Étiquettes

Correction.

Documents autorisés (en particulier le poly).

Dans tout le problème, on appellera *monoïde à soulignement* tout quadruplet $M = (|M|, 1, ., \_)$, où $(|M|, 1, .)$ est un monoïde, et $\_$ est une fonction de $|M|$ dans $|M|$, qui à α associe un élément noté $\underline{\alpha}$. Autrement dit, $|M|$ est un ensemble, appelé le *support* de M, l'élément *neutre* 1 est un élément de M ; pour tous $\alpha, \beta \in |M|$, on peut former le *produit* $\alpha.\beta \in M$ (on notera aussi $\alpha\beta$ au lieu de $\alpha.\beta$), de sorte que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (donnant ainsi un sens à la notation $\alpha\beta\gamma$), et $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$; enfin pour tout $\alpha \in |M|$, le *souligné* $\underline{\alpha}$ est un élément de $|M|$. Le souligné n'a aucune propriété spéciale a priori.

Pour toute partie P d'un monoïde de soulignement M, on définit le $\lambda^{P,M}$-calcul, comme suit.

Les $\lambda^{P,M}$-termes sont obtenus en décorant chaque λ-terme par un élément de M, son *étiquette*. Autrement dit, la syntaxe du $\lambda^{P,M}$-calcul est donnée par :

$$
\begin{array}{rcll}
s, t, u, v, \ldots & ::= & M^\alpha & \text{terme étiqueté} \\
M, N, P, \ldots & ::= & x & \text{variable} \\
& | & uv & \text{application (de termes \textit{étiquetés})} \\
& | & \lambda x \cdot u & \text{abstraction (le corps } u \text{ est \textit{étiqueté})}
\end{array}
$$

L'alpha-renommage est comme dans le λ-calcul, mais laisse les étiquettes invariantes. Par exemple, $(\lambda x \cdot x^\alpha)^\beta$ est alpha-équivalente à $(\lambda y \cdot y^\alpha)^\beta$, mais pas à $(\lambda y \cdot y^\gamma)^\beta$ si $\alpha \neq \gamma$.

On peut *appliquer une étiquette* β à un terme étiqueté u pour obtenir un terme étiqueté noté $(u)^\beta$ (attention : les parenthèses font partie de la notation ; u^β n'a pas de sens), défini par : tout terme étiqueté s'écrit de façon unique $u = M^\alpha$ pour un certain terme non étiqueté M, alors $(u)^\beta = M^{\alpha\beta}$.

On définit la substitution $u[x := v]$ (modulo alpha-renommage) comme suit. Notons que ceci utilise l'application des étiquettes, que nous venons de définir.

$$
\begin{array}{rcll}
x^\alpha[x := v] & = & (v)^\alpha & \\
y^\alpha[x := v] & = & y^\alpha & (y \text{ variable autre que } x) \\
(u_1 u_2)^\alpha[x := v] & = & ((u_1[x := v])(u_2[x := v]))^\alpha & \\
(\lambda z \cdot u)^\alpha[x := v] & = & (\lambda z \cdot (u[x := v]))^\alpha & (z \text{ non libre dans } v \text{ et différente de } x)
\end{array}
$$

Finalement, on définit la (β^P)-réduction par la règle :

$$
(\beta^P) \qquad ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta \to (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^{\alpha\beta} \qquad (\text{si } \alpha \in P)
$$

Donc on interdit la (β^P)-réduction si α n'est pas dans P ; et on effectue deux applications d'étiquettes, une à v avec l'étiquette α soulignée, et une au contracté tout entier. Une façon un peu plus simple de décrire ceci, quoique pas entièrement correcte, est $(\lambda x \cdot u)^\alpha v \to (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^\alpha$.

Par exemple, si P est suffisamment grand, on aura :

$$
\begin{array}{rcl}
((\lambda x \cdot (x^1 x^2)^3)^4 (\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^8)^9 & \to & ((\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}1} (\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}2})^{349} \\
& \to & ((\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}2\underline{8\underline{4}1}5} (\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}2\underline{8\underline{4}1}6})^{78\underline{4}1349} \\
& \to & \ldots
\end{array}
$$

Dans tout le problème, je donne une indication de la longueur de ma solution, par exemple "*(16l.)*" indique que j'ai une solution de 16 lignes. Notez que je suis assez verbeux. Ces indications ont essentiellement pour but de vous remettre sur le droit chemin si jamais vous vous embarquez dans une solution inutilement longue.

