Étiquettes

Documents autorisés (en particulier le poly).

Dans tout le problème, on appellera *monoïde à soulignement* tout triplet $M = (|M|, 1, ., \_)$, où $(|M|, 1, .)$ est un monoïde, et _ est une fonction de $|M|$ dans $|M|$, qui à α associe un élément noté $\underline{\alpha}$. Autrement dit, $|M|$ est un ensemble, appelé le *support* de M, l'élément *neutre* 1 est un élément de M ; pour tous $\alpha, \beta \in |M|$, on peut former le *produit* $\alpha.\beta \in M$ (on notera aussi $\alpha\beta$ au lieu de $\alpha.\beta$), de sorte que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (donnant ainsi un sens à la notation $\alpha\beta\gamma$), et $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$; enfin pour tout $\alpha \in |M|$, le *souligné* $\underline{\alpha}$ est un élément de $|M|$. Le souligné n'a aucune propriété spéciale a priori.

Pour toute partie P d'un monoïde de soulignement M, on définit le $\lambda^{P,M}$-calcul, comme suit.

Les $\lambda^{P,M}$-termes sont obtenus en décorant chaque λ-terme par un élément de M, son *étiquette*. Autrement dit, la syntaxe du $\lambda^{P,M}$-calcul est donnée par :

$$\begin{array}{rcll} s, t, u, v, \ldots & ::= & M^\alpha & \text{terme étiqueté} \\ M, N, P, \ldots & ::= & x & \text{variable} \\ & | & uv & \text{application (de termes \textit{étiquetés})} \\ & | & \lambda x \cdot u & \text{abstraction (le corps } u \text{ est \textit{étiqueté})} \end{array}$$

L'alpha-renommage est comme dans le λ-calcul, mais laisse les étiquettes invariantes. Par exemple, $(\lambda x \cdot x^\alpha)^\beta$ est alpha-équivalente à $(\lambda y \cdot y^\alpha)^\beta$, mais pas à $(\lambda y \cdot y^\gamma)^\beta$ si $\alpha \neq \gamma$.

On peut *appliquer une étiquette* β à un terme étiqueté u pour obtenir un terme étiqueté noté $(u)^\beta$ (attention : les parenthèses font partie de la notation ; u^β n'a pas de sens), défini par : tout terme étiqueté s'écrit de façon unique $u = M^\alpha$ pour un certain terme non étiqueté M, alors $(u)^\beta = M^{\alpha\beta}$.

On définit la substitution $u[x := v]$ (modulo alpha-renommage) comme suit. Notons que ceci utilise l'application des étiquettes, que nous venons de définir.

$$\begin{array}{rcll} x^\alpha[x := v] & = & (v)^\alpha & \\ y^\alpha[x := v] & = & y^\alpha & (y \text{ variable autre que } x) \\ (u_1 u_2)^\alpha[x := v] & = & ((u_1[x := v])(u_2[x := v]))^\alpha & \\ (\lambda z \cdot u)^\alpha[x := v] & = & (\lambda z \cdot (u[x := v]))^\alpha & (z \text{ non libre dans } v \text{ et différente de } x) \end{array}$$

Finalement, on définit la (β^P)-réduction par la règle :

$$(\beta^P) \qquad ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta \to (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^{\alpha\beta} \qquad (\text{si } \alpha \in P)$$

Donc on interdit la (β^P)-réduction si α n'est pas dans P ; et on effectue deux applications d'étiquettes, une à v avec l'étiquette α soulignée, et une au contracté tout entier. Une façon un peu plus simple de décrire ceci, quoique pas entièrement correcte, est $(\lambda x \cdot u)^\alpha v \to (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^\alpha$.

