Propriétés de normalisation du $\lambda\sigma$-calcul

Correction.

Documents autorisés (en particulier le poly).

On rappelle que les indices de de Bruijn en $\lambda\sigma$-calcul sont définis par: $\underline{1} = 1$, $\underline{n+1} = 1[\uparrow^n]$, où $\uparrow^1 = \uparrow$ et $\uparrow^{n+1} = \uparrow \circ \uparrow^n$ ($n \geq 1$). En particulier, $\underline{2} = 1[\uparrow]$, $\underline{3} = 1[\uparrow \circ \uparrow]$, $\underline{4} = 1[\uparrow \circ (\uparrow \circ \uparrow)]$,etc.

Les $\lambda\sigma$-termes clos M et les piles S sont engendrés par les grammaires:

$$\begin{array}{rcl} M & ::= & 1 \mid MM \mid \lambda M \mid M[S] \\ S & ::= & \uparrow \mid \mathrm{id} \mid M \cdot S \mid S \circ S \end{array}$$

On rappelle que la traduction des λ-termes en $\lambda\sigma$-termes est définie par récurrence comme suit, où ℓ est une liste de variables distinctes (la $i$ième étant notée $\ell(i)$).

$$\begin{array}{rcll} x^*(\ell) & \hat{=} & \underline{i} & \text{si } i \text{ est le premier indice tel que } x = \ell(i) \\ & & x \text{ (si } n = 0\text{)}, x[\uparrow^n] \text{ (sinon)} & \text{si } x \text{ n'est pas dans } \ell, n \text{ est la longueur de } \ell \\ (uv)^*(\ell) & \hat{=} & u^*(\ell)v^*(\ell) & \\ (\lambda x \cdot u)^*(\ell) & \hat{=} & \lambda(u^*(x :: \ell)) & \end{array}$$

(La notation :: est celle de Caml: $x :: \ell$ est la liste dont le premier élément est x et les suivants sont ceux de la liste ℓ.)

On rappelle aussi que les règles de réduction du $\lambda\sigma$-calcul sont celles données en figure 1. Les règles de typage sont celles de la figure 2.

I. Contre-exemple de Melliès

1. Pour toute pile S, on pose $rec(S) = \uparrow \circ (1[S] \cdot \mathrm{id})$, $S_1 = (\lambda 1)1 \cdot \mathrm{id}$, et $D_S(S') = 1[1[S] \cdot S'] \cdot S$. Montrer que $S_1 \circ S \to^+ D_S(S \circ rec(S))$ pour toute pile S. On mentionnera explicitement les noms des règles utilisées. (Indication: utiliser (β) le plus tard possible, et favoriser les règles "compliquées" comme (λ) ou $([])$.)

   Notons que $D_S(S \circ rec(S)) = 1[1[S] \cdot (S \circ rec(S))] \cdot S$. *On a:*

$$\begin{array}{rcll} S_1 \circ S & = & \Big((\lambda 1)1 \cdot \mathrm{id}\Big) \circ S & \\ & \to & ((\lambda 1)1)[S] \cdot (\mathrm{id} \circ S) & \textit{par } (\cdot) \end{array}$$

(β)	$(\lambda M)N \to M[N \cdot \mathrm{id}]$		
$([\mathrm{id}])$	$M[\mathrm{id}] \to M$	$(\eta\cdot)$	$1\cdot \uparrow \to \mathrm{id}$
$(\circ\mathrm{id})$	$S \circ \mathrm{id} \to S$	$(\eta \cdot \circ)$	$(1[S]) \cdot (\uparrow \circ S) \to S$
$(\mathrm{id}\circ)$	$\mathrm{id} \circ S \to S$		
$([])$	$(M[S])[S'] \to M[S \circ S']$		
$(\circ)$	$(S \circ S') \circ S'' \to S \circ (S' \circ S'')$		
(1)	$1[N \cdot S] \to N$		
$(\uparrow)$	$\uparrow \circ (N \cdot S) \to S$		
$(\cdot)$	$(M \cdot S) \circ S' \to (M[S']) \cdot (S \circ S')$		
(λ)	$(\lambda M)[S] \to \lambda(M[1 \cdot (S\circ \uparrow)])$		
(app)	$(MN)[S] \to (M[S])(N[S])$		

