Lambda-calcul avec boîtes

Correction.

Documents autorisés (en particulier le poly).

Le but de ce problème est d'étudier une extension du lambda-calcul typé avec des types correspondant, via une correspondance à la Curry-Howard, aux formules d'une logique appelée logique S4 intuitionniste.

Cette extension est appelée λ_{S4}.

La syntaxe des pré-termes de λ_{S4} est:

$$\begin{array}{rcll} s,t,u,v,... & ::= & x,y,z,\ldots & \text{variables} \\ & \mid & uv & \text{applications} \\ & \mid & \lambda x \cdot u & \text{abstractions} \\ & \mid & \boxed{s} \cdot \theta & \text{boîtes} \\ & \mid & \partial s & \text{évaluations} \end{array}$$

où θ est une *substitution explicite*, c'est-à-dire une fonction des variables vers les pré-termes de λ_{S4}, de domaine fini. Si on souhaite expliciter une telle substitution, on écrira $\{x_1 := t_1, x_2 := t_2, \ldots, x_n := t_n\}$ la substitution (explicite) qui à x_1 associe t_1, à x_2 associe t_2, …, x_n associe t_n. Il est entendu que x_1, x_2, …, x_n sont des variables deux à deux distinctes. On notera alors $\mathtt{dom}\,\theta$ l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; c'est le *domaine* de θ.

Comme en λ-calcul, la variable x est liée dans $\lambda x \cdot u$. La nouveauté est que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont elles aussi toutes liées dans $\boxed{s} \cdot \theta$, où $\theta = \{x_1 := t_1, x_2 := t_2, \ldots, x_n := t_n\}$.

On identifie les pré-termes modulo α-renommage, qui est la plus petite congruence rendant égale les pré-termes à renommage de leurs variables liées près. Nous ne chercherons pas à rendre cette notion formelle, pour éviter la bureaucracie, mais supposerons qu'elle est comprise.

L'ensemble $\mathrm{fv}(s)$ des variables *libres* dans le pré-terme s est défini par récurrence structurelle sur s par:

$$\begin{array}{c} \mathrm{fv}(x) = \{x\} \quad \mathrm{fv}(uv) = \mathrm{fv}(u) \cup \mathrm{fv}(v) \quad \mathrm{fv}(\lambda x \cdot u) = \mathrm{fv}(u) \setminus \{x\} \\ \mathrm{fv}(\boxed{s} \cdot \theta) = \bigcup_{x \in \mathtt{dom}\,\theta} \mathrm{fv}(\theta(x)) \qquad \mathrm{fv}(\partial s) = \mathrm{fv}(s) \end{array}$$

On note ici $\setminus$ la différence ensembliste, et $\theta(x)$ l'image par θ de x. Si $\theta = \{x_1 := t_1, x_2 := t_2, \ldots, x_n := t_n\}$, on a donc $\mathrm{fv}(\boxed{s} \cdot \theta) = \mathrm{fv}(t_1) \cup \mathrm{fv}(t_2) \cup \ldots \cup \mathrm{fv}(t_n)$. On remarquera bien que ceci est entièrement indépendant de s.

Intuitivement, $\boxed{s} \cdot \theta$ est une boîte contenant le code qui permettrait de calculer s, et θ décrit les valeurs des variables libres de s. Ceci s'appelle aussi parfois une *clôture*. La construction ∂t, lorsque t est une telle boîte, permet de forcer l'évaluation du code contenu dans la boîte.

On appellera *terme* de λ_{S4} tout pré-terme dont toute sous-expression de la forme $\boxed{s} \cdot \theta$ est telle que $\mathrm{fv}(s) \subseteq \mathtt{dom}\,\theta$. Intuitivement, les variables libres de s sont contraintes à recevoir une valeur via θ. Aucune variable libre de s ne peut rester indéfinie par θ. (C'est la raison pour laquelle on n'a pas besoin d'écrire $\mathrm{fv}(\boxed{s} \cdot \theta) = (\mathrm{fv}(s) \setminus \mathtt{dom}\,\theta) \cup \bigcup_{x \in \mathtt{dom}\,\theta} \mathrm{fv}(\theta(x))$.)

