λ-calcul pour l'agrégation

Jean Goubault-Larrecq

1. définitions, confluence, terminaison

Tous droits réservés, Jean Goubault-Larrecq, professeur, ENS Paris-Saclay, Université Paris-Saclay
Cours « Lambda-calcul » (master FESUP préparation à l'agrégation d'informatique Sorbonne Université), 2023-
Ce document est protégé par le droit d'auteur. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur est illicite.

Références bibliographiques

- 📖 Henk Barendregt
  The Lambda Calculus — Its Syntax and Semantics
  North-Holland (revised ed., 1984)
  l'encyclopédie! contient tout

- 📖 Jean-Louis Krivine
  Lambda-calcul, types et modèles [seuls les chapitres 1 et 2 sont au programme]
  Masson (1991)
  version anglaise en ligne: https://www.irif.fr/~krivine/articles/Lambda.pdf

- 📖 Richard Lassaigne et Michel de Rougemont
  Logique et fondements de l'informatique:
  logique du 1er ordre, calculabilité et lambda-calcul
  Hermès (1993)

- 📁 Thérèse Hardin-Accart, *cours de lambda-calcul*, DEA SPP, 2003-04
  http://www-spi.lip6.fr/~hardin/DEA/poly.pdf

- 📁 JGL, *cours de L3 « logique informatique — lambda-calcul »*, ENS Paris-Saclay,
  https://projects.lsv.fr/agreg/?page_id=113

Motivation

Alonzo Church

- Le λ-calcul a été inventé par Alonzo Church en 1932

Alonzo Church

By Princeton University, Fair use, https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=6082269

Lisp

History of Lisp

John McCarthy
Artificial Intelligence Laboratory
Stanford University

12 February 1979

This draft gives insufficient mention to many people who helped i[…] ment LISP and who contributed ideas. Suggestions for improvements i[…] directions are particularly welcome. Facts about the history of FUNAR[…] uplevel addressing generally are especially needed.

- Le tout premier langage fonctionnel:
  📖 John McCarthy *et al.*
  LISP 1.5 Programmer's Manual
  MIT Press (1962)

- ```
  (define fact(x)
        (cond (eq x 0)
              1
              (* x (fact (- x 1))))))
  ```

Langage **fonctionnel**:
on calcule en **appliquant** des fonctions
à des arguments (`eq`, `cond`, `*`, `fact`, `-`)

On peut aussi
définir des fonctions

- Lisp est un lambda-calcul **enrichi**
  (avec des primitives: `eq`, `cond`, `*`, `0`, `1`, `-`, etc.)
  ```

Lisp

History of Lisp

John McCarthy
Artificial Intelligence Laboratory
Stanford University

12 February 1979

This draft gives insufficient mention to many people who helped i[...] ment LISP and who contributed ideas. Suggestions for improvements i[...] directions are particularly welcome. Facts about the history of FUNAR[...] uplevel addressing generally are especially needed.

- Le tout premier langage fonctionnel:
  📖 John McCarthy *et al.*
  LISP 1.5 Programmer's Manual, MIT Press (1962)

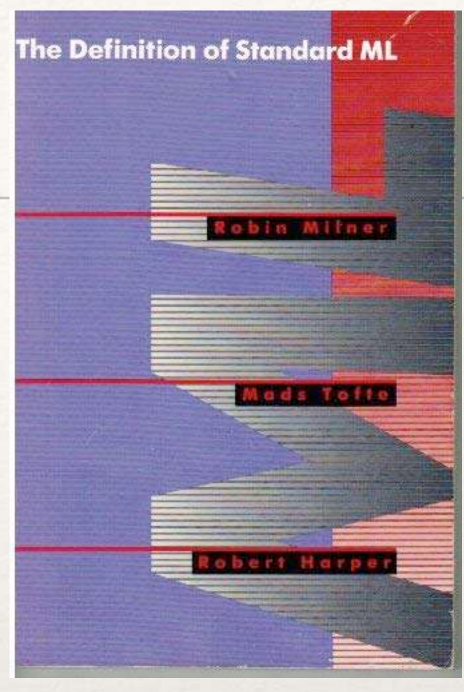
- ```
  (define fact
      (lambda (x)
          (cond (eq x 0)
                1
                (* x (fact (-x 1))))))
  ```

On peut même définir des fonctions **anonymes**

Ceci est directement inspiré de la notation $\lambda x . \ldots$ du λ-calcul

- ```
  (mapcar (lambda (x) (+ x 1))
          (list 1 2 3))        ; calcule (2 3 4)
  ```

ML



https://pictures.abebooks.com/isbn/9780262631327-us.jpg

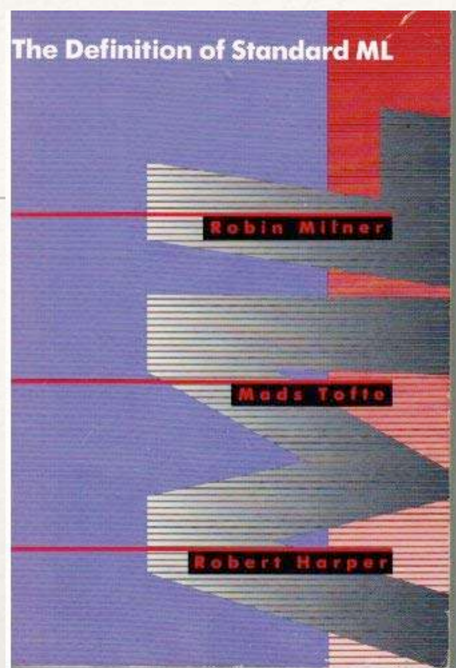
- Dû à Robin Milner (1978)
  λ-calc. → Hope → ML → CaML → CaML light → OCaML
  … aussi → Standard ML (SML/NJ)

-
```
fun fact x =
    if x=0
       then 1
    else x*fact(x-1);
```

Langage **fonctionnel**:
on calcule en **appliquant** des fonctions
à des arguments (=, `if`,`*`, `fact`, `-`);
la syntaxe est simplement plus agréable

On peut aussi **définir** des fonctions — récursives, comme en Lisp

ML



ks.com/isbn/9780262631327-us.jpg

- Dû à Robin Milner (1978)

  λ-calc. → Hope → ML → CaML → CaML light → OCaML

  … aussi → Standard ML (SML/NJ)

- ```
  val rec fact =
      fn x => if x=0
                 then 1
              else x*fact(x-1);
  ```

On peut même définir des fonctions **anonymes**

Ceci est directement inspiré de la notation $\lambda x . \ldots$ du λ-calcul

- ```
  map (fn x => x+1) [1, 2, 3];
      (* calcule [2, 3, 4] *)
  ```

Haskell

Par Thought up by Darrin Thompson and produced by Jeff Wheeler — Thompson-Wheeler logo on the haskell wiki, Domaine public, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8479507

- (1990)
  λ-calc. → Miranda → Haskell
- ```
  fact 0 = 1
  fact x = x*fact(x-1)
  ```

Langage **fonctionnel**:
on calcule en **appliquant** des fonctions
à des arguments (`*`, `fact`, `-`)

On peut aussi **définir** des fonctions — récursives, comme en Lisp et en ML
  ```

Haskell

Par Thought up by Darrin Thompson
eler –
kell wiki,
hp?curid=8479507

- (1990)
  λ-calc. → Miranda → Haskell

> On peut même définir des fonctions **anonymes**

> Ceci est directement inspiré de la notation λx . … du λ-calcul

- ```
  fact = \x | x=0 -> 1
            | otherwise -> x*fact(x-1)
  ```
- ```
  map (\x -> x+1) [1,2,3]
        -- calcule [2,3,4]
  ```
- ```
  nat = 0:map (\x -> x+1) nat
        -- calcule [0, 1, 2, …]
  ```

> Evaluation **paresseuse**:
> (appel par nom, voir stratégies, plus tard dans le cours)
> les arguments de fonction (ici, :) ne sont évalués que si on a besoin de les connaître
  ```

La syntaxe du λ-calcul

La syntaxe du λ-calcul

- Très très simple! Les termes sont:

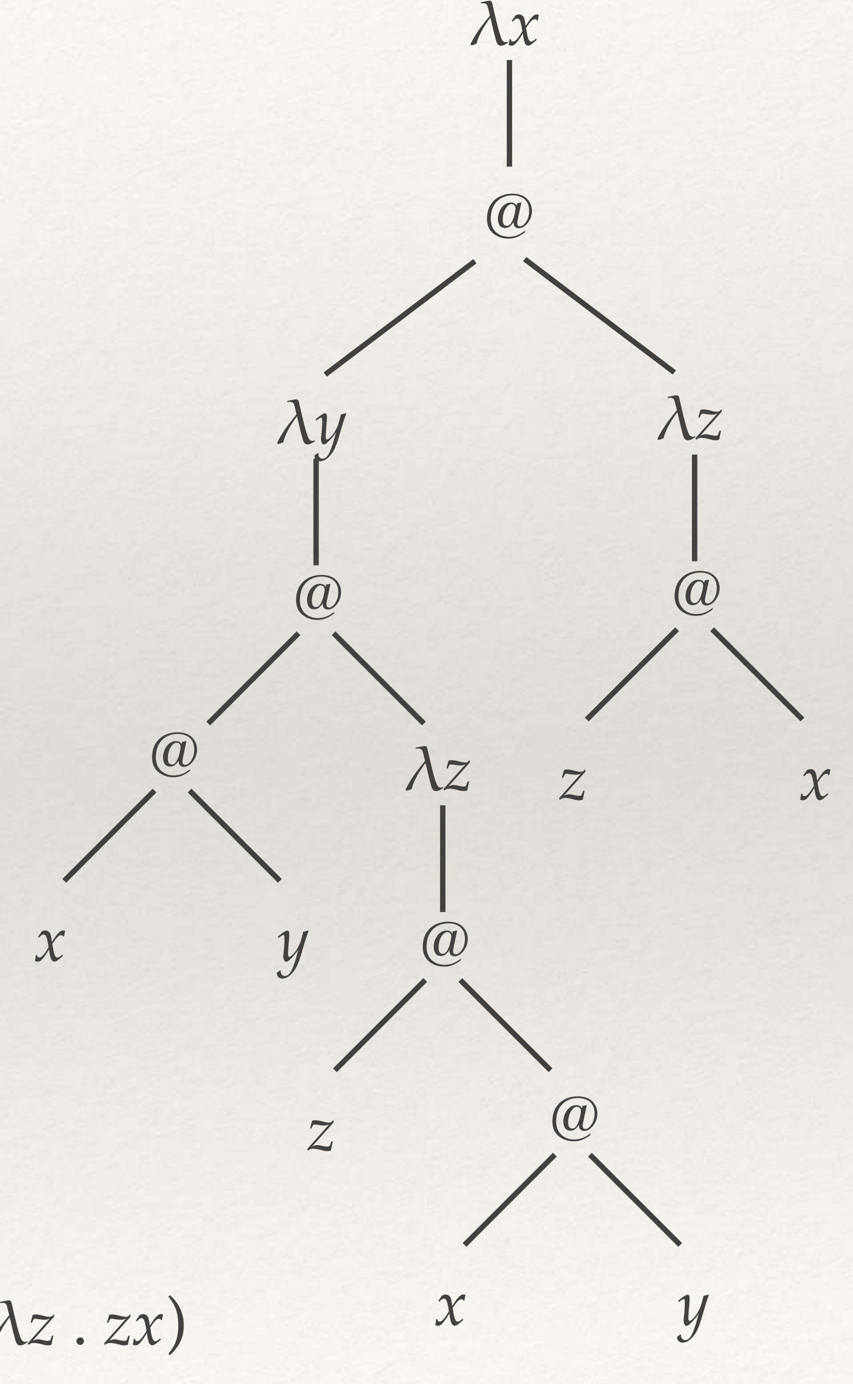
$s,t,u,v, \ldots ::=$

$x,y,z, \ldots$	variables (en nb. ∞ dénombrable)
$\mid st$	application (de s à t)
$\mid \lambda x . s$	λ-abstraction (`fun` x `->` s, en Caml)

- C'est tout! Pas d'entiers, pas de listes, pas de récursion, pas de types, pas de modules, rien d'autre…
- Et pourtant, on verra que le langage est Turing-complet

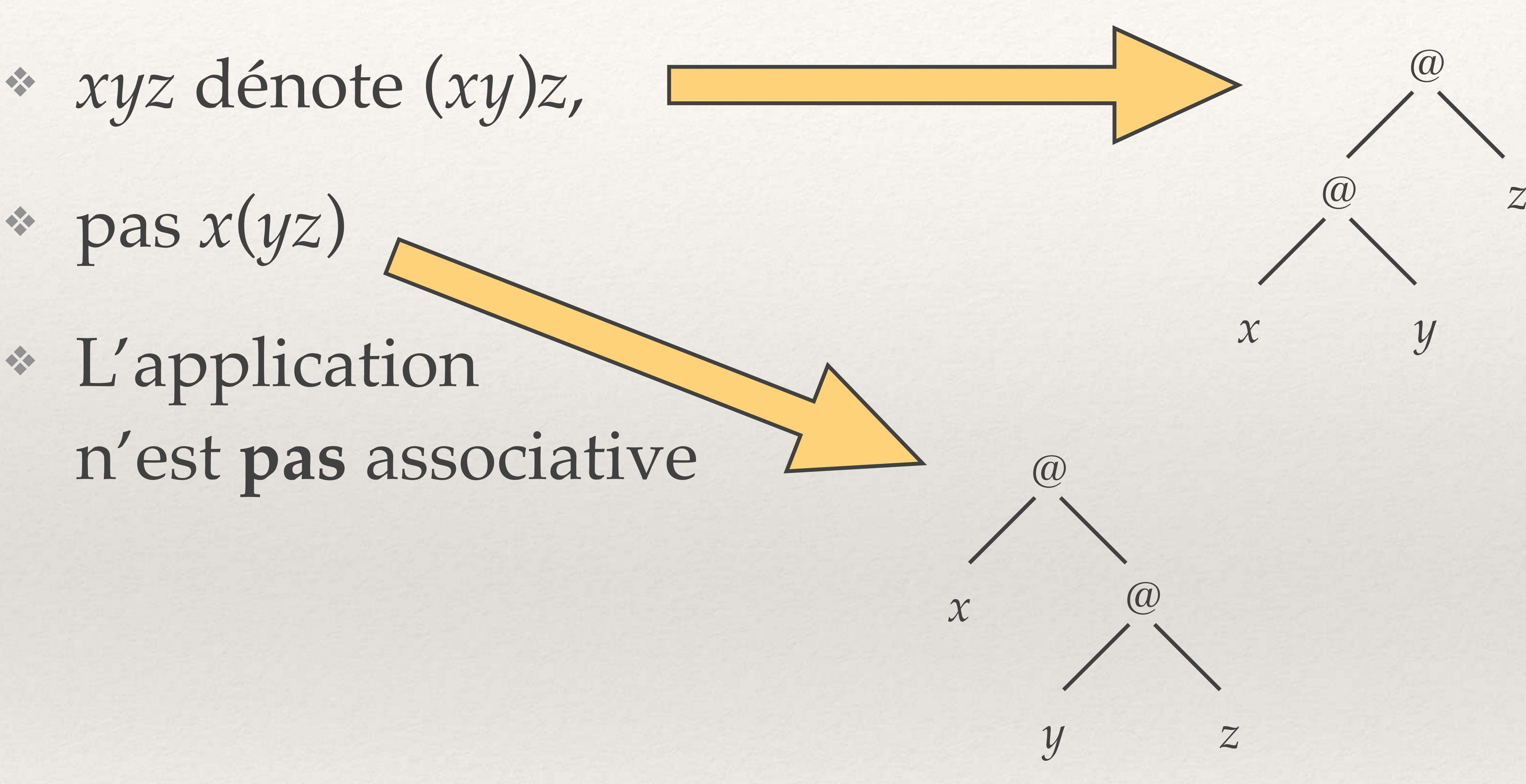
La syntaxe du λ-calcul

- Un terme est réellement un **arbre**.
  La syntaxe représente ces arbres,
  modulo les conventions usuelles
  de **parenthésage**
  et de **priorités** (à la Caml)
- Quelques exemples…



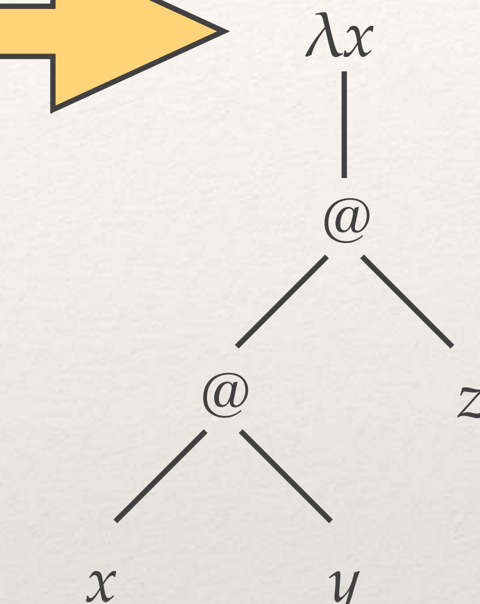
$\lambda x\,.\,(\lambda y\,.\,xy(\lambda z\,.\,z(xy)))\,(\lambda z\,.\,zx)$

La syntaxe du λ-calcul



La syntaxe du λ-calcul

- $\lambda x \,.\, xyz$ dénote $(\lambda x \,.\, (xyz))$
- … autrement dit la portée de λx s'étend aussi loin à droite que possible



Calcul: la β-réduction

La β-réduction

- Une seule règle de calcul:

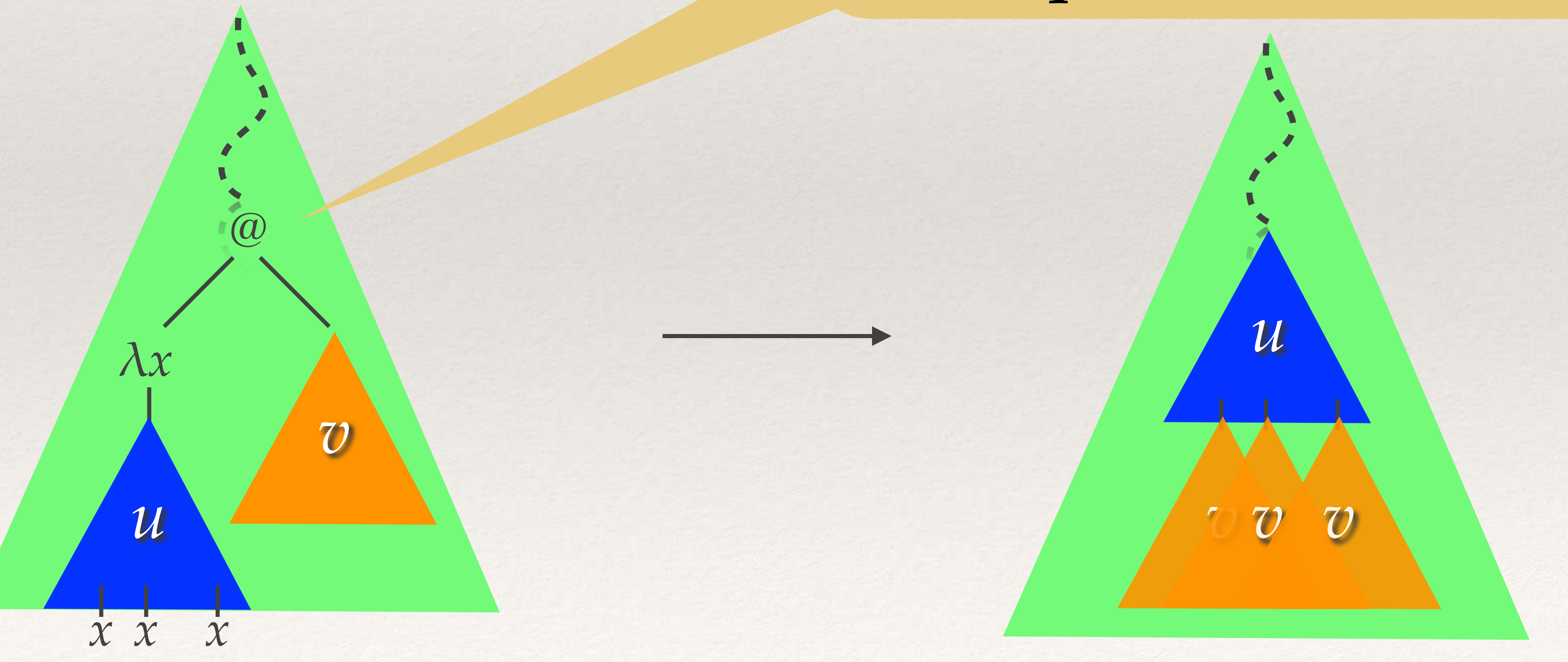
  (β) $(\lambda x\ .\ u)\ v \to u[x{:=}v]$

- applicable n'importe où dans un terme

rédex

contractum

Il peut y avoir plusieurs rédexes dans un terme, mais on n'en contracte **qu'un** à la fois



Autres relations

- On écrira $\rightarrow$ pour la β-réduction, mais parfois aussi pour n'importe quelle autre relation de réduction (relation binaire…)

- Si ambiguïté, on écrira $\rightarrow_\beta$ pour la β-réduction

- **Exemple:** on peut ajouter la règle

  (η) $\lambda x \,.\, ux \rightarrow u$ (si x pas libre dans u)

  et considérer la βη-réduction $\rightarrow_{\beta\eta}$

  (Non, on ne peut pas simuler (η) par (β), cf. $\lambda x \,.\, yx$ où y est une variable $\neq x$)

Clôtures

- $\rightarrow^*$ = clôture **réflexive-transitive** de $\rightarrow$ (étoile de Kleene)

  = plus petit préordre contenant $\rightarrow$

  $u \rightarrow^* v$ ssi il existe une **réduction** (un chemin)

  $u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \ldots\ u_{n-1} \rightarrow u_n = v$, avec $n \geq 0$

- $\rightarrow^+$ = clôture **transitive** de $\rightarrow$

  = plus petite relation transitive contenant $\rightarrow$

  $u \rightarrow^+ v$ ssi il existe une **réduction non vide**

  $u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \ldots\ u_{n-1} \rightarrow u_n = v$, avec $n \geq 1$

- $\longleftrightarrow^* = (\leftarrow \cup \rightarrow)^*$ est la **β-équivalence** (parfois notée $=_\beta$)

Substitution

Substitution?

- (β) $(\lambda x \,.\, u)\, v \to u[x{:=}v]$
- D'accord, mais comment définit-on **formellement** la substitution $u[x{:=}v]$ de v pour x dans u?
- Bizarrement, c'est une question très compliquée
  (et très enquiquinante — on s'empressera d'ignorer les difficultés à l'avenir)

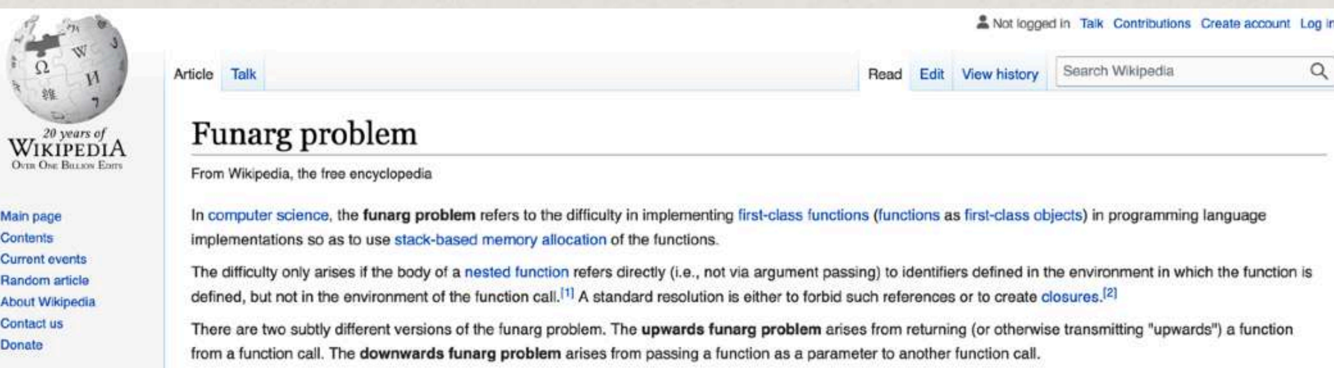
Substitution: 1er essai

- Substitution textuelle: non, donnerait:
  $(\lambda x \ . \ u) \ [x{:=}v] = \lambda v \ . \ (u[x{:=}v])$

n'est même pas syntaxiquement correct
(sauf si v est une variable)

Substitution: 2ème essai

- Définition par récurrence sur u:
  $x\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} v$
  $y\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} y \quad (y \neq x)$
  $(st)\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} (s\,[x{:=}v])\,(t\,[x{:=}v])$
  $(\lambda z\,.\,u)\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,(u[x{:=}v])$
- A l'air bien défini, mais souffre de quelques problèmes…


Not logged in Talk Contributions Create account Log in

Article Talk Read Edit View history Search Wikipedia

20 years of Wikipedia — Over One Billion Edits

Main page
Contents
Current events
Random article
About Wikipedia
Contact us
Donate

Funarg problem

From Wikipedia, the free encyclopedia

In computer science, the **funarg problem** refers to the difficulty in implementing first-class functions (functions as first-class objects) in programming language implementations so as to use stack-based memory allocation of the functions.

The difficulty only arises if the body of a nested function refers directly (i.e., not via argument passing) to identifiers defined in the environment in which the function is defined, but not in the environment of the function call.[1] A standard resolution is either to forbid such references or to create closures.[2]

There are two subtly different versions of the funarg problem. The **upwards funarg problem** arises from returning (or otherwise transmitting "upwards") a function from a function call. The **downwards funarg problem** arises from passing a function as a parameter to another function call.

Le problème avec la substitution

$$x\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} v$$
$$y\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} y \quad (y{\neq}x)$$
$$(st)\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} (s\,[x{:=}v])\,(t\,[x{:=}v])$$
$$(\lambda z\,.\,u)\,[x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,(u[x{:=}v])$$

- D'après la définition,
  $(\lambda x\,.\,x)\,[x{:=}y] = \lambda x\,.\,y$
  $(\lambda y\,.\,x)\,[x{:=}y] = \lambda y\,.\,y$
- Pour corriger ça, on va:
- restreindre la substitution par des conditions sur les variables **libres** et **liées**
- autoriser à **renommer** les variables liées (**α-renommage**)
- autre solution: indices de **de Bruijn** (omis ici; voir exercices)

Variables libres, variables liées

- $\mathrm{fv}(u) = \{$variables **libres** de $u\}$
  « qui apparaissent dans u à une position où on peut les remplacer »
- $\mathrm{bv}(u) = \{$variables **liées** de $u\}$

$\mathrm{fv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}$	$\mathrm{bv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$
$\mathrm{fv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) \cup \mathrm{fv}(v)$	$\mathrm{bv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \mathrm{bv}(v)$
$\mathrm{fv}(\lambda x\,.\,u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) - \{x\}$	$\mathrm{bv}(\lambda x\,.\,u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \{x\}$

- Exemples.

u	$\mathrm{fv}(u)$	$\mathrm{bv}(u)$
$\lambda x\,.\,x$	?	?
$x(\lambda y\,.\,z)$	?	?
$x(\lambda x\,.\,x)$	?	?
$(\lambda x\,.\,xx)(y(\lambda z\,.\,yz)x)$	?	?

Variables libres, variables liées

- $\mathrm{fv}(u) = \{\text{variables } \textbf{libres} \text{ de } u\}$
  « qui apparaissent dans u à une position où on peut les remplacer »
- $\mathrm{bv}(u) = \{\text{variables } \textbf{liées} \text{ de } u\}$

$\mathrm{fv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}$	$\mathrm{bv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$
$\mathrm{fv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) \cup \mathrm{fv}(v)$	$\mathrm{bv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \mathrm{bv}(v)$
$\mathrm{fv}(\lambda x . u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) - \{x\}$	$\mathrm{bv}(\lambda x . u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \{x\}$

- Exemples.

u	$\mathrm{fv}(u)$	$\mathrm{bv}(u)$
$\lambda x . x$	$\varnothing$	$\{x\}$
$x(\lambda y . z)$	?	?
$x(\lambda x . x)$	?	?
$(\lambda x . xx)(y(\lambda z . yz)x)$	?	?

Variables libres, variables liées

- $\mathrm{fv}(u) = \{$variables **libres** de $u\}$
  « qui apparaissent dans u à une position où on peut les remplacer »
- $\mathrm{bv}(u) = \{$variables **liées** de $u\}$

$\mathrm{fv}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x\}$	$\mathrm{bv}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varnothing$
$\mathrm{fv}(uv) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{fv}(u) \cup \mathrm{fv}(v)$	$\mathrm{bv}(uv) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \mathrm{bv}(v)$
$\mathrm{fv}(\lambda x\,.\,u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{fv}(u) - \{x\}$	$\mathrm{bv}(\lambda x\,.\,u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \{x\}$

- Exemples.

u	$\mathrm{fv}(u)$	$\mathrm{bv}(u)$
$\lambda x\,.\,x$	$\varnothing$	$\{x\}$
$x(\lambda y\,.\,z)$	$\{x,z\}$	$\{y\}$
$x(\lambda x\,.\,x)$	?	?
$(\lambda x\,.\,xx)(y(\lambda z\,.\,yz)x)$	?	?

Variables libres, variables liées

- $\mathrm{fv}(u)$ = {variables **libres** de u}
  « qui apparaissent dans u à une position où on peut les remplacer »
- $\mathrm{bv}(u)$ = {variables **liées** de u}

$\mathrm{fv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}$	$\mathrm{bv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$
$\mathrm{fv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) \cup \mathrm{fv}(v)$	$\mathrm{bv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \mathrm{bv}(v)$
$\mathrm{fv}(\lambda x\,.\,u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) - \{x\}$	$\mathrm{bv}(\lambda x\,.\,u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \{x\}$

- Exemples.

u	$\mathrm{fv}(u)$	$\mathrm{bv}(u)$
$\lambda x\,.\,x$	$\varnothing$	$\{x\}$
$x(\lambda y\,.\,z)$	$\{x,z\}$	$\{y\}$
$x(\lambda x\,.\,x)$	$\{x\}$	$\{x\}$
$(\lambda x\,.\,xx)(y(\lambda z\,.\,yz)x)$	?	?

oui, une variable peut être libre **et** liée!

Variables libres, variables liées

- $\mathrm{fv}(u)$ = {variables **libres** de u}
  « qui apparaissent dans u à une position où on peut les remplacer »
- $\mathrm{bv}(u)$ = {variables **liées** de u}

$\mathrm{fv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}$	$\mathrm{bv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$
$\mathrm{fv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) \cup \mathrm{fv}(v)$	$\mathrm{bv}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \mathrm{bv}(v)$
$\mathrm{fv}(\lambda x \,.\, u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(u) - \{x\}$	$\mathrm{bv}(\lambda x \,.\, u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(u) \cup \{x\}$

- Exemples.

u	$\mathrm{fv}(u)$	$\mathrm{bv}(u)$
$\lambda x \,.\, x$	$\varnothing$	$\{x\}$
$x(\lambda y \,.\, z)$	$\{x,z\}$	$\{y\}$
$x(\lambda x \,.\, x)$	$\{x\}$	$\{x\}$
$(\lambda x \,.\, xx)(y(\lambda z \,.\, yz)x)$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$

oui, une variable peut être libre **et** liée!

au fait, la variable z' ($\neq x,y,z$) est-elle libre ici?

Substitution, 3ème essai

- On définit une opération de substitution **partielle**

  $$u\ [x{:=}v]$$

  définie uniquement lorsque

  $$x \notin \mathrm{bv}(u) \text{ et } \mathrm{fv}(v) \cap \mathrm{bv}(u) = \varnothing$$

$x\ [x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} v$
$y\ [x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} y \quad (y{\neq}x)$
$(st)\ [x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} (s\ [x{:=}v])\ (t\ [x{:=}v])$
$(\lambda z\ .\ u)\ [x{:=}v] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\ .\ (u[x{:=}v])$

on dit que x est **substituable** par v dans u

pour éviter le problème « $(\lambda x\ .\ x)\ [x{:=}y] = \lambda x\ .\ y$ »

pour éviter le problème « $(\lambda y\ .\ x)\ [x{:=}y] = \lambda y\ .\ y$ »

- On peut assurer cette condition en **renommant** x…

α-renommage

- On souhaite considérer que
« $\lambda x \,.\, u(x)$ et $\lambda y \,.\, u(y)$ sont interchangeables »
- On définit la relation α par:
$$\lambda x \,.\, u \quad \alpha \quad \lambda y \,.\, (u[x{:=}y])$$
à condition que x soit substituable par y dans u
et que y ne soit pas libre dans u
(sinon on aurait $\lambda x \,.\, xy \quad \alpha \quad \lambda y \,.\, yy$)
- La relation d'***α*-équivalence** $=_\alpha$ est la plus petite congruence (rel. d'équivalence compatible aux contextes) contenant α

i.e., $x,y \notin \mathrm{bv}(u)$

et $y \notin \mathrm{fv}(u)$

Propriétés du α-renommage

$\lambda x \,.\, u \quad \alpha \quad \lambda y \,.\, (u[x{:=}y])$
$(x,y \notin \mathrm{bv}(u),\ y \notin \mathrm{fv}(u))$

- Exemple: $\lambda x \,.\, \lambda y \,.\, xy \quad =_\alpha \ \lambda x \,.\, \lambda z \,.\, xz$

  (avec $z{\neq}x,y$—noter le passage au contexte)

  $=_\alpha \ \lambda y \,.\, \lambda z \,.\, yz =_\alpha \ \lambda y \,.\, \lambda x \,.\, yx$

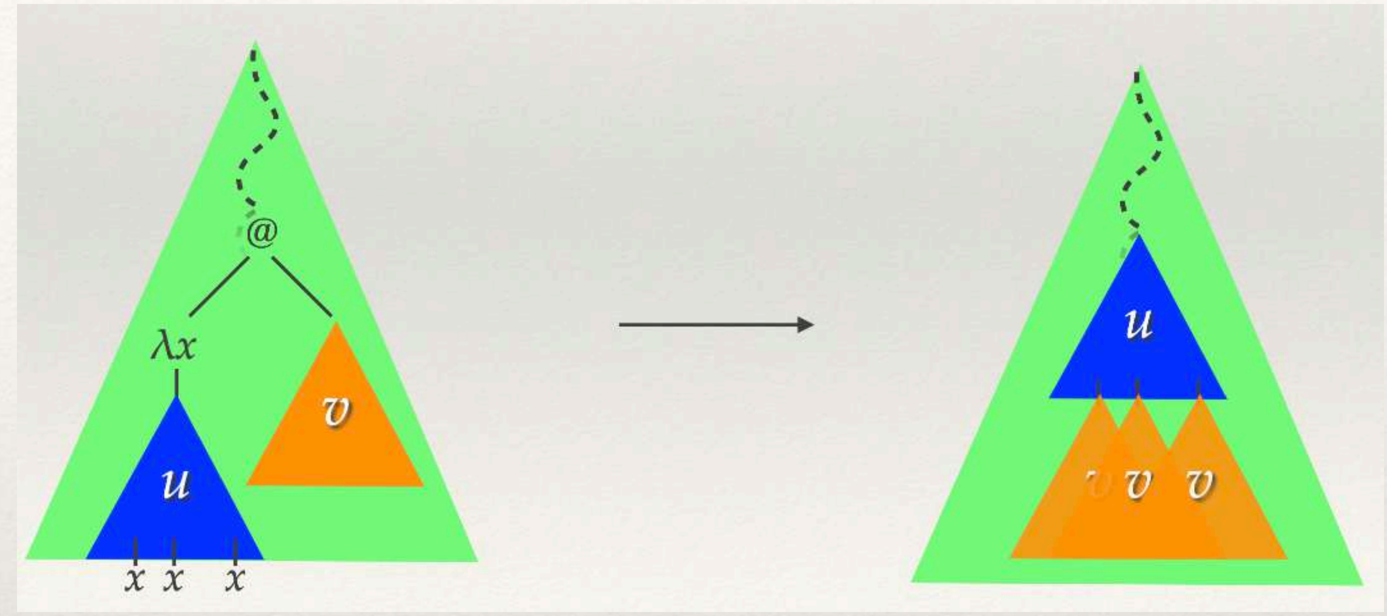
- On peut toujours α-renommer $\lambda x \,.\, u$
  de sorte que $u[x{:=}v]$ soit bien défini
  (= de sorte que $x \notin \mathrm{bv}(u)$ et $\mathrm{fv}(v) \cap \mathrm{bv}(u) = \varnothing$)

- En pratique, on utilisera la **convention de Barendregt**:
  renommer systématiquement toutes les variables liées pour que:
  — aucune variable n'est liée 2 fois
  — aucune variable n'est liée et libre

- On peut maintenant (re)définir proprement la β-réduction.

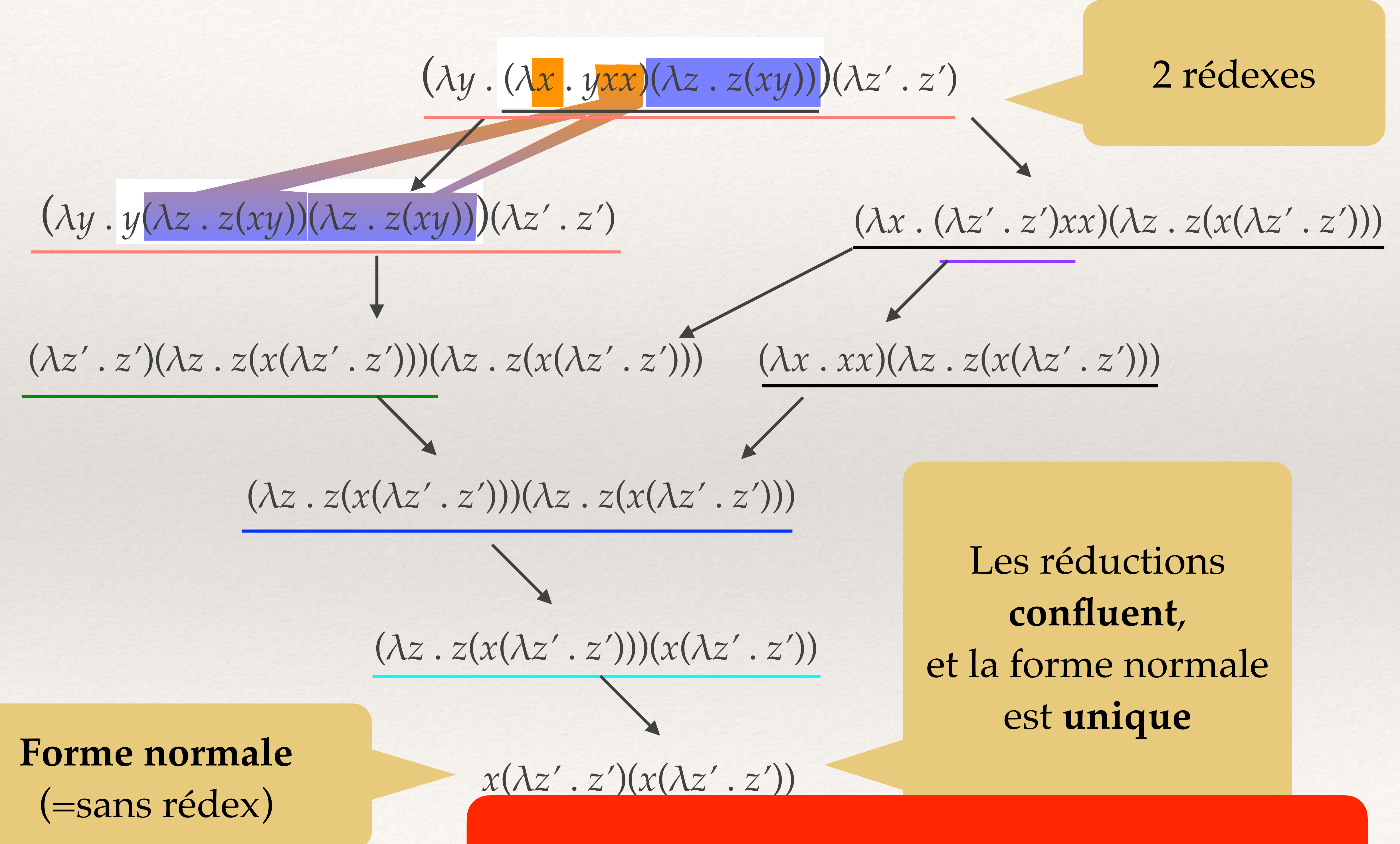
La β-réduction… vraiment

La β-réduction, vraiment



- (β) $(\lambda x\,.\,u)\,v \to u[x{:=}v]$
- On dit que $s \to t$ ssi
  il existe un **contexte** C
  et un rédex $(\lambda x\,.\,u)\,v$
  tels que $s =_\alpha C[(\lambda x\,.\,u)\,v]$
  et $t =_\alpha C[u[x{:=}v]]$
- $C ::= _$ trou (où le terme est inséré)
  | $\lambda x\,.\,C$ réduction « sous la lambda »
  | $C\ v$ la réduction s'opère dans la fonction
  | $u\ C$ la réduction s'opère dans l'argument

Un exemple de réductions



Terminaison

- Une **forme normale** est un terme u sans rédex,
  i.e., $u \not\to$
- Un terme u est **normalisable** (= **faiblement terminant**)
  ssi il a une forme normale
  ssi **il existe** une réduction partant
  de u qui termine

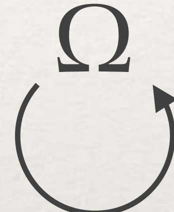
  $u \to \to \ldots \to$ ✔

- Un terme u est
  fortement normalisable (=**terminant**)
  ssi **toutes** les réductions partant de u terminent

  $u \to \to \ldots \to$ ✔

Le terme Ω

- Posons $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \delta\delta$, où $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x\,.\,xx$ [**auto-application**]
- Son « arbre » de réductions est:
  $(\Omega = (\lambda x\,.\,xx)\,\delta \rightarrow \delta\delta = \Omega$,
  et c'est la seule réduction possible)



- Ω est un terme qui n'est (même) **pas normalisable**
- Y a-t-il un terme normalisable mais pas fortement?
- On a donc tous les cas possibles:
  fortement norm. / norm. / pas normalisable

$(\lambda x\,.\,y)\,\Omega$

y

Confluence

confluence forte

confluence

Church-Rosser

confluence locale

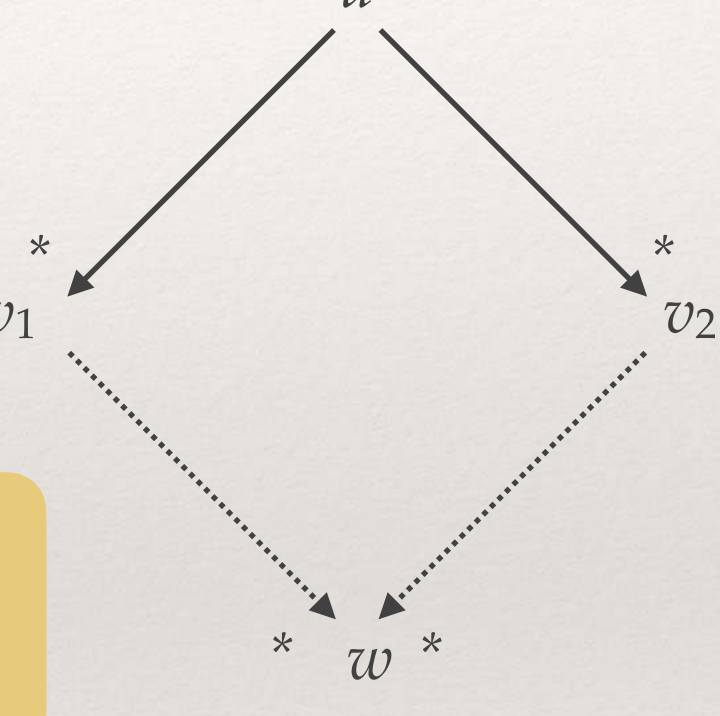
forme normale unique

Propriété de forme normale unique

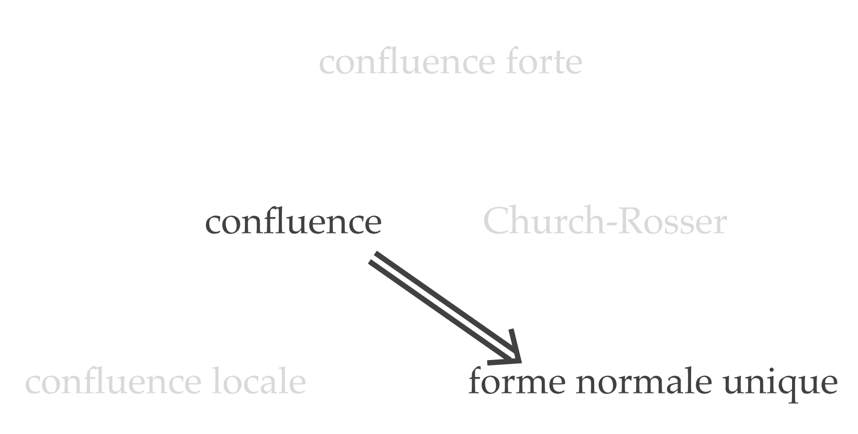
- On dit qu'une relation de réduction a la
  propriété de forme normale unique
  ssi tout terme a **au plus une** forme normale
- On verra que la β-réduction a cette propriété.

Confluence

- Une relation de réduction $\rightarrow$ est **confluente** ssi toutes les réductions $u \rightarrow^* v_1$ et $u \rightarrow^* v_2$ sont **joignables**, i.e. il existe des réductions $v_1 \rightarrow^* w$ et $v_2 \rightarrow^* w$ vers le même terme w

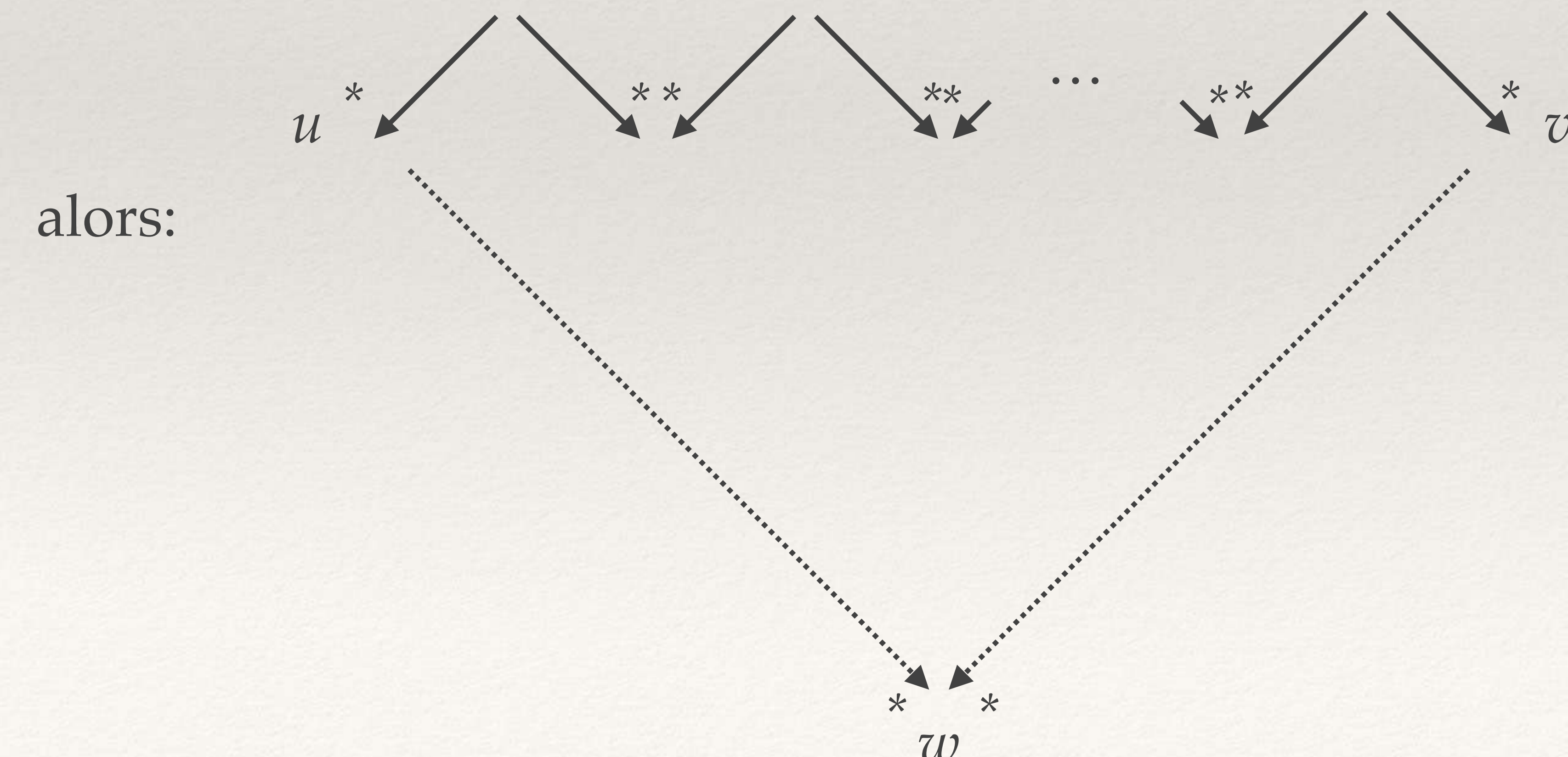


- **Fait.** Toute relation confluente a la propriété de forme normale unique.
- *Preuve.* Si v_1 et v_2 sont deux formes normales de u, les réductions $v_1 \rightarrow^* w$ et $v_2 \rightarrow^* w$ sont de longueur 0.



Propriété de Church-Rosser

- $\rightarrow$ a la propriété de **Church-Rosser** ssi $\leftrightarrow^* = \rightarrow^*; \leftarrow^*$
  i.e., pour tous u, v tels que $u \leftrightarrow^* v$, il existe w tel que
  $$u \rightarrow^* w \text{ et } w \leftarrow^* v$$
- Autrement dit, si:



Confluence et Church-Rosser

- **Théorème.** Confluence = Church-Rosser.
- Preuve (1/2). Suppons → Church-Rosser.

  Si l'on a:

  en particulier $v_1 \longleftrightarrow^* v_2$
  (par une preuve dite en **pic**)

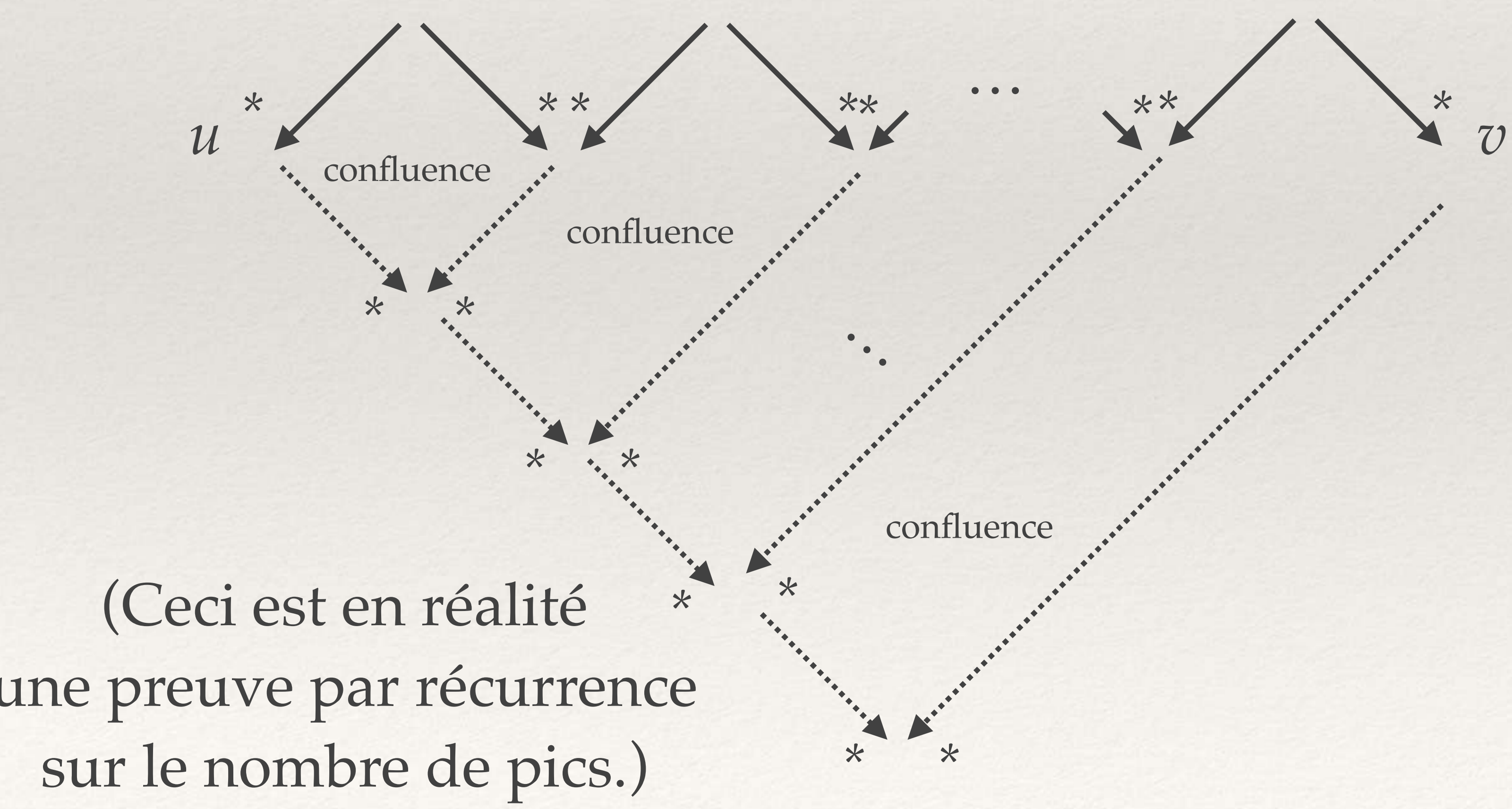
$$u \to^* v_1, \quad u \to^* v_2, \quad v_1 \to^* w, \quad v_2 \to^* w$$

- Par Church-Rosser…
  (preuve de $v_1 \longleftrightarrow^* v_2$ dite en **vallée**)
- donc → est confluente.

Confluence et Church-Rosser

- **Théorème.** Confluence = Church-Rosser.
- Preuve (2/2). Suppons $\to$ confluente, et $u \leftrightarrow^* v$

  On peut organiser cette preuve en pics et vallées:

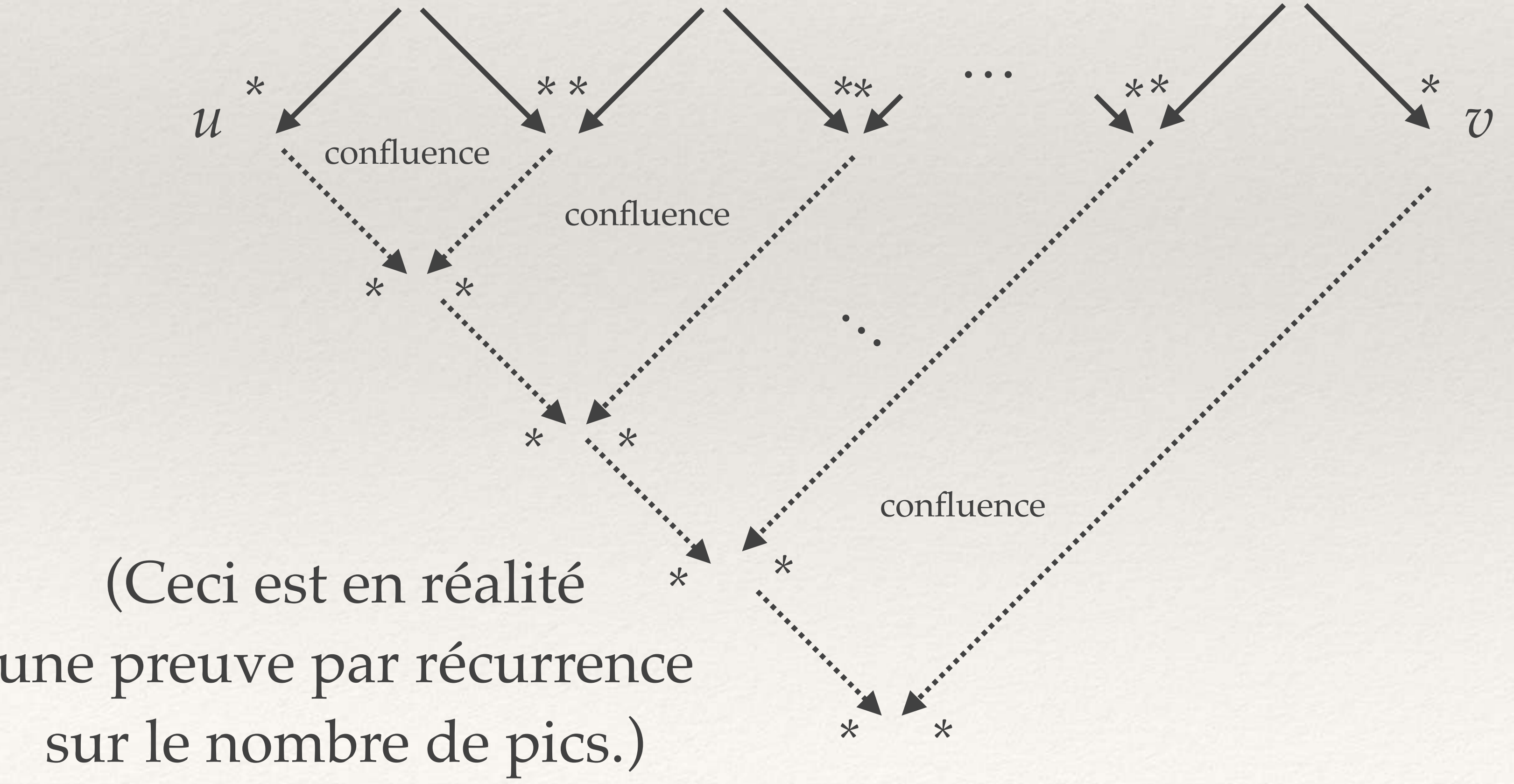


Plus de pic!
On a obtenu une preuve en vallée de $u \leftrightarrow^* v$.
Donc $\to$ est Church-Rosser.

Confluence et Church-Rosser

- **Théorème.** Confluence = Church-Rosser.
- Preuve (2/2). Suppons $\to$ confluente, et $u \leftrightarrow^* v$

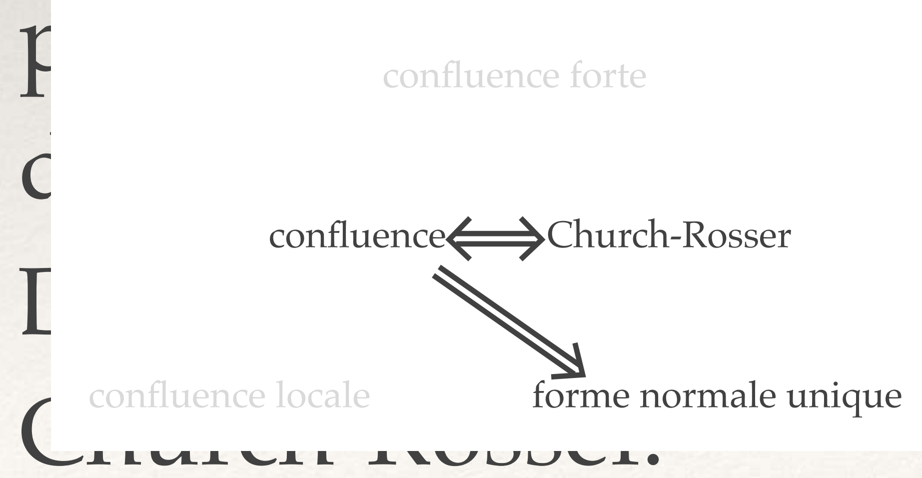
  On peut organiser cette preuve en pics et vallées:



(Ceci est en réalité une preuve par récurrence sur le nombre de pics.)

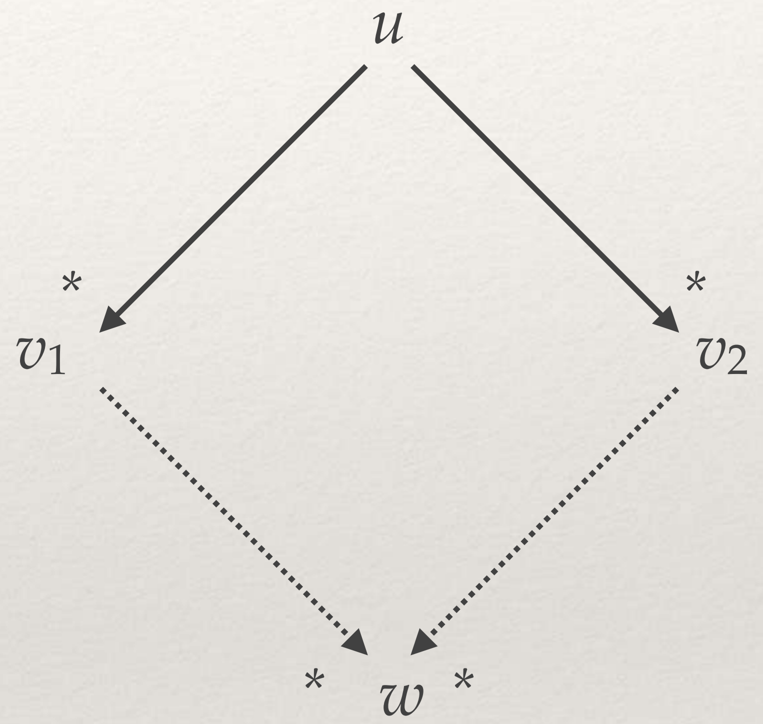
Plus de pic!

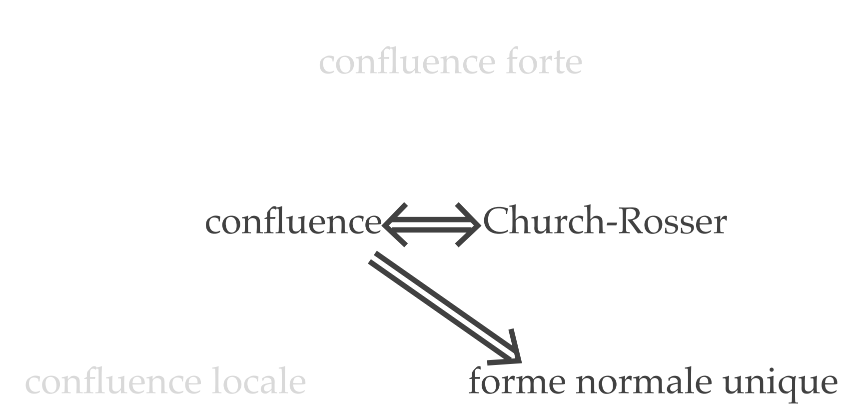
On a obtenu une



Comment prouver la confluence?

- En principe, on devrait énumérer toutes les situations $v_1 \leftarrow^* u \rightarrow^* v_2$…
- … pour toutes les longueurs de réduction possibles de u à v_1 (resp. v_2)
- On va donc chercher des critères de confluence plus simples



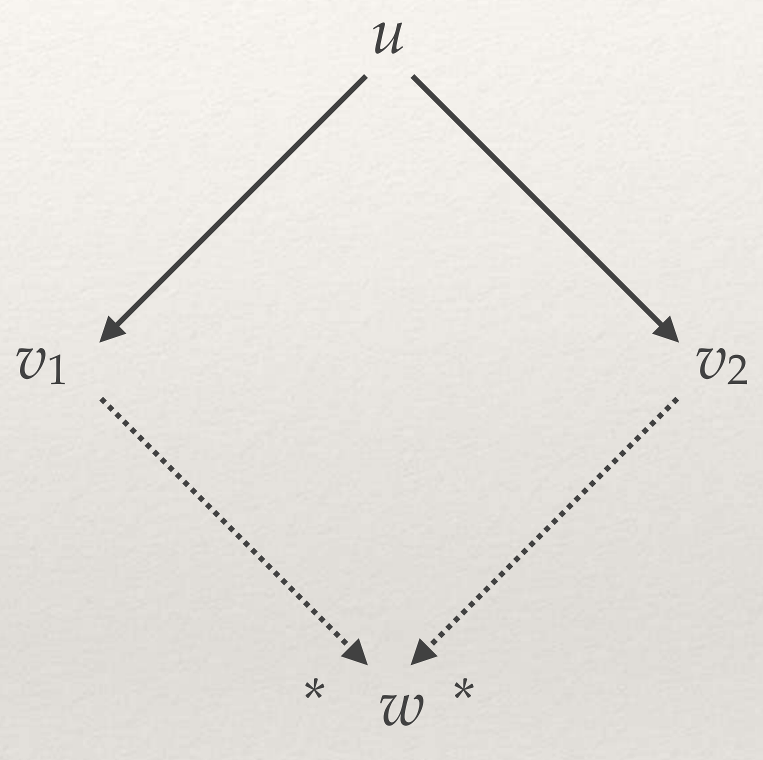


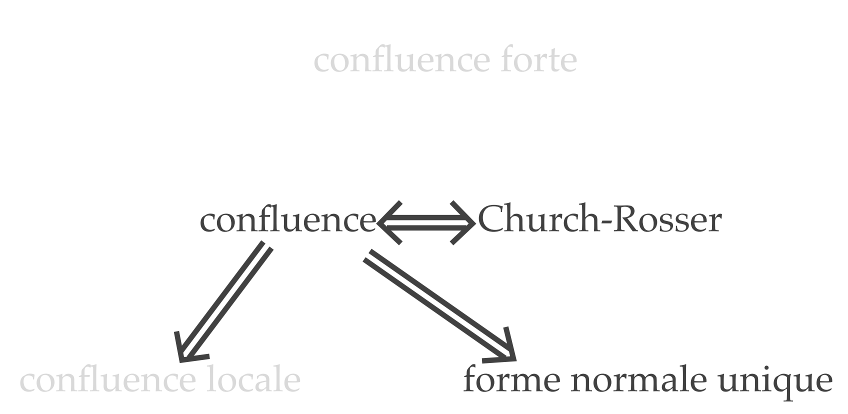
Confluence forte, confluence locale

Confluence locale

- $\rightarrow$ est **localement confluente** ssi:
- Voyez-vous la différence avec la confluence?
- Plus facile à vérifier (en fait, on n'a qu'à énumérer les paires critiques)
- **Fait.** Confluence implique confluence locale.

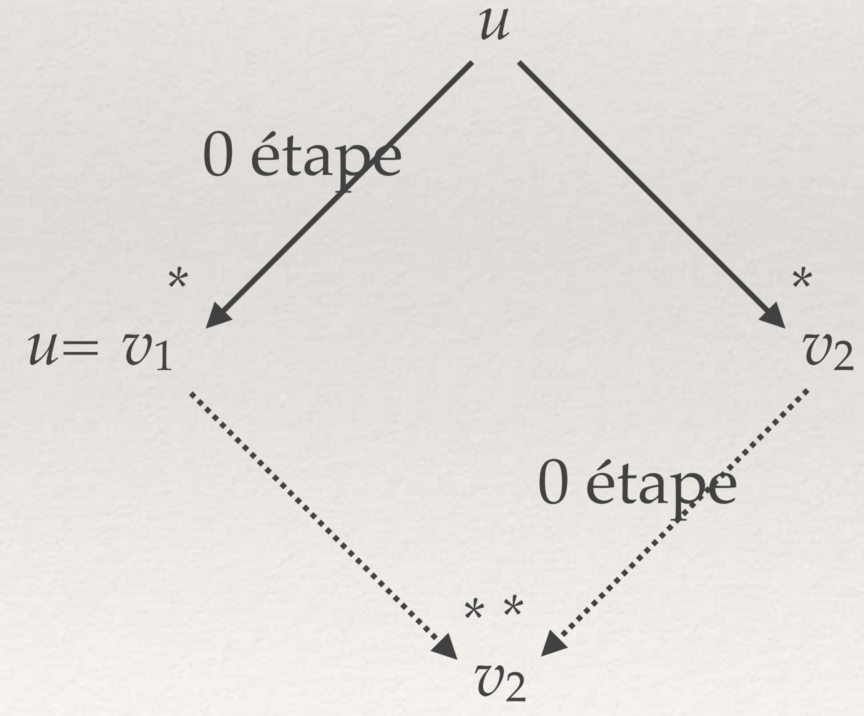
(L'implication n'est pas dans le sens souhaité… ça arrive.)





Confluence locale et confluence?

- La preuve suivante est fausse, dites-moi pourquoi.
- **Arnaque.** Si → loc. confluente alors → confluente (non).
- Supposons:



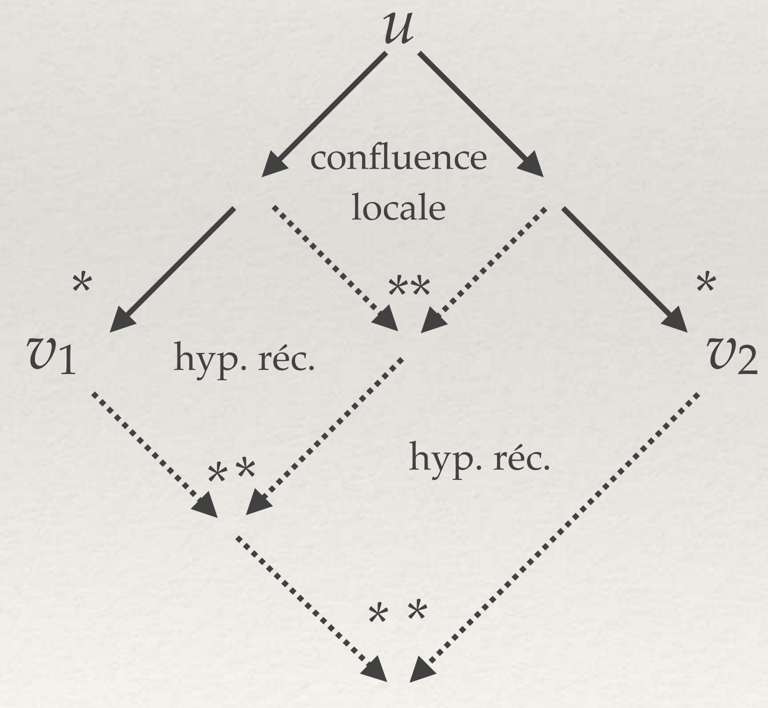
Si u=v_1…

Si u=v_2, on raisonne symétriquement.

Regardons donc ce qui se passe si ≥1 étape de u à v_1, resp. à v_2

Confluence locale et confluence?

- La preuve suivante est fausse, dites-moi pourquoi.
- **Arnaque.** Si $\to$ loc. confluente alors $\to$ confluente (non).
- Cas de récurrence:



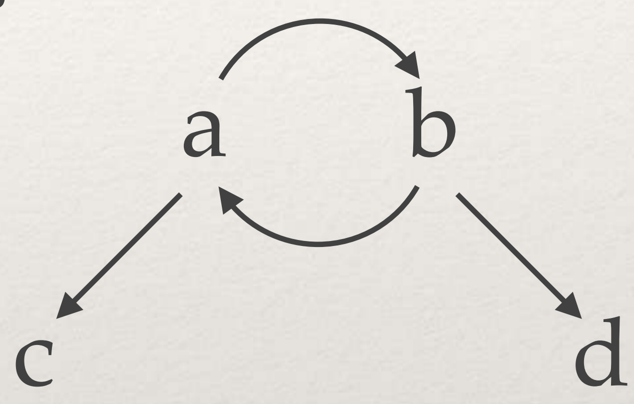
Où est l'erreur?

Le contre-exemple de Curry

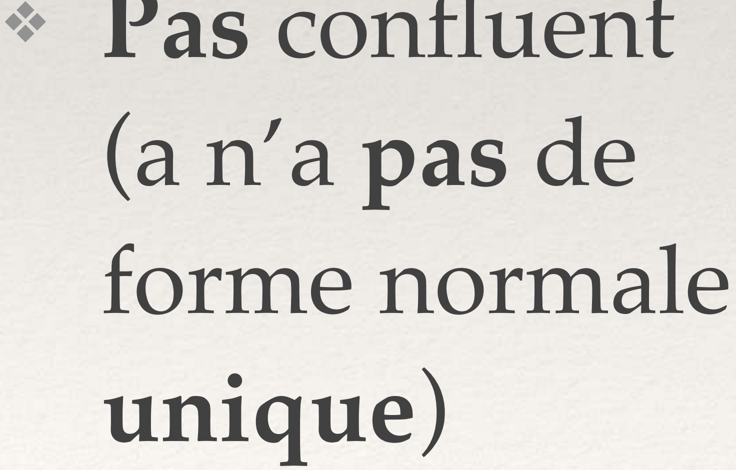
Haskell B. Curry

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/86/HaskellBCurry.jpg

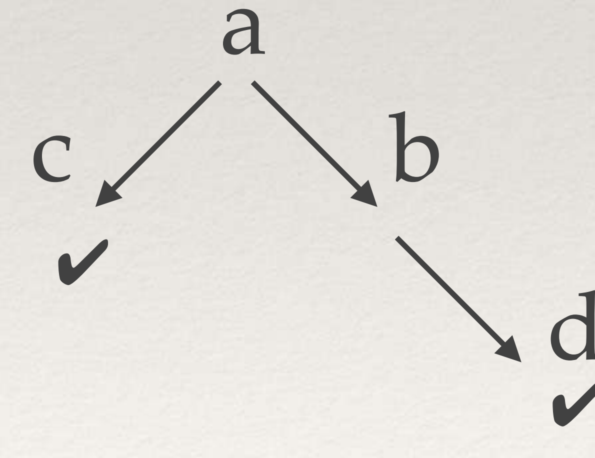
- Une relation → définie
  sur un ensemble à 4 éléments {a,b,c,d}

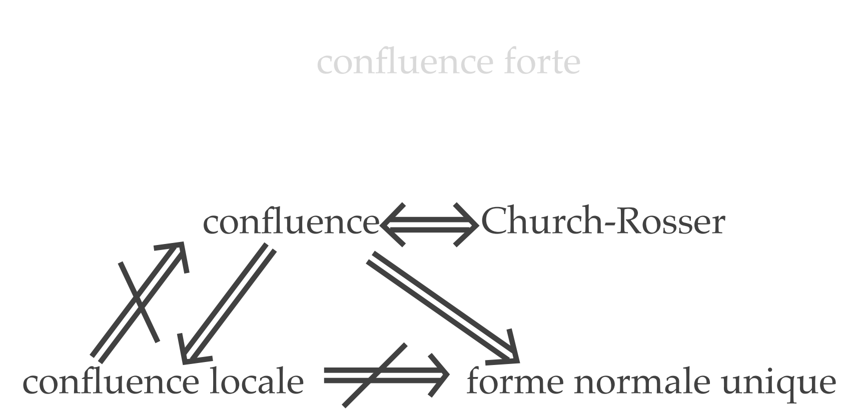


- Localement confluent:
  — c ← a → b joignable
  — a ← b → d joignable



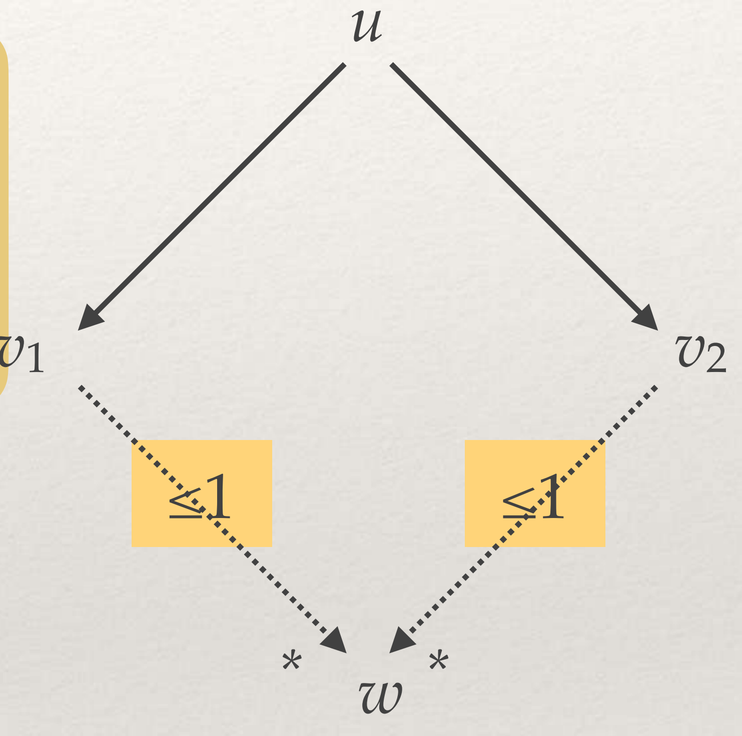
- **Pas** confluent
  (a n'a **pas** de
  forme normale
  unique)

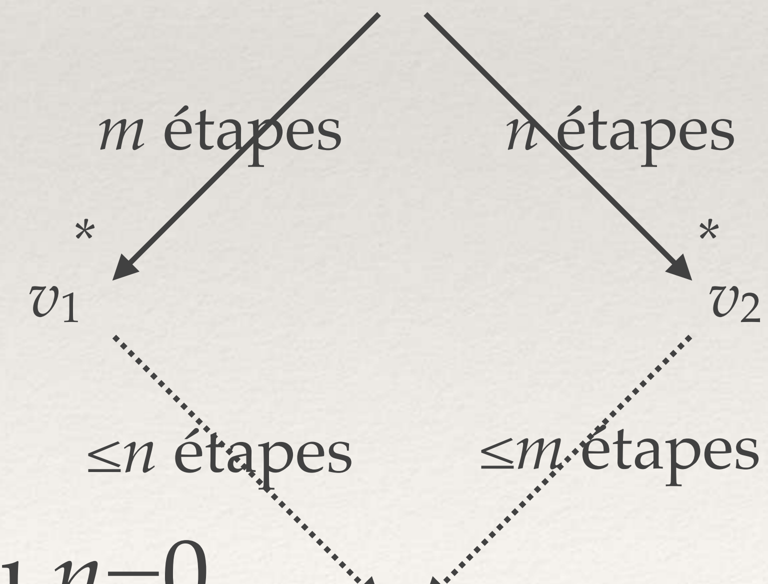


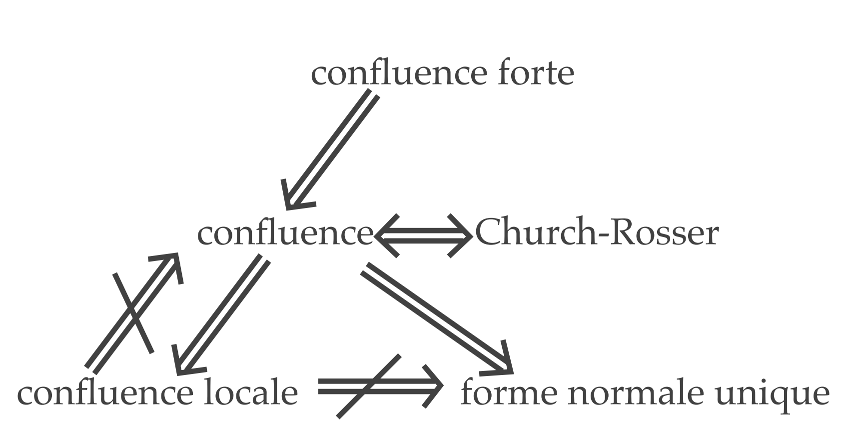


Confluence forte

- $\to$ est **fortement confluente** ssi:
- **Lemme.** La confluence forte implique la confluence.
- Preuve: *quasiment* comme avant
- On montre:
- par récurrence sur $m+n$.
- Évident si $m=0$ ou $n=0$.





