée par  $\epsilon$ , et nous aurons terminé.

Pour tout  $c > a, b, \eta$ ,

$$\iint_{[0, c] \times [0, c]} (M_\beta(s, t) - M_\beta^\eta(s, t)) d^2 F_{f, \nu}(s, t) = \iint_{[0, c] \times [0, c]} -\min(0, s - \eta) d^2 F_{f, \nu}(s, t)$$

Or  $-\min(0, s - \eta)$  est positif ou nul, nul dès que  $s \geq \eta$ , et sinon inférieur ou égal à  $\eta$ , donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq \iint_{[0, c] \times [0, c]} (M_\beta(s, t) - M_\beta^\eta(s, t)) d^2 F_{f, \nu}(s, t) &\leq \eta \iint_{[0, c] \times [0, c]} \chi_{[0, \eta](s)} d^2 F_{f, \nu}(s, t) \\ &= \eta [F_{f, \nu}(s, t)]_{s=0}^c \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

soit directement à l'aide de sommes doubles de Darboux-Stieltjes, soit en raisonnant à l'aide de la proposition 7.6.18 comme au lemme 7.6.26. Or  $F_{f, \nu}(s, c) = 0$  pour tout  $s$ , donc  $[F_{f, \nu}(s, t)]_{s=0}^c \Big|_{t=0} = F_{f, \nu}(0, 0) - F_{f, \nu}(\eta, 0)$ . Posons  $W_\eta = f^{-1}[\eta, +\infty[$ ,  $W_0 = f^{-1}[0, +\infty[$ . Alors  $[F_{f, \nu}(s, t)]_{s=0}^c \Big|_{t=0} = F_{f, \nu}(0, 0) - F_{f, \nu}(\eta, 0) = \nu(W_0) - \nu(W_\eta) + \nu(W_\eta \setminus W_0)$  est inférieur, par exemple, à  $2\nu(X)$ , puisque  $\nu$  est monotone. Il suffit donc de prendre  $\eta < \epsilon/(4\nu(X))$ . □

▷ **9.1.** Il suffit de montrer que la topologie haute coïncide avec la topologie d'Alexandroff, puisque ce sont respectivement les topologies  $\mathcal{O}$  la moins fine et la plus fine telles que  $\leq = \leq_{\mathcal{O}}$ . Pour ceci, il suffit de montrer que tout fermé d'Alexandroff  $F$  (un clos par le bas) est un fermé haut. Mais,  $F$  est par définition l'union des  $\downarrow x$ ,  $x \in F$ , et cette union est finie puisque  $X$  est fini. □

▷ **9.2.** D'abord  $\preceq_{\mathfrak{D}}$  est une simulation. En effet, par le lemme 9.1.7, si  $x_1 \preceq_{\mathfrak{D}} x_2$ , alors  $\theta_{\ell}(x_1)(U) \leq \theta_{\ell}(x_2)(U)$  pour tout ouvert  $U$  de la forme  $q_{\mathfrak{D}}^{-1}(V)$ ,  $V$  ouvert de  $X/\mathfrak{D}$ , c'est-à-dire pour tout ouvert  $U$  de  $\mathfrak{D}$ . Or par l'exercice 9.1,  $\mathfrak{D}$  est exactement la topologie d'Alexandroff de  $\preceq_{\mathfrak{D}}$ , donc  $x_1 \preceq_{\mathfrak{D}} x_2$  implique  $\theta_{\ell}(x_1)(U) \leq \theta_{\ell}(x_2)(U)$  pour tout  $U$  clos par le haut pour  $\preceq_{\mathfrak{D}}$  :  $\preceq_{\mathfrak{D}}$  est donc une simulation.

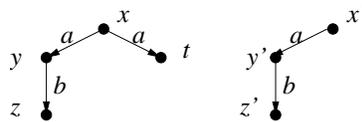
Si  $x_1 \preceq_{\mathfrak{D}} x_2$ ,  $x_1$  est donc similaire à  $x_2$ . Réciproquement, si  $x_1$  est similaire à  $x_2$ , alors il existe une relation de simulation  $\preceq$  telle que  $x_1 \preceq x_2$ . Soit  $\mathfrak{O}$  sa topologie d'Alexandroff. Par définition d'une simulation,  $\mathfrak{O}$  est agglomérante. Donc  $\mathfrak{O}$  est plus fine que  $\mathfrak{D}$ . On en déduit immédiatement que  $x_1 \preceq_{\mathfrak{D}} x_2$ .  $\square$

▷ **9.3.** Supposons que  $\preceq$  soit une simulation. Si  $x_1 \preceq y_1$  et  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ , alors prenons pour  $U$  la clôture par le haut (selon  $\preceq$ ) de  $x_2$ , et écrivons la condition de simulation :  $\theta_{\ell}(x_1)(U) \leq \theta_{\ell}(y_1)(U)$ . Or  $\theta_{\ell}(x_1)(U) = \epsilon_F(U)$  pour un certain  $F$  contenant  $x_2$ , donc  $\theta_{\ell}(x_1)(U) = 1$ . Donc  $\theta_{\ell}(y_1)(U) = 1$ , ce qui implique que  $\theta_{\ell}(y_1)$  est de la forme  $\epsilon_{F'}$  avec  $F'$  qui intersecte  $U$ . Soit  $y_2$  un élément de  $F' \cap U$ . Par définition de  $U$ ,  $x_2 \preceq y_2$ , et par définition de  $F'$ ,  $x_2 \xrightarrow{\ell} y_2$ .

Réciproquement, si le diagramme (9.1) est satisfait, alors supposons  $x_1 \preceq y_1$ , et montrons que  $\theta_{\ell}(x_1)(U) \leq \theta_{\ell}(y_1)(U)$  pour tout  $U$  clos par le haut pour  $\preceq$ . Si  $\theta_{\ell}(x_1)(U) = 0$ , c'est clair. Sinon, soit  $\theta_{\ell}(x_1) = \epsilon_F$ , avec  $F \cap U \neq \emptyset$ . On peut donc choisir  $x_2 \in F \cap U$ , auquel cas  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ . Par le diagramme (9.1),  $\theta_{\ell}(y_1)$  est de la forme  $\epsilon_{F'}$ , et il existe  $y_2 \in F'$  tel que  $x_2 \preceq y_2$ . Mais alors  $\theta_{\ell}(y_1)(U) = \epsilon_{F'}(U) = 1$  puisque  $y_2$  est dans  $F'$  par construction, et dans  $U$  puisque  $x_2 \in U$  et  $U$  est clos par le haut.  $\square$

▷ **9.4.** Clairement,  $\equiv$  est un préordre, qui est une simulation au sens de l'exercice 9.2. Donc  $x_1 \equiv x_2$  implique  $x_1 \preceq_{\mathfrak{D}} x_2$ . Puisque  $\equiv$  est symétrique,  $x_1 \equiv x_2$  implique aussi  $x_1 \preceq_{\mathfrak{D}} x_2$ , donc  $x_1 \equiv_{\mathfrak{D}} x_2$ . Autrement dit, deux états bisimilaires sont semblables.

Le contre-exemple suivant m'a été aimablement fourni par Angelo Troina.



Formellement,  $X = \{x, y, z, t, x', y', z'\}$ ,  $L = \{a, b\}$ ,  $\theta_a(x) = \epsilon_{\{y,t\}}$ ,  $\theta_b(y) = \epsilon_{\{z\}}$ ,  $\theta_a(x') = \epsilon_{\{y'\}}$ ,  $\theta_b(y') = \epsilon_{\{z'\}}$ , et  $\theta_{\ell}$  vaut 0 dans tous les autres cas. Notons  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$  s'il y a une flèche étiquetée  $\ell$  allant de  $x_1$  vers  $x_2$ , autrement dit si  $\theta_{\ell}(x_1) = \epsilon_F$  avec  $x_2 \in F$ . En utilisant l'exercice 9.3, on vérifie que le plus petit préordre  $\preceq$  tel que  $x \preceq x'$ ,  $y \preceq y'$ ,  $t \preceq y'$ ,  $z \preceq z'$  est une simulation telle que  $x \preceq x'$ . On vérifie aussi que le plus petit préordre  $\preceq$  tel que  $x' \preceq x$ ,  $y' \preceq y$ , et  $z' \preceq z$  (mais où  $t$  n'est supérieur ou égal qu'à lui-même) est une simulation telle que  $x' \preceq x$ . Donc  $x$  et  $x'$  sont semblables.

Montrons que  $x$  et  $x'$  ne sont pas bisimilaires. Qu'ils le soient reviendrait à dire qu'on peut trouver une simulation  $\equiv$  symétrique telle que  $x \equiv x'$ . Or, comme  $x \xrightarrow{a} t$ , et que  $x'$  ne peut aller qu'en  $y'$  sur une transition  $a$ , ceci implique que  $t \equiv y'$ . Dans le sens inverse,  $y'$  étant simulé par

$t$ , si l'on regarde la transition  $y' \xrightarrow{b} z'$ , ceci implique qu'il doit exister un état  $x_2$  tel que  $t \xrightarrow{b} x_2$  et  $x_2 \equiv z'$ . Mais c'est impossible.  $\square$

▷ **9.5.** Soit  $\preceq$  une simulation. Supposons  $x_1 \preceq y_1$ . Si  $\ell$  est bloquée en  $y_1$ , c'est que  $\theta_\ell(y_1) = 0$ . Puisque  $\preceq$  est une simulation,  $\theta_\ell(x_1)(U) \leq \theta_\ell(y_1)(U)$  pour tout clos par le haut  $U$  (pour  $\preceq$ ). Pour tout ensemble  $A$ , soit  $U$  sa clôture par le haut : alors  $\theta_\ell(x_1)(A) \leq \theta_\ell(x_1)(U) \leq \theta_\ell(y_1)(U) = 0$ . Donc  $\theta_\ell(x_1) = 0$ , c'est-à-dire que  $\ell$  est bloquée en  $x_1$ . Par contraposée, si  $\ell$  est activée en  $x_1$ , elle est nécessairement aussi activée en  $y_1$ .

Si  $\ell$  est activée en  $x_1$ , alors  $\theta_\ell(x_1)$  est de la forme  $u_Q$ , où  $Q$  est par définition l'ensemble non vide des  $x_2$  tels que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ . Posons alors  $U$  égal à la clôture par le haut (pour  $\preceq$ ) de  $Q$ . Puisque  $\preceq$  est une simulation,  $\theta_\ell(x_1)(U) \leq \theta_\ell(y_1)(U)$ , donc  $1 \leq \theta_\ell(y_1)(U)$ . Ceci implique que  $\theta_\ell(y_1)$  soit de la forme  $u_{Q'}$  avec  $Q' \subseteq U$ , c'est-à-dire que pour tout  $y_2$  tel que  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$  (c'est-à-dire dans  $Q'$ ), il existe un  $x_2$  dans  $Q$  (c'est-à-dire tel que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ ) avec  $x_2 \preceq y_2$ .

