Propriétés de normalisation du $\lambda\sigma$-calcul

Documents autorisés (en particulier le poly).

On rappelle que les indices de de Bruijn en $\lambda\sigma$-calcul sont définis par: $\underline{1} = 1$, $\underline{n+1} = 1[\uparrow^n]$, où $\uparrow^1 = \uparrow$ et $\uparrow^{n+1} = \uparrow \circ \uparrow^n$ ($n \geq 1$). En particulier, $\underline{2} = 1[\uparrow]$, $\underline{3} = 1[\uparrow \circ \uparrow]$, $\underline{4} = 1[\uparrow \circ (\uparrow \circ \uparrow)]$,etc.

Les $\lambda\sigma$-termes clos M et les piles S sont engendrés par les grammaires:

$$\begin{array}{rcl} M & ::= & 1 \mid MM \mid \lambda M \mid M[S] \\ S & ::= & \uparrow \mid \mathrm{id} \mid M \cdot S \mid S \circ S \end{array}$$

On rappelle que la traduction des λ-termes en $\lambda\sigma$-termes est définie par récurrence comme suit, où ℓ est une liste de variables distinctes (la $i$ième étant notée $\ell(i)$).

$$\begin{array}{rcll} x^*(\ell) & \hat{=} & \underline{i} & \text{si } i \text{ est le premier indice tel que } x = \ell(i) \\ & & x \text{ (si } n = 0\text{)}, x[\uparrow^n] \text{ (sinon)} & \text{si } x \text{ n'est pas dans } \ell, n \text{ est la longueur de } \ell \\ (uv)^*(\ell) & \hat{=} & u^*(\ell)v^*(\ell) & \\ (\lambda x \cdot u)^*(\ell) & \hat{=} & \lambda(u^*(x :: \ell)) & \end{array}$$

(La notation :: est celle de Caml: $x :: \ell$ est la liste dont le premier élément est x et les suivants sont ceux de la liste ℓ.)

On rappelle aussi que les règles de réduction du $\lambda\sigma$-calcul sont celles données en figure 1. Les règles de typage sont celles de la figure 2.

I. Contre-exemple de Melliès

1. Pour toute pile S, on pose $rec(S) = \uparrow \circ (1[S] \cdot \mathrm{id})$, $S_1 = (\lambda 1) 1 \cdot \mathrm{id}$, et $D_S(S') = 1[1[S] \cdot S'] \cdot S$. Montrer que $S_1 \circ S \to^+ D_S(S \circ rec(S))$ pour toute pile S. On mentionnera explicitement les noms des règles utilisées. (Indication: utiliser (β) le plus tard possible, et favoriser les règles "compliquées" comme (λ) ou $([])$.)

2. Posons $C_S(S') = \uparrow \circ (1[S'] \cdot S)$. Montrer que $rec(S') \circ S \to^+ C_S(S' \circ S)$ pour toutes piles S et S'. On précisera de nouveau les noms des règles utilisées.

3. On rappelle que S_1 a été définie en question 1. Définissons S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la récurrence $S_{n+1} = rec(S_n)$. On note aussi $C_S^n(S') = C_S(C_S(\ldots(C_S(S'))\ldots))$, où l'on a écrit C_S n fois à droite de l'égalité. Montrer que $S_n \circ S_{n+1} \to^+ C_{S_{n+1}}^{n-1}(D_{S_{n+1}}(S_{n+1} \circ S_{n+2}))$.