Les règles de réduction sont:

$$\begin{array}{lrcl} (\beta) & (\lambda x \cdot u)v & \to & u\{x := v\} \\ (\mathsf{unbox}) & \partial(\boxed{s} \cdot \theta) & \to & s\theta \end{array}$$

où la substitution $u\{x := v\}$ est un cas particulier de la notion de substitution $u\theta$ avec $\theta = \{x := v\}$, et $s\theta$ est définie par récurrence sur la taille de s par:

$$x\theta = \begin{cases} \theta(x) & \text{si } x \in \mathtt{dom}\,\theta \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$
$$(uv)\theta = (u\theta)(v\theta) \quad (\partial s)\theta = \partial(s\theta) \quad (\lambda x \cdot u)\theta = \lambda x \cdot (u\theta) \text{ (où } x \notin \mathtt{dom}\,\theta \cup \bigcup_{z \in \mathtt{dom}\,\theta} \mathrm{fv}(\theta(z)))$$
$$(\boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\})\theta = \boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\}$$

Dans le cas de $(\lambda x \cdot u)\theta$, l'opération ne sera donc définie qu'à α-renommage près.

I. Le calcul non typé

1. Exhiber un terme de λ_{S4} qui n'est pas faiblement normalisable, et un qui est faiblement normalisable mais pas fortement normalisable.

   Comme en λ-calcul, $\Omega = (\lambda x \cdot xx)(\lambda x \cdot xx)$ n'est pas faiblement normalisable, et $(\lambda x \cdot y)\Omega$ est faiblement normalisable mais pas fortement.

2. Montrer que la relation de réduction $\to_{\mathsf{unbox}}$ définie par la seule règle (unbox) termine, autrement dit définit un calcul fortement normalisant. On pourra remarquer la ressemblance avec le théorème des développements finis, vu en cours.

   On pourra procéder comme suit. Pour tout entier k, notons $\partial^k t$ le terme $\partial\partial \ldots \partial t$, où l'on compte k opérateurs ∂ devant le t. (En particulier, $\partial^0 t = t$.) Disons qu'un terme t est *sans problème* si et seulement si $\partial^k t$ est fortement normalisable pour tout entier $k \geq 0$. Pour toute substitution θ, on dit que θ est elle-même sans problème si et seulement si $\theta(x)$ l'est pour tout $x \in \theta$. On pourra montrer que, pour tout λ_{S4}-terme s, pour toute substitution θ sans problème, $s\theta$ est sans problème.

   On opère par récurrence sur la taille de s.
   Si s est une variable x, soit $x \in \mathtt{dom}\,\theta$, et c'est par l'hypothèse que θ est sans problème, soit $s\theta = x$, et c'est évident: $\partial^k x$ est déjà en forme (unbox)-normale.
   Si s est de la forme $\lambda x \cdot t$, les seuls (unbox)-rédex dans $d^k s\theta$ sont dans $t\theta$, et le résultat vient directement de l'hypothèse de récurrence (avec $k = 0$).
   Si s est une application uv, toute réduction infinie partant de $d^k s\theta = d^k((u\theta)(v\theta))$ ne réduit qu'à l'intérieur de $u\theta$ ou de $v\theta$. Par hypothèse de récurrence (avec $k = 0$), on ne peut effectuer qu'un nombre fini de réductions dans chacun. Il en est donc de même pour $s\theta$.
   Si s est de la forme $\partial s'$, par hypothèse de récurrence $\partial^{k+1} s'\theta$ est fortement normalisable, donc aussi $d^k s\theta$. (Si nous n'utilisions pas la notion de terme "sans problème", mais nous contentions de montrer que $s\theta$ est fortement normalisable dès que θ l'est, c'est ici que la démonstration échouerait.)
   Si s est de la forme $\boxed{s'} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$, on considère deux cas, selon que $k = 0$ ou que $k \geq 1$. Si $k = 0$, on procède comme pour l'application. Les réductions dans $s\theta$ ne peuvent avoir lieu que dans s', ou dans l'un des $t_i\theta$. Toutes ces réductions terminent par hypothèse de récurrence. Notamment, s' est fortement normalisable, car $s'\theta'$ l'est pour toute substitution fortement normalisable, en particulier $\{\}$.
   Sinon, et c'est le seul cas non trivial, c'est que $\partial^k s\theta = \partial^{k-1}(\partial \boxed{s'} \cdot \{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\})$. Toute réduction infinie doit finir par réduire le rédex $\partial \boxed{s'} \cdot \ldots$, et est donc de la forme:

   $$\partial^k s\theta \to^*_{\mathsf{unbox}} \partial^{k-1}(\partial \boxed{s''} \cdot \{x_1 := t'_1, \ldots, x_n := t'_n\}) \to_{\mathsf{unbox}} \partial^{k-1} s''\{x_1 := t'_1, \ldots, x_n := t'_n\} \to^*_{\mathsf{unbox}} \cdots$$

   où $t_i \to^*_{\mathsf{unbox}} t'_i$ pour tout i, et $s' \to^*_{\mathsf{unbox}} s''$. On en déduit que l'on a aussi une réduction infinie en partant de:

   $$\partial^{k-1} s'\{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\} \to^*_{\mathsf{unbox}} \partial^{k-1} s''\{x_1 := t'_1, \ldots, x_n := t'_n\} \to^*_{\mathsf{unbox}} \cdots$$

   Or, par hypothèse de récurrence, tous les $t_i\theta$ sont sans problème. Donc la substitution $\{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\}$ est elle aussi sans problème par définition. Par hypothèse de récurrence de nouveau, $s'\{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\}$ est sans problème, ce qui implique que $\partial^{k-1} s'\{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\}$ n'a pas de réduction infinie: contradiction.

II. Le calcul simplement typé

On considère la grammaire suivante des types simples étendus avec un opérateur $\Box$:

$$F \quad ::= \quad b \mid F \Rightarrow F \mid \Box F$$

où b parcourt un ensemble dit de types de base.

Les règles de typage simple du λ_{S4}-calcul sont les suivantes:

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G}\,(App) \qquad \frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F \Rightarrow G}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : \Box F}{\Gamma \vdash \partial u : F}\,(\Box E) \qquad \frac{x_1 : \Box F_1, \ldots, x_n : \Box F_n \vdash s : F \quad \overbrace{\Gamma \vdash t_i : \Box F_i}^{1 \leq i \leq n}}{\Gamma \vdash \boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\} : \Box F}\,(\Box I)$$

Dans la règle $(\Box I)$, il y a $n+1$ prémisses. On fera très attention au fait que la prémisse de gauche ne s'applique que si toutes les variables x_i sont supposées de types dit *boxés*, c'est-à-dire commençant par un opérateur "box" $\Box$.

1. Montrer le lemme d'*affaiblissement*: si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable dans le système des types simples ci-dessus, alors $\Gamma, \Delta \vdash u : F$ l'est aussi, pour tout Δ.

   Par récurrence sur la dérivation de typage donnée. L'unique cas délicat est celui de la règle $(\Box I)$. Il suffit de produire:

$$\frac{x_1 : \Box F_1, \ldots, x_n : \Box F_n \vdash s : F \quad \overbrace{\Gamma, \Delta \vdash t_i : \Box F_i}^{1 \leq i \leq n}}{\Gamma, \Delta \vdash \boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\} : \Box F}\,(\Box I)$$

   où les n prémisses de droite sont obtenues par hypothèse de récurrence. De façon importante, la prémisse de gauche est laissée telle quelle.

2. Montrer le lemme de *substitution*: si $\Gamma, x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n, \Delta \vdash u : F$ est dérivable, ainsi que $\Gamma \vdash v_1 : F_1$, $\ldots$, $\Gamma \vdash v_n : F_n$, alors $\Gamma, \Delta \vdash u\{x_1 := v_1, \ldots, x_n := v_n\} : F$ aussi.

   Par récurrence sur la dérivation donnée de $\Gamma, x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n, \Delta \vdash u : F$. Si la dernière règle est (Var), on distingue deux cas. Si $u = x_i$ pour un certain i, on déduit la dérivation souhaitée par affaiblissement à partir de celle de $\Gamma \vdash v_i : F_i$, sachant que $u\{x_1 := v_1, \ldots, x_n := v_n\} = v_i$. Sinon, u est une autre variable x, $u\{x_1 := v_1, \ldots, x_n := v_n\} = x$, et x est dans Γ, Δ, donc l'on peut déduire directement $\Gamma, \Delta \vdash x : F$ par (Var).