Figure 1: Les règles de réduction de $\lambda\sigma$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id} : \Gamma}\,(I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash S : \Delta}{\Gamma \vdash M \cdot S : \tau, \Delta}\,(, I) \qquad \frac{}{\tau, \Gamma \vdash 1 : \tau}\,(, E_1) \qquad \frac{}{\tau, \Gamma \vdash \uparrow : \Gamma}\,(, E_2)$$

$$\frac{\tau_1, \Gamma \vdash M : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda M : \tau_1 \to \tau_2}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Gamma \vdash N : \tau_1}{\Gamma \vdash MN : \tau_2}\,(\to E)$$

$$\frac{\Xi \vdash S : \Delta \quad \Gamma \vdash S' : \Xi}{\Gamma \vdash S \circ S' : \Delta}\,(Cut_S) \qquad \frac{\Xi \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash S : \Xi}{\Gamma \vdash M[S] : \tau}\,(Cut_T)$$

Figure 2: Règles de typage

$$
\begin{aligned}
&\to \quad ((\lambda 1)[S])(1[S]) \cdot (\mathrm{id} \circ S) \quad \textit{par } (app) \\
&\to \quad \lambda(1[1 \cdot (S \circ \uparrow)])(1[S]) \cdot (\mathrm{id} \circ S) \quad \textit{par } (\lambda) \\
&\to \quad 1[1 \cdot (S \circ \uparrow)][1[S] \cdot \mathrm{id}] \cdot (\mathrm{id} \circ S) \quad \textit{par } (\beta)
\end{aligned}
$$

De là, le côté droit du $\cdot$, $\mathrm{id} \circ S$, *se réduit en* S *par* $(\mathrm{id}\circ)$, *et le côté gauche se réduit comme suit:*

$$
\begin{aligned}
1[1 \cdot (S \circ \uparrow)][1[S] \cdot \mathrm{id}] &\to \quad 1[(1 \cdot (S \circ \uparrow)) \circ (1[S] \cdot \mathrm{id})] \quad \textit{par } ([]) \\
&\to \quad 1[1[1[S] \cdot \mathrm{id}] \cdot ((S \circ \uparrow) \circ (1[S] \cdot \mathrm{id}))] \quad \textit{par } (\cdot) \\
&\to^2 \quad 1[1[S] \cdot (S \circ (\uparrow \circ (1[S] \cdot \mathrm{id})))] \quad \textit{par } (1), (\circ) \\
&= \quad 1[1[S] \cdot (S \circ rec(S))]
\end{aligned}
$$

2. Posons $C_S(S') = \uparrow \circ (1[S'] \cdot S)$. Montrer que $rec(S') \circ S \to^+ C_S(S' \circ S)$ pour toutes piles S et S'. On précisera de nouveau les noms des règles utilisées.

$$
\begin{aligned}
rec(S') \circ S &= \quad (\uparrow \circ (1[S'] \cdot \mathrm{id})) \circ S \\
&\to \quad \uparrow \circ ((1[S'] \cdot \mathrm{id}) \circ S) \quad \textit{par } (\circ) \\
&\to \quad \uparrow \circ ((1[S'][S]) \cdot (\mathrm{id} \circ S)) \quad \textit{par } (\cdot) \\
&\to^2 \quad \uparrow \circ (1[S' \circ S] \cdot S) \quad \textit{par } ([]), (\mathrm{id}\circ) \\
&= \quad C_S(S' \circ S)
\end{aligned}
$$

3. On rappelle que S_1 a été définie en question 1. Définissons S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la récurrence $S_{n+1} = rec(S_n)$. On note aussi $C_S^n(S') = C_S(C_S(\ldots(C_S(S'))\ldots))$, où l'on a écrit C_S n fois à droite de l'égalité. Montrer que $S_n \circ S_{n+1} \to^+ C_{S_{n+1}}^{n-1}(D_{S_{n+1}}(S_{n+1} \circ S_{n+2}))$.

