Lambda-calcul avec boîtes

Documents autorisés (en particulier le poly).

Le but de ce problème est d'étudier une extension du lambda-calcul typé avec des types correspondant, via une correspondance à la Curry-Howard, aux formules d'une logique appelée logique S4 intuitionniste.

Cette extension est appelée λ_{S4}.

La syntaxe des pré-termes de λ_{S4} est:

$$\begin{array}{lcll} s, t, u, v, ... & ::= & x, y, z, \ldots & \text{variables} \\ & \mid & uv & \text{applications} \\ & \mid & \lambda x \cdot u & \text{abstractions} \\ & \mid & \boxed{s} \cdot \theta & \text{boîtes} \\ & \mid & \partial s & \text{évaluations} \end{array}$$

où θ est une *substitution explicite*, c'est-à-dire une fonction des variables vers les pré-termes de λ_{S4}, de domaine fini. Si on souhaite expliciter une telle substitution, on écrira $\{x_1 := t_1, x_2 := t_2, \ldots, x_n := t_n\}$ la substitution (explicite) qui à x_1 associe t_1, à x_2 associe t_2, ..., x_n associe t_n. Il est entendu que x_1, x_2, ..., x_n sont des variables deux à deux distinctes. On notera alors $\mathtt{dom}\,\theta$ l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; c'est le *domaine* de θ.

Comme en λ-calcul, la variable x est liée dans $\lambda x \cdot u$. La nouveauté est que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont elles aussi toutes liées dans $\boxed{s} \cdot \theta$, où $\theta = \{x_1 := t_1, x_2 := t_2, \ldots, x_n := t_n\}$.

On identifie les pré-termes modulo α-renommage, qui est la plus petite congruence rendant égale les pré-termes à renommage de leurs variables liées près. Nous ne chercherons pas à rendre cette notion formelle, pour éviter la bureaucracie, mais supposerons qu'elle est comprise.

L'ensemble $\mathrm{fv}(s)$ des variables *libres* dans le pré-terme s est défini par récurrence structurelle sur s par:

$$\mathrm{fv}(x) = \{x\} \quad \mathrm{fv}(uv) = \mathrm{fv}(u) \cup \mathrm{fv}(v) \quad \mathrm{fv}(\lambda x \cdot u) = \mathrm{fv}(u) \setminus \{x\}$$
$$\mathrm{fv}(\boxed{s} \cdot \theta) = \bigcup_{x \in \mathtt{dom}\,\theta} \mathrm{fv}(\theta(x)) \qquad \mathrm{fv}(\partial s) = \mathrm{fv}(s)$$

On note ici $\setminus$ la différence ensembliste, et $\theta(x)$ l'image par θ de x. Si $\theta = \{x_1 := t_1, x_2 := t_2, \ldots, x_n := t_n\}$, on a donc $\mathrm{fv}(\boxed{s} \cdot \theta) = \mathrm{fv}(t_1) \cup \mathrm{fv}(t_2) \cup \ldots \cup \mathrm{fv}(t_n)$. On remarquera bien que ceci est entièrement indépendant de s.

Intuitivement, $\boxed{s} \cdot \theta$ est une boîte contenant le code qui permettrait de calculer s, et θ décrit les valeurs des variables libres de s. Ceci s'appelle aussi parfois une *clôture*. La construction ∂t, lorsque t est une telle boîte, permet de forcer l'évaluation du code contenu dans la boîte.

On appellera *terme* de λ_{S4} tout pré-terme dont toute sous-expression de la forme $\boxed{s} \cdot \theta$ est telle que $\mathrm{fv}(s) \subseteq \mathtt{dom}\,\theta$. Intuitivement, les variables libres de s sont contraintes à recevoir une valeur via θ. Aucune variable libre de s ne peut rester indéfinie par θ. (C'est la raison pour laquelle on n'a pas besoin d'écrire $\mathrm{fv}(\boxed{s} \cdot \theta) = (\mathrm{fv}(s) \setminus \mathtt{dom}\,\theta) \cup \bigcup_{x \in \mathtt{dom}\,\theta} \mathrm{fv}(\theta(x))$.)

