Jean Goubault-Larrecq

λ-calcul

2. Pouvoir expressif, stratégies, standardisation

Tous droits réservés, Jean Goubault-Larrecq, professeur, ENS Paris-Saclay, Université Paris-Saclay
Cours « Lambda-calcul » (master FESUP préparation à l'agrégation d'informatique Sorbonne Université), 2023-
Ce document est protégé par le droit d'auteur. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur est illicite.

Fonctions calculables

- Plusieurs modèles:
  - Machines de Turing
  - Machines à compteurs (Marvin Minsky)
  - Fonctions récursives (Kurt Gödel)
  - λ-calcul
- Ils sont tous équivalents (« thèse de Church »)

Fonctions calculables

- On admettra que machines de Turing ≡ fonctions récursives (voir cours de calculabilité)
- On peut implémenter la β-réduction du λ-calcul sur une machine de Turing (pour les détails, voir partie 3 du cours)
- On va montrer que toutes les **fonctions récursives** (générales) se codent en λ-calcul; d'abord, les fonctions **primitives récursives**

Fonctions primitives récursives, et récursives (générales)

Les fonctions primitives récursives

- L'ensemble **PR** des fonctions **primitives récursives** est le plus petit contenant:
  - les fonctions **constantes** : $\mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ (pour tout k)
  - la fonction **successeur** $S : m \in \mathbf{N} \mapsto m+1$
  - les **projections** $\pi_i^k : (m_1,\ldots,m_k) \in \mathbf{N}^k \mapsto m_i$ $(1 \leq i \leq k)$
- et clos par les opérations de…

Les fonctions primitives récursives

- L'ensemble **PR** des fonctions **primitives récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:
  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N}$ sont dans **PR**, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ est dans **PR**, alors
  $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \mapsto f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
  est dans **PR**
  - **récurrence primitive**: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N}$ sont dans **PR**, alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N}$ est dans **PR**, où [déf. par réc. sur le 1er arg.]
  $$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m}) \qquad \text{[cas de base]}$$
  $$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m}) \qquad \text{[cas de récurrence]}$$

Les fonctions récursives générales

- Toutes les fonctions primitives récursives sont **totales**.
  Mais ce n'est pas le cas de toutes les fonctions récursives (calculables).
  Il nous manque un équivalent de la boucle `while` générale.

- Traditionnellement, on utilise la **minimisation**:
  pour toute fonction (partielle) $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N}$,
  on note $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ la fonction (partielle) telle que:
  — $\mu f(\underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=}$ l'unique entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$
  et pour tout entier $i < n$, $f(i,\underline{m})$ est défini et $\neq 0$
  (« le premier entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$ »)
  … s'il existe
  — $\mu f(\underline{m})$ indéfini sinon

Les fon … les

Informatiquement:

```
let i = ref 0 in (
      while f(!i,m)!=0 do i:=!i+1;
     i)
```

- Toutes les f…
  Mais ce n'e…
  (calculables).
  Il nous manque un équivalent de la boucle `while` générale.

- Traditionnellement, on utilise la **minimisation**:
  pour toute fonction (partielle) $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N}$,
  on note $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ la fonction (partielle) telle que:
  — $\mu f(\underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=}$ l'unique entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$
  et pour tout entier $i < n$, $f(i,\underline{m})$ est défini et $\neq 0$
  (« le premier entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$ »)
  … s'il existe
  — $\mu f(\underline{m})$ indéfini sinon

à condition que tous les $f(i,\underline{m})$, $i<n$, soit **définis**

Les fonctions récursives générales

- L'ensemble **Rec** des fonctions **récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:
  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors
  $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \to f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
  est dans **Rec**
  - **récurrence primitive**: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, où
  $$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$$
  $$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$$
  - **minimisation**: si $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$

Les entiers de Church

- Avant de commencer, il va falloir trouver une représentation des **entiers**
- Il y en a plusieurs, mais l'une des plus naturelles est:

$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \, . \, \lambda x \, . \, \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ fois } f}x))) \qquad \text{[entier de \textbf{Church}]}$$

- i.e., $\ulcorner n \urcorner$ est « la fonctionnelle $f \mapsto f^n$ » [**itérateur**]
- Je noterai donc, abusivement:

$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \, . \, \lambda x \, . \, f^n(x)$$

But du codage

sans variable libre

- On cherche, pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$, un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que, pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors

$$\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ \ldots \ \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$$

- **Note**: ceci est équivalent à:

$$\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ \ldots \ \ulcorner n_k \urcorner \to^* \ulcorner n \urcorner \qquad \text{(pourquoi?)}$$

Codage des fonctions de base

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \dots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \dots, n_k)$ défini

- Fonctions **constantes**:
  si $f(n_1, \dots, n_k)$=la même constante n
  pour tous $n_1, \dots, n_k$,
  $\ulcorner f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \dots . \lambda z_k . \ulcorner n \urcorner$
- **Projections**:
  $\ulcorner \pi_i^k \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \dots . \lambda z_k . z_i$
- **Successeur**: plusieurs possibilités:
  $\ulcorner S \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z . \lambda f . \lambda x . f(zfx)$ … par exemple

Le successeur

- **Successeur**: plusieurs possibilités:

  $\ulcorner S \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(zfx)$

- Vérifions:

  $\ulcorner S \urcorner \ulcorner n \urcorner \to \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(\ulcorner n \urcorner f\, x)$

  $\to^2 \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(f^n(x))$

  $= \ulcorner n{+}1 \urcorner$

- Voyez-vous d'autres définitions possibles de $\ulcorner S \urcorner$?