Lorsque $n = 1$,

$$
\begin{aligned}
S_n \circ S_{n+1} &= \quad S_1 \circ S_2 \\
&\to^+ \quad D_{S_2}(S_2 \circ rec(S_2)) \quad \textit{par la question 1} \\
&= \quad D_{S_2}(S_2 \circ S_3)
\end{aligned}
$$

ce qui est ce que l'on souhaitait démontrer. Lorsque $n \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
S_n \circ S_{n+1} &= \quad rec(S_{n-1}) \circ S_{n+1} \\
&\to^+ \quad C_{S_{n+1}}(S_{n-1} \circ S_{n+1})
\end{aligned}
$$

par la question 2.

Ceci suggère de démontrer que $S_j \circ S_{n+1} \to^+ C^{j-1}_{S_{n+1}}(D_{S_{n+1}}(S_{n+1} \circ S_{n+2}))$ *par récurrence sur* j, $1 \leq j \leq n$. *Or, lorsque* $j = 1$,

$$\begin{array}{rcll} S_1 \circ S_{n+1} & \to^+ & D_{S_{n+1}}(S_{n+1} \circ rec(S_{n+1})) & \textit{par la question 1} \\ & = & D_{S_{n+1}}(S_{n+1} \circ S_{n+2}) & \end{array}$$

Et le cas de récurrence est:

$$\begin{array}{rcll} S_{j+1} \circ S_{n+1} & = & rec(S_j) \circ S_{n+1} & \\ & \to^+ & C_{S_{n+1}}(S_j \circ S_{n+1}) & \textit{par la question 2} \\ & \to^+ & C^j_{S_{n+1}}(D_{S_{n+1}}(S_{n+1} \circ S_{n+2})) & \end{array}$$

par hypothèse de récurrence.

4. En déduire que la pile $S_1 \circ S_1$ n'est pas fortement normalisante.

   Par la question 1, $S_1 \circ S_1 \to^+ D_{S_1}(S_1 \circ S_2)$, *et la question 3 implique qu'aucune pile de la forme* $S_n \circ S_{n+1}$ *n'est fortement normalisante, puisque* $S_n \circ S_{n+1}$ *se réécrit en un terme contenant* $S_{n+1} \circ S_{n+2}$ *comme sous-terme.*

5. On considère le λ-terme $\mathcal{M} = \lambda z' \cdot \Big(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot y)((\lambda z \cdot z)x)\Big)((\lambda y \cdot y)z')$ (le *contre-exemple de Melliès*). Montrer que $\mathcal{M}$ est simplement typable, et donner son type le plus général.

   On peut écrire ce terme avec des annotations de type, pour économiser l'écriture d'une dérivation de typage complète:

$$\mathcal{M} \quad = \quad \lambda z'_F \cdot \underbrace{\Big(\lambda x_F \cdot (\lambda y_F \cdot y)((\lambda z_F \cdot z)x)\Big) \underbrace{((\lambda y_F \cdot y)z')}_{\textit{type } F}}_{\textit{type } F}$$

   Le terme est donc de tous les types $F \to F$, *pour tout type* F.

6. Montrer que la traduction de $\mathcal{M}$ en $\lambda\sigma$-calcul, $\mathcal{M}^*(\epsilon)$ (où ϵ est la liste vide), se réduit en $\lambda(1[S_1 \circ S_1])$.

   On obtient $\mathcal{M}^*(\epsilon)$ *en traduisant* $\mathcal{M}$ *par la méthode de de Bruijn. Donc:*

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{M}^*(\epsilon) & = & \lambda\Big(\lambda\Big((\lambda 1)((\lambda 1)1)\Big)((\lambda 1)1)\Big) & \\ & \to & \lambda\Big(\Big((\lambda 1)((\lambda 1)1)\Big)[(\lambda 1)1 \cdot \mathrm{id}]\Big) & \textit{par } (\beta) \\ & = & \lambda\Big(\Big((\lambda 1)((\lambda 1)1)\Big)[S_1]\Big) & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&\to \lambda\Big(\Big(1[(\lambda 1)1 \cdot \mathrm{id}]\Big)[S_1]\Big) \quad \textit{par } (\beta) \\
&= \lambda\Big(\Big(1[S_1]\Big)[S_1]\Big) \\
&\to \lambda\Big(1[S_1 \circ S_1]\Big) \quad \textit{par } ([])
\end{aligned}
$$

7. La propriété PSN ("préservation de la normalisation forte") est la suivante: "pour tout λ-terme clos fortement normalisant, $u^*(\epsilon)$ est fortement normalisant". Montrer que PSN est fausse.