   Les cas (App), (Abs) sont comme dans le poly (en particulier, le cas (Abs) est celui qui nécessite le Δ dans l'énoncé). Le cas $(\Box E)$ est une application triviale de l'hypothèse de récurrence. Pour $(\Box I)$, on a par hypothèse une dérivation de:

$$\frac{y_1 : \Box G_1, \ldots, y_m : \Box G_m \vdash s : F \quad \overbrace{\Gamma, x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n, \Delta \vdash t_i : \Box G_i}^{1 \leq i \leq m}}{\Gamma, x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n, \Delta \vdash \boxed{s} \cdot \{y_1 := t_1, \ldots, y_m := t_m\} : \Box F}\,(\Box I)$$

   En notant $\theta = \{x_1 := v_1, \ldots, x_n := v_n\}$, on peut dériver:

$$\frac{y_1 : \Box G_1, \ldots, y_m : \Box G_m \vdash s : F \quad \overbrace{\Gamma, \Delta \vdash t_i\theta : \Box G_i}^{1 \leq i \leq m}}{\Gamma, \Delta \vdash \boxed{s} \cdot \{y_1 := t_1\theta, \ldots, y_m := t_m\theta\} : \Box F}\,(\Box I)$$

où les n prémisses de droite sont obtenues par hypothèse de récurrence. Encore une fois, la prémisse de gauche est laissée telle quelle.

3. Montrer le théorème d'autoréduction pour λ_{S4}: si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable dans le système des types simples ci-dessus, et si $u \to v$, alors $\Gamma \vdash v : F$ est aussi dérivable.

   On opère par récurrence sur la structure de la dérivation donnée de $\Gamma \vdash u : F$, le cas de base étant donné par celui où u est lui-même le rédex contracté. Les cas de récurrence sont triviaux, et font appel à l'hypothèse de récurrence directement.

   Si u est un (β)-rédex, on opère comme dans le poly, en utilisant le lemme d'affaiblissement de la question précédente.

   Si u est un (unbox)-rédex $\partial(\boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\})$, la dérivation de typage est nécessairement de la forme:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ x_1 : \Box F_1, \ldots, x_n : \Box F_n \vdash s : F\end{array} \qquad \underbrace{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_i\\ \Gamma \vdash t_i : \Box F_i\end{array}}_{1 \leq i \leq n}}{\Gamma \vdash \boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\} : \Box F}\ (\Box I)}{\Gamma \vdash \partial(\boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}) : F}\ (\Box E)$$

   Par le lemme de substitution appliqué à $\pi, \pi_1, \ldots, \pi_n$, on peut donc former une dérivation de $\Gamma \vdash s\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\} : F$.

4. Dans le contexte de λ_{S4}, on dit qu'un terme est *neutre* si et seulement s'il ne commence pas par λ, est n'est pas une boîte $\boxed{s} \cdot \theta$.

   On pose:

$$RED_b = SN \quad RED_{F_1 \Rightarrow F_2} = \{u \mid \forall v \in RED_{F_1} \cdot uv \in RED_{F_2}\}$$
$$RED_{\Box F} = \{u \mid \partial u \in RED_F\}$$

   où SN est l'ensemble des λ_{S4}-termes fortement normalisants. Ceci définit les ensembles RED_F par récurrence structurelle sur le type F. Montrer les propriétés:

   (CR1) Si $u \in RED_F$, alors $u \in SN$.

   (CR2) Si $u \in RED_F$ et $u \to u'$, alors $u' \in RED_F$.

   (CR3) Si u est neutre et pour tout u' tel que $u \to u'$, $u' \in RED_F$, alors $u \in RED_F$.