- $\lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, zf(fx)$, par exemple

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

deux étapes ici, d'accord?

au fait, pourquoi ce terme-ci n'est-il **pas** β-équivalent à $\ulcorner S \urcorner$ ci-dessus?

Une parenthèse: opérations arithmétiques

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Toutes les opérations arithmétiques sont primitives récursives, mais on peut aussi les définir directement
- $\ulcorner + \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \lambda z_2 . \lambda f . \lambda x . z_1 f(z_2 f x)$
  … ou $\lambda z_1 . \lambda z_2 . \lambda f . \lambda x . z_2 f(z_1 f x)$
  … ou $\lambda z_1 . \lambda z_2 . z_1 \ulcorner S \urcorner z_2$
  … ou $\lambda z_1 . z_1 \ulcorner S \urcorner$ [**tous** β-inéquivalents!]
- $\ulcorner \times \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \lambda z_2 . \lambda f . z_1(z_2 f)$ [… par exemple]
- $\ulcorner \text{pow} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \lambda z_2 . z_1 z_2$ [… ou juste $\lambda z . z$!]

Composition etc.

composition: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$,
et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors
$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \mapsto f(g_1(\underline{m}), \ldots, g_k(\underline{m}))$
est dans **Rec**

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_\ell .$
  $\ulcorner f \urcorner (\ulcorner g_1 \urcorner z_1 \ldots z_\ell) \ldots (\ulcorner g_k \urcorner z_1 \ldots z_\ell)$
- La récurrence primitive = minimisation + prédécesseurs (voir annexe A pour définir prédécesseur, i.e., la fonction _ – 1)
- L'important sera la minimisation

`letrec` et points fixes

- On va coder la récurrence primitive $R_{f,g}$ par:
  `letrec` $R_{f,g}(z,\underline{m})=$ (informellement)
  if $z=0$ then $f(\underline{m})$
  else $g(P(z), R_{f,g}(P(z),\underline{m}), \underline{m})$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- On a tout (if, =0, P, composition)… reste `letrec`
- `letrec` $f(\underline{z}) = e(f,\underline{z})$, c'est trouver f tel que $f =_\beta \lambda \underline{z} . e(f,\underline{z})$
- autrement dit un **point fixe** de $\lambda f . \lambda \underline{z} . e(f,\underline{z})$ (mod $=_\beta$)

Points fixes

un **combinateur** (de point fixe, ici)

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$ $=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).
- En fait, il existe un λ-terme clos Y tel que, pour tout λ-terme u, $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$.
- Combinateur de point fixe… **de Church** [surprise!]

$$\mathrm{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . (\lambda x . f(xx)) (\lambda x . f(xx))$$

- $\mathrm{Y}u \to \underbrace{(\lambda x . u(xx))}_{} \underbrace{(\lambda x . u(xx))}_{A_u}$ [x fraîche, $\notin \mathrm{fv}(u)$]

$$\to u\,(A_u\, A_u)$$

$$\leftarrow u(\mathrm{Y}u)$$

Récurrence primitive

récurrence primitive: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$
et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$,
alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, où

$$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$$
$$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$$

$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R . \lambda z . \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k .$
  $\ulcorner \mathrm{if} \urcorner (\ulcorner {=}0 \urcorner\, z)$
  $(\ulcorner f \urcorner\, z_1 \ldots z_k)$
  $(\ulcorner g \urcorner (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z) (R (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z)\, z_1 \ldots z_k)\, z_1 \ldots z_k))$

- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \ulcorner 0 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner f \urcorner\, u_1 \ldots u_k$
  $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \ulcorner n+1 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner g \urcorner \ulcorner n \urcorner (\ulcorner R_{f,g} \urcorner \ulcorner n \urcorner\, u_1 \ldots u_k)\, u_1 \ldots u_k$
  (exercice!)

Minimisation

minimisation: si $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$

« let $\mu f\,(\underline{m})$ =
letrec search z =
if $f(z,\underline{m})$=0 then z
else search (z+1)
in search 0 »

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner \mu f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k .$
  $Y(\lambda search . \lambda z .$
  $\ulcorner \text{if} \urcorner (\ulcorner =0 \urcorner (\ulcorner f \urcorner\, z\, z_1 \ldots z_k))$
  z
  $search\, (\ulcorner S \urcorner\, z))$
  $\ulcorner 0 \urcorner$

- Si $\ulcorner f \urcorner \ulcorner 0 \urcorner u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner f \urcorner \ulcorner n \urcorner u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_n \urcorner$, avec $m_0, \ldots, m_{n-1}$ non nuls et m_n=0, alors $\ulcorner \mu f \urcorner u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner n \urcorner$ (exercice! implique une réc. sur n)

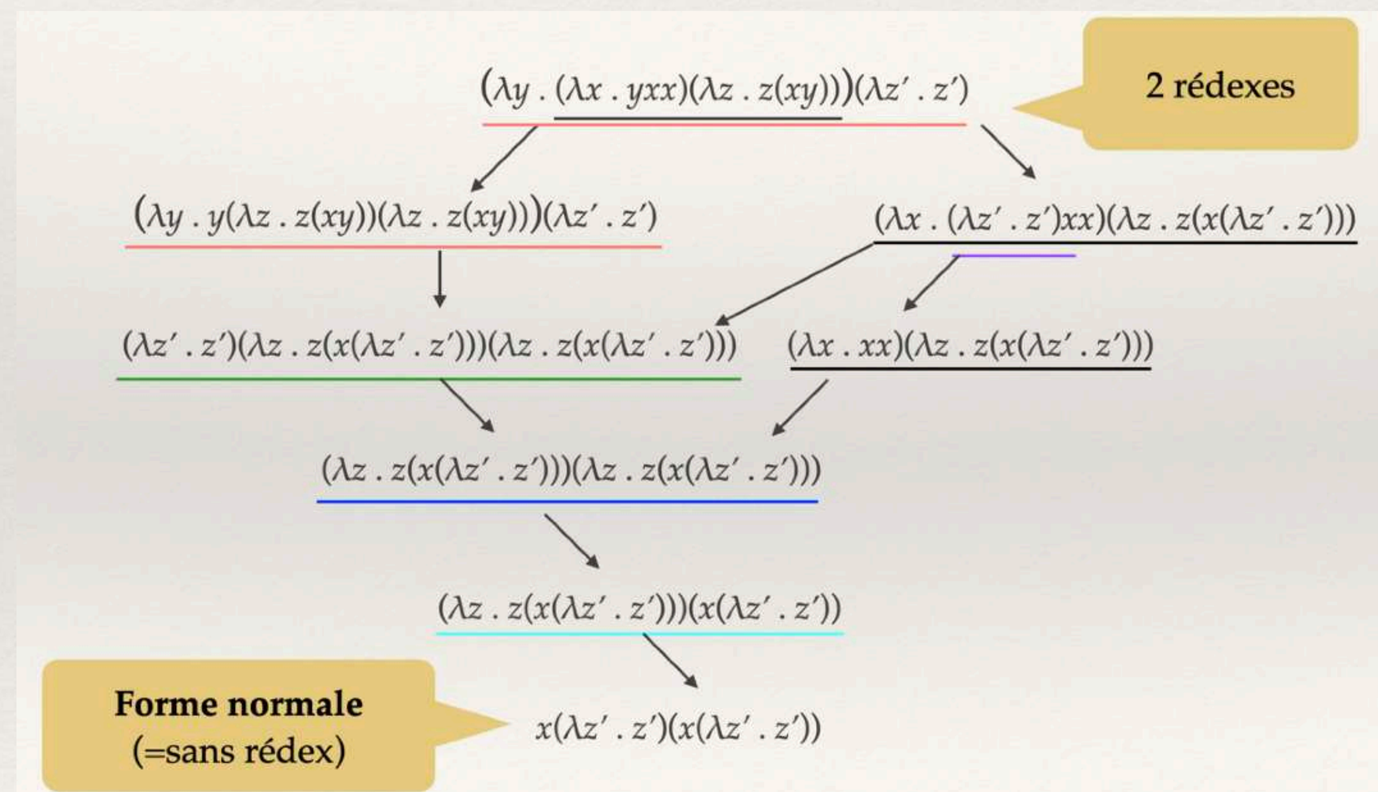
Pouvoir expressif

- Au total, nous avons:
- **Théorème.** Pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$,
  il existe un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que,
  pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$,
  si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors
  $\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$
- Kleene a montré encore plus fort:
  on peut demander que si $f(n_1, \ldots, n_k)$ n'est pas **définie**,
  alors $\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$ n'est **pas normalisable**
- C'est beaucoup plus dur, et utilise le **théorème de standardisation** (dans la suite), ou bien de démontrer qu'en fait $\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$ n'a même pas de **forme normale de tête** (dans la suite)

Stratégies

Stratégies

- En général, on doit **choisir** un rédex parmi tous ceux que l'on peut contracter, à chaque étape de réduction



Stratégies

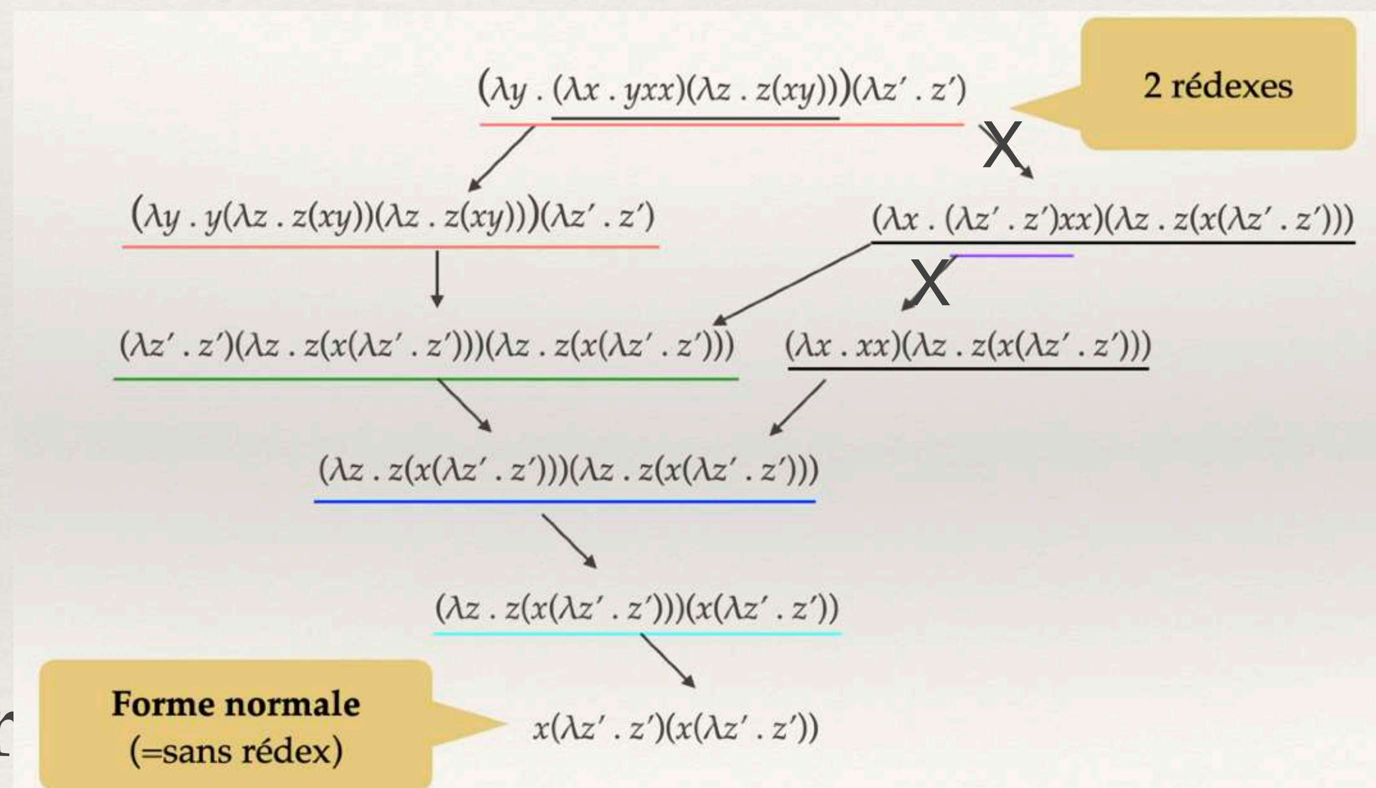
- En général, on doit **choisir** un rédex parmi tous ceux que l'on peut contracter, à chaque étape de réduction
- Une fonction qui à chaque terme non normal associe un de ses rédexes est une **stratégie**
- Quelques exemples de stratégies
- La stratégie gauche, et le théorème de standardisation
- Avant ça, les stratégies de quelques langages de programmation

Stratégies faibles

- Les stratégies des langages de programmation sont des **stratégies faibles**: elles ne réduisent **pas sous les λ**.

```
> fn x => x+1+2;
it : int -> int
it = <fn>
>
```

- (Quoique… voir **inlining**.)



- Suffisent pour évaluer les programmes de type de base (`int`, `bool`, `string`).

Stratégies faibles

- Les stratégies des langages de programmation sont des **stratégies faibles**: elles ne réduisent **pas sous les λ**.

Contextes pour les stratégies faibles:

C ::= _	trou (où le terme est inséré)
~~$\mid \lambda x . C$~~	~~réduction « sous la lambda »~~
$\mid C\ v$	la réduction s'opère dans la fonction
$\mid u\ C$	la réduction s'opère dans l'argument

- Une stratégie faible est en général **incomplète**:
  elle ne permet pas de trouver la forme normale
  (Ex: $\lambda x . (\lambda y . y) x$ ne se réduit pas, faiblement)

Appel par valeur

- Comment est évaluée une application uv?
- En Lisp, en ML (en C, en Java, etc.):
  1. on évalue d'abord **à la fois** u et v
  2. si u s'évalue à $\lambda x . s$, **et** v en une **valeur** V, on continue l'exécution en $s[x:=V]$

Dans ces langages, la stratégie est par valeur **et** faible

- Une modélisation classique: valeurs V = variables ou abstractions (pas applications)
- (β_V) $(\lambda x . u)\ V \to u[x:=V]$

Theoretical Computer Science 1 (1975) 125–159. © North-Holland Publishing Comp

CALL-BY-NAME, CALL-BY-VALUE AND THE λ-CALCULUS

G. D. PLOTKIN

Department of Machine Intelligence, School of Artificial Intelligence, University of Ed Edinburgh, United Kingdom

Communicated by R. Milner
Received 1 August 1974

Appel par nom (évaluation paresseuse)

- Comment est évaluée uv?
- En Haskell (et Miranda):
  1. on évalue d'abord **uniquement** u
  2. si u s'évalue à $\lambda x\ .\ s$, ~~**et** v en une **valeur** V,~~ on continue l'exécution en $s[x{:=}v]$
- Modélisé par la **réduction gauche**: toujours réduire le rédex le plus à gauche dans l'écriture du terme

Evaluation **paresseuse**: On n'évaluera v que si s a besoin de la valeur de x

Dans ces langages, la stratégie est par nom **et** faible

Theoretical Computer Science 1 (1975) 125–159. © North-Holland Publishing Comp

CALL-BY-NAME, CALL-BY-VALUE AND THE λ-CALCULUS

G. D. PLOTKIN

Department of Machine Intelligence, School of Artificial Intelligence, University of Ed
Edinburgh, United Kingdom

Communicated by R. Milner
Received 1 August 1974

Classification des stratégies en λ-calcul

Classification des stratégies

- Stratégies **internes**: le rédex contracté est le plus bas possible (dans $(\lambda x \,.\, u)v$, u et v sont normaux)
- Stratégies **externes**: le rédex contracté est le plus haut possible (on ne réduit pas sous un rédex)
- Evaluation des arguments **de gauche à droite** (comme en Java, Python, etc.) ou **de droite à gauche** (comme en Caml)
- Stratégies **faibles**: on ne contracte pas sous une λ-abstraction (comme en Caml, Haskell, etc.)

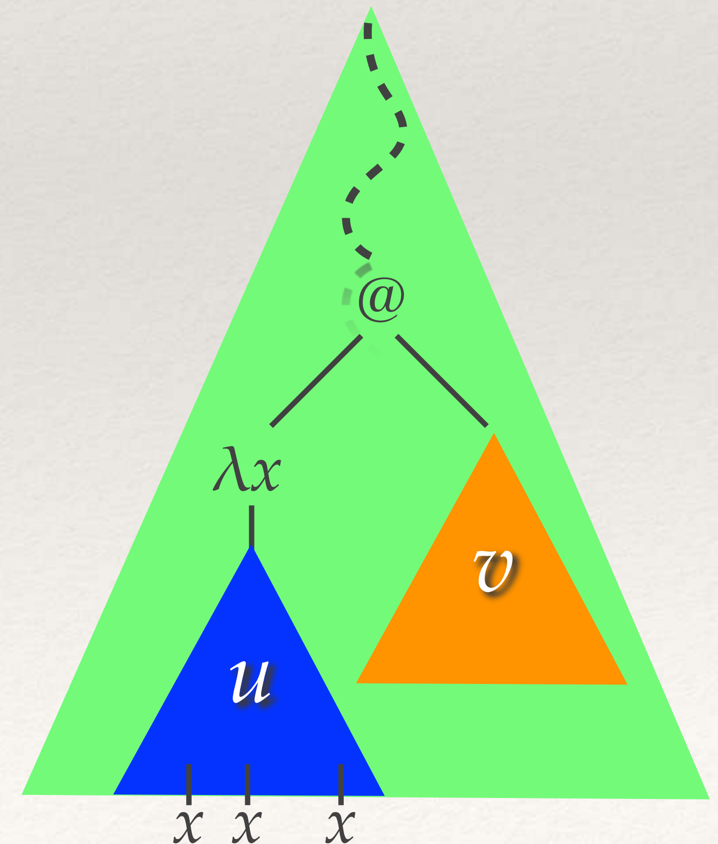
Stratégies optimales?

- Y a-t-il une stratégie (calculable) **optimale?**
- Si optimale = **standardisante**
  (= « trouve une forme normale s'il en existe une »)
  la réponse est **oui**: la **stratégie gauche**
  (voir transparents suivants) est standardisante.

Stratégie gauche, réductions de tête

Stratégie gauche

- La stratégie **gauche** consiste à toujours sélectionner le rédex **le plus à gauche** dans l'écriture textuelle d'un terme
- De façon équivalente, dans la représentation en arbre:
  — parmi tous les rédexes **externes**
  — on choisit le **plus à gauche**
  (anglais: **leftmost-outermost**)



Théorème de standardisation

- Le théorème de **standardisation**:
- **Théorème.** Pour tout λ-terme u, et toute **forme normale** v, les affirmations suivantes sont équivalentes:
  1. $u \to^* v$
  2. $u \to^* v$ par réduction gauche.
- Autrement dit, pour trouver la forme normale de u, il suffit d'effectuer des **réductions gauches**.
  Si les réductions gauches ne terminent pas, u n'a pas de forme normale.

Les preuves du thm. de standardisation

- La preuve **classique**: on définit une relation de réécriture **entre réécritures**.
- Les réécritures normales pour cette relation sont les réécritures gauches.
- La terminaison est assurée par le théorème des **développements finis** (voir exercice)
  + une notion de résidu (ou radicaux) de rédex.
  [Hardin, Section 7, 7 pages]

Les preuves du thm. de standardisation

- La preuve **de René David**: une preuve élémentaire (mais longue), aperçu en annexe B.
- On définit une relation $\Rightarrow_s$ par une définition astucieuse.
- On montre que $\Rightarrow_s = \to^*$ (voir exercices pour les détails).
- Si $u \Rightarrow_s v$, et si v est **normal**, alors on verra que u se réduit en v par **réduction gauche**.
- … aussi une excuse pour examiner les notions fondamentales de **réduction de tête**, **formes de tête**, etc.

Semi-calculable
=récursif
=λ-définissable

λ-définissable ⇒ semi-calculable

- Semi-calculable = réalisée par une machine de Turing
  Calculable = … par une machine de Turing **qui termine**.
- On peut implémenter la réduction gauche
  (voir la fonction red de l'annexe C), donc:
- **Prop.** Il existe une machine de Turing ***Eval*** qui,
  étant donné tout (mot représentant) un λ-terme u
  en entrée, calcule
  la **forme normale** de u en sortie si elle existe,
  et ne termine pas sinon.

récursif ⟹ λ-définissable

- Rappel:

Théorème. Pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$,
il existe un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que,
pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$,
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors
$\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$

- Nous pouvons maintenant montrer la partie manquante:
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ n'est pas **définie**,
alors $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$ n'est **pas normalisable**
- Mieux: … n'a **pas de forme normale de tête**
(je vous le laisse en exercice [« La fin du théorème de Kleene »])

That's all, folks!

Annexe A: prédécesseur

Détour 1: booléens

- Booléens de **Church**:
  $\ulcorner \text{vrai} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathit{then} \,.\, \lambda \mathit{else} \,.\, \mathit{then}$
  $\ulcorner \text{faux} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathit{then} \,.\, \lambda \mathit{else} \,.\, \mathit{else}$

- $\ulcorner \text{if} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathit{test} \,.\, \lambda \mathit{then} \,.\, \lambda \mathit{else} \,.\, \mathit{test}\ \mathit{then}\ \mathit{else}$
  (ou bien $\lambda \mathit{test} \,.\, \mathit{test}$!)

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Détour 2: test à zéro

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Test d'égalité d'un entier à 0:
  $\ulcorner{=}0\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,z\,(\lambda_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$
- $\ulcorner{=}0\urcorner\ \ulcorner 0\urcorner \to \ulcorner 0\urcorner\,(\lambda_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$
  $\to (\lambda x\,.\,x)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner \to \ulcorner\text{vrai}\urcorner$
- $\ulcorner{=}0\urcorner\ \ulcorner n{+}1\urcorner \to \ulcorner n{+}1\urcorner\,(\lambda_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$
  $\to^2 (\lambda_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)^{n+1}\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$
  $= (\lambda_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,((\lambda_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)^n\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner)$
  $\to \ulcorner\text{faux}\urcorner$
- Le terme réellement difficile à trouver, c'est le **prédécesseur**

Détour 3: couples

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Formation de couples:
  $\ulcorner \text{pair} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \lambda z_2 . \lambda p . p z_1 z_2$
  $\ulcorner \text{pair} \urcorner uv \to^2 \langle u,v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lambda p . puv$
- Projections:
  $\ulcorner \text{p}_1 \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda c . c(\lambda z_1 . \lambda z_2 . z_1)$ (oui, $= \lambda c . c \ulcorner \text{vrai} \urcorner$)
  $\ulcorner \text{p}_2 \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda c . c(\lambda z_1 . \lambda z_2 . z_2)$ (oui, $= \lambda c . c \ulcorner \text{faux} \urcorner$)
- $\ulcorner \text{p}_1 \urcorner \langle u,v \rangle \to \langle u,v \rangle (\lambda z_1 . \lambda z_2 . z_1) \to (\lambda z_1 . \lambda z_2 . z_1)uv \to^2 u$
  $\ulcorner \text{p}_2 \urcorner \langle u,v \rangle \to \langle u,v \rangle (\lambda z_1 . \lambda z_2 . z_2) \to (\lambda z_1 . \lambda z_2 . z_2)uv \to^2 v$

Détour 4: prédécesseur

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Soit $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} n-1$ si $n \geq 1$,
  0 si $n=0$ **(prédécesseur)**
- Idée de codage:
  $c := \langle 0,0 \rangle$; répéter n fois: remplacer $\langle m,n \rangle$ par $\langle m+1,m \rangle$
  Ainsi c passe par $\langle 0,0 \rangle$, $\langle 1,0 \rangle$, $\langle 2,1 \rangle$, …, $\langle n,n-1 \rangle$ (si $n \geq 1$)
  Finalement, prendre la 2ème projection.
- $\ulcorner P \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z . \ulcorner p_2 \urcorner (z(\lambda c . \langle \ulcorner S \urcorner (\ulcorner p_1 \urcorner c), \ulcorner p_1 \urcorner c \rangle) \langle \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 0 \urcorner \rangle)$
  Vérification: exercice!

Annexe B: un aperçu de la preuve de standardisation, d'après R. David

Forme de tête

- Etant donné un λ-terme u, on peut énumérer tous les $\lambda\, x_i$ au début de l'écriture de u:

  $$\lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,.\, v$$

  de sorte que v ne soit **pas une λ-abstraction**

  (n peut valoir 0)

- on peut maintenant écrire v comme une application:

  $$h\; u_1 \ldots u_m$$

  où h n'est pas une application (m peut valoir 0)

- Donc…

Forme de tête

- On peut écrire tout λ-terme u de façon unique comme:

  $$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . h\, u_1 \ldots u_m$$

  avec $n, m \geq 0$, et:

  - soit h est une **variable** (la **variable de tête** de u
    on dit alors que u est en **forme normale de tête**)
  - soit h est une λ-abstraction $\lambda x . s$ et $m \geq 1$
    (alors $(\lambda x . s)\, u_1$ est le **rédex de tête** de u)

« forme (normale de tête) »,
pas
« (forme normale) de tête »

- Dans tous les cas, cette forme est la **forme de tête** de u
  — h est la **tête** de u
  — $u_1 \ldots u_m$ sont les **arguments** de u

Réduction de tête

- Une **réduction de tête** est une β-réduction qui contracte le rédex de tête (s'il existe)
- $\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . (\lambda x . s)\, u_1 \ldots u_m$
  $\to_t \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . s[x{:=}u_1]\, u_2 \ldots u_m$
- On ne demande (surtout) **pas** que $\to_t$ soit compatible au contexte
- **Note:** on a une compatibilité partielle, en ce que
  si $u \to_t v$ alors $\lambda x . u \to_t \lambda x . v$
- **Note:** la réduction de tête est **déterministe** (au plus 1 rédex de tête)
  En particulier, la forme normale de tête est **unique** si elle existe.

Formes normales de tête

- Tout terme u en forme normale a pour forme de tête une **forme normale de tête**:

  $$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . h\, u_1 \ldots u_m \quad (h \text{ variable})$$

  … car u ne contient pas de rédex

- Il existe des termes en forme normale de tête, qui ne sont **pas** normaux, par exemple:

  $$\lambda x . x\, \Omega$$

- **Fait.** u est normal ssi il est en **forme normale de tête**:

  $$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . h\, u_1 \ldots u_m \quad (h \text{ variable})$$

  et, récursivement, **tous** ses arguments u_i sont **normaux**

On dit parfois
« u est **héréditairement** en forme
normale de tête »

Stratégies standard

- Une **stratégie standard** est, intuitivement,
  une stratégie qui réduit « du haut vers le bas »
- Toute stratégie externe (y compris la stratégie gauche) est standard
- Formellement, on donne une définition abstraite de la notion « se réduit par une stratégie standard
  [en 0, 1, ou plusieurs étapes] en »
  via une relation $\Rightarrow_s$, due à René David
  (ainsi que la preuve qui suit)

La relation de réduction standard $\Rightarrow_s$

- On dit que $u \Rightarrow_s v$ ssi (récurrence sur $|v|$)
  - v s'écrit sous forme de tête

    $$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . v_0 \, v_1 \ldots v_m$$

  - $u \rightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0 \, u_1 \ldots u_m$ (les mêmes $x_1, \ldots, x_n$, merci le α-renommage)
  - $u_1 \Rightarrow_s v_1, \ldots, u_m \Rightarrow_s v_m$
  - $u_0 \Rightarrow_s v_0$, ce par quoi j'entends:

    — si v_0 est une variable x, alors $u_0 = x$

    — si $v_0 = \lambda x . v'$, alors $u_0 = \lambda x . u'$ et $u' \Rightarrow_s v'$
- J'écrirai en abrégé:

$$\begin{array}{l} u \rightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0 \; u_1 \ldots u_m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \Downarrow_s \;\; \Downarrow_s \quad\;\; \Downarrow_s \\ \qquad \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . v_0 \; v_1 \ldots v_m \overset{\text{tête}}{=} v \end{array}$$

La proposition clé (R. David)

- **Proposition.** Si $u \to^* v$ alors $u \Rightarrow_s v$.
- La démonstration se fait par une série assez longue de lemmes

  (voir exercices)

- C'est essentiellement un **tri**, qui réordonne les réductions de sorte à mettre les plus hautes d'abord
- Le lemme important dit:

  Lemme de tri. si $u \Rightarrow_s w \to v$, alors $u \Rightarrow_s v$

(Intuition: si la réduction $w \to v$ était effectuée trop haut,
on aurait pu la permuter avec des réductions antérieures de u à w opérant plus bas)

La proposition clé (R. David)

- On peut maintenant montrer:

Proposition. Si $u \to^* v$ alors $u \Rightarrow_s v$.

- Par récurrence sur la longueur k de la réduction $u \to^* v$

Je vous laisse démontrer que la réciproque est vraie aussi: donc $u \to^* v$ **si et seulement si** $u \Rightarrow_s v$.

- Si k=0, (a) $u \Rightarrow_s u$.
- Sinon, il existe un w tel que $u \to^* w$ en $\leq k$–1 étapes et $w \to v$
- Par hyp. réc., $u \Rightarrow_s w$
- Donc $u \Rightarrow_s v$.

Lemme de tri. Si $u \Rightarrow_s w \to v$ alors $u \Rightarrow_s v$.

Réduction standard vers une forme normale

- Un point subtil:
  si $u \Rightarrow_s v$, $$\begin{array}{ccccc} u \to_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 & u_1 & \ldots & u_m \\ & \Downarrow_s & \Downarrow_s & & \Downarrow_s \\ \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 & v_1 & \ldots & v_m = v \end{array}$$
  alors $\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0\, u_1 \ldots u_m$ n'est **pas nécessairement** la forme normale de tête de u
  ($u_0\, u_1$ peut être un rédex)
- Mais ceci n'arrive pas si v est en **forme normale**
  (car alors v_0 est une variable, et donc $u_0{=}v_0$ par déf. de $\Rightarrow_s$)

Réductions standard, réductions gauches

- **Proposition.** Si $u \Rightarrow_s v$ **et** si v est normal,
  alors $u \to^* v$ par une réduction gauche
- Par récurrence sur $|v|$

toute réduction de tête est gauche

- Comme v normal: $u \to_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, u_1 \ldots u_m$

$$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, v_1 \ldots v_m = v$$

(avec $x = x$, $u_1 \Rightarrow_s v_1$, …, $u_m \Rightarrow_s v_m$)

- Donc $u \to_{gauche}^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, u_1\, u_2 \ldots u_m$

gauche dans u_1, donc dans tout le terme car pas de rédex plus à gauche — $\downarrow^*$ gauche par hyp. réc.

- $\to_{gauche}^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, v_1\, u_2 \ldots u_m$

gauche dans u_2, donc dans tout le terme car pas de rédex plus à gauche — $\downarrow^*$ gauche par hyp. réc.

- $\to_{gauche}^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, v_1\, v_2 \ldots u_m$
- … $\to_{gauche}^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, v_1\, v_2 \ldots v_m$

Théorème de standardisation

- **Théorème.** Pour tous λ-termes u, v, les affirmations:
  1. $u \rightarrow^* v$ 2. $u \rightarrow^* v$ par réduction gauche 3. $u \Rightarrow_s v$
  sont telles que $2 \Rightarrow 1 \Longleftrightarrow 3$.
  Si de plus v est **normal**, $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$.
- On a donc un **algorithme** pour trouver la forme normale d'un terme u, si elle existe:
  — tant que u n'est pas normal, réduire son rédex gauche
- (Bien entendu, si u n'est pas normalisable, cet algorithme ne termine pas.)

Remarques

- Une stratégie **standardisante** est une stratégie de réduction qui trouve la forme normale d'un λ-terme si elle existe.
- Nous venons de voir que la **stratégie (externe) gauche** est standardisante.
- Ce n'est pas la seule: par exemple, les stratégies **quasi-internes** sont aussi standardisantes (voir exercices).

Annexe C: quelques implémentations simples du λ-calcul

Implémentations du λ-calcul

- Un interprète naïf en Caml
- Machines de Krivine
- Machines à environnement

Représentation des λ-termes

```
type lambda_term = VAR of string
                 | APPL of lambda_term * lambda_term
                 | ABS of string * lambda_term
```

Par exemple, $\lambda x\,.\,y(\lambda z\,.\,yxzx)$ serait:

```
ABS ("x", APPL (VAR "y",
                ABS ("z",
                     APPL (APPL (APPL (VAR "y", VAR "x"),
                                 VAR "z"),
                           VAR "x"))))
```

Un premier interprète

```
type lambda_term = VAR of string
                 | APPL of lambda_term * lambda_term
                 | ABS of string * lambda_term

let rec norm (t : lambda_term) = (* calcule la forme normale de t *)
    match t with
        | VAR x -> t
        | ABS (x, u) -> ABS (x, norm u)
        | APPL (u, v) ->
          let u' = norm u in
          match u' with
            | ABS (y, u1) -> norm (subst u1 y v)
            | _ -> APPL (u', norm v)
```

Ce code est-il correct?

Réduction complète.
Pour une réduction faible, écrire `t` à la place de `ABS (x, norm u)`

À définir…
(attention au **α-renommage**!)

Réduction **gauche**

Efficacité?
`u1` est normal, mais on va quand même normaliser `subst u1 y v`

Efficacité?
(pas terrible…)

L'astuce de Krivine

- Pour éviter la réévaluation, on garde une liste `args` des arguments en attente

Si `args`=[v_1; …; v_n], calcule la forme normale de `t` v_1 … v_n

Réduction complète.
Pour une réduction faible, écrire `t` à la place de `ABS (x, norm2 u nil)`
(+enlever `norm2` du code de `apply_head`)

```
let rec apply_head (t : lambda_term) (args : lambda_term list) =
    match args with
        | nil -> t
        | u::rest -> apply_head (APPL (t, norm2 u)) rest

let rec norm2 (t : lambda_term) (args : lambda_term list) =
    match t with
        | VAR x -> apply_head t args
        | ABS (x, u) -> (match args with
                            | nil -> ABS (x, norm2 u nil)
                            | v::rest -> norm2 (subst u y v) rest)
        | APPL (u, v) -> norm2 u (v::args)
```

La β-réduction est ici

Exploration du terme: recherche du rédex de tête

Une machine de Krivine

pour la réduction **de tête faible**:
$(\lambda\, x\, .\, s)\, u_1 \ldots u_m$
$\to_{tf}\; s[x{:=}u_1]\, u_2 \ldots u_m$

- On abstrait tout ça sous forme de **règles** de sémantique opérationnelle

Une **configuration**
$u, [v_1; \ldots; v_m]$ représente le λ-terme $u v_1 \ldots v_m$

- (explore) $uv, args \rightsquigarrow u, v{::}args$
  (β) $\lambda x\, .\, u, v{::}rest \rightsquigarrow u[x{:=}v], rest$

- **Thm (correction).** Si $u, [v_1; \ldots; v_n] \rightsquigarrow^* u', [v'_1; \ldots; v'_m]$
  alors $u\, v_1 \ldots v_n \to_{tf}{}^* u'\, v'_1 \ldots v'_m$ (réd. de tête faible)

- **Thm (progrès).** Les configurations stoppées sont celles de la forme $x, [v_1; \ldots; v_n]$ ou $\lambda x\, .\, u, []$

(NB: $x\, v_1 \ldots v_n$ et $\lambda x\, .\, u$ sont les formes normales de tête faibles; exercice.)

Reste quand même à définir la substitution… ou à la remplacer (efficacité)

Réduction de tête (pas faible)

- On peut étendre le principe à d'autres stratégies de réduction:
- Réduction de tête (pas faible)

$u, [v_1; \ldots; v_m] / [x_1; \ldots; x_n]$ représente $\lambda x_n, \ldots, x_1 . u v_1 \ldots v_m$

- (explore-lam) $\lambda x . u, [] / vars \rightsquigarrow u, [] / x{::}vars$

  (explore-app) $uv, args/vars \rightsquigarrow u, v{::}args / vars$

  (β) $\lambda x . u, v{::}rest / vars \rightsquigarrow u[x{:=}v], rest / vars$

(Voir exercices)

Reste quand même à définir la substitution… ou à la remplacer (efficacité)

Réduction de tête en OCaml

(explore-lam)	$\lambda x\,.\,u, []/vars \rightsquigarrow u, []/x{::}vars$
(explore-app)	$uv, args/vars \rightsquigarrow u, v{::}args/vars$
(β)	$\lambda x\,.\,u, v{::}rest/vars \rightsquigarrow u[x:=v], rest/vars$

```
let rec red_t t args vars =
     match t with
          ABS (x, u) ->
          (match args with
                [] ->
                red_t u [] (x::vars)   (* explore-lam *)
            | v::rest ->
                red_t (subst u x v) rest vars (* beta *)
            )
        | APPL (u, v) ->
          red_t u (v::args) vars       (* explore-app *)
        | _ -> (t, args, vars)
         (* forme normale de tête λ vars . t args *)
```

```
let rec subst u x v = … (* exercice! *)
```

Réduction gauche en OCaml

- ```
  let rec red_t t args vars = …
          (* retourne la forme normale de tête
             de λ vars . t args [si elle existe]
             sous la forme (x, args', vars') *)
  ```
- ```
  let rec reconstruct x args' vars' = …
          (* reconstruit le λ-terme λ vars' . t args'
             (exercice) *)
  ```
- ```
  let rec red t =
      let (x, args', vars') = red_t t [] [] in
      let args'_norm = List.map red args' in
          reconstruct x args'_norm vars'
  ```

Principe:
on met t en forme **normale de tête**
$\lambda x_1, \ldots, x_n \, . \, u v_1 \ldots v_m$
puis on réduit chaque v_i,
récursivement
  ```