1 Étiquettes de Hyland-Wadsworth

Dans cette section, nous considérons le monoïde à soulignement défini comme suit :
- $|M| = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- l'élément neutre est ∞ ;
- le produit $\alpha\beta$ est défini comme $\min(\alpha, \beta)$; on conviendra que $\min(\alpha, \infty) = \min(\infty, \alpha) = \alpha$;
- le soulignement est défini par $\underline{\infty} = \infty$, $\underline{\alpha} = \alpha - 1$ si $\alpha \neq 0, \infty$, $\underline{0} = 0$.

On pose $P = |M| \setminus \{0, \infty\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La (β^P)-réduction devient donc :

$$(\beta^P) \qquad ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta \to (u[x := (v)^{\alpha-1}])^{\min(\alpha,\beta)} \qquad (\text{si } \alpha \neq 0, \infty)$$

Ceci s'appelle le calcul *à étiquettes de Hyland-Wadsworth*.

On va démontrer que (β^P) termine, par une adaptation de la méthode de réductibilité, usuellement appelée de calculabilité ("computability" ; aucun rapport avec la calculabilité au sens des machines de Turing). Cette adaptation est due à Roel de Vrijer.

Soit SN l'ensemble des termes étiquetés fortement normalisants. Posons $\ell(u)$ l'*étiquette* de u, c'est-à-dire $\ell(M^\alpha) = \alpha$.

1. *(2l.)* Montrer que si $u \to v$, alors $\ell(u) \geq \ell(v)$.

   Si le rédex contracté est à profondeur au moins 1, alors $\ell(u) = \ell(v)$*. Sinon,* $u = ((\lambda x \cdot s)^\alpha t)^\beta$, $\ell(u) = \beta$, $v = (s[x := (t)^{\alpha-1}])^{\min(\alpha,\beta)}$, *et* $\ell(v) = \min(\alpha, \beta) \leq \ell(u)$.

2. *(7l.)* On définit simultanément une relation binaire $\triangleright$ et la notion de terme étiqueté *calculable* comme suit. (Ceci n'a rien à voir avec une notion de calculabilité à la Turing.)
   - $s \triangleright t$ si et seulement si $s \to t$, ou bien s est de la forme $(\lambda x \cdot u)^\alpha$, et $t = (u[x := (v)^{\alpha'}])^{\alpha''}$ pour certains $\alpha' < \alpha$, $\alpha'' \leq \alpha$, et pour un certain terme étiqueté v tel que $(v)^{\alpha'}$ est calculable ;
   - s est *calculable* si et seulement si s est dans la partie bien fondée de $\triangleright$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de chaîne infinie $s = s_0 \triangleright s_1 \triangleright \ldots \triangleright s_k \triangleright \ldots$

Montrer que ceci est une définition correcte, effectuée par récurrence sur $\ell(s)$.

> *Dans la définition de $s \triangleright t$, on utilise la notion de calculabilité sur des termes $(v)^{\alpha'}$ avec $\alpha' < \alpha$; or $\ell((v)^{\alpha'}) = \min(\ell(v), \alpha') \leq \alpha' < \alpha = \ell(s)$, donc la notion de calculabilité est utilisée uniquement sur des termes d'étiquettes strictement plus petites.*
>
> *Dans la définition de la calculabilité, on utilise la définition de $\triangleright$ sur une infinité de couples $s_k \triangleright s_{k+1}$. Par la question 1, $\ell(s_k) \leq \ell(s)$. Or, par ce que nous venons d'observer, ceci n'utilise la notion de calculabilité que sur des termes d'étiquettes strictement inférieures à $\ell(s)$.*

3. *(3l.)* Montrer (CR_1) : tout terme calculable est fortement normalisant.

   Soit s un terme calculable. Si l'on a une chaîne infinie $s = s_0 \to s_1 \to \ldots \to s_k \to \ldots$, alors par définition de $\triangleright$, on a la chaîne infinie $s = s_0 \triangleright s_1 \triangleright \ldots \triangleright s_k \triangleright \ldots$, ce qui contredit le fait que s soit calculable.

4. *(2l.)* Montrer (CR_2) : si $s \to t$ et s est calculable, alors t est calculable.

   Si $s \to t$, alors $s \triangleright t$. Si t n'était pas calculable, il y aurait une $\triangleright$-réduction infinie partant de t, donc aussi une partant de s : contradiction.