   $\mathcal{M}$ est simplement typable par la question 5, donc fortement normalisant. Mais $\mathcal{M}^*(\epsilon)$ se réduit en $\lambda(1[S_1 \circ S_1])$, qui n'est pas fortement normalisant par la question 4. Donc $\mathcal{M}^*(\epsilon)$ n'est pas lui-même fortement normalisant.

II. Non-normalisation forte du $\lambda\sigma$-calcul typé

1. Montrer ("préservation du typage") que pour tout λ-terme u tel que le jugement $\Gamma \vdash u : \tau$ est dérivable dans le système des types simples, où $\Gamma = x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$, alors le jugement $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash u^*(x_1, \ldots, x_n) : \tau$ est dérivable par les règles de la figure 2.

   Par récurrence sur la dérivation du jugement de typage $\Gamma \vdash u : \tau$. Si u est une variable, alors c'est nécessairement une variable x_i, $1 \leq i \leq n$. Si $i = 1$, $u^*(x_1, \ldots, x_n) = 1$ et l'on conclut par la règle $(, E_1)$. Si $i \geq 2$, on montre par récurrence sur i (en utilisant $(, E_2)$ et (Cut_S)) que le jugement $\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \Delta \vdash \uparrow^{i-1}$: Δ est dérivable; donc en utilisant $(, E_1)$ et (Cut_T), $\Gamma \vdash \underline{i} : \tau_i$. Or précisément $u^*(x_1, \ldots, x_n) = \underline{i}$.

   Si u est une application $u_1 u_2$, avec des dérivations de type plus petites de $\Gamma \vdash u_1 : \tau' \to \tau$ et $\Gamma \vdash u_2 : \tau'$, alors on dérive:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \vdash u_1^*(x_1, \ldots, x_n) : \tau' \to \tau\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \vdash u_2^*(x_1, \ldots, x_n) : \tau'\end{array}}{\Gamma \vdash u^*(x_1, \ldots, x_n) : \tau} \; (\to E)
$$

   Si u est de la forme $\lambda x \cdot v$ de type $\tau = \tau' \to \tau''$, de même on dérive:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \tau', \Gamma \vdash v^*(x, x_1, \ldots, x_n) : \tau''\end{array}}{\Gamma \vdash u^*(x, x_1, \ldots, x_n) : \tau' \to \tau''} \; (\to I)
$$

2. Montrer qu'il existe des $\lambda\sigma$-termes typables mais non fortement normalisants.

Le terme $\mathcal{M}^*(\epsilon)$ de Melliès convient: par la question I.5, $\mathcal{M}$ est simplement typable, donc $\mathcal{M}^*(\epsilon)$ est typable par la question 1 ci-dessus. Mais ce dernier n'est pas fortement normalisant par les résultats de la partie I.

III. Normalisation faible du $\lambda\sigma$-calcul typé

On rappelle la traduction des $\lambda\sigma$-termes u vers les λ-termes $u^\circ(P)$ du cours:

$$\begin{array}{rclrcll}
(MN)^\circ(P) & \hat{=} & M^\circ(P)N^\circ(P) & (\lambda M)^\circ(P) & \hat{=} & \lambda z \cdot M^\circ(z :: P) & z \text{ fraîche} \\
1^\circ(u :: P) & \hat{=} & u & (M[S])^\circ(P) & \hat{=} & M^\circ(S^\circ(P)) & \\
\uparrow^\circ(u :: P) & \hat{=} & P & id^\circ(P) & \hat{=} & P & \\
(S \circ S')^\circ(P) & \hat{=} & S^\circ(S'^\circ(P)) & (M \cdot S)^\circ(P) & \hat{=} & M^\circ(P) :: S^\circ(P) &
\end{array}$$

On rappelle que $u^\circ(P)$ est défini dès que la liste de λ-termes P est suffisamment longue.