   C'est comme dans le poly, par récurrence structurelle sur F. Je ne répéterai donc pas l'argument lorsque F est un type de base ou un type flèche $F_1 \Rightarrow F_2$. Lorsque $F = \Box F'$, on a:

   (CR1) *Si $u \in RED_F$, c'est que $\partial u \in RED_{F'}$, donc par hypothèse de récurrence (CR1) sur F', ∂u est dans SN. Ceci implique que le sous-terme u est encore dans SN.*

   (CR2) *Si $u \in RED_F$ et $u \to u'$, alors par définition ∂u est dans $RED_{F'}$. Comme $\partial u \to \partial u'$, par hypothèse de récurrence (CR2) sur F', on a $\partial u' \in RED_{F'}$. Par définition, u' est donc dans RED_F.*

   (CR3) *Si u est neutre et pour tout u' tel que $u \to u'$, $u' \in RED_F$, montrons que $u \in RED_F$. Pour ceci, il suffit de montrer que ∂u est dans $RED_{F'}$. Comme ∂u est neutre, il suffit de montrer que tous les réduits en une étape de ∂u sont dans $RED_{F'}$, grâce à l'hypothèse de récurrence (CR3) sur F'. Or, u étant neutre, n'est pas une boîte. Les seuls réduits en une étape de ∂u sont donc de la forme $\partial u'$, avec $u \to u'$. Par hypothèse, u' est dans $RED_{F'}$, donc par définition $\partial u'$ est dans RED_F, et l'on conclut.*

5. Montrer que, si: $(*)$ $u\{x := v\}$ est dans RED_G pour tout $v \in RED_F$; alors $\lambda x \cdot u$ est dans $RED_{F \Rightarrow G}$.

C'est comme dans le poly, la démonstration ne dépendant que des propriétés (CR1) à (CR3). Il suffit, par (CR3), de montrer que $(\lambda x \cdot u)v$ est dans RED_G pour tout $v \in RED_F$, pour tout u vérifiant $(*)$. Par (CR3), toute variable est dans RED_F, donc $(*)$ implique que u lui-même est dans RED_G, donc dans SN par (CR1). De même, tout $v \in RED_F$ est dans SN par (CR1). On peut donc démontrer la propriété souhaitée par récurrence sur les couples (u, v) (u vérifiant $*$, et $v \in RED_F$), ordonnés par le produit lexicographique $\rightarrow \times_{lex} \rightarrow$. Les réduits en une étape de $(\lambda x \cdot u)v$ sont de la forme $(\lambda x \cdot u')v$ avec $u \rightarrow u'$, ou $(\lambda x \cdot u)v'$ avec $v \rightarrow v'$, ou de la forme $u\{x := v\}$. Dans le troisième cas, $u\{x := v\}$ est dans RED_G par $(*)$. Dans le premier, u' vérifie $(*)$ car $u\{x := v\} \rightarrow u'\{x := v\}$ pour tout v, en utilisant (CR2); on conclut par hypothèse de récurrence. Dans le second cas, v' est dans RED_F par (CR2), et on applique encore l'hypothèse de récurrence.

6. Pour tout contexte Δ de la forme $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$, on notera $\overline{RED}_\Delta$ l'ensemble des substitutions θ de la forme $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$, où $t_1 \in RED_{F_1}, \ldots, t_n \in RED_{F_n}$.

   Montrer que, si: $(**)$ $s\theta$ est dans RED_F pour toute substitution $\theta \in \overline{RED}_\Delta$, alors $\boxed{s} \cdot \theta$ est dans $RED_{\Box F}$ pour toute substitution $\theta \in \overline{RED}_\Delta$.

   On procède de façon similaire à la question précédente. Il suffit de montrer que $\partial(\boxed{s} \cdot \theta)$ est dans RED_F, par (CR3). La substitution $\{x_1 := x_1, \ldots, x_n := x_n\}$ étant dans $\overline{RED}_\Delta$, toute variable étant réductible à tout type par (CR3), l'hypothèse $(**)$ et (CR1) impliquent que s est fortement normalisant. De même, tous les t_i sont fortement normalisables par (CR1). On peut donc démontrer que $\partial(\boxed{s} \cdot \theta)$ est dans RED_F pour tout s vérifiant $(**)$ et pour tout $\theta = \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$ dans $\overline{RED}_\Delta$, par récurrence sur $(s, t_1, \ldots, t_n)$ ordonné par le produit lexicographique de $n + 1$ copies de $\rightarrow$. Pour tout réduit en une étape de $\partial(\boxed{s} \cdot \theta)$, soit il est obtenu en contractant un rédex dans s ou dans l'un des t_i, et l'on conclut en utilisant (CR2) et l'hypothèse de récurrence; soit ce réduit est $s\theta$, qui est dans RED_F par hypothèse.