5. *(3l.)* Disons qu'un terme étiqueté est *neutre* si et seulement s'il n'est pas de la forme $(\lambda x \cdot u)^\alpha$ pour aucune étiquette α. Montrer (CR_3) : si s est un terme étiqueté neutre dont tous les réduits en une étape (pour $\to$) sont calculables, alors s lui-même est calculable.

   Considérons une réduction infinie partant de s : $s = s_0 \triangleright s_1 \triangleright \ldots \triangleright s_k \triangleright \ldots$. Comme $s = s_0$ est neutre, on a en fait $s_0 \to s_1$. Par hypothèse, s_1 est calculable, ce qui contredit le fait que la réduction est infinie. Donc s est calculable.

6. *(1l.)* En déduire que toute variable étiquetée x^α est calculable.

   Par (CR_3) : x^α est neutre et n'a aucun réduit en une étape.

7. *(10l.)* Montrer que, si $(s)^\gamma \triangleright t$, alors il existe un terme étiqueté t' tel que $s \triangleright t'$, et $(t')^\gamma = t$.

   On considère trois cas.
   - *Si $(s)^\gamma \to t$ et le rédex contracté dans $(s)^\gamma$ n'est pas au sommet, alors on peut contracter le même rédex dans s, et le résultat est clair.*
   - *Si $(s)^\gamma \to t$ au sommet, c'est-à-dire $s = ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta$, et $t = (u[x := (v)^{\alpha-1}])^{\alpha\beta\gamma}$, il suffit de poser $t' = (u[x := (v)^{\alpha-1}])^{\alpha\beta}$.*
   - *Si $(s)^\gamma$ est de la forme $(\lambda x \cdot u)^\alpha$ avec $t = (u[x := (v)^{\alpha'}])^{\alpha''}$, $\alpha' < \alpha$, $\alpha'' \leq \alpha$, où $(v)^{\alpha'}$ est calculable. Alors s est de la forme $(\lambda x \cdot u)^{\alpha_1}$ avec $\min(\alpha_1, \gamma) = \alpha$. Mais alors on a encore $\alpha' < \alpha_1$, $\alpha' \leq \alpha_1$. Donc $s \triangleright t$: prendre $t' = t$, et noter que $(t')^\gamma = (u[x := (v)^{\alpha'}])^{\min(\alpha'', \gamma)} = t$, car $\alpha'' \leq \alpha = \min(\alpha_1, \gamma)$, donc $\alpha'' \leq \gamma$, d'où $\min(\alpha'', \gamma) = \alpha''$.*

8. *(3l.)* En déduire que si s est calculable, alors $(s)^\gamma$ est calculable pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$.

S'il existait une chaîne infinie $(s)^\gamma = s_0 \rhd s_1 \rhd \ldots \rhd s_k \rhd \ldots$, par la question précédente il existerait une chaîne infinie $s = s'_0 \rhd s'_1 \rhd \ldots \rhd s'_k \rhd \ldots$ avec $(s'_k)^\gamma = s_k$ pour tout k : mais ceci contredirait le fait que s est calculable.

9. *(16l.)* Montrer que si s et t sont calculables, alors $(st)^\gamma$ est calculable pour tout $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

On peut utiliser (CR_3). On démontre que $(st)^\gamma$ est calculable pour tous s, t calculables par récurrence sur le couple (s, t) ordonné par le produit lexicographique de $\to$ avec $\to$. Notons qu'on peut le faire par (CR_1) : tout terme calculable est fortement normalisant.

Les réduits en une étape de $(st)^\gamma$ sont d'une des trois formes :

- *$(s't)^\gamma$ avec $s \to s'$: par (CR_2) s' est encore calculable, et on applique l'hypothèse de récurrence ;*
- *$(st')^\gamma$ avec $t \to t'$: idem ;*
- *$(u[x := (t)^{\alpha-1}])^{\min(\alpha,\gamma)}$, où $s = (\lambda x \cdot u)^\alpha$, $\alpha \in P$. Or comme t est calculable, $(t)^{\alpha-1}$ l'est aussi par la question 8.*

  De plus, $\alpha' = \alpha - 1 < \alpha$, et $\alpha'' = \min(\alpha, \gamma) \leq \alpha$, donc $s \rhd (u[x := (t)^{\alpha-1}])^{\min(\alpha,\gamma)}$, par définition de $\rhd$.