On admettra le résultat suivant, déjà admis en cours: pour tous λ-termes $t_1, \ldots, t_n$, pour tout $\lambda\sigma$-terme M, $M^\circ(t_1, \ldots, t_n) = M^\circ(x_1, \ldots, x_n)[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont n variables fraîches distinctes.

Un *contexte* est, informellement, un terme avec un trou $\langle\rangle$ représentant un terme inconnu. Le trou a exactement une occurrence dans le contexte. Formellement, on définit les grammaires $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_S$ des contextes de termes et de piles respectivement par:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C}_T & ::= & \langle\rangle \mid \lambda\mathcal{C}_T \mid \mathcal{C}_T M \mid M\mathcal{C}_T \mid \mathcal{C}_T[S] \mid M[\mathcal{C}_S] \\
\mathcal{C}_S & ::= & \mathcal{C}_T \cdot S \mid M \cdot \mathcal{C}_S \mid \mathcal{C}_S \circ S \mid S \circ \mathcal{C}_S
\end{array}$$

où M, S dénotent respectivement des termes, et des piles.

Pour tout contexte $\mathcal{C}$ (de terme ou de pile), on note $\mathcal{C}\langle M\rangle$ le résultat du remplacement du trou $\langle\rangle$ dans $\mathcal{C}$ par le terme M. Le résultat est un terme, resp. une pile, de $\lambda\sigma$.

On rappelle que si $M \to N$ en $\lambda\sigma$-calcul, alors $M^\circ(P) \to^* N^\circ(P)$ en λ-calcul. De plus, si M se réécrit en N par σ, alors $M^\circ(P) = N^\circ(P)$.

1. Exhiber un contexte $\mathcal{C}_T$ tel que $\mathcal{C}_T\langle M\rangle^\circ(P)$ soit indépendant de M, autrement dit tel que $\mathcal{C}_T\langle M\rangle^\circ(P) = \mathcal{C}_T\langle N\rangle^\circ(P)$ dès que l'un des deux côtés de l'égalité est défini, pour tous $\lambda\sigma$-termes M, N.

   Prenons par exemple $\mathcal{C}_T = 1[1 \cdot \langle\rangle \cdot \mathrm{id}]$. Alors chacun des côtés est défini dès lors que P est de longueur au moins 2, disons $P = (t_1, t_2, \ldots)$. On a:

   $$\mathcal{C}_T\langle M\rangle^\circ(P) \quad = \quad 1^\circ(1^\circ(P) :: M^\circ(P) :: P) = 1^\circ(P) = t_1$$

   qui est bien indépendant de M.

2. En déduire un $\lambda\sigma$-terme M clos tel que M se réécrive par (β) en un $\lambda\sigma$-terme N, mais la longueur de réduction de $M^\circ(P)$ vers $N^\circ(P)$ soit zéro: $M^\circ(P) = N^\circ(P)$.

   Par exemple $M = \mathcal{C}_T\langle(\lambda M_1)M_2\rangle$, $N = \mathcal{C}_T\langle M_1[M_2 \cdot \mathrm{id}]\rangle$, où $\mathcal{C}_T$ a été trouvé à la question 1.

3. Notons $\succ$ la relation définie par $M \succ N$ si et seulement si, pour toute liste P telle que $M^\circ(P)$ est définie, $N^\circ(P)$ est définie et $M^\circ(P) \rightarrow^+ N^\circ(P)$ en λ-calcul.