Par exemple, si P est suffisamment grand, on aura :

$$\begin{array}{rcl} ((\lambda x \cdot (x^1 x^2)^3)^4 (\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^8)^9 & \to & ((\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}1} (\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}2})^{349} \\ & \to & ((\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}2\underline{8\underline{4}}15} (\lambda x \cdot (x^5 x^6)^7)^{8\underline{4}2\underline{8\underline{4}}16})^{78\underline{4}1349} \\ & \to & \ldots \end{array}$$

Dans tout le problème, je donne une indication de la longueur de ma solution, par exemple "*(16l.)*" indique que j'ai une solution de 16 lignes. Notez que je suis assez verbeux. Ces indications ont essentiellement pour but de vous remettre sur le droit chemin si jamais vous vous embarquez dans une solution inutilement longue.

1 Étiquettes de Hyland-Wadsworth

Dans cette section, nous considérons le monoïde à soulignement défini comme suit :
- $|M| = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- l'élément neutre est ∞ ;
- le produit $\alpha\beta$ est défini comme $\min(\alpha, \beta)$; on conviendra que $\min(\alpha, \infty) = \min(\infty, \alpha) = \alpha$;
- le soulignement est défini par $\underline{\infty} = \infty$, $\underline{\alpha} = \alpha - 1$ si $\alpha \neq 0, \infty$, $\underline{0} = 0$.

On pose $P = |M| \setminus \{0, \infty\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La (β^P)-réduction devient donc :

$$(\beta^P) \qquad ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta \to (u[x := (v)^{\alpha-1}])^{\min(\alpha,\beta)} \qquad (\text{si } \alpha \neq 0, \infty)$$

Ceci s'appelle le calcul *à étiquettes de Hyland-Wadsworth*.

On va démontrer que (β^P) termine, par une adaptation de la méthode de réductibilité, usuellement appelée de calculabilité ("computability" ; aucun rapport avec la calculabilité au sens des machines de Turing). Cette adaptation est due à Roel de Vrijer.

Soit SN l'ensemble des termes étiquetés fortement normalisants. Posons $\ell(u)$ l'*étiquette* de u, c'est-à-dire $\ell(M^\alpha) = \alpha$.

1. *(2l.)* Montrer que si $u \to v$, alors $\ell(u) \geq \ell(v)$.
2. *(7l.)* On définit simultanément une relation binaire $\triangleright$ et la notion de terme étiqueté *calculable* comme suit. (Ceci n'a rien à voir avec une notion de calculabilité à la Turing.)
   - $s \triangleright t$ si et seulement si $s \to t$, ou bien s est de la forme $(\lambda x \cdot u)^\alpha$, et $t = (u[x := (v)^{\alpha'}])^{\alpha''}$ pour certains $\alpha' < \alpha$, $\alpha'' \leq \alpha$, et pour un certain terme étiqueté v tel que $(v)^{\alpha'}$ est calculable ;
   - s est *calculable* si et seulement si s est dans la partie bien fondée de $\triangleright$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de chaîne infinie $s = s_0 \triangleright s_1 \triangleright \ldots \triangleright s_k \triangleright \ldots$

   Montrer que ceci est une définition correcte, effectuée par récurrence sur $\ell(s)$.
3. *(3l.)* Montrer (CR_1) : tout terme calculable est fortement normalisant.

4. *(2l.)* Montrer (CR_2) : si $s \to t$ et s est calculable, alors t est calculable.
5. *(3l.)* Disons qu'un terme étiqueté est *neutre* si et seulement s'il n'est pas de la forme $(\lambda x \cdot u)^\alpha$ pour aucune étiquette α. Montrer (CR_3) : si s est un terme étiqueté neutre dont tous les réduits en une étape (pour $\to$) sont calculables, alors s lui-même est calculable.
6. *(1l.)* En déduire que toute variable étiquetée x^α est calculable.
7. *(10l.)* Montrer que, si $(s)^\gamma \rhd t$, alors il existe un terme étiqueté t' tel que $s \rhd t'$, et $(t')^\gamma = t$.
8. *(3l.)* En déduire que si s est calculable, alors $(s)^\gamma$ est calculable pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$.
9. *(16l.)* Montrer que si s et t sont calculables, alors $(st)^\gamma$ est calculable pour tout $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
10. *(10l.)* Montrer que si $u[x := v]$ est calculable pour tout terme étiqueté calculable v, alors $(\lambda x \cdot u)^\alpha$ est calculable pour tout $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
11. *(16l.)* En déduire que *tout* terme à étiquettes de Hyland-Wadsworth est calculable, donc fortement normalisant.