  Comme s est calculable, il n'y aucune $\rhd$-réduction infinie partant de s, donc pas non plus de $(u[x := (t)^{\alpha-1}])^{\min(\alpha,\gamma)}$.

Dans tous les cas, les réduits en une étape de $(st)^\gamma$ sont calculables. Comme $(st)^\gamma$ est neutre, par (CR_3), $(st)^\gamma$ est calculable.

10. *(10l.)* Montrer que si $u[x := v]$ est calculable pour tout terme étiqueté calculable v, alors $(\lambda x \cdot u)^\alpha$ est calculable pour tout $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

D'abord, toute variable est calculable, donc en posant $v = x^\infty$, $u = u[x := x^\infty]$ est calculable. Donc u est fortement normalisant. Si l'on avait une chaîne infinie partant de $(\lambda x \cdot u)^\alpha$, elle commencerait donc par un nombre fini d'applications de $\to$, puis continuerait par une application de $\rhd$ qui n'est pas $\to$.

Autrement dit, elle serait de la forme $(\lambda x \cdot u)^\alpha \to (\lambda x \cdot u_1)^\alpha \to \ldots \to (\lambda x \cdot u_k)^\alpha \rhd (u_k[x := (v')^{\alpha'}])^{\alpha''} \rhd \ldots$, où $u = u_0 \to u_1 \to \ldots \to u_k$, $\alpha' < \alpha$, $\alpha'' \leq \alpha$, et où $(v')^{\alpha'}$ est calculable. Par (CR_2), $u_k[x := v]$ est calculable pour tout terme calculable v, donc $u_k[x := (v')^{\alpha'}]$ est calculable.

Par la question 8 (si $\alpha'' \neq \infty$, sinon c'est trivial), $(u_k[x := (v')^{\alpha'}])^{\alpha''}$ est calculable. Mais ceci contredit le fait que la réduction partant de ce dernier est infinie.

11. *(16l.)* En déduire que *tout* terme à étiquettes de Hyland-Wadsworth est calculable, donc fortement normalisant.

Disons qu'une substitution σ est calculable si et seulement si elle envoie toute variable vers un terme calculable. On définit $u\sigma$ par : $x^\alpha \sigma = (v)^\alpha$ où $\sigma(x) = v$, si x est dans le domaine de σ, les autres cas étant évidents.

Par récurrence sur la structure de u, on démontre que $u\sigma$ est calculable pour toute substitution calculable σ.

Lorsque $u = x^\alpha$, et x est dans le domaine de σ, $v = \sigma(x)$ est calculable, donc aussi $u\sigma = (v)^\alpha$ par la question 8.

Lorsque $u = (st)^\gamma$, alors $u\sigma = ((s\sigma)(t\sigma))^\gamma$ est calculable par hypothèse de récurrence et la question 9.

Lorsque $u = (\lambda x \cdot s)^\alpha$, supposons x fraîche, ce que l'on peut faire à alpha-renommage près. En particulier, on peut supposer que x n'est pas dans le domaine de σ, ni libre dans aucun terme dans l'image de σ. Par hypothèse de récurrence, $s(\sigma \cup [x := v]) = s\sigma[x := v]$ est calculable pour tout v calculable. Par la question 10, $(\lambda x \cdot s\sigma)^\alpha$ est calculable. Mais ceci est $u\sigma$.

En prenant pour σ la substitution vide, on en déduit que tout terme étiqueté u est calculable, donc fortement normalisant par (CR_1).

2 Étiquettes de Lévy

On notera $L(A)$ le monoïde à soulignement *libre* sur un alphabet A non vide. On le définit comme suit :

- Soit $L_0(A) = A^*$, l'ensemble des mots formés sur l'alphabet A.
- Si $L_n(A)$ est défini, on définit $L_{n+1}(A)$ comme étant l'ensemble des mots de la forme $\alpha_0\underline{\beta_1}\alpha_1\underline{\beta_2}\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\underline{\beta_k}\alpha_k$, où $k \in \mathbb{N}$, les α_i et les β_j sont des éléments de $L_n(A)$.

On notera que $L_n(A) \subseteq L_{n+1}(A)$ (prendre $k = 0$). On définit $L(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n(A)$. Les éléments de $L(A)$ sont appelées les *étiquettes de Lévy* sur l'alphabet A.