   On définit les grammaires $\mathcal{S}_T$ et $\mathcal{S}_S$ suivantes:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S}_T & ::= & \langle\rangle \mid \lambda\mathcal{S}_T \mid \mathcal{S}_T M \mid M\mathcal{S}_T \mid \mathcal{S}_T[S] \\ \mathcal{S}_S & ::= & \mathcal{S}_T \cdot S \mid T \cdot \mathcal{S}_S \mid \mathcal{S}_S \circ S \end{array}$$

   Ceci définit des contextes particuliers, appelés *contextes innocents*. Montrer que les contextes innocents $\mathcal{C}$ sont *sans danger*, c'est-à-dire que $M \succ N$ implique $\mathcal{C}\langle M\rangle \succ \mathcal{C}\langle N\rangle$.

   Par récurrence sur la définition des classes $\mathcal{S}_T$, $\mathcal{S}_S$. Si $\mathcal{C}$ est le trou $\langle\rangle$ lui-même, c'est évident.

   Si $\mathcal{C}$ est de la forme $\lambda(\mathcal{C}')$, alors pour tout P,

$$\begin{array}{rcll} (\mathcal{C}\langle M\rangle)^\circ(P) & = & \lambda z \cdot (\mathcal{C}'\langle M\rangle)^\circ(z :: P) & \\ & \rightarrow^+ & \lambda z \cdot (\mathcal{C}'\langle N\rangle)^\circ(z :: P) & \textit{car } \mathcal{C}'\langle M\rangle \succ \mathcal{C}'\langle N\rangle\textit{, par récurrence} \\ & = & (\mathcal{C}\langle N\rangle)^\circ(P) & \end{array}$$

   Donc $\mathcal{C}\langle M\rangle \succ \mathcal{C}[N]$.

   Les cas où $\mathcal{C}$ est de la forme $\mathcal{C}'M_2$ ou $M_1\mathcal{C}'$ sont aussi évidents. Le cas où $\mathcal{C} = \mathcal{C}'[S]$ se traite comme suit:

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{C}\langle M\rangle)^\circ(P) & = & (\mathcal{C}'\langle M\rangle)^\circ(S^\circ(P)) \\ & \rightarrow^+ & (\mathcal{C}'\langle N\rangle)^\circ(S^\circ(P)) \textit{ par récurrence} \\ & = & (\mathcal{C}\langle N\rangle)^\circ(P) \end{array}$$

   Les cas où $\mathcal{C}$ est un contexte de pile sont entièrement similaires.

4. Considérons un $\lambda\sigma$-terme clos M quelconque contenant un (β)-rédex. On peut écrire ce terme sous la forme $\mathcal{C}_T\langle(\lambda M_1)M_2\rangle$, où $\mathcal{C}_T$ est un contexte de termes. Montrer que si M est σ-normal, alors $\mathcal{C}_T$ est innocent.

   Par récurrence sur $\mathcal{C}_T$. Le seul cas intéressant est celui où $\mathcal{C}_T$ est de la forme $N[\mathcal{C}_S]$, où N est un terme clos. Nous devons en fait montrer que ce cas est impossible.

   Comme $N[\mathcal{C}_S\langle(\lambda M_1)M_2\rangle]$ est σ-normal, N ne peut pas être une application N_1N_2 (sinon (app) s'appliquerait), une abstraction λN_1 (sinon (λ) s'appliquerait), ni une clôture $N_1[S_1]$ (sinon $([])$ s'appliquerait). Donc $N = 1$.

   Démontrons maintenant que $\mathcal{C}_S\langle(\lambda M_1)M_2\rangle$ est nécessairement un couple $N_1 \cdot S_1$. Une fois ceci fait, nous obtiendrons une contradiction puisque $1[N_1 \cdot S_1]$ n'est pas σ-normal ((1) s'appliquerait).