Les règles de réduction sont:

$$\begin{array}{lrcl} (\beta) & (\lambda x \cdot u)v & \to & u\{x := v\} \\ (\mathsf{unbox}) & \partial(\boxed{s} \cdot \theta) & \to & s\theta \end{array}$$

où la substitution $u\{x := v\}$ est un cas particulier de la notion de substitution $u\theta$ avec $\theta = \{x := v\}$, et $s\theta$ est définie par récurrence sur la taille de s par:

$$x\theta = \begin{cases} \theta(x) & \text{si } x \in \mathtt{dom}\,\theta \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$
$$(uv)\theta = (u\theta)(v\theta) \quad (\partial s)\theta = \partial(s\theta) \quad (\lambda x \cdot u)\theta = \lambda x \cdot (u\theta) \text{ (où } x \notin \mathtt{dom}\,\theta \cup \textstyle\bigcup_{z \in \mathtt{dom}\,\theta} \mathrm{fv}(\theta(z))\text{)}$$
$$(\boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\})\theta = \boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1\theta, \ldots, x_n := t_n\theta\}$$

Dans le cas de $(\lambda x \cdot u)\theta$, l'opération ne sera donc définie qu'à α-renommage près.

I. Le calcul non typé

1. Exhiber un terme de λ_{S4} qui n'est pas faiblement normalisable, et un qui est faiblement normalisable mais pas fortement normalisable.

2. Montrer que la relation de réduction $\rightarrow_{\mathsf{unbox}}$ définie par la seule règle (unbox) termine, autrement dit définit un calcul fortement normalisant. On pourra remarquer la ressemblance avec le théorème des développements finis, vu en cours.

   On pourra procéder comme suit. Pour tout entier k, notons $\partial^k t$ le terme $\partial\partial \ldots \partial t$, où l'on compte k opérateurs ∂ devant le t. (En particulier, $\partial^0 t = t$.) Disons qu'un terme t est *sans problème* si et seulement si $\partial^k t$ est fortement normalisable pour tout entier $k \geq 0$. Pour toute substitution θ, on dit que θ est elle-même sans problème si et seulement si $\theta(x)$ l'est pour tout $x \in \theta$. On pourra montrer que, pour tout λ_{S4}-terme s, pour toute substitution θ sans problème, $s\theta$ est sans problème.

II. Le calcul simplement typé

On considère la grammaire suivante des types simples étendus avec un opérateur $\Box$:

$$F \quad ::= \quad b \mid F \Rightarrow F \mid \Box F$$

où b parcourt un ensemble dit de types de base.

Les règles de typage simple du λ_{S4}-calcul sont les suivantes:

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G}\,(App) \qquad \frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F \Rightarrow G}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : \Box F}{\Gamma \vdash \partial u : F}\,(\Box E) \qquad \frac{x_1 : \Box F_1, \ldots, x_n : \Box F_n \vdash s : F \quad \overbrace{\Gamma \vdash t_i : \Box F_i}^{1 \leq i \leq n}}{\Gamma \vdash \boxed{s} \cdot \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\} : \Box F}\,(\Box I)$$

Dans la règle $(\Box I)$, il y a $n+1$ prémisses. On fera très attention au fait que la prémisse de gauche ne s'applique que si toutes les variables x_i sont supposées de types dit *boxés*, c'est-à-dire commençant par un opérateur "box" $\Box$.

1. Montrer le lemme d'*affaiblissement*: si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable dans le système des types simples ci-dessus, alors $\Gamma, \Delta \vdash u : F$ l'est aussi, pour tout Δ.

2. Montrer le lemme de *substitution*: si $\Gamma, x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n, \Delta \vdash u : F$ est dérivable, ainsi que $\Gamma \vdash v_1 : F_1$, $\ldots$, $\Gamma \vdash v_n : F_n$, alors $\Gamma, \Delta \vdash u\{x_1 := v_1, \ldots, x_n := v_n\} : F$ aussi.