Réciproquement, supposons  $x_1 \preceq y_1$ , et montrons que  $\theta_\ell(x_1)(U) \leq \theta_\ell(y_1)(U)$  pour tout clos par le haut  $U$ . Si  $\ell$  est bloquée en  $x_1$ , alors  $\theta_\ell(x_1)(U) = 0 \leq \theta_\ell(y_1)(U)$ . Supposons donc  $\ell$  activée en  $x_1$ . On peut donc écrire  $\theta_\ell(x_1) = u_Q$  pour un certain ensemble non vide  $Q$ . De plus, comme  $\ell$  est activée en  $x_1$ , elle l'est aussi en  $y_1$ , donc on peut écrire  $\theta_\ell(y_1) = u_{Q'}$  pour un certain ensemble non vide  $Q'$ . Pour tout  $y_2 \in Q'$ , par définition  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$ , donc par le diagramme (9.2) il existe  $x_2 \preceq y_2$  tel que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ ; autrement dit il existe  $x_2 \in Q$  tel que  $x_2 \preceq y_2$ . Donc  $Q'$  est inclus dans la clôture par le haut (pour  $\preceq$ ) de  $Q$ . Pour tout  $U$  clos par le haut (pour  $\preceq$ ),  $Q \subseteq U$  implique donc  $Q' \subseteq U$ . Donc  $u_Q(U) = 1$  implique  $u_{Q'}(U) = 1$ , c'est-à-dire  $\theta_\ell(x_1)(U) \leq \theta_\ell(y_1)(U)$ .  $\square$

▷ **9.6.** D'après l'énoncé,  $A = \bigcap_{x \notin A} (X \setminus \downarrow_{\circ} x) = \bigcap_{x \notin A} \bigcup_{F/x \neq_{\theta} F} \llbracket F \rrbracket_{\theta}$ , donc :

$$\overset{\circ}{A} = \left[ \bigwedge_{x \notin A} \bigvee_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ x \neq_{\theta} F_V}} F_V \right]_{\theta}$$

On peut donc se contenter de conjonctions infinies de cardinalité  $|X|$ , les disjonctions infinies restant de cardinalité bornée par  $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{O}(X)|$ . Tout dépend donc si  $|X|$  est plus petit ou non que  $|\mathcal{O}(X)|$ . En général, on y gagne.  $\square$

▷ **9.7.** Désolé, nous ne referons pas les démonstrations, qui sont entièrement similaires aux cas déjà vus.  $\square$

▷ **9.8.** Ceci est vrai en général dans tout espace analytique (aussi dit souslinien), voir Danos et al. (2006). Dans le cas où  $X$  est fini, l'argument est simple.

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont bisimilaires, disons  $x_1 \equiv x_2$  où  $\equiv$  est une bisimulation. La famille  $\mathcal{T}'$  des ensembles  $\equiv$ -saturés est stable par union finie et complémentaires. C'est donc une tribu, puisque les seules unions que l'on peut former sont finies. Pour tout  $E \in \mathcal{T}'$ , montrons que  $\theta_\ell^{-1}[E > r]$

est dans  $\mathcal{T}'$ , c'est-à-dire est  $\equiv$ -saturé. Soit donc  $x \in \theta_\ell^{-1}[E > r]$  et  $x \equiv y$ . Par définition,  $\theta_\ell(x)(E) > r$ . Comme  $\equiv$  est une bisimulation, et  $x \equiv y$ , on a  $\theta_\ell(y)(E) > r$ , c'est-à-dire que  $y$  aussi est dans  $\theta_\ell^{-1}[E > r]$ . Donc  $\theta_\ell^{-1}[E > r]$  est  $\equiv$ -saturé, c'est-à-dire dans  $\mathcal{T}'$ . Donc  $\mathcal{T}'$  est agglomérante. En particulier,  $\mathcal{T}'$  est plus fine que  $\mathcal{T}$ , donc  $x_1 \equiv_{\mathcal{T}} x_2$ .

Réciproquement, supposons  $x_1 \equiv_{\mathcal{T}} x_2$ , et montrons que  $x_1$  et  $x_2$  sont bisimilaires. Il suffit démontrer que  $\equiv_{\mathcal{T}}$  est une bisimulation. Soit  $E$  un ensemble  $\equiv_{\mathcal{T}}$ -saturé. Pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $\theta_\ell^{-1}[E > r]$  est dans  $\mathcal{T}$ . Supposons maintenant  $x \equiv_{\mathcal{T}} y$ . Comme  $\theta_\ell^{-1}[E > r] \in \mathcal{T}$  est  $\equiv_{\mathcal{T}}$ -saturé,  $x \in \theta_\ell^{-1}[E > r]$  si et seulement si  $y \in \theta_\ell^{-1}[E > r]$ . Donc  $\theta_\ell(x)(E) > r$  si et seulement si  $\theta_\ell(y)(E) > r$ , pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ . Il s'ensuit que  $\theta_\ell(x)(E) = \theta_\ell(y)(E)$ . Donc  $\equiv_{\mathcal{T}}$  est une bisimulation.  $\square$

▷ **9.9.** Supposons que  $\equiv$  soit une bisimulation. Si  $x_1 \equiv y_1$  et  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ , alors prenons pour  $E$  la classe d'équivalence (pour  $\equiv$ ) de  $x_2$ , et écrivons la condition de bisimulation :  $\theta_\ell(x_1)(E) = \theta_\ell(y_1)(E)$ . Or  $\theta_\ell(x_1)(E) = \epsilon_F(E)$  pour un certain  $F$  contenant  $x_2$ , donc  $\theta_\ell(x_1)(E) = 1$ . Donc  $\theta_\ell(y_1)(E) = 1$ , ce qui implique que  $\theta_\ell(y_1)$  est de la forme  $\epsilon_{F'}$  avec  $F'$  qui intersecte  $E$ . Soit  $y_2$  un élément de  $F' \cap E$ . Par définition de  $E$ ,  $x_2 \equiv y_2$ , et par définition de  $F'$ ,  $x_2 \xrightarrow{\ell} y_2$ .

Réciproquement, supposons  $x_1 \equiv y_1$ , et montrons que  $\theta_\ell(x_1)(E) = \theta_\ell(y_1)(E)$  pour tout  $E$   $\equiv$ -saturé. Si  $\theta_\ell(x_1)(E) = 0$  et  $\theta_\ell(y_1)(E) = 0$ , c'est clair. Sinon,  $\theta_\ell(x_1)(E)$  ou  $\theta_\ell(y_1)(E)$  est non nul. Par symétrie, supposons que  $\theta_\ell(x_1)(E) \neq 0$ . Alors  $\theta_\ell(x_1) = \epsilon_F$ , avec  $F \cap E \neq \emptyset$ . On peut donc choisir  $x_2 \in F \cap E$ , auquel cas  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ . Par hypothèse, sachant que  $x_1 \equiv y_1$ , il existe un état  $y_2$  tel que  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$  et  $y_1 \equiv y_2$ . En particulier,  $\theta_\ell(y_1)$  est de la forme  $\epsilon_{F'}$ , avec  $y_2 \in F'$ . Mais alors  $\theta_\ell(y_1)(E) = \epsilon_{F'}(E) = 1$  puisque  $y_2$  est dans  $F'$ , et dans  $E$  puisque  $x_2 \in E$  et  $E$  est  $\equiv$ -saturé.  $\square$

▷ **9.10.** Soit  $\equiv$  une bisimulation. Supposons  $x_1 \equiv y_1$ . Si  $\ell$  est bloquée en  $y_1$ , c'est que  $\theta_\ell(y_1) = 0$ . Puisque  $\equiv$  est une simulation,  $\theta_\ell(x_1)(E) = \theta_\ell(y_1)(E)$  pour tout  $E$   $\equiv$ -saturé. Pour tout ensemble  $A$ , soit  $E$  son  $\equiv$ -saturé : alors  $\theta_\ell(x_1)(A) \leq \theta_\ell(x_1)(E) = \theta_\ell(y_1)(E) = 0$ . Donc  $\theta_\ell(x_1) = 0$ , c'est-à-dire que  $\ell$  est bloquée en  $x_1$ . Par contraposée, si  $\ell$  est activée en  $x_1$ , elle est nécessairement aussi activée en  $y_1$ . Comme  $\equiv$  est symétrique, les actions activées en  $x_1$  sont exactement celles qui sont activées en  $y_1$ .

Si  $\ell$  est activée en  $x_1$ , donc aussi en  $y_1$ , alors  $\theta_\ell(x_1)$  est de la forme  $u_Q$ , où  $Q$  est par définition l'ensemble non vide des  $x_2$  tels que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ . De même,  $\theta_\ell(y_1)$  est de la forme  $u_{Q'}$ , où  $Q'$  est l'ensemble non vide des  $y_2$  tels que  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$ . Posons alors  $E$  égal au  $\equiv$ -saturé de  $Q$ . Puisque  $\equiv$  est une bisimulation,  $\theta_\ell(x_1)(E) = \theta_\ell(y_1)(E)$ , donc  $1 = \theta_\ell(y_1)(E)$ . Ceci implique  $Q' \subseteq E$ . Autrement dit, pour tout  $y_2$  tel que  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$  (c'est-à-dire dans  $Q'$ ), il existe un  $x_2$  dans  $Q$  (c'est-à-dire tel que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ ) avec  $x_2 \equiv y_2$ .

Réciproquement, supposons  $x_1 \equiv y_1$ , et montrons que  $\theta_\ell(x_1)(E) = \theta_\ell(y_1)(E)$  pour tout  $E$   $\equiv$ -saturé. Si  $\ell$  est bloquée en  $x_1$ , donc aussi en  $y_1$ , alors  $\theta_\ell(x_1)(E) = 0 = \theta_\ell(y_1)(E)$ . Supposons donc  $\ell$  activée en  $x_1$  et en  $y_1$ . On peut donc écrire  $\theta_\ell(x_1) = u_Q$  pour un certain ensemble non vide  $Q$ , et  $\theta_\ell(y_1) = u_{Q'}$ ,  $Q' \neq \emptyset$ . Pour tout  $y_2 \in Q'$ , par définition  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$ , donc par hypothèse il existe  $x_2 \equiv y_2$  tel que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ ; autrement dit il existe  $x_2 \in Q$  tel que  $x_2 \equiv y_2$ . Donc

$Q'$  est inclus dans le  $\equiv$ -saturé de  $Q$ . Pour tout  $E \equiv$ -saturé,  $Q \subseteq E$  implique donc  $Q' \subseteq E$ . Donc  $u_Q(E) = 1$  implique  $u_{Q'}(E) = 1$ , c'est-à-dire  $\theta_\ell(x_1)(E) \leq \theta_\ell(y_1)(E)$ . Par symétrie,  $\theta_\ell(y_1)(E) = \theta_\ell(x_1)(E)$ , d'où l'égalité.

Appelons a-bisimulation une bisimulation au sens angélique de l'exercice 9.9, et d-bisimulation une bisimulation au sens démoniaque qui nous occupe. Il ne reste plus qu'à observer que les deux notions coïncident. Vu que  $\equiv$  est symétrique, la seule différence entre les deux notions est qu'une d-bisimulation est une a-bisimulation  $\equiv$  telle qu'en plus pour tous  $x_1 \equiv y_1$ ,  $x_1$  et  $y_1$  ont les mêmes transitions activées. Or cette dernière condition est vérifiée par toute a-bisimulation  $\equiv$  : si  $\ell$  est activée en  $x_1$  et  $x_1 \equiv y_1$ , par hypothèse il existe un état  $x_2$  tel que  $x_1 \xrightarrow{\ell} x_2$ , donc comme  $\equiv$  est une a-bisimulation, il existe un état  $y_2$  tel que  $y_1 \xrightarrow{\ell} y_2$  et  $x_2 \equiv y_2$ , ce qui implique que  $\ell$  est activée en  $y_1$  ; par symétrie, si  $\ell$  est activée en  $y_1$ , elle l'est aussi en  $x_1$ .  $\square$

▷ **11.1.** On suppose tous les  $a_i$  non nuls. D'abord,  $\nu$  est à support dans  $Q$  si et seulement si  $\nu^\perp(X \setminus Q) = 0$ . Or, par le lemme 6.2.8,  $\nu^\perp = \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_{Q_i}$ , donc  $\nu^\perp(X \setminus Q) = 0$  si et seulement si  $\epsilon_{Q_i}(X \setminus Q) = 0$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire si et seulement si  $Q_i \subseteq Q$ . Le support de  $\nu$  est donc l'union  $\bigcup_{i=1}^n Q_i$  (qui est bien un compact saturé).  $\square$

▷ **11.2.** Si  $\nu$  est la valuation nulle, alors le support et le co-support de  $\nu$  sont vides, donc  $L$  est vide. Il est alors clair que  $\nu$  est à support et à co-support dans  $L$ .