   En général, démontrons que si $\mathcal{C}_S\langle P\rangle$ est σ-normal, alors $\mathcal{C}_S$ est un couple. Si ce n'était pas le cas, $\mathcal{C}_S$ serait une composition. Si $\mathcal{C}_S = \mathcal{C}'_S \circ S$, alors par hypothèse *de récurrence $\mathcal{C}'_S$ est un couple, contredisant le fait que $(\cdot)$ ne s'applique pas. Si $\mathcal{C}_S = S \circ \mathcal{C}'_S$, on peut de même démontrer que S, étant σ-normal, est nécessairement de la forme* id *ou* $\uparrow^n$, $n \geq 1$. *Mais aucun de ces cas n'est possible, sinon* $(\mathrm{id}\circ)$, $(\uparrow)$ *ou* $(\circ)$ *s'appliquerait.*

Une démonstration plus rapide consiste à démontrer l'exercice 18 de la partie III ("machines") du cours, qui énonce que les $\lambda\sigma$-termes σ-normaux clos sont ceux décrits par la grammaire $N ::= \underline{n} \mid NN \mid \lambda N$, et à observer directement que tout terme $\mathcal{C}_T[\ldots]$ de cette forme est tel que $\mathcal{C}_T$ est innocent.

5. On admettra que si $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash M : \tau$ est dérivable dans le système de la figure 2, alors $x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n \vdash M^\circ(x_1, \ldots, x_n) : \tau$ est dérivable dans le système des types simples. Montrer que tout $\lambda\sigma$-terme typable est faiblement normalisant.

On va démontrer que toutes les stratégies qui réduisent les σ-rédexes en priorité sont normalisantes. Ces stratégies consistent à alterner les deux formes d'opérations suivantes:

(a) si M est σ-normal, trouver un (β)-rédex dans M et le contracter, obtenant disons un terme N;

(b) sinon, contracter un σ-rédex dans M.

Dans le premier cas, M s'écrit $\mathcal{C}\langle(\lambda M_1)M_2\rangle$, et se contracte en $N = \mathcal{C}\langle M_1[M_2 \cdot \mathrm{id}]\rangle$. Par la question 4, comme M est σ-normal, $\mathcal{C}$ est innocent, donc sans danger par la question 3.

Or, $(\lambda M_1)M_2 \succ M_1[M_2 \cdot \mathrm{id}]$. En effet, pour toute liste P suffisamment longue,

$$\begin{array}{rcll} ((\lambda M_1)M_2)^\circ(P) & = & (\lambda M_1)^\circ(P) M_2^\circ(P) & \\ & = & (\lambda z \cdot M_1^\circ(z :: P)) M_2^\circ(P) & \\ & \to & M_1^\circ(z :: P)[z := M_2^\circ(P)] & \textit{par } \beta\textit{-réduction dans le } \lambda\textit{-calcul} \\ & = & M_1^\circ(M_2^\circ(P) :: P) & \end{array}$$

puisque, comme on l'a rappelé, la traduction $\_^\circ$ commute aux substitutions, et en utilisant le fait que z n'est pas libre dans P (puisque z est fraîche). Et l'on remarque maintenant que

$$\begin{array}{rcl} (M_1[M_2 \cdot \mathrm{id}])^\circ(P) & = & M_1^\circ((M_2 \cdot \mathrm{id})^\circ(P)) \\ & = & M_1^\circ(M_2^\circ(P) :: P) \end{array}$$

Puisque $(\lambda M_1)M_2 \succ M_1[M_2 \cdot \mathrm{id}]$ et $\mathcal{C}$ est sans danger, $M = \mathcal{C}\langle(\lambda M_1)M_2\rangle \succ \mathcal{C}\langle M_1[M_2 \cdot \mathrm{id}]\rangle$. Autrement dit, $M^\circ(P)$ se réduit en au moins une *étape vers $N^\circ(P)$, pour tout P suffisamment long.*

On raisonne donc comme suit. Supposons que M ait une réduction infinie en suivant une stratégie qui utilise les étapes (a) et (b). Fixons une liste P suffisamment longue. On vient de démontrer que, si l'on applique (β) infiniment souvent dans *cette réduction, alors ceci donnera lieu à une réduction partant* $M^\circ(P)$ *en* λ*-calcul, qui utilise la* β*-réduction un nombre infini de fois. C'est impossible, puisque* $M^\circ(P)$ *est typable et donc fortement normalisant. Donc il existe un rang à partir duquel on n'applique plus* (β)*. À partir de ce rang, on n'applique plus que des règles du sous-système* σ*, qui termine: contradiction.*