4. En déduire que la pile $S_1 \circ S_1$ n'est pas fortement normalisante.

(β)	$(\lambda M)N \to M[N \cdot \mathrm{id}]$		
$([\mathrm{id}])$	$M[\mathrm{id}] \to M$	$(\eta\cdot)$	$1\cdot \uparrow \to \mathrm{id}$
$(\circ\mathrm{id})$	$S \circ \mathrm{id} \to S$	$(\eta \cdot \circ)$	$(1[S]) \cdot (\uparrow \circ S) \to S$
$(\mathrm{id}\circ)$	$\mathrm{id} \circ S \to S$		
$([])$	$(M[S])[S'] \to M[S \circ S']$		
$(\circ)$	$(S \circ S') \circ S'' \to S \circ (S' \circ S'')$		
(1)	$1[N \cdot S] \to N$		
$(\uparrow)$	$\uparrow \circ (N \cdot S) \to S$		
$(\cdot)$	$(M \cdot S) \circ S' \to (M[S']) \cdot (S \circ S')$		
(λ)	$(\lambda M)[S] \to \lambda(M[1 \cdot (S \circ \uparrow)])$		
(app)	$(MN)[S] \to (M[S])(N[S])$		

Figure 1: Les règles de réduction de $\lambda\sigma$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{id} : \Gamma}\,(I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash S : \Delta}{\Gamma \vdash M \cdot S : \tau, \Delta}\,(,I) \qquad \frac{}{\tau, \Gamma \vdash 1 : \tau}\,(,E_1) \qquad \frac{}{\tau, \Gamma \vdash \uparrow : \Gamma}\,(,E_2)$$

$$\frac{\tau_1, \Gamma \vdash M : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda M : \tau_1 \to \tau_2}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Gamma \vdash N : \tau_1}{\Gamma \vdash MN : \tau_2}\,(\to E)$$

$$\frac{\Xi \vdash S : \Delta \quad \Gamma \vdash S' : \Xi}{\Gamma \vdash S \circ S' : \Delta}\,(Cut_S) \qquad \frac{\Xi \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash S : \Xi}{\Gamma \vdash M[S] : \tau}\,(Cut_T)$$

Figure 2: Règles de typage

5. On considère le λ-terme $\mathcal{M} = \lambda z' \cdot \Big(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot y)((\lambda z \cdot z)x)\Big)((\lambda y \cdot y)z')$ (le *contre-exemple de Melliès*). Montrer que $\mathcal{M}$ est simplement typable, et donner son type le plus général.

6. Montrer que la traduction de $\mathcal{M}$ en $\lambda\sigma$-calcul, $\mathcal{M}^*(\epsilon)$ (où ϵ est la liste vide), se réduit en $\lambda(1[S_1 \circ S_1])$.

7. La propriété PSN (“préservation de la normalisation forte”) est la suivante: “pour tout λ-terme clos fortement normalisant, $u^*(\epsilon)$ est fortement normalisant”. Montrer que PSN est fausse.

II. Non-normalisation forte du $\lambda\sigma$-calcul typé

1. Montrer (“préservation du typage”) que pour tout λ-terme u tel que le jugement $\Gamma \vdash u : \tau$ est dérivable dans le système des types simples, où $\Gamma = x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$, alors le jugement $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash u^*(x_1, \ldots, x_n) : \tau$ est dérivable par les règles de la figure 2.

2. Montrer qu’il existe des $\lambda\sigma$-termes typables mais non fortement normalisants.

III. Normalisation faible du $\lambda\sigma$-calcul typé

On rappelle la traduction des $\lambda\sigma$-termes u vers les λ-termes $u^\circ(P)$ du cours:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcll}
(MN)^\circ(P) & \hat{=} & M^\circ(P)N^\circ(P) & (\lambda M)^\circ(P) & \hat{=} & \lambda z \cdot M^\circ(z :: P) & z \text{ fraîche} \\
1^\circ(u :: P) & \hat{=} & u & (M[S])^\circ(P) & \hat{=} & M^\circ(S^\circ(P)) & \\
\uparrow^\circ (u :: P) & \hat{=} & P & id^\circ(P) & \hat{=} & P & \\
(S \circ S')^\circ(P) & \hat{=} & S^\circ(S'^\circ(P)) & (M \cdot S)^\circ(P) & \hat{=} & M^\circ(P) :: S^\circ(P) &
\end{array}$$

On rappelle que $u^\circ(P)$ est défini dès que la liste de λ-termes P est suffisamment longue.