2 Étiquettes de Lévy

On notera $L(A)$ le monoïde à soulignement *libre* sur un alphabet A non vide. On le définit comme suit :

- Soit $L_0(A) = A^*$, l'ensemble des mots formés sur l'alphabet A.
- Si $L_n(A)$ est défini, on définit $L_{n+1}(A)$ comme étant l'ensemble des mots de la forme $\alpha_0\underline{\beta_1}\alpha_1\underline{\beta_2}\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\underline{\beta_k}\alpha_k$, où $k \in \mathbb{N}$, les α_i et les β_j sont des éléments de $L_{n-1}(A)$.

On notera que $L_{n-1}(A) \subseteq L_n(A)$ (prendre $k = 0$). On définit $L(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n(A)$. Les éléments de $L(A)$ sont appelées les *étiquettes de Lévy* sur l'alphabet A.

On notera que tout élément de $L(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha_0\underline{\beta_1}\alpha_1\underline{\beta_2}\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\underline{\beta_k}\alpha_k$, où les α_i et les β_j sont encore des éléments de $L(A)$. L'élément neutre 1 est le mot vide ϵ. Le produit est obtenu par concaténation, et le soulignement est déjà défini.

La *hauteur* $h(\alpha)$ d'une étiquette de Lévy est définie comme le plus petit entier n tel que $\alpha \in L_n(A)$. De façon équivalente :

$$\begin{array}{rcll} h(\alpha) & = & 0 & \text{si } \alpha \in A^* \text{ (aucun soulignement)} \\ h(\alpha_0\underline{\beta_1}\alpha_1\underline{\beta_2}\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\underline{\beta_k}\alpha_k) & = & \max(\max_{i=0}^{k} h(\alpha_i), 1 + \max_{j=1}^{k} h(\beta_j)) & \text{si } k \geq 1 \end{array}$$

Autrement dit, la hauteur est le plus grand nombre de soulignements imbriqués.

Rappelons que la réduction du calcul à étiquettes de Lévy est :

$$(\beta^P) \qquad ((\lambda x \cdot u)^\alpha v)^\beta \to (u[x := (v)^{\underline{\alpha}}])^{\alpha\beta} \qquad (\text{si } \alpha \in P)$$

1. *(20l.)* Montrer que si les hauteurs des étiquettes de P sont majorées, autrement dit s'il existe un entier n tel que $h(\alpha) < n$ pour tout $\alpha \in P$, alors tout $\lambda^{P,L(A)}$-terme est fortement normalisant (pour la (β^P)-réduction).

   L'idée est de se ramener aux étiquettes de Hyland-Wadsworth, bien sûr. Mais vous aurez besoin de quelques lemmes auxiliaires : énoncez-les clairement, et démontrez-les au fur et à mesure.

2. *(8l.)* L'*effacement* $E(u)$ d'un terme à étiquettes de Lévy est le λ-terme (ordinaire) obtenu en enlevant toutes les étiquettes. Un *relèvement* d'un λ-terme t est un terme à étiquettes de Lévy u tel que $E(u) = t$.

   Montrer que si s, t_1, t_2 sont des λ-termes tels que $s \to^* t_1$ et $s \to^* t_2$ dans le λ-calcul (ordinaire), alors s, t_1, t_2 ont des relèvements s', t'_1, t'_2 tels que $s' \to^* t'_1$ et $s' \to^* t'_2$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul, pour un certain ensemble P d'étiquettes de Lévy dont les hauteurs sont majorées.