7. En déduire que tout terme u de λ_{S4} qui est typable est fortement normalisable.

   On montre que, pour toute dérivation π de $\Gamma \vdash u : F$, pour toute substitution $\theta \in \overline{RED}_\Gamma$, $u\theta$ est dans RED_F. Comme la substitution identité est dans $\overline{RED}_\Gamma$ par (CR3), ceci permettra de déduire que u lui-même sera dans RED_F, donc dans SN par (CR1).

   Si la dernière règle est (Var), (App) ou (Abs), on procède comme dans le poly. Le cas de (Abs) notamment est réglé par la question II.5.

   Si la dernière règle est $(\Box E)$, on sait par hypothèse de récurrence que $u = \partial u'$ avec $u'\theta \in RED_{\Box F}$. Mais ceci signifie directement que $u\theta$ est dans RED_F, par définition de $RED_{\Box F}$.

   Si la dernière règle est $(\Box I)$, u est de la forme $\boxed{s} \cdot \theta$, $F = \Box F'$, et l'on a dérivé:

$$\frac{x_1 : \Box F_1, \ldots, x_n : \Box F_n \vdash s : F \qquad \underbrace{\begin{array}{c} \vdots\, \pi_i \\ \Gamma \vdash t_i : \Box F_i \end{array}}_{1 \leq i \leq n}}{\Gamma \vdash \boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\} : \Box F} \; (\Box I)$$

   Par hypothèse de récurrence, $t_i\theta$ est dans $RED_{\Box F_i}$ pour tout i. En notant Δ le contexte $x_1 : \Box F_1, \ldots, x_n : \Box F_n$, la substitution $\{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\}$ est donc dans $\overline{RED}_\Delta$. Par hypothèse de récurrence de nouveau, s vérifie l'hypothèse $(**)$ de la question II.6, donc $\boxed{s} \cdot \theta'$ est dans $RED_{\Box F}$ pour toute subsitution $\theta' \in \overline{RED}_\Delta$. C'est en particulier le cas pour $\theta' = \{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\}$, d'où la conclusion.

III. La traduction de Gödel-Tarski

On peut traduire toute formule F de logique (minimale) intuitionniste en une formule F° de S4 comme suit:

$$b^\circ = \Box b \qquad (F \Rightarrow G)^\circ = \Box(F^\circ \Rightarrow G^\circ)$$

Autrement, on ajoute des $\Box$ devant toute sous-formule. On rappelle que les types de la logique minimale sont ceux des types simples, c'est-à-dire tous ceux qui ne contiennent pas $\Box$. Un λ-terme est aussi vu comme un λ_{S4}-terme qui ne contient ni boîte ni opérateur ∂.

1. Pour tout contexte de typage $\Gamma = x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$, on note Γ° le contexte $x_1 : F_1^\circ, \ldots, x_n : F_n^\circ$. Montrer que la traduction $F \mapsto F^\circ$ préserve la prouvabilité. On montrera plus précisément qu'il existe une traduction des λ-termes t en λ_{S4}-termes t° tels que, si $\Gamma \vdash t : F$ est dérivable dans la discipline de types simples du cours, alors $\Gamma^\circ \vdash t^\circ : F^\circ$ est dérivable. (Pour rendre les choses claires: on demande ici une définition formelle de t°, indépendamment de tout typage; puis une démonstration de la propriété demandée).

   On pose:

$$x^\circ = x \quad (uv)^\circ = (\partial u^\circ) v^\circ \quad (\lambda x \cdot u)^\circ = \boxed{(\lambda x \cdot u^\circ)} \cdot id$$

   où id est la substitution identité qui associe à chaque variable libre de u sauf x, elle-même.

   On démontre le résultat souhaité par récurrence sur la dérivation de typage de $\Gamma \vdash t : F$. Si t est une variable, c'est évident. Si t est une application uv, c'est que la dérivation se termine par:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_1 \\ \Gamma \vdash u : G \Rightarrow F\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, \pi_2 \\ \Gamma \vdash v : G\end{array}}{\Gamma \vdash uv : F}\,(App)$$

   ce que l'on traduit en:

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_1^\circ \\ \Gamma^\circ \vdash u^\circ : \Box(G^\circ \Rightarrow F^\circ)\end{array}}{\Gamma^\circ \vdash \partial u^\circ : G^\circ \Rightarrow F^\circ}\,(\Box E) \quad \begin{array}{c}\vdots\, \pi_2^\circ \\ \Gamma^\circ \vdash v^\circ : G^\circ\end{array}}{\Gamma^\circ \vdash (\partial u^\circ) v^\circ : F^\circ}\,(App)$$

   où π_1°, π_2° sont obtenues par hypothèse de récurrence.