On notera que tout élément de $L(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha_0\underline{\beta_1}\alpha_1\underline{\beta_2}\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\underline{\beta_k}\alpha_k$, où les α_i et les β_j sont encore des éléments de $L(A)$. L'élément neutre 1 est le mot vide ϵ. Le produit est obtenu par concaténation, et le soulignement est déjà défini.

La *hauteur* $h(\alpha)$ d'une étiquette de Lévy est définie comme le plus petit entier n tel que $\alpha \in L_n(A)$. De façon équivalente :

$$\begin{array}{rcll} h(\alpha) & = & 0 & \text{si } \alpha \in A^* \text{ (aucun soulignement)} \\ h(\alpha_0\underline{\beta_1}\alpha_1\underline{\beta_2}\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\underline{\beta_k}\alpha_k) & = & \max(\max_{i=0}^{k} h(\alpha_i), 1 + \max_{j=1}^{k} h(\beta_j)) & \text{si } k \geq 1 \end{array}$$

Autrement dit, la hauteur est le plus grand nombre de soulignements imbriqués.

Rappelons que la réduction du calcul à étiquettes de Lévy est :

$$(\beta^P) \qquad ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta \to (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^{\alpha\beta} \qquad (\text{si } \alpha \in P)$$

1. *(20l.)* Montrer que si les hauteurs des étiquettes de P sont majorées, autrement dit s'il existe un entier n tel que $h(\alpha) < n$ pour tout $\alpha \in P$, alors tout $\lambda^{P,L(A)}$-terme est fortement normalisant (pour la (β^P)-réduction).

   L'idée est de se ramener aux étiquettes de Hyland-Wadsworth, bien sûr. Mais vous aurez besoin de quelques lemmes auxiliaires : énoncez-les clairement, et démontrez-les au fur et à mesure.

On définit une traduction des $\lambda^{P,M(A)}$-termes vers les termes à étiquettes de Hyland-Wadsworth, en remplaçant chaque étiquette de Lévy α étiquetant un terme par $n-h(\alpha)$. Notons u^* le terme u ainsi traduit.

On observe le premier lemme : (1) $((w)^\alpha)^* = (w^*)^{n-h(\alpha)}$. En effet, écrivons $w = M^\beta$, alors $((w)^\alpha)^* = (M^{\beta\alpha})^* = (M^*)^{n-h(\beta\alpha)}$ (pour une définition évidente de M^*), or $n - h(\beta\alpha) = n - \max(h(\beta), h(\alpha)) = \min(n - h(\beta), n - h(\alpha))$; et $(w^*)^{n-h(\alpha)} = (M^*)^{\min(n-h(\beta),n-h(\alpha))}$.

On observe ensuite que : (2) $(u[x := w])^* = u^*[x := w^*]$. C'est par récurrence sur la structure de u. Le cas essentiel est celui où $u = x^\alpha$: $(u[x := w])^* = ((w)^\alpha)^* = (w^*)^{n-h(\alpha)}$ par (1). D'autre part, $u^*[x := w^*] = x^{n-h(\alpha)}[x := w^*] = (w^*)^{n-h(\alpha)}$.

On vérifie enfin que : (3) si $s \to t$ alors $s^* \to t^*$. Le cas essentiel est celui d'un (β^P)-rédex : $s = ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta$, $\alpha \in P$, $t = (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^{\alpha\beta}$. Alors $s^* = ((\lambda x \cdot u^*)^{n-h(\alpha)} v)^{n-h(\beta)}$, $t^* = (u^*[x := ((v)^{\underline{\alpha}})^*])^{n-h(\alpha\beta)}$ (par (2)) $= (u^*[x := (v^*)^{n-h(\underline{\alpha})}])^{n-h(\alpha\beta)}$ par (1).

Comme $\alpha \in P$, $n - h(\alpha)$ est dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. D'autre part, $n - h(\underline{\alpha}) = n - h(\alpha) - 1$ et $n - h(\alpha\beta) = \min(n - h(\alpha), n - h(\beta))$. Donc $s^* \to t^*$ dans le calcul à étiquettes de Hyland-Wadsworth.

De (3) on déduit que tout réduction infinie dans le calcul de Lévy induit par traduction une réduction infinie dans le calcul de Hyland-Wadsworth. Il n'y en a donc pas, par les résultats de la section 1.

2. *(8l.)* L'*effacement* $E(u)$ d'un terme à étiquettes de Lévy est le λ-terme (ordinaire) obtenu en enlevant toutes les étiquettes. Un *relèvement* d'un λ-terme t est un terme à étiquettes de Lévy u tel que $E(u) = t$.