3. *(9l.)* Montrer que le $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est localement confluent, et ce pour n'importe quel ensemble $P \subseteq L(A)$. (On demande un argument rapide, pas forcément complet, mais qui fait bien apparaître le ou les cas essentiels.)

4. *(7l.)* Déduire des deux questions précédentes une nouvelle démonstration du fait que le λ-calcul est confluent. (Les questions précédentes énoncent que, même si le λ-calcul n'est pas fortement normalisant, il se comporte localement comme s'il l'était.)

3 Réductions quasi-internes

Une réduction $s \to t$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est *interne* si et seulement si le rédex contracté dans s n'a aucun sous-terme strict qui soit un rédex.

Par exemple, $((\lambda y \cdot (\lambda x \cdot x^\zeta)^\alpha y^\eta)^\beta z^\theta)^\gamma \to ((\lambda y \cdot y^{\eta\underline{\alpha}\zeta\alpha})^\beta z^\theta)^\gamma$ est une réduction interne si $\alpha \in P$ (et n'est pas une réduction sinon). La réduction $((\lambda y \cdot (\lambda x \cdot x^\zeta)^\alpha y^\eta)^\beta z^\theta)^\gamma \to ((\lambda x \cdot x^\zeta)^\alpha z^{\theta\underline{\beta}\eta})^{\beta\gamma}$ est une réduction interne si $\beta \in P$ et $\alpha \notin P$; si $\alpha, \beta \in P$ c'est une réduction qui n'est pas interne.

On notera $s \to_{\text{int}} t$ si s se réduit par une réduction en une étape qui est interne.

On définit une notion de réduction *quasi-interne* en λ-calcul comme suit. (La notion, appelée "inside-out reduction", a été introduite par Welch en 1975.) L'idée est la suivante. Lorsque l'on réduit s en t par β-réduction, les rédex non contractés dans s se retrouvent copiés un certain nombre de fois dans t (possiblement 0). Les rédex de t ainsi obtenus sont appelés les *résidus* de rédex de s. En général, t contient d'autres rédex, les rédex *créés* par la contraction. Par exemple, dans $(\lambda x \cdot xx)(\lambda y \cdot yy)$, l'unique rédex dans le contracté $(\lambda y \cdot yy)(\lambda y \cdot yy)$ est créé. Une réduction $s = s_0 \to s_1 \to \ldots \to s_n = t$ est intuitivement quasi-interne si et seulement si aucun rédex contracté dans cette réduction n'est résidu d'un rédex qui apparaît comme sous-terme d'un rédex contracté avant lui. Autrement dit, si on décide de contracter un rédex r, qui contient un rédex r' comme sous-terme (strict), on ne pourra plus jamais contracter (aucun résidu de) r' à l'avenir. On notera alors $s \Longrightarrow_{\text{io}} t$.

Plutôt que de formaliser la notion, on admettra que l'effacement d'une réduction interne en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul est une réduction quasi-interne en λ-calcul. Autrement dit, on admettra que si $s = s_0 \to_{\text{int}} s_1 \to_{\text{int}} \ldots \to_{\text{int}} s_n = t$ en $\lambda^{P,L(A)}$-calcul, alors $E(s) \Longrightarrow_{\text{io}} E(t)$.

1. *(8l.)* Montrer que les réductions quasi-internes sont *cofinales* en λ-calcul. Par ceci, nous entendons le résultat suivant : si $s \to^* t$ en λ-calcul, alors il existe un λ-terme u tel que $s \Longrightarrow_{\text{io}} u$ et $t \to^* u$.

2. *(2l.)* En déduire que les stratégies quasi-internes du λ-calcul sont standardisantes : si s a une forme normale t, alors $s \Longrightarrow_{\text{io}} t$.