On admettra le résultat suivant, déjà admis en cours: pour tous λ-termes $t_1, \ldots, t_n$, pour tout $\lambda\sigma$-terme M, $M^\circ(t_1, \ldots, t_n) = M^\circ(x_1, \ldots, x_n)[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont n variables fraîches distinctes.

Un *contexte* est, informellement, un terme avec un trou $\langle\rangle$ représentant un terme inconnu. Le trou a exactement une occurrence dans le contexte. Formellement, on définit les grammaires $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_S$ des contextes de termes et de piles respectivement par:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C}_T & ::= & \langle\rangle \mid \lambda\mathcal{C}_T \mid \mathcal{C}_T M \mid M\mathcal{C}_T \mid \mathcal{C}_T[S] \mid M[\mathcal{C}_S] \\
\mathcal{C}_S & ::= & \mathcal{C}_T \cdot S \mid M \cdot \mathcal{C}_S \mid \mathcal{C}_S \circ S \mid S \circ \mathcal{C}_S
\end{array}$$

où M, S dénotent respectivement des termes, et des piles.

Pour tout contexte $\mathcal{C}$ (de terme ou de pile), on note $\mathcal{C}\langle M\rangle$ le résultat du remplacement du trou $\langle\rangle$ dans $\mathcal{C}$ par le terme M. Le résultat est un terme, resp. une pile, de $\lambda\sigma$.

On rappelle que si $M \to N$ en $\lambda\sigma$-calcul, alors $M^\circ(P) \to^* N^\circ(P)$ en λ-calcul. De plus, si M se réécrit en N par σ, alors $M^\circ(P) = N^\circ(P)$.

1. Exhiber un contexte $\mathcal{C}_T$ tel que $\mathcal{C}_T\langle M\rangle^\circ(P)$ soit indépendant de M, autrement dit tel que $\mathcal{C}_T\langle M\rangle^\circ(P) = \mathcal{C}_T\langle N\rangle^\circ(P)$ dès que l'un des deux côtés de l'égalité est défini, pour tous $\lambda\sigma$-termes M, N.

2. En déduire un $\lambda\sigma$-terme M clos tel que M se réécrive par (β) en un $\lambda\sigma$-terme N, mais la longueur de réduction de $M^\circ(P)$ vers $N^\circ(P)$ soit zéro: $M^\circ(P) = N^\circ(P)$.

3. Notons $\succ$ la relation définie par $M \succ N$ si et seulement si, pour toute liste P telle que $M^\circ(P)$ est définie, $N^\circ(P)$ est définie et $M^\circ(P) \to^+ N^\circ(P)$ en λ-calcul.

   On définit les grammaires $\mathcal{S}_T$ et $\mathcal{S}_S$ suivantes:

   $$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_T & ::= \langle\rangle \mid \lambda\mathcal{S}_T \mid \mathcal{S}_T M \mid M\mathcal{S}_T \mid \mathcal{S}_T[S] \\ \mathcal{S}_S & ::= \mathcal{S}_T \cdot S \mid T \cdot \mathcal{S}_S \mid \mathcal{S}_S \circ S \end{array}$$

   Ceci définit des contextes particuliers, appelés *contextes innocents*. Montrer que les contextes innocents $\mathcal{C}$ sont *sans danger*, c'est-à-dire que $M \succ N$ implique $\mathcal{C}\langle M\rangle \succ \mathcal{C}\langle N\rangle$.

4. Considérons un $\lambda\sigma$-terme clos M quelconque contenant un (β)-rédex. On peut écrire ce terme sous la forme $\mathcal{C}_T\langle(\lambda M_1)M_2\rangle$, où $\mathcal{C}_T$ est un contexte de termes. Montrer que si M est σ-normal, alors $\mathcal{C}_T$ est innocent.

5. On admettra que si $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash M : \tau$ est dérivable dans le système de la figure 2, alors $x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n \vdash M^\circ(x_1, \ldots, x_n) : \tau$ est dérivable dans le système des types simples. Montrer que tout $\lambda\sigma$-terme typable est faiblement normalisant.