3. Montrer le théorème d'autoréduction pour λ_{S4}: si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable dans le système des types simples ci-dessus, et si $u \rightarrow v$, alors $\Gamma \vdash v : F$ est aussi dérivable.

4. Dans le contexte de λ_{S4}, on dit qu'un terme est *neutre* si et seulement s'il ne commence pas par λ, est n'est pas une boîte $\boxed{s} \cdot \theta$.

   On pose:

   $$RED_b = SN \quad RED_{F_1 \Rightarrow F_2} = \{u \mid \forall v \in RED_{F_1} \cdot uv \in RED_{F_2}\}$$
   $$RED_{\Box F} = \{u \mid \partial u \in RED_F\}$$

   où SN est l'ensemble des λ_{S4}-termes fortement normalisants. Ceci définit les ensembles RED_F par récurrence structurelle sur le type F. Montrer les propriétés:

(CR1) Si $u \in RED_F$, alors $u \in SN$.

(CR2) Si $u \in RED_F$ et $u \to u'$, alors $u' \in RED_F$.

(CR3) Si u est neutre et pour tout u' tel que $u \to u'$, $u' \in RED_F$, alors $u \in RED_F$.

5. Montrer que, si: $(*)$ $u\{x := v\}$ est dans RED_G pour tout $v \in RED_F$; alors $\lambda x \cdot u$ est dans $RED_{F \Rightarrow G}$.

6. Pour tout contexte Δ de la forme $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$, on notera $\overline{RED}_\Delta$ l'ensemble des substitutions θ de la forme $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$, où $t_1 \in RED_{F_1}, \ldots, t_n \in RED_{F_n}$.

   Montrer que, si: $(**)$ $s\theta$ est dans RED_F pour toute substitution $\theta \in \overline{RED}_\Delta$, alors $\boxed{s} \cdot \theta$ est dans $RED_{\Box F}$ pour toute substitution $\theta \in \overline{RED}_\Delta$.

7. En déduire que tout terme u de λ_{S4} qui est typable est fortement normalisable.

III. La traduction de Gödel-Tarski

On peut traduire toute formule F de logique (minimale) intuitionniste en une formule F° de S4 comme suit:

$$b^\circ = \Box b \qquad (F \Rightarrow G)^\circ = \Box(F^\circ \Rightarrow G^\circ)$$

Autrement, on ajoute des $\Box$ devant toute sous-formule. On rappelle que les types de la logique minimale sont ceux des types simples, c'est-à-dire tous ceux qui ne contiennent pas $\Box$. Un λ-terme est aussi vu comme un λ_{S4}-terme qui ne contient ni boîte ni opérateur ∂.

1. Pour tout contexte de typage $\Gamma = x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$, on note Γ° le contexte $x_1 : F_1^\circ, \ldots, x_n : F_n^\circ$. Montrer que la traduction $F \mapsto F^\circ$ préserve la prouvabilité. On montrera plus précisément qu'il existe une traduction des λ-termes t en λ_{S4}-termes t° tels que, si $\Gamma \vdash t : F$ est dérivable dans la discipline de types simples du cours, alors $\Gamma^\circ \vdash t^\circ : F^\circ$ est dérivable. (Pour rendre les choses claires: on demande ici une définition formelle de t°, indépendamment de tout typage; puis une démonstration de la propriété demandée).

2. Montrer qu'en revanche, la traduction ne préserve pas la réduction: il existe des λ-termes s, t tels que $s \to t$ en λ-calcul, mais on n'a pas $s^\circ \to t^\circ$.

3. Proposer de nouvelles règles à ajouter à λ_{S4}, qui assurent d'une part que $s \to t$ implique $s^\circ \to t^\circ$ en λ_{S4} étendu, et d'autre part que la propriété d'auto-réduction soit préservée.