   Montrer que si s, t_1, t_2 sont des λ-termes tels que $s \to^* t_1$ et $s \to^* t_2$ dans le λ-calcul (ordinaire), alors s, t_1, t_2 ont des relèvements s', t'_1, t'_2 tels que $s' \to^* t'_1$ et $s' \to^* t'_2$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul, pour un certain ensemble P d'étiquettes de Lévy dont les hauteurs sont majorées.

   On se contente d'ajouter des étiquettes de hauteur 0 à tous les sous-termes de s, pour obtenir s'. Il est clair que l'on peut reproduire toutes les contractions effectuées lors des réductions $s \to^* t_1$ et $s \to^* t_2$, à condition d'ajouter à P les étiquettes idoines. Si l'on contracte m_1 rédexes de s à t_1 et m_2 de s à t_2, alors la hauteur de P est majorée par $\max(m_1, m_2)$: on peut donc prendre $n = \max(m_1, m_2) + 1$ pour coller à la définition de la question 1.

   On peut aussi prendre pour P l'ensemble de toutes *les étiquettes de Lévy de hauteur au plus $\max(m_1, m_2)$.*

3. *(9l.)* Montrer que le $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est localement confluent, et ce pour n'importe quel ensemble $P \subseteq L(A)$. (On demande un argument rapide, pas forcément complet, mais qui fait bien apparaître le ou les cas essentiels.)

   C'est comme dans le λ-calcul. Supposons $s \to s_1$ et $s \to s_2$. Si les deux rédex contractés dans s, pour aboutir à s_1 et à s_2 respectivement, sont indépendants, c'est-à-

dire qu'aucun n'est au-dessus de l'autre, alors il suffit de réduire le rédex non encore contracté dans chaque u_i pour obtenir, en une étape, un réduit commun.

Le seul cas intéressant est celui d'un rédex $((\lambda x \cdot u)^{\alpha} v)^{\beta}$, avec $v = v[((\lambda x' \cdot u')^{\alpha'} v')^{\beta'}]$. Ceci peut se réduire en $s_1 = (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^{\alpha\beta}$ ou en $s_2 = ((\lambda x \cdot u)^{\alpha} v[(u'[x' := (v')^{\underline{\alpha'}}])^{\alpha'\beta'}])^{\beta}$.

Alors s_1 se réduit, en autant d'étapes qu'il y a d'occurrences de x dans u, en $(u[x := (v[(u'[x' := (v')^{\underline{\alpha'}}])^{\alpha'\beta'}])^{\underline{\alpha}}])^{\alpha\beta}$, et s_2 se réduit en une étape en le même terme.

4. *(7l.)* Déduire des deux questions précédentes une nouvelle démonstration du fait que le λ-calcul est confluent. (Les questions précédentes énoncent que, même si le λ-calcul n'est pas fortement normalisant, il se comporte localement comme s'il l'était.)

   Le $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est localement confluent et fortement normalisant par la question 1. Il est donc confluent.

   Si $s \to^* t_1$ et $s \to^* t_2$ dans le λ-calcul (ordinaire), alors s, t_1, t_2 ont des relèvements s', t'_1, t'_2 tels que $s' \to^* t'_1$ et $s' \to^* t'_2$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul par la question 2, pour P un ensemble d'étiquettes de Lévy de hauteur $< n$, où n est un entier assez grand.

   Alors il existe un $\lambda^{P,L(A)}$-terme u' tel que $t'_1, t'_2 \to^* u'$. Mais alors $t_1, t_2 \to^* E(u')$ en λ-calcul.

3 Réductions quasi-internes

Une réduction $s \to t$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est *interne* si et seulement si le rédex contracté dans s n'a aucun sous-terme strict qui soit un rédex.

Par exemple, $((\lambda y \cdot (\lambda x \cdot x^{\zeta})^{\alpha} y^{\eta})^{\beta} z^{\theta})^{\gamma} \to ((\lambda y \cdot y^{\eta\underline{\alpha}\zeta\alpha})^{\beta} z^{\theta})^{\gamma}$ est une réduction interne si $\alpha \in P$ (et n'est pas une réduction sinon). La réduction $((\lambda y \cdot (\lambda x \cdot x^{\zeta})^{\alpha} y^{\eta})^{\beta} z^{\theta})^{\gamma} \to ((\lambda x \cdot x^{\zeta})^{\alpha} z^{\theta\underline{\beta}\eta})^{\beta\gamma}$ est une réduction interne si $\beta \in P$ et $\alpha \notin P$; si $\alpha, \beta \in P$ c'est une réduction qui n'est pas interne.