   Si t est de la forme $\lambda x \cdot u$ et $F = F_1 \Rightarrow F_2$, c'est-à-dire que la dérivation de type se termine par:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi \\ \Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

   alors on produit la dérivation suivante, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de u. D'abord, par hypothèse de récurrence, on obtient une dérivation π° de $\Gamma^\circ, x : F_1^\circ \vdash u^\circ : F_2^\circ$. En appliquant (Abs), on obtient une dérivation de $\Gamma^\circ \vdash \lambda x \cdot u^\circ : F_1^\circ \Rightarrow F_2^\circ$. Par affaiblissement éventuel, on peut supposer que Γ° contient au moins un contexte de la forme $x_1 : G_1^\circ, \ldots, x_n : G_n^\circ$. (En fait, on peut démontrer qu'il contient un tel contexte, nécessairement.)

   La logique S4 intuitionniste a d'autre part la propriété, opposée de l'affaiblissement, et appelée amincissement*: si $\Delta, z : G \vdash w : H$ est dérivable et z n'est pas libre dans w, alors $\Delta \vdash w : H$ est aussi dérivable. C'est une récurrence facile sur la structure de la dérivation, similaire à la démonstration de la propriété d'affaiblissement.*

   Par amincissement, on obtient ainsi une dérivation π_1 de $x_1 : G_1^\circ, \ldots, x_n : G_n^\circ \vdash \lambda x \cdot u^\circ : F_1^\circ \Rightarrow F_2^\circ$. Comme tous les types $G_1^\circ, \ldots, G_n^\circ$ commencent par $\Box$, on peut appliquer $(\Box I)$:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots \\ x_1 : G_1^\circ, \ldots, x_n : G_n^\circ \vdash \lambda x \cdot u^\circ : F_1^\circ \Rightarrow F_2^\circ\end{array} \quad \overbrace{\overline{\Gamma^\circ \vdash x_i : G_1^\circ}}^{1 \leq i \leq n}}{\Gamma^\circ \vdash \boxed{(\lambda x \cdot u^\circ)} \cdot id}$$

2. Montrer qu'en revanche, la traduction ne préserve pas la réduction: il existe des λ-termes s, t tels que $s \to t$ en λ-calcul, mais on n'a pas $s^\circ \to t^\circ$.

   Il fallait bien sûr lire: "mais on n'a pas $s^\circ \to^* t^\circ$."

   Soit $s = (\lambda x \cdot u)v$, $t = u\{x := v\}$. Le problème est que $s^\circ = (\partial \boxed{(\lambda x \cdot u^\circ)} \cdot id)v^\circ$ se réduit en $u^\circ\{x := v^\circ\}$, mais ce dernier terme ne se réduit pas forcément en $(u\{x := v\})^\circ$. Si u est lui-même une λ-abstraction, par exemple $\lambda y \cdot x$, $u^\circ\{x := v^\circ\} = \boxed{\lambda y \cdot x} \cdot \{x := v^\circ\}$, alors que $(u\{x := v\})^\circ = \boxed{\lambda y \cdot v^\circ} \cdot id$. Si v n'est pas une variable, ces deux termes sont différents, et si v est normal, v° aussi. Un contre-exemple est donc donné par $s = (\lambda x \cdot \lambda y \cdot x)(zz')$.

3. Proposer de nouvelles règles à ajouter à λ_{S4}, qui assurent d'une part que $s \to t$ implique $s^\circ \to t^\circ$ en λ_{S4} étendu, et d'autre part que la propriété d'auto-réduction soit préservée.

   C'était la question bonus. Voir les règles de l'article: J. Goubault-Larrecq and É. Goubault, On the Geometry of Intuitionistic S4 Proofs, Homology, Homotopy and Applications 5(2), *pages 137-209, 2003. Les règles supplémentaires ne codent au passage que la réduction du λ-calcul en appel par valeur au sens de Plotkin...*