Sinon, notons que  $\nu(X \setminus F) = 0$ . Si  $L$  était vide,  $Q$  serait inclus dans  $X \setminus F$ , donc  $\nu^\dagger(Q)$  serait nul, par définition de  $\nu^\dagger$ . Par le fait 11.7.15, on aurait  $\nu(X) = 0$  : contradiction. Donc  $L$  est non vide.

Pour tout ouvert  $U$  contenant  $L = Q \cap F$ ,  $U \cup (X \setminus F)$  contient  $Q$ , donc  $\nu(U \cup (X \setminus F)) = \nu(X)$ . Puisque  $\nu$  est une valuation, ceci implique  $\nu(U) + \nu(X \setminus F) - \nu(U \cap (X \setminus F)) = \nu(X)$ . Or  $\nu(X \setminus F) = 0$  puisque  $F$  est le co-support de  $\nu$ . Donc  $\nu(U) = \nu(X) + \nu(U \cap (X \setminus F))$ . Comme  $\nu(U) \leq \nu(X)$ , on en déduit  $\nu(U) = \nu(X)$  d'une part, et  $\nu(U \cap (X \setminus F)) = 0$  d'autre part. La première égalité, lorsque  $U$  varie, implique que  $\nu$  est à support dans  $L$ .

En utilisant le lemme 11.7.28,  $\nu^\perp$  est à support dans l'intersection du support  $F$  de  $\nu^\perp$  et du co-support  $Q$  de  $\nu^\perp$ , c'est-à-dire  $L$  de nouveau. En remplaçant  $\nu$  par  $\nu^\perp$ , nous avons démontré que  $\nu^\perp$  était alors à support dans  $L$  dans  $X^d$ . Par le fait 11.7.15,  $\nu^{\perp\perp}(X \setminus L) = 0$ . Or  $L \subseteq F$ , donc  $X \setminus L \supseteq X \setminus F$ . Il est facile de vérifier que  $\nu^{\perp\perp}$ , qui est définie non seulement sur les ouverts de  $X$  mais sur toutes les parties de  $X$ , est monotone. Donc  $\nu^{\perp\perp}(X \setminus F) \leq \nu^{\perp\perp}(X \setminus L) = 0$ . Par le lemme 6.2.7,  $\nu(X \setminus F) = 0$ , donc  $\nu$  est à co-support dans  $F$ .  $\square$

▷ **11.3.** On peut tenter de le démontrer en utilisant le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, comme au lemme 11.7.21. Pour tout  $\varphi \in \langle Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ , on pose  $p(\varphi) = \sup_{G \in \mathcal{F}} \varphi(G) = \varphi^*(\mathcal{F})$ . La fonction  $p$  est sous-linéaire et croissante, et de plus à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . On pose d'autre part  $q(\varphi) = \sup_{\substack{f \in \langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle \\ \forall G' \in \mathcal{F} : G'(f) \leq \varphi(G')}} G(f)$ . On peut vérifier que  $q$  est sur-linéaire et croissante, et que  $q \leq p$ . Ceci permet d'utiliser le théorème du sandwich de Roth 3.12.2, pour obtenir une prévision linéaire  $\mathcal{G}_0$  telle que  $q \leq \mathcal{G}_0 \leq p$ . Dans le cas où  $G$  est normalisée, on aura  $q(\chi_Y) \geq G(\chi_X) = 1$ , et  $p(\chi_Y) = 1$ , donc  $\mathcal{G}_0$  sera normalisée. Cet argument ne fonctionne plus dans le cas où  $G$  est

---

sous-normalisée. De plus,  $\mathcal{G}_0$  n'est pas nécessairement continue, et l'utilisation de la formule de Scott, c'est-à-dire définir  $\mathcal{G} = \tau(\mathcal{G}_0)$ , et  $\mathcal{P} = \gamma_e(\mathcal{G})$ , ne mène pas directement à la solution souhaitée. Il n'est notamment pas clair que  $\mathcal{G}$  soit normalisée.

En revanche, on peut remarquer que  $G \leq \bigsqcup \mathcal{F}$  signifie que  $G \in CPeau_{\leq 1}(\bigsqcup \mathcal{F})$  (resp.,  $G \in CPeau_1(\bigsqcup \mathcal{F})$ ), donc que  $G \in \downarrow Conv^*(\mathcal{F})$  par la proposition 11.7.44 (resp., la proposition 11.7.40). Mais ceci est exactement ce que l'on demandait de démontrer.  $\square$

▷ **11.4.** Le fait que  $CCoeur_1 \dashv \sqcap$  soit une surrection de Galois (théorème 11.7.11) énonce en particulier, outre le fait que  $\sqcap CCoeur_1(F^-) = F^-$  pour toute fourchette continue normalisée  $F = (F^-, F^+)$ , que  $CCoeur_1(\sqcap \uparrow L) \supseteq \uparrow L$  pour toute lentille  $L$ . Le fait que  $\sqcup \dashv CPeau_1$  soit une insertion de Galois (théorème 11.7.26) implique lui que  $cl(L) \subseteq CPeau_1(\sqcup cl(L))$ . Vu que  $CCoeur_1(F) = \uparrow CCorps_1(F)$  et  $CPeau_1(F) = \downarrow CCorps_1(F) = cl(CCorps_1(F))$  par la proposition 11.7.50, on en déduit  $\uparrow CCorps_1(\sqcap \sqcup L) \supseteq \uparrow L$  et  $cl(L) \subseteq cl(CCorps_1(\sqcap \sqcup L))$ . Mais l'une des deux inclusions est, quoi que l'on fasse, dans le mauvais sens. Par exemple, la condition  $\sqcap \sqcup CCorps_1(F) = F$  serait  $\uparrow CCorps_1(\sqcap \sqcup L) \supseteq \uparrow L$  et  $cl(CCorps_1(\sqcap \sqcup L)) \subseteq cl(L)$ .  $\square$

# Bibliographie

- Abramsky, S. and Jung, A. (1994). Domain theory. In Abramsky, S., Gabbay, D. M., and Maibaum, T. S. E., editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3, pages 1–168. Oxford University Press.
- Alvarez-Manilla, M. (2000). *Measure Theoretic Results for Continuous Valuations on Partially Ordered Spaces*. PhD thesis, University of London and Imperial College.
- Bauer, C. (2003). Products of convex measures : A Fubini theorem. Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere 07-03, Universität Bayreuth.
- Bourbaki, N. (1971). *Topologie générale*. Eléments de Mathématique. Diffusion C.C.L.S. Chapitres 1–4.
- Bourbaki, N. (1974). *Topologie générale*. Eléments de Mathématique. Diffusion C.C.L.S. Chapitres 5–10.
- Danos, V., Desharnais, J., Laviolette, F., and Panangaden, P. (2006). Bisimulation and cocongruence for probabilistic systems. *Information and Computation*, 204(4) :503–523. Special issue for selected papers from CMCS04, 22 pages.
- Demailly, J.-P. (2005). Théorie élémentaire de l’intégration — propositions pour un premier cours d’introduction à l’intégrale. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>.
- Desharnais, J., Edalat, A., and Panangaden, P. (2002). Bisimulation for labelled Markov processes. *Information and Computation*, 179(2) :163–193.
- Desharnais, J., Gupta, V., Jagadeesan, R., and Panangaden, P. (2004). Metrics for labelled Markov processes. *Theoretical Computer Science*, 318 :323–354.
- Edalat, A. (1995). Domain theory and integration. *Theoretical Computer Science*, 151 :163–193.
- Erné, M. (1991). The ABC of order and topology. In *Category Theory at Work, Proc. Workshop*, volume 18 of *Research and Exposition in Mathematics*, pages 57–83, Bremen, Germany.
- Escardó, M. and Heckmann, R. (2001–2002). Topologies on spaces of continuous functions. *Topology Proceedings*, 26(2) :545–564.

- Escardó, M., Lawson, J., and Simpson, A. (2004). Comparing cartesian closed categories of (core) compactly generated spaces. *Topology and Its Applications*, 143(1–3) :105–146.
- Ghani, N. and Uustalu, T. (2004). Coproducts of ideal monads. *Theoretical Informatics and Applications*, 38(4) :321–342. Extended abstract in Z. Ésik, I. Walukiewicz, ed., Proc. of Int. Workshop on Fixed Points in Computer Science, FICS'03 (Warsaw, Apr. 2003), pp. 32-36. Warsaw Univ., 2003.
- Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M., and Scott, D. S. (1980). *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer Verlag.
- Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M., and Scott, D. S. (2003). Continuous lattices and domains. In *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, volume 93. Cambridge University Press.
- Gilboa, I. and Schmeidler, D. (1992). Additive representation of non-additive measures and the Choquet integral. Discussion Papers 985, Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science.
- Goubault-Larrecq, J. (2005). Extensions of valuations. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(2) :271–297.
- Goubault-Larrecq, J. (2007). On Noetherian spaces. In *22nd Annual Symposium in Logic in Computer Science (LICS'07)*, Wrocław, Pologne. IEEE Computer Society Press.
- Grothendieck, A. (1960). *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : I. Le langage des schémas*, volume 4. Publications mathématiques de l'I.H.É.S. pages 5–228.
- Heckmann, R. (1990). *Power Domain Constructions (Potenzbereich-Konstruktionen)*. PhD thesis, Universität des Saarlandes.
- Heckmann, R. (1996). Spaces of valuations. In Andima, S., Flagg, R. C., Itzkowitz, G., Kong, Y., Kopperman, R., and Misra, P., editors, *Papers on General Topology and Applications : 11th Summer Conference at the University of Southern Maine*, volume 806 of *Annals of the New York Academy of Sciences*, pages 174–200, New York, USA.
- Heckmann, R. (1997). Abstract valuations : A novel representation of Plotkin power domain and Vietoris hyperspace. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 6. In Proc. 13th Intl. Sympoñ Mathematical Foundations of Programming Semantics (MFPS'97).
- Jones, C. (1990). *Probabilistic Non-Determinism*. PhD thesis, University of Edinburgh. Technical Report ECS-LFCS-90-105.
- Jung, A. (1998). *Cartesian Closed Categories of Domains*. PhD thesis, Technische Hochschule Darmstadt.

- Jung, A. (2004). Stably compact spaces and the probabilistic powerspace construction. In Desharnais, J. and Panangaden, P., editors, *Domain-theoretic Methods in Probabilistic Processes*, volume 87 of *Electronic Lecture Notes in Computer Science*. Elsevier. 15pp.
- Jung, A. and Tix, R. (1998). The troublesome probabilistic powerdomain. In Edalat, A., Jung, A., Keimel, K., and Kwiatkowska, M., editors, *Proc. 3rd Workshop on Computation and Approximation*, volume 13 of *Electronic Lecture Notes in Computer Science*. Elsevier. 23pp.
- Keimel, K. and Lawson, J. (2005). Measure extension theorems for  $T_0$ -spaces. *Topology and its Applications*, 149(1–3) :57–83.
- Kelly, G. M. (1980). A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves and so on. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 22 :1–83.
- Kirch, O. (1993). *Bereiche und Bewertungen*. Master’s thesis, Technische Hochschule Darmstadt.
- Larsen, K. G. and Skou, A. (1991). Bisimulation through probabilistic testing. *Information and Computation*, 94 :1–28.
- Lawson, J. (1988). The versatile continuous order. In Main, M. G., Melton, A., Mislove, M., and Schmidt, D., editors, *Proc. Mathematical Foundations of Programming Language Semantics (MFPLS’87)*. Springer-Verlag LNCS 298.
- Lawvere, F. W. (2002). Metric spaces, generalized logic, and closed categories. *Reprints in Theory and Applications of Categories*, (1) :1–27. Originally published in *Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano*, XLIII (1973), 135–166.
- Lüth, C. (1997). *Categorical Term Rewriting : Monads and Modularity*. PhD thesis, University of Edinburgh.
- Maaß, S. (2001). Coherent lower previsions as exact functionals and their (sigma-)core. In Cooman, G. D., Fine, T., and Seidenfeld, T., editors, *Proceedings of the 2nd Intl. Symp. Imprecise Probabilities and their Applications (ISIPTA’01)*, pages 230–236, Ithaca, NY.
- Maass, S. (2003). Continuous linear representation of coherent lower previsions. In Bernard, J.-M., Seidenfeld, T., and Zaffalon, M., editors, *Proc. 3rd Intl. Symp. on Imprecise Probabilities and Their Applications (ISIPTA’03)*, pages 371–381, Lugano, Switzerland. Carleton Scientific Proceedings in Informatics 18.
- Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag.
- Manes, E. G. (1976). *Algebraic Theories*, volume 26 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag.

- Mislove, M. (1998). Topology, domain theory and theoretical computer science. *Topology and Its Applications*, 89 :3–59.
- Moggi, E. (1991). Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 93 :55–92.
- Papadimitriou, C. H. (1994). *Computational Complexity*. Addison-Wesley.
- Plotkin, G. (2006). A domain-theoretic Banach-Alaoglu theorem. *Mathematical Structures in Computer Science*, 16 :299–311.
- Rosenmuller, J. (1971). On core and value. *Methods of Operations Research*, 9 :84–104.
- Rosenmuller, J. (1972). Some properties of convex set functions, part II. *Methods of Operations Research*, 17 :287–307.
- Schmeidler, D. (1989). Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57 :571–587.
- Schrijver, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming*. Interscience Series on Discrete Mathematics and Optimization. Wiley. 484 pages.
- Shapley, L. S. (1965). Notes on  $n$ -person games VII : Cores of convex games. The Rand Corporation R. M.
- Shapley, L. S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1 :12–26.
- Smyth, M. (1977). Effectively given domains. *Theoretical Computer Science*, 5 :257–274.
- Stanley, R. P. (1986). *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey.
- Sünderhauf, P. (1997). Spaces of valuations as quasimetric domain. In Edalat, A., Jung, A., Keimel, K., and Kwiatkowska, M., editors, *Proceedings of the 3rd Workshop on Computation and Approximation (Comprox III)*, volume 13 of *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Birmingham, England. Elsevier.
- Taylor, P. (2006). Computably based locally compact spaces. *Logical Methods in Computer Science*, 2(1).
- Tix, R. (1995). *Stetige Bewertungen auf topologischen Räumen*. Diplomarbeit, TH Darmstadt.
- Tix, R., Keimel, K., and Plotkin, G. (2005). Semantic domains for combining probability and non-determinism. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 129 :1–104.
- Varacca, D. (2002). The powerdomain of indexed valuations. In *Proc. 17th Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science (LICS'02)*, pages 299–308, Copenhagen. IEEE Computer Society Press.

Walley, P. (1991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, London.



# Table des figures

2.1	Quelques inclusions utiles de classes d'espaces topologiques . . . . .	23
3.1	Comment approximer une lentille $L = Q \cap F$ . . . . .	69
3.2	Décomposition de $K$ tel que $\pi_1 K = I, \pi_2 K = J$ . . . . .	124
3.3	La construction du sandwich de Roth . . . . .	125
3.4	Simplexes standard en faible dimension . . . . .	135
4.1	Une fonction étagée . . . . .	146
4.2	Une fonction comonotone en son premier argument mais pas en son second . . .	176
5.1	Crédibilités sur $X = \{1, 2, \top\}$ . . . . .	223
5.2	L'ouvert $[\square U_1 \cup \square U_2 > 1/2]$ . . . . .	224
5.3	Les $Q$ du lemme 5.7.1 . . . . .	227
10.1	Une prévision basse sur $X = [2]$ . . . . .	447
10.2	Subdivision barycentrique . . . . .	447
10.3	Une prévision basse colinéaire sur $[2]$ . . . . .	450
10.4	Une prévision basse colinéaire et un élément de son âme . . . . .	451
10.5	Le théorème de Rosenmuller . . . . .	452
10.6	Un drapeau ouvert . . . . .	454
12.1	Sémantique du $\lambda$ -calcul monadique . . . . .	582
12.2	$F; \delta$ est linéaire sur un polygone inclus dans une face de $SD(\Delta_m)$ . . . . .	585
12.3	Repliage de $SD(\Delta_n)$ sur le bord de $\Delta_m$ pour $n = 1, m = 2$ . . . . .	585
12.4	Repliage de $SD(\Delta_n)$ sur le bord de $\Delta_m$ pour $n = 2, m = 6$ . . . . .	586
12.5	$SD^2(\Delta_n)$ dans le cas $n = 2$ . . . . .	587
12.6	$F; \delta$ dans un cas remarquable . . . . .	587
12.7	Approximation simpliciale . . . . .	589

## Index

### Symbols

équivalence topologique d'hémi-distances 106

### A

A-estimation ..... 291

A-valuation ..... 79

accessible (espace) ..... 13

action ..... 353

activée (action) ..... 400, 423

additif (cône) ..... 130

addition (+) ..... 35

additive (pré-mesure) ..... 44

additive sur les fonctions comonotones 441

adhérence ..... 13

agglomérante (famille de tests) ..... 394

agglomérante (topologie) ..... 394

agglomérante (tribu) ..... 420

agglomération ..... 391

algébrique (cpo) ..... 18

âme  $Core(\nu)$  ..... 450, 456

âme continue  $CCore(\nu)$  ..... 456

amincissement ..... 116

angélique (prévision) ..... 469

antisymétrique (relation) ..... 15

approximation (relation d') ..... 17

arc (d'un graphe) ..... 202

arithmétique (treillis) ..... 90

astuce d'Alvarez-Manilla ..... 255, 492

astuce d'Edalat ..... 96, 221, 493

atomique (formule) ..... 355, 412, 427, 433

automate ..... 377

axiome du choix ..... 26

### B

barycentre ..... 136, 137, 140, 142, 447, 520

base calculable ..... 375

base d'un ensemble ordonné ..... 18

base effectivement décrite ..... 363

basse (prévision) ..... 441

beau préordre ..... 25

bi-fortement convexe ..... 544

bien au-dessous ( $\ll$ ) ..... 17, 204, 481

bien au-dessous ( $\ll_1$ ) ..... 96, 221, 255, 481

bien au-dessous ( $\subseteq$ ) ..... 20

bien au-dessous ( $\subseteq_{\perp}$ ) ..... 493

bien au-dessus ( $\gg$ ) ..... 254, 260

bien au-dessus ( $\gg_1$ ) ..... 255

bien filtrant ..... 19

bien fondé (ordre) ..... 25

bilatère (système de transitions ludique) 410

bisimilarité ..... 400

bisimulation ..... 391, 400, 422

blocage ..... 380

bloquée (action) ..... 400, 423

bonté ..... 327

borné (contexte, environnement) ..... 380

borné positif ..... 380

borne inférieure ..... 16

borne supérieure ..... 16

bornée (fonction de transition  $\vartheta$ ) .. 475, 541

bornée (fonction) ..... 145

bornée (hémi-distance) ..... 106

bornée (mesure) ..... 44

bornée (valuation) ..... 33, 36

boule ouverte ..... 33, 104

### C

$C^1$  (fonction) ..... 38

C-espace ..... 18

calculable ..... 376

capacité ..... 30, 44, 202

centre ..... 104, 107

chaîne de Markov ..... 353

chaîne finie croissante ..... 29

changement de variables ..... 40, 42, 154

circuit ..... 383

clos par le bas ..... 14, 16

clos par le haut ..... 14, 16

clos par le haut dans  $A$  ..... 95, 201

co-fortement convexe ..... 529

co-support (d'un jeu) . . . . .	139, 528	convexe (sous-ensemble) . . . . .	34, 124, 538
coagglomérante (cotopologie) . . . . .	413	convexe (système de transitions ludique) . . . . .	354
cocompact . . . . .	21	convexité bi-forte . . . . .	544
cocontinue (capacité) . . . . .	239	convexité co-forte . . . . .	529
code . . . . .	363, 375	convexité forte . . . . .	522
cœur . . . . .	512	corps (d'une fourchette) . . . . .	538
cofinale . . . . .	210	correctement ordonné (espace) . . . . .	20
cohérent (espace) . . . . .	20	correspondance de Galois . . . . .	27
colinéaire (prévision) . . . . .	441	cosaturé . . . . .	14
comonotone . . . . .	158, 176	cotopologie . . . . .	413
compact . . . . .	14	cotopologie associée . . . . .	413
compact finitaire . . . . .	14	cotopologie coagglomérante . . . . .	413
compatibles (drapeaux) . . . . .	455	cotopologie duale . . . . .	413
composition séquentielle . . . . .	542	cotopologie engendrée . . . . .	414
composition séquentielle . . . . .	475	cotopologie plus fine . . . . .	413
$\leq$ -concave (prévision) . . . . .	469	coupe à travers un réseau . . . . .	202
concave (capacité, jeu) . . . . .	30, 45	cpo . . . . .	17
concave (fonction) . . . . .	34, 155	cpo algébrique . . . . .	18
concave (système de transitions ludique) . . . . .	354	cpo continu . . . . .	17
condition de chaîne croissante . . . . .	372	crédibiliste (système de transitions ludique) . . . . .	354
condition de chaîne croissante . . . . .	374	crédibilité (loi de) . . . . .	30
cône . . . . .	35	crédibilité simple . . . . .	200
cône continu . . . . .	130	crédo . . . . .	424
cône continu additif . . . . .	130	croissant . . . . .	44
cône ordonné . . . . .	35	croissant élémentaire . . . . .	293
cône topologique . . . . .	35	croissante (fonction) . . . . .	16, 441
conjonction (et, $\wedge$ ) . . . . .	293, 355, 412, 427, 433		
conservation du débit . . . . .	202	<b>D</b>	
contenance . . . . .	202	d-cône . . . . .	35
contexte . . . . .	379	$\delta$ -fine . . . . .	38
continu (capacité, jeu) . . . . .	30	de Groot (dual de) . . . . .	21
continu (ensemble ordonné, cpo) . . . . .	17	débit . . . . .	202
continue ( $\mathbf{A}$ -valuation) . . . . .	79	définissable . . . . .	367, 370
continue (fonction) . . . . .	15, 105	définissable (ouvert) . . . . .	364
continue (prévision) . . . . .	441	démoniaque (prévision) . . . . .	469
continuité uniforme . . . . .	40	densité positive . . . . .	330
convergence (de suite) . . . . .	33	dérivable . . . . .	38
convergence monotone (espace) . . . . .	19	dérivée . . . . .	38
convergence simple . . . . .	168	diamètre (d'une somme de Darboux) . . . . .	37
converger vers (limite) . . . . .	24	Dirac (évaluation de) . . . . .	31
$\leq$ -convexe (prévision) . . . . .	469	dirigée (famille, partie) . . . . .	17
convexe (capacité, jeu) . . . . .	30, 45	disjonction (ou, $\vee$ ) . . . . .	293, 355, 412, 427, 433
convexe (fonction) . . . . .	157		

- distance ..... 33  
 distance d'un point  $x$  à une partie  $A$  ... 115  
 distance de Hausdorff ..... 104  
 distance de Levy-Prohorov ..... 104  
 distance ultramétrique ..... 33  
 distingue (test) ..... 393  
 domaine ..... 18  
 drapeau ..... 453  
 drapeau de  $f$  ..... 453  
 drapeau ouvert ..... 453  
 drapeaux compatibles ..... 455  
 dual (capacité, jeu) ..... 235, 242  
 dual de de Groot ..... 21  
 dualité convexe-concave. 242, 246, 276, 507
- E**
- $\epsilon$ -amincissement ..... 116  
 $\epsilon$ -épaississement ..... 115  
 écorce  $Bark(\nu)$  ..... 463  
 écorce continue  $CBark(\nu)$  ..... 463  
 effectif ..... 367  
 élément fini ..... 18  
 engendrée (cotopologie) ..... 414  
 engendrée (topologie) ..... 15  
 énoncé ..... 361  
 ensemble ordonné ..... 15  
 ensemble ordonné continu ..... 17  
 enveloppe convexe ..... 135  
 environnement ..... 293, 355, 379, 412  
 épaississement ..... 115  
 équations fonctionnelle ..... 380  
 espace  $T_0$  ..... 13, 103  
 espace  $T_1$  ..... 13, 103  
 espace  $T_2$  ..... 13  
 espace à convergence monotone ..... 19  
 espace accessible ..... 13  
 espace Alexandroff-discret ..... 371  
 espace bien filtrant ..... 19  
 espace cohérent ..... 20  
 espace complet ..... 34  
 espace correctement ordonné ..... 20  
 espace de Banach ..... 34  
 espace de Hausdorff ..... 13  
 espace de Hoare  $\mathcal{H}(X)$  ..... 56  
 espace de Hoare topologique  $\mathcal{H}_u(X)$  ..... 62  
 espace de Kolmogoroff ..... 13  
 espace de lentilles fortes  $\mathcal{PL}(X)$  ..... 68  
 espace de Nachbin ..... 20  
 espace de Plotkin  $\mathcal{Pl}(X)$  ..... 64  
 espace de Plotkin topologique  $\mathcal{Pl}_\nu(X)$  .. 72  
 espace de Sierpiński .. 14, 88, 247, 323, 354  
 espace de Smyth  $\mathcal{Q}(X)$  ..... 19, 52  
 espace des lentilles  $\mathcal{L}(X)$  ..... 74  
 espace extrêmement discontinu ..... 43, 354  
 espace faiblement cohérent ..... 373  
 espace fantomatique ..... 371  
 espace finitairement cohérent ..... 22  
 espace finitairement sobre ..... 22  
 espace héli-métrique ..... 103  
 espace localement compact ..... 14  
 espace localement finitaire ..... 21  
 espace localement relativement compact 22,  
 58  
 espace mesurable ..... 44  
 espace métrique ..... 33  
 espace noethérien ..... 372  
 espace relativement cohérent ..... 20, 90  
 espace relativement compact ..... 58  
 espace séparé ..... 13  
 espace sobre ..... 15  
 espace spectral ..... 371  
 espace stablement compact ..... 20  
 espace stablement fantomatique ..... 373  
 espace stablement localement compact .. 20  
 espace stablement localement finitaire ... 22  
 espace stablement localement relativement com-  
 pact ..... 22,  
 90  
 espace stablement relativement compact . 90  
 espace topologique ..... 13  
 espace ultramétrique ..... 33  
 espace vectoriel normé ..... 34  
 estimation ..... 283, 286  
 estimation à l'unanimité ..... 290  
 estimation simple ..... 292  
 estimo ..... 434

étiquette . . . . .	353	fonction pure . . . . .	464
exclusion-inclusion (principe d') . . . . .	31	fonction Scott-continue . . . . .	17
exemple (jeu) . . . . .	235	fonction sous-additive . . . . .	106
expression fonctionnelle . . . . .	379	fonction sous-linéaire . . . . .	35
extension par le bas ( $\nu^*$ ) . . . . .	211	fonction stricte . . . . .	30, 106
extension par le haut ( $\nu_*$ ) . . . . .	262	fonction sur-linéaire . . . . .	35
<b>F</b>		forme linéaire . . . . .	34
face (de $SD(\Delta_n)$ ) . . . . .	446	forme sous-linéaire . . . . .	34
face non dégénérée . . . . .	447	formule . . . . .	355, 412, 427, 433
famille agglomérante . . . . .	394	formule bien formée . . . . .	359
famille dirigée . . . . .	17	formule close . . . . .	361
famille filtrante . . . . .	19	formule d'inversion de Möbius . . . . .	28
fermé . . . . .	13	formule de Scott . . . . .	89, 485
fermé finitaire . . . . .	57	formule monotone en $\varphi$ . . . . .	359
filtrante (famille, partie) . . . . .	19	formule positive . . . . .	358
filtre . . . . .	19	formule propositionnelle . . . . .	293
fini (élément) . . . . .	18	fortement convexe . . . . .	522
finitaire (compact) . . . . .	14	fortement effectif . . . . .	370
finitaire (fermé) . . . . .	57	fourchette . . . . .	536
finitaire (lentille) . . . . .	65	<b>G</b>	
flux . . . . .	202	$G$ -intégrable . . . . .	40, 329
fonction calculable . . . . .	375	$G$ -intégrale . . . . .	329
fonction calculablement continue . . . . .	375	graphe orienté . . . . .	202
fonction concave . . . . .	34, 155	<b>H</b>	
fonction continue . . . . .	15, 105	hémi-distance . . . . .	103
fonction convexe . . . . .	157	Hausdorff (principe de maximalité) . . . . .	26
fonction croissante . . . . .	16	haute (prévision) . . . . .	441
fonction de Möbius . . . . .	28	Heine-Borel (propriété) . . . . .	14
fonction de Minkowski . . . . .	34	hémi-distance de Hausdorff . . . . .	119, 121
fonction de transition . . . . .	353	hémi-distance de Hausdorff-Hoare . . . . .	118
fonction de transition calculable . . . . .	376	hémi-distance de Hausdorff-Smyth . . . . .	114
fonction de transition effective . . . . .	368	homéomorphisme . . . . .	28
fonction de transition fortement effective . . . . .	370	homogénéité positive . . . . .	441
fonction effectivement continue . . . . .	365	horizon fini . . . . .	378, 382
fonction en escalier . . . . .	167	$\mathcal{H}_u$ -agglomérante (topologie) . . . . .	432
fonction étagée . . . . .	147	Hutchinson (hémi-distance) . . . . .	183
fonction indicatrice . . . . .	146	hyperplan . . . . .	34
fonction linéaire . . . . .	34, 35	<b>I</b>	
fonction mesurable . . . . .	44	image directe . . . . .	139, 153, 321
fonction ouverte . . . . .	394	implication ( $\Rightarrow$ ) . . . . .	355
fonction parfait . . . . .	464		
fonction patch-continue . . . . .	37, 87		

inclusion-exclusion (principe d')	31, 44
incomparables (éléments)	25
inductif (ensemble ordonné)	26
inductive (propriété)	25
inégalité triangulaire	103
insertion de Galois	28
intégrable	37
intégrale de Kurzweil-Henstock	39
intégrale de Riemann	37
intégrale de Riemann-Stieltjes	40
intégrale double de Riemann-Stieltjes	329
intégrale de Choquet	145
intégrale de Choquet-Stieltjes	150
intégrale impropre	43
intégrale mixte	339
intégration par parties	40, 42
intérieur	13
intérieure (topologie)	401
interpolation (propriété d')	17
interpolation raffinée (propriété d')	18
interprétation	355, 412, 428, 433
irréductible	15
irréflexive (relation)	25
isomorphisme (d'ordre)	28

**J**

jauge	38, 110
jeu	30, 44
jeu concave	30, 45
jeu convexe	30, 45
jeu d'exemple	235
jeu d'unanimité	31
jeu stochastique	7
jeu totalement concave	30
jeu totalement convexe	30

**K**

Kurzweil-Henstock-borné	110
Kurzweil-Henstock-intégrable	39

**L**

lemme d'Alexander	15
lemme de Cousot	28

lemme de découpage	33, 97, 203, 246
lemme de découpage adapté à $\ll$	33, 206
lemme de découpage adapté à $\ll_1$	96
lemme de Dickson	25
lemme de Rudin	22
lemme de Zorn	26
lentille	64
lentille finitaire	65
lentille forte	68
limite	24, 33
limite (ordinal)	27
limite inférieure	25
limite supérieure	25
linéaire (fonction)	34, 35
linéaire (prévision)	441
linéairement extensible par le bas (jeu)	207
linéairement extensible par le haut (jeu)	252
linéairement saturé	135
lipschitzienne (fonction)	106
lipschitzienne (forme)	34
localement convexe	132
longueur (d'une chaîne)	29
lumping (agglomération)	391

**M**

majorant	16
marche	167
Markov (chaîne de)	353
Markov (système de transitions ludique de)	354
maximal	26
mesurable	44
mesure	44
minorant	16
Möbius (fonction de)	28
Möbius (formule d'inversion de)	28
modalité	355, 412, 427, 433
model-checking	361
modulaire (capacité, jeu)	30
monotone (capacité)	30, 44
monotone (formule)	359
monotone (philtre)	24
monotonie totale	31

$\mu$ -mesurable .....	45	patch-compact .....	66
multiplication scalaire ( $\cdot$ ) .....	35	patch-continue (fonction) .....	37, 87
multiplicative (relation) .....	90	patch-fermé .....	21
<b>N</b>		patch-intérieur .....	75
négation (non, $\neg$ ) .....	293	patch-ouvert .....	21
non déterministe polynomial .....	388	peau .....	512
non dégénérée (face) .....	447	pessimiste (prévision) .....	469
non trivial (filtre) .....	19	$\pi$ -système .....	45
non trivial (ouvert) .....	453	plateau .....	334, 601
normalisé (capacité, jeu) .....	30	plausibiliste (système de transitions ludique)	
normalisé (système de transitions ludique)	354	354	
normalisée (prévision) .....	486	plausibilité (loi de) .....	31
norme .....	34	plausibilité simple .....	236
norme sup .....	34	plauso .....	430
<b>O</b>		plongement (d'espaces topologiques) .....	28
$\omega$ -cocontinu (capacité, jeu) .....	45	plongement (d'ordre) .....	28
$\omega$ -continu (capacité, jeu) .....	45	plongement isométrique .....	117
opposé (ensemble) .....	16	plus fine (cotopologie) .....	413
optimiste (prévision) .....	469	plus fine (topologie) .....	15
ordinal .....	26	point de discontinuité .....	41
ordre (relation d') .....	15	point fixe .....	16
ordre bien fondé .....	25	point fixe (plus grand) .....	28, 355, 412
ordre d'Egli-Milner ( $\leq^h$ ) .....	65	point fixe (plus petit) .....	28, 355
ordre d'Egli-Milner topologique ( $\sqsubseteq_{EM}$ ) .....	64, 84	positivement homogène .....	154, 441
ordre de Hoare ( $\leq^b, \sqsubseteq^b$ ) .....	65, 210	post-point fixe .....	16
ordre de Smyth ( $\leq^\sharp$ ) .....	65	pré-mesurable .....	44
ordre strict .....	25	pré-mesure .....	44
ouvert .....	13	pré-tribu .....	44
ouvert de base .....	293	pré-tribu engendrée .....	44
ouvert de Scott .....	19	précompact (espace héli-métrique) .....	109
ouvert élémentaire .....	293	précondition (Pre $f$ ) .....	365
ouvert non trivial .....	453	préordre .....	15
ouvert syntaxique .....	308	préordre de spécialisation .....	14
ouverte (topologie) .....	406	pré-point fixe .....	16
<b>P</b>		prévision .....	441
parfaite (fonction) .....	464	prévision angélique .....	469
partie dirigée .....	17	prévision basse .....	441
partie filtrante .....	19	prévision démoniaque .....	469
partout dense .....	13	prévision haute .....	441
		prévision linéaire .....	441
		prévision normalisée .....	486
		prévision optimiste .....	469
		prévision pessimiste .....	469

prévision sous-normalisée.....	491
prévision linéaire simple.....	550
primitive.....	38
principe d'exclusion-inclusion.....	31
principe d'inclusion-exclusion.....	31, 44
principe de maximalité de Hausdorff....	26
principe de récurrence.....	25
probabilité (loi de).....	30
processus de Markov étiqueté.....	353
produit (d'ensembles ordonnés).....	22
produit (d'espaces topologiques).....	15
produit à droite.....	173
produit à gauche.....	173
produit de valuations.....	98
produit naturel de crédibilités.....	231
produit naturel de plausibilités.....	278
propriété de limite finie.....	374
propriété M.....	22, 49, 371
protocompact.....	21
puits (d'un réseau).....	202
pure (fonction).....	464

**Q**

Q-agglomérante (topologie).....	426
quasi-compact.....	14
quasi-distance.....	104
quasi-simple (valuation).....	32
queue d'aronde (exécution en).....	362
quotient par une topologie.....	393
quotient par une topologie agglomérante	395

**R**

R-intégrable (fonction).....	270
rabais.....	378
raffine (drapeau).....	455
rayon.....	104, 107
récompense.....	377
recouvrement.....	14
recouvrement ouvert.....	14
récurrence (principe de).....	25
récurrence ordinale.....	27
récuratif (ensemble).....	362
récurivement énumérable (ensemble) ..	362

réflexive (relation).....	15
relation d'approximation.....	17
relation d'ordre.....	15
relation de Chasles.....	39, 41
relativement cohérent (espace).....	20
représenter.....	376
réseau.....	202
restriction d'un jeu.....	139
rétract.....	50
rétract d'ordre.....	543
rétraction.....	50
rétraction d'ordre.....	543
Riemann-intégrable.....	37
Riemann-Stieltjes intégrable.....	40
Rudin (lemme).....	22

**S**

$\equiv_{\mathcal{T}st}$ -saturé.....	393
saturé.....	14
Scott (système de transitions ludique de)	354
Scott-continue (fonction).....	17
Scott-ouvert.....	19
Scott-ouvert (filtre).....	19
Scott-rétract.....	444
Scott-rétraction.....	444
section.....	50
section d'ordre.....	543
sémantique (de $\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\top \wedge \perp \vee \nu}(\mathcal{A}')$ ).....	412
sémantique (de $\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$ ).....	355
sémantique (des expressions fonctionnelles)	380
sémantique (des formules propositionnelles)	293
semblable.....	399
séparable (espace hémi-métrique).....	113
sesqui-continu.....	286
$\sigma$ -agglomérante (topologie).....	416
$\sigma$ -ludique (système de transition).....	420
$\sigma$ -Q-agglomérante (topologie).....	429
$\sigma$ -sous-additive (capacité).....	45
similarité.....	399
simple (crédibilité).....	200
simple (plausibilité).....	236

simple (système de transitions ludique) .	383
simple (valuation) . . . . .	32
simplexe standard . . . . .	135
simulation . . . . .	399
somme de Darboux . . . . .	36
somme de Darboux-Stieltjes . . . . .	40
somme double de Darboux-Stieltjes . . . . .	329
sommet (d'un graphe) . . . . .	202
source (d'un réseau) . . . . .	202
sous-additive . . . . .	157, 441
sous-additive (fonction) . . . . .	106
sous-espace topologique . . . . .	15
sous-linéaire (fonction) . . . . .	35
sous-linéaire (forme) . . . . .	34
sous-normalisé (capacité, jeu) . . . . .	30
sous-normalisée (prévision) . . . . .	491
sous-recouvrement . . . . .	14
spécialisation (préordre) . . . . .	14
spectre bien fondé . . . . .	374
stablement compact (espace) . . . . .	20
stablement localement compact (espace) .	20
standard (système de transitions ludique)	380
stricte (fonction) . . . . .	30, 106
subdivision . . . . .	36
subdivision barycentrique . . . . .	446
successeur (ordinal) . . . . .	27
suffisamment grand . . . . .	24
suite de Cauchy . . . . .	33
sup-demi-treillis . . . . .	49
super-compacité locale . . . . .	51
support (d'un jeu) . . . . .	138, 521
sur-additive . . . . .	155, 441
sur-linéaire (fonction) . . . . .	35
surrection de Galois . . . . .	28
système de Dynkin . . . . .	45
système de transitions ludique . . . . .	353
système de transitions ludique bilatère .	410
système de transitions $\sigma$ -ludique . . . . .	420
système fonctionnel . . . . .	380
<b>T</b>	
$T_0$ . . . . .	13, 103
$T_1$ . . . . .	13, 103
$T_2$ . . . . .	13
tendre vers (limite) . . . . .	24
test . . . . .	94, 392
test d'appartenance . . . . .	370
théorème d'Edalat . . . . .	32, 167
théorème de Bauer-Fubini . . . . .	232, 281
théorème de Carathéodory . . . . .	45
théorème de classe monotone . . . . .	45
théorème de Fubini . . . . .	336
théorème de Hahn-Banach . . . . .	34
théorème de Hofmann-Mislove . . . . .	19
théorème de Jones . . . . .	32
théorème de Jones-Fubini . . . . .	172
théorème de Knaster-Tarski . . . . .	16
théorème de Minkowski . . . . .	34
théorème de Pettis . . . . .	44
théorème de Rosenmuller . . . . .	451
théorème de Scott-cocontinuité de l'intégrale de Riemann . . . . .	38
théorème de Scott-cocontinuité de l'intégrale de Riemann-Stieltjes . . . . .	42
théorème de Scott-continuité de l'intégrale de Riemann . . . . .	37
théorème de Scott-continuité de l'intégrale de Riemann-Stieltjes . . . . .	42
théorème de séparation . . . . .	35
théorème de Shapley . . . . .	450
théorème de Smiley-Horn-Tarski . . . . .	44
théorème de Tarski . . . . .	16
théorème de Tychonoff . . . . .	15
théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	42
théorème du sandwich de Roth . . . . .	35, 124
théorème "flux maximum, coupe minimum" 202	
théorème fondamental de l'analyse . . . . .	39
topologie . . . . .	13
topologie $\mathcal{H}_u$ -agglomérante . . . . .	432
topologie $\sigma$ - $\mathcal{Q}$ -agglomérante . . . . .	429
topologie $\sigma$ -agglomérante . . . . .	416
topologie $\mathcal{Q}$ -agglomérante . . . . .	426
topologie agglomérante . . . . .	394
topologie associée . . . . .	413
topologie basse . . . . .	19

topologie co-Scott	272
topologie cocompacte	21
topologie cofaible	271
topologie creuse	107
topologie d'Alexandroff	16
topologie de la convergence simple	168
topologie de Scott	17
topologie de Vietoris	72, 79
topologie discrète	13
topologie engendrée	15
topologie extrêmement discontinue	43, 354
topologie faible	94, 162, 164, 222, 475, 537
topologie haute	19
topologie induite	15
topologie intérieure	401
topologie ouverte	406
topologie patch	20
topologie plus fine	15
topologie produit	15, 94
topologie quotient	392
topologie supérieure	20
totalem $\leq$ -concave (prévision)	469
totalem $\leq$ -convexe (prévision)	469
totalem $\leq$ concave (capacité, jeu)	30
totalem $\leq$ convexe (capacité, jeu)	30
totalem $\leq$ monotone	31
transition	377
transitive (relation)	15
treillis arithmétique	90
treillis complet	16
treillis continu	167
tribu	43
tribu agglomérante	420
tribu borélienne	43
tribu engendrée	43
trichotomie	26
trou ouvert	107
type P, type C (formules)	428, 433

**U**

unanimité (estimation)	290
unanimité (jeu d')	31
uniformément continue	40

**V**

valeur d'un flux, d'une coupe	202
valuation	30
valuation de Dirac ( $\delta_x$ )	31
valuation de Lebesgue	36, 222, 270
valuation produit	98, 172
valuation quasi-simple	32
valuation simple	32
variable	293, 355
variable apparaissant négativement	359
variable apparaissant positivement	359
variable libre	294, 361
variation totale	179
voisinage	13

**Z**

zéro (0)	35
Zorn (lemme)	26

## Index des notations

$\langle \nu \rangle$ .....	303	$\nabla \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ .....	491
$\star$ .....	363, 375	$\nabla \mathbf{P}_{\text{wk}}(X)$ .....	475
$+$ .....	35, 363, 375	$\diamond G$ .....	285
$\ominus$ .....	189	$\diamond [0]$ .....	432
$\cdot$ (multiplication scalaire) .....	35	$\diamond U$ (ouvert de base de $\mathcal{H}_u(X)$ ) .....	62
$\bigwedge$ (conjonction infinie) .....	355, 412	$\diamond U$ (ouvert de base de $\mathcal{P}_V(X)$ ) .....	79
$\blacksquare Q$ (ouvert de base de $\mathcal{H}^{op}(X)$ ) .....	61	$\diamond U$ (ouvert de base de $\mathcal{P}'_V(X)$ ) .....	80
$\square F$ (modalité) .....	427	$\diamond U$ (ouvert de base de $\mathcal{P}\ell_V(X)$ ) .....	72
$\diamond F$ (modalité) .....	433	$\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_V \rho$ .....	294
$\square C$ .....	284	$\llbracket F \rrbracket \rho$ .....	294
$\square \cdot \diamond [0]$ .....	435	$\Rightarrow$ (implication infinie) .....	355
$\square [0]$ .....	426	$\nabla F_d$ .....	463, 464
$\square U$ (ouvert de base de $\mathcal{P}_V(X)$ ) .....	79	$\Delta \mathbf{J}_1(X)$ (jeux concaves continus normalisés) .....	246
$\square U$ (ouvert de base de $\mathcal{P}'_V(X)$ ) .....	80	$\Delta \mathbf{J}_1(X)$ .....	276
$\square U$ (ouvert de base de $\mathcal{P}\ell_V(X)$ ) .....	72	$\Delta \mathbf{J}(X)$ (jeux concaves continus) .....	445
$\square U$ (ouvert de base de $\mathcal{Q}(X)$ ) .....	54	$\Delta \mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ (jeux concaves continus sous-normalisés) .....	491
$\Delta F_d$ .....	456, 458	$\Delta \mathbf{J}_{\text{wk}}(X)$ .....	475
$\nabla \mathbf{J}_1(X)$ (jeux convexes continus normalisés) .....	246	$\Delta \mathbf{P}(X)$ (prévisions hautes continues) ..	442
$\nabla \mathbf{J}_{1 \text{ wk}}(X)$ .....	276	$\Delta \mathbf{P}^*(X)$ (prévisions colinéaires hautes continues) .....	442
$\nabla \mathbf{J}(X)$ (jeux convexes continus) .....	445	$\Delta \mathbf{P}_1^*(X)$ (prévisions colinéaires hautes continues normalisées) .....	486
$\nabla \mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ (jeux convexes continus sous-normalisés) .....	491	$\Delta \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^*(X)$ .....	487
$\nabla \mathbf{J}_{\text{wk}}(X)$ .....	475	$\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}^*(X)$ (prévisions colinéaires hautes continues sous-normalisées) .....	491
$\nabla \mathbf{P}(X)$ (prévisions basses continues) ..	442	$\Delta \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^*(X)$ .....	491
$\nabla \mathbf{P}^*(X)$ (prévisions colinéaires basses continues) .....	442	$\Delta \mathbf{P}_{\text{wk}}^*(X)$ .....	475
$\nabla \mathbf{P}_1^*(X)$ (prévisions colinéaires basses continues normalisées) .....	486	$\nabla P_1(X)$ .....	517
$\nabla \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}^*(X)$ .....	487	$\Delta \mathbf{P}_1(X)$ (prévisions hautes continues normalisées) .....	486
$\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}^*(X)$ (prévisions colinéaires basses continues sous-normalisées) .....	491	$\nabla P_{1 \text{ wk}}(X)$ .....	515
$\nabla \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}^*(X)$ .....	491	$\Delta \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}(X)$ .....	486
$\nabla \mathbf{P}_{\text{wk}}^*(X)$ .....	475	$\nabla P_{\leq 1}(X)$ .....	517
$\nabla \mathbf{P}_1(X)$ (prévisions basses continues normalisées) .....	486	$\Delta \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ (prévisions hautes continues sous-normalisées) .....	491
$\nabla \mathbf{P}_{1 \text{ wk}}(X)$ .....	486	$\nabla P_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ .....	515
$\nabla \mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ (prévisions basses continues sous-normalisées) .....	491	$\Delta \mathbf{P}_{\leq 1 \text{ wk}}(X)$ .....	491

$\Delta \mathbf{P}_{wk}(X)$ .....	475	$\subset$ (inclusion stricte) .....	447	
$[\ell]_{>r}F$ (modalité) .....	355, 427, 433	$\subseteq^b$ (ordre de Hoare) .....	210	
$\langle \ell \rangle_{\geq r}F$ (modalité) .....	412	$\supset$ (inclusion stricte) .....	454	
$\bigvee$ (disjonction infinie) .....	355	$\sqsubseteq$ .....	36	
$\wedge$ (et, conjonction) .	293, 355, 412, 427, 433	$\top$ (vrai) .....	293, 355, 412, 427, 433	
$\langle E \rangle$ .....	66, 74	$\uparrow A$ .....	16	
$\in$ .....	20	$\uparrow x$ .....	16	
$\in_{\perp}$ .....	493	$\uparrow x$ .....	17	
$\ll$ .....	17, 204, 481	$\otimes$ (produit de valuations, de jeux) ..	98, 172, 228, 231, 277, 278	
$\not\ll$ .....	363	$\leq^d$ .....	104	
$\ll_1$ .....	96, 221, 255, 481	$\langle Q < r \rangle$ (ouvert de base cofaible) .....	271	
$\gg$ .....	254, 260	$\langle Q \geq r \rangle$ .....	273	
$\gg_1$ .....	255	$\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ (fonctions continues bornées)	441	
$\prod K$ .....	516	$\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle_1$ (fonctions 1-lipschitziennes bor-	nées) .....	183
$\prod \prod L$ .....	538	$\langle X^{(2)} \rightarrow \mathbb{R} \rangle_L$ .....	189	
$\prod \prod (\mathbb{Q}, \mathbb{C})$ .....	543	$[\mathcal{O}(X) \rightarrow [0, 1]]$ .....	162	
$\prod \prod \alpha$ .....	542	$[\Sigma]$ .....	88	
$\prod C$ .....	527	$[U > r]$ (ouvert de base faible) .....	94, 162	
$\preceq$ .....	375	$[X \rightarrow Y]$ (fonctions continues) .....	167	
$\perp$ (faux) .....	293, 355, 412, 427, 433	$[X \rightarrow Y]_p$ (convergence simple) .....	168	
$\downarrow x$ .....	17	$[f > r]$ (ouvert de base faible) .....	164, 475	
$\downarrow A$ .....	16	$[n]$ .....	446	
$\downarrow x$ .....	16	$\widehat{f}_\epsilon$ (extension) .....	102	
$\equiv_{\mathcal{T}st}$ .....	393	0 .....	35, 363, 375	
$\Rightarrow$ (implication) .....	355	1 .....	363, 375	
$\preceq_{\mathcal{T}st}$ .....	393	<b>A</b> .....	79	
$\leq^b$ (ordre de Hoare) .....	65	$\mathcal{A}$ (formules atomiques) .....	355	
$\leq^h$ (ordre d'Egli-Milner) .....	65	$\mathcal{A}^P, \mathcal{A}^C$ (formules atomiques) .....	427, 433	
$\leq^\#$ (ordre de Smyth) .....	65	$\mathcal{A}'$ (formules atomiques) .....	412	
$x \nearrow x'$ (chaînes finies croissantes) .....	29	$A^{d,+\epsilon}$ (épaississement) .....	115	
$\neg$ (non, négation) .....	293	$\alpha_{\mathcal{C}}(\nu)$ .....	442	
$\overset{\circ}{A}$ (intérieur) .....	13	$B$ (base de $\langle X \rightarrow \mathbb{R}^+ \rangle$ ) .....	482	
$\overset{\odot}{A}$ (patch-intérieur) .....	75	$B(x, \epsilon)$ (boule ouverte) .....	33	
$\vee$ (ou, disjonction) .	293, 355, 412, 427, 433	$Bark(\nu)$ (écorce) .....	463	
$\sqsubseteq_{\mathbf{A}}$ .....	84	$Bary(\mathbf{P})Bary(\mathcal{P})$ (barycentre) .....	520	
$\sqsubseteq_{\mathbf{E}}$ .....	311	$bary(\nu)$ (barycentre) .....	136	
$\sqsubseteq_{\mathbf{Est}}$ .....	308	$bary^A(\nu)$ .....	142	
$\sqsubseteq$ .....	447	$bary^{U_0}(\nu)$ .....	140	
$\sqsubseteq_{EM}$ (ordre d'Egli-Milner topologique) .	64, 84			
$\sqsupseteq$ .....	497			
$\sqsupseteq^d$ .....	498			

$bary_Z(\nu)$ .....	137	$d$ (distance) .....	33
$B^d$ .....	500	$\bar{d}(x, A)$ .....	115
$B_\Delta(X)$ .....	554	$d^2$ .....	121
$\beta$ (bonté) .....	327	$\delta_x$ (valuation de Dirac) .....	31
$B_{x, < \epsilon}^d$ (boule ouverte) .....	104	$\Delta_n$ (simplexe standard) .....	135
$\mathcal{C}$ (contexte) .....	379	$d_{\mathcal{H}}$ (hémi-distance de Hausdorff-Hoare) .....	118
$CBark(\nu)$ (écorce continue) .....	463	$d_H$ (hémi-distance de Hutchinson) .....	183
$CCoeur(F)$ (cœur continu) .....	512	$d_{\leq}$ .....	107
$CCoeur_1(F)$ (cœur continu normalisé) .....	512	$d_{LP}$ .....	179
$CCoeur_{\leq 1}(F)$ (cœur continu sous-normalisé) .....	512	$d_{\mathcal{P}}$ (hémi-distance de Hausdorff) .....	121
$CCore(\nu)$ (âme continue) .....	456	$d_{\mathcal{P}\ell}$ (hémi-distance de Hausdorff) .....	119
$CCorps(F)$ (corps continu) .....	538	$d_{\Omega}$ (hémi-distance de Hausdorff-Smyth) .....	114
$CCorps_1(F)$ (corps continu normalisé) .....	538	$d_{\mathbb{R}}$ .....	105
$CCorps_{\leq 1}(F)$ (corps continu sous-normalisé) .....	538	$drap(f)$ (drapeau de $f$ ) .....	453
$Cd_{1\ wk}(X)$ .....	226	$d_{TV}$ (variation totale) .....	179
$Cd_1(X)$ (crédibilités continues normalisées) .....	220, 221	$e$ .....	509
$Cd_{\leq 1\ wk}(X)$ .....	226	$\epsilon_A$ (jeu d'exemple) .....	235
$Cd_{\leq 1}(X)$ (crédibilités continues sous-normalisées) .....	219	$e_{\ell}$ .....	370, 376
$Cd_{wk}(X)$ .....	226	$\epsilon$ (test d'appartenance) .....	370
$Cd(X)$ (crédibilités continues) .....	219	$\epsilon^{\Delta}$ .....	534
$\mathcal{C}[[F]]_{\theta}\rho$ .....	380	$Est_1(X)$ (estimations sesqui-continues normalisées) .....	309
$\chi_U$ (fonction indicatrice) .....	146	$Est_{\leq 1}(X)$ (estimations sesqui-continues sous-normalisées) .....	309
$Coeur(F)$ (cœur) .....	512	$Est(X)$ (estimations sesqui-continues) .....	309
$Coeur_1(F)$ (cœur normalisé) .....	512	$\eta^{\Delta}$ .....	534
$Coeur_{\leq 1}(F)$ (cœur sous-normalisé) .....	512	$\eta_d^A$ .....	111
$Conv(\mathcal{A})$ .....	522	$\eta_{\mathcal{H}}$ .....	100
$conv(E)$ .....	135	$\eta_{\mathcal{P}}$ .....	100
$Conv^*(\mathcal{A})$ .....	529	$\eta_{\Omega}$ .....	99
$conv(E)$ .....	136	$\eta_{\mathbb{S}}$ .....	101
$Core(\nu)$ (âme) .....	450, 456	$\eta_{\mathbb{V}}$ .....	101
$Corps(F)$ .....	538	$F'_{\chi}$ .....	494
$Corps_1(F)$ (corps normalisé) .....	538	$\mathbf{F}(X)$ (fourchettes continues) .....	536
$Corps_{\leq 1}(F)$ (corps sous-normalisé) .....	538	$\mathbf{F}_{1\ wk}^{\Delta}(X)$ .....	547
$CPeau(F)$ (peau continue) .....	512	$F^+$ .....	536
$CPeau_1(F)$ (peau continue normalisée) .....	512	$F^-$ .....	536
$CPeau_{\leq 1}(F)$ (peau continue sous-normalisée) .....	512	$f_0$ .....	494
$C(X)$ (espace des croissants) .....	285	$\mathbf{F}_1(X)$ (fourchettes continues normalisées) .....	536
		$\mathbf{F}_{1\ wk}(X)$ .....	537

$F; \vartheta$ .....	475, 542	$L$ (ensemble d'étiquettes) .....	353
$f[\nu]$ (image directe) .....	153, 321	$\ell$ (étiquette, action) .....	353
$\underline{f}_*$ .....	207	$L^*$ .....	80
$\overline{F}_f$ .....	478	$\mathcal{L}_{\text{compact}}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee}(\mathcal{A}')$ (logique) .....	412
$F_{\perp}$ .....	492	$ \pi $ (longueur d'une chaîne) .....	29
$F_{f,\nu}$ .....	339	$lfp(f)$ (plus petit point fixe) .....	28
$\widehat{F}$ .....	495	$\liminf$ (limite inférieure) .....	25
$f_K$ (fonction étagée) .....	148	$\limsup$ (limite supérieure) .....	25
$\mathbf{F}_{\leq 1}(X)$ (fourchettes continues sous-normalisées) .....	536	$\mathcal{L}_{\text{open}}(\mathcal{A})$ (logique) .....	355
$\mathbf{F}_{\leq 1\ wk}(X)$ .....	537	$\mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{P}}(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\text{open}\square}^{\text{C}}(\mathcal{A})$ (logique) .....	427
$F^{\perp}$ .....	496	$\mathcal{L}_{\text{open}\diamond}^{\text{P}}(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\text{open}\diamond}^{\text{C}}(\mathcal{A})$ (logique) .....	433
$\mathbf{F}_{wk}(X)$ .....	537	$\mathcal{L}_{\text{open}}^{\top \wedge \wedge \perp \vee \vee \mu \nu}(\mathcal{A})$ (formules positives) .....	358
$\gamma_e(F)$ .....	443	$\mathcal{L}(X)$ (espace des lentilles) .....	74
$gfp(g)$ (plus grand point fixe) .....	28	$\mathbf{M}$ .....	79
$\tilde{G}$ (valuation) .....	40	$m$ .....	509
$\mathcal{H}_{\emptyset}(X)$ .....	56	$\min_{\alpha} f$ .....	319
$\mathcal{H}^{cvx}(Z)$ .....	526	$\mu$ (plus petit point fixe) .....	355
$\mathcal{H}^{op}(X)$ .....	58	$\mu_X$ (fonction de Möbius) .....	28
$\mathcal{H}_u(X)$ (espace de Hoare topologique) ..	62	$N$ (codes) .....	363, 375
$\mathcal{H}(X)$ (espace de Hoare) .....	56	$\nu$ (plus grand point fixe) .....	355, 412
$I$ (interprétation) .....	355, 412, 428, 433	$\nu^{\%}$ (extension de Smiley-Horn-Tarski-Pettis)	44
$\underline{I}$ .....	446	$\nu^*$ (extension par le bas) .....	211
$I/\mathcal{O}$ .....	396	$\nu_*$ (extension par le haut) .....	262
$\underline{I_0} \subseteq \underline{I_1} \subseteq \dots \subseteq \underline{I_k}$ .....	448	$\tilde{\nu}_*$ .....	262
$i[\nu]$ (image directe) .....	139	$\nu^{\dagger}$ .....	239
$I \llbracket F \rrbracket_{\theta} \rho$ .....	357, 428, 433	$\nu^{\downarrow}$ .....	289
$\Im(i)$ (image de $i$ ) .....	28	$\nu_L$ (valuation de Lebesgue) .....	36
$In_f(v)$ (débit entrant) .....	202	$\nu_{\neq}$ .....	96
$\inf F$ .....	16	$\nu^{\perp}$ (capacité duale) .....	235, 242
$\mathbf{J}_{1\ wk}(X)$ .....	162	$\nu^{\uparrow}$ .....	289
$\mathbf{J}_1(X)$ (jeux continus normalisés) .....	162	$\mathcal{O}^*(X)$ .....	58
$\mathbf{J}_{\leq 1\ wk}(X)$ .....	162	$\mathcal{O}^d$ (topologie de $d$ ) .....	104
$J_{\leq 1}(X)$ (jeux $\omega$ -continus $\omega$ -cocontinus)	420	$\mathcal{O}_c^d$ (topologie creuse) .....	107
$\mathbf{J}_{\leq 1}(X)$ (jeux continus sous-normalisés)	162	$\mathcal{O} \llbracket u \rrbracket$ .....	363
$\mathbf{J}_{wk}(X)$ .....	162	$\mathcal{O}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\nu}(X))$ .....	303
$\mathbf{J}(X)$ (jeux continus) .....	162	$\mathcal{O}_{\mathcal{J}st}$ .....	393
$\mathbf{K}(\nu, \nu')$ .....	189	$Out_f(v)$ (débit sortant) .....	202
$\mathcal{KO} \llbracket u \rrbracket$ .....	375	$\mathcal{O}(X)$ (espace des ouverts de $X$ ) .....	58
		$\mathcal{P}'(X)$ .....	84

$\mathbf{P}(X)$ (prévisions continues) . . . . .	442	$\mathcal{P}\ell^{cvx}(Z)$ . . . . .	543
$\mathbf{P}^*(X)$ (prévisions colinéaires continues)442		$\mathbf{P}_{\leq 1}(X)$ (prévisions continues sous-normalisées) . . . . .	491
$\mathbf{P}^\Delta(X)$ (prévisions linéaires continues) 442		$P_{\leq 1\ wk}(X)$ . . . . .	510
$\mathbf{P}_1^\Delta(X)$ (prévisions linéaires continues normalisées) . . . . .	486	$\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}(X)$ . . . . .	491
$P_{1\ wk}^\Delta(X)$ . . . . .	515	$P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ (prévisions linéaires sous-normalisées) . . . . .	526
$\mathbf{P}_{1\ wk}^\Delta(X)$ . . . . .	487	$\mathcal{P}\ell_{\mathcal{V}}(X)$ (espace de Plotkin topologique) .	72
$\mathbf{P}_{\leq 1}^\Delta(X)$ (prévisions linéaires continues sous-normalisées) . . . . .	491	$\mathcal{P}L(X)$ (espace de lentilles fortes) . . . . .	68
$P_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ . . . . .	515	$\mathcal{P}\ell(X)$ (espace de Plotkin) . . . . .	64
$\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^\Delta(X)$ . . . . .	491	$\mathbf{P}_\nu$ . . . . .	301
$\mathbf{P}_{wk}^\Delta(X)$ . . . . .	475	Pre $f$ (précondition) . . . . .	365
$\mathbf{P}_1^*(X)$ (prévisions colinéaires continues normalisées) . . . . .	486	$\psi$ (variable) . . . . .	293, 355
$\mathbf{P}_{1\ wk}^*(X)$ . . . . .	487	$\mathcal{P}'_{\mathcal{V}}(X)$ . . . . .	80
$\mathbf{P}_{\leq 1}^*(X)$ (prévisions colinéaires continues sous-normalisées) . . . . .	491	$\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$ . . . . .	79
$\mathbf{P}_{\leq 1\ wk}^*(X)$ . . . . .	491	$P_{wk}(X)$ . . . . .	475
$\mathbf{P}_{wk}^*(X)$ . . . . .	475	$\mathbf{P}_{wk}(X)$ . . . . .	475
$\mathbb{P}^*(X)$ (ensemble des parties non vides) 207		$\mathcal{P}(X)$ . . . . .	84
$\mathbf{P}_\nu^0$ . . . . .	296	$\mathbf{Q}$ . . . . .	355
$\mathbf{P}_1(X)$ (prévisions continues normalisées)486		$\mathcal{Q}^{cvx}(Z)$ . . . . .	517
$\mathbf{P}_\nu^1$ . . . . .	296, 298, 301	$(Q, F)^*$ . . . . .	80
$\mathbf{P}_{1\ wk}(X)$ . . . . .	486	$\mathcal{Q}\mathcal{H}(X)$ . . . . .	64
$\mathbf{Pb}_1^{op}(X)$ (plausibilités continues normalisées, opposé) . . . . .	261	$q_{\mathcal{J}st}$ . . . . .	393
$\mathbf{Pb}_{1\ wk}(X)$ . . . . .	276	$\mathcal{Q}(X)$ (espace de Smyth) . . . . .	19, 52
$\mathbf{Pb}_1(X)$ (plausibilités continues normalisées) 255		$\mathbb{R}$ . . . . .	18
$\mathbf{Pb}_{\leq 1}^{op}(X)$ (plausibilités continues sous-normalisées, opposé) . . . . .	261	$\mathfrak{r}$ (rétraction) . . . . .	89, 485
$\mathbf{Pb}_{\leq 1}(X)$ (plausibilités continues sous-normalisées) . . . . .	260, 265	$\mathbb{R}^+$ . . . . .	18
$\mathbf{Pb}^{op}(X)$ (plausibilités continues, opposé)261		$\overline{\mathbb{R}^+}$ . . . . .	18
$\mathbf{Pb}(X)$ (plausibilités continues) . . . . .	260	$\rho$ (environnement) . . . . .	293, 355, 379, 412
$Peau(F)$ (peau) . . . . .	512	$\rho/\mathcal{O}$ . . . . .	396
$Peau_1(F)$ (peau normalisée) . . . . .	512	$\mathbb{S}$ (espace de Sierpiński) . . . . .	14, 88, 247, 323, 354
$Peau_{\leq 1}(F)$ (peau sous-normalisée) . . . . .	512	$SD(\Delta_n)$ (subdivision barycentrique) . . . . .	446
$\mathbb{P}_{fin}((\ )I)$ (ensemble des parties finies) . . . . .	59	$\sigma[\mathcal{O}]$ (tribu engendrée par $\mathcal{O}$ ) . . . . .	416
$\varphi$ (variable) . . . . .	293, 355	$\sup_{\alpha} f$ . . . . .	320
$\mathcal{P}L^{cvx}(Z)$ . . . . .	543	$\sup F$ . . . . .	16
		$\theta$ (système de transitions ludique) . . . . .	353
		$\theta/\mathcal{O}$ . . . . .	395
		$\theta_\ell$ (fonction de transition) . . . . .	353
		$\theta_\ell/\mathcal{O}$ . . . . .	395

$\mathcal{T}st$ (tests) .....	393
$T_{x, > \epsilon}^d$ (trou ouvert) .....	107
$u_A$ (jeu d'unanimité) .....	31
$U^{d, +(\epsilon)}$ (épaississement) .....	115
$U^{d, -(\epsilon)}$ (amincissement) .....	116
$\mathfrak{u}_A$ (estimation à l'unanimité) .....	290
$\mathfrak{u}_\alpha$ ( <b>A</b> -estimation) .....	291
$u_{\mathcal{J}, \varrho}(F)$ .....	370, 376
$V_{1\ wk}(X)$ .....	94
$V_1(X)$ (probabilités continues) .....	32
$V_1(X)$ (valuations continues normalisées) .....	167
$V_1(X; A)$ (probabilités continues à support dans $A$ ) .....	138
$val(c)$ (valeur d'une coupe) .....	202
$val(f)$ (valeur d'un flux) .....	202
$vars(F)$ .....	294, 361
$vars^+(F)$ .....	359
$vars^-(F)$ .....	359
$V_{\leq 1\ wk}(X)$ .....	94
$V_{\leq 1}(X)$ (valuations continues sous-norma- lisées) .....	32, 94, 166
$V_{wk}(X)$ .....	94
$V(X)$ (valuations continues) .....	32
$X/\mathcal{T}st$ .....	393
$X^{(2)}$ .....	121
$X : \mathcal{T}st$ .....	393
$X_\perp$ .....	255
$X^d$ (dual de de Groot) .....	21
$x_i \searrow y_u$ .....	167
$X_\ell$ (topologie basse) .....	19
$X^{op}$ .....	16, 108
$X^{sym}$ .....	108
$X_u$ (topologie haute) .....	19
$Z$ .....	509

**Index des noms**

Desharnais, Josée.....	8
Edalat, Abbas.....	96
Heckmann, Reinhold.....	79
Jones, Claire.....	30
Jung, Achim.....	87, 94, 135
Laviolette, François.....	8
Lawson, Jimmie.....	50, 132
Mislove, Michael.....	17
Palamidessi, Catuscia.....	353