On notera $s \to_{\text{int}} t$ si s se réduit par une réduction en une étape qui est interne.

On définit une notion de réduction *quasi-interne* en λ-calcul comme suit. (La notion, appelée "inside-out reduction", a été introduite par Welch en 1975.) L'idée est la suivante. Lorsque l'on réduit s en t par β-réduction, les rédex non contractés dans s se retrouvent copiés un certain nombre de fois dans t (possiblement 0). Les rédex de t ainsi obtenus sont appelés les *résidus* de rédex de s. En général, t contient d'autres rédex, les rédex *créés* par la contraction. Par exemple, dans $(\lambda x \cdot xx)(\lambda y \cdot yy)$, l'unique rédex dans le contracté $(\lambda y \cdot yy)(\lambda y \cdot yy)$ est créé. Une réduction $s = s_0 \to s_1 \to \ldots \to s_n = t$ est intuitivement quasi-interne si et seulement si aucun rédex contracté dans cette réduction n'est résidu d'un rédex qui apparaît comme sous-terme d'un rédex contracté avant lui. Autrement dit, si on décide de contracter un rédex r, qui contient un rédex r' comme sous-terme (strict), on ne pourra plus jamais contracter (aucun résidu de) r' à l'avenir. On notera alors $s \Longrightarrow_{\text{io}} t$.

Plutôt que de formaliser la notion, on admettra que l'effacement d'une réduction interne en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est une réduction quasi-interne en λ-calcul. Autrement dit, on admettra que si $s = s_0 \to_{\text{int}} s_1 \to_{\text{int}} \ldots \to_{\text{int}} s_n = t$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul, alors $E(s) \Longrightarrow_{\text{io}} E(t)$.

1. *(8l.)* Montrer que les réductions quasi-internes sont *cofinales* en λ-calcul. Par ceci, nous entendons le résultat suivant : si $s \rightarrow^* t$ en λ-calcul, alors il existe un λ-terme u tel que $s \Longrightarrow_{\text{io}} u$ et $t \rightarrow^* u$.

   Si $s \rightarrow^* t$, alors s et t ont des relèvements s', t' respectivement tels que $s' \rightarrow^* t'$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul, pour un certain ensemble P de hauteurs majorées. C'est un cas particulier de la question 2 de la section 2.

   Par la question 1 de la même section, la stratégie de réduction interne termine en partant de s', disons sur un terme u'. Posons $u = E(u')$. Par l'observation admise, $s \Longrightarrow_{io} u$.

   Comme le $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est confluent, et que u' est en forme normale, on a donc aussi $t' \rightarrow^* u'$, donc $t \rightarrow^* u$.

2. *(2l.)* En déduire que les stratégies quasi-internes du λ-calcul sont standardisantes : si s a une forme normale t, alors $s \Longrightarrow_{\text{io}} t$.

   Par la question précédente, on a $s \Longrightarrow_{io} u$ et $t \rightarrow^* u$. Mais comme t est en forme normale, $t = u$.

Les étiquettes ont bien d'autres applications. On peut par exemple en déduire le théorème de standardisation, avec quelques efforts supplémentaires : voir le livre de Barendregt. On consultera bien entendu la thèse de Jean-Jacques Lévy (1978), qui montre notamment que les étiquettes de Lévy sont une des trois façons de caractériser les familles de rédex, *que l'on doit partager pour parvenir à définir une réduction optimale (… au sens de Lévy) : les réductions optimales doivent réduire tous les rédex d'une même famille en une seule étape. C'est ce que les algorithmes de Kathail et de Lamping (1990) réussiront à faire.*

J'ai dit en cours que ces notions de réductions optimales avaient un rapport avec la géométrie de l'interaction. Voir l'article "The Geometry of Optimal Lambda Reduction" par Abadi, Gonthier et Lévy (1992). Notamment, si l'on choisit pour M un monoïde inversif, alors on peut définir $\underline{\alpha}$ comme valant α^*. Il se trouve qu'alors les étiquettes calculent la géométrie de l'interaction du terme que l'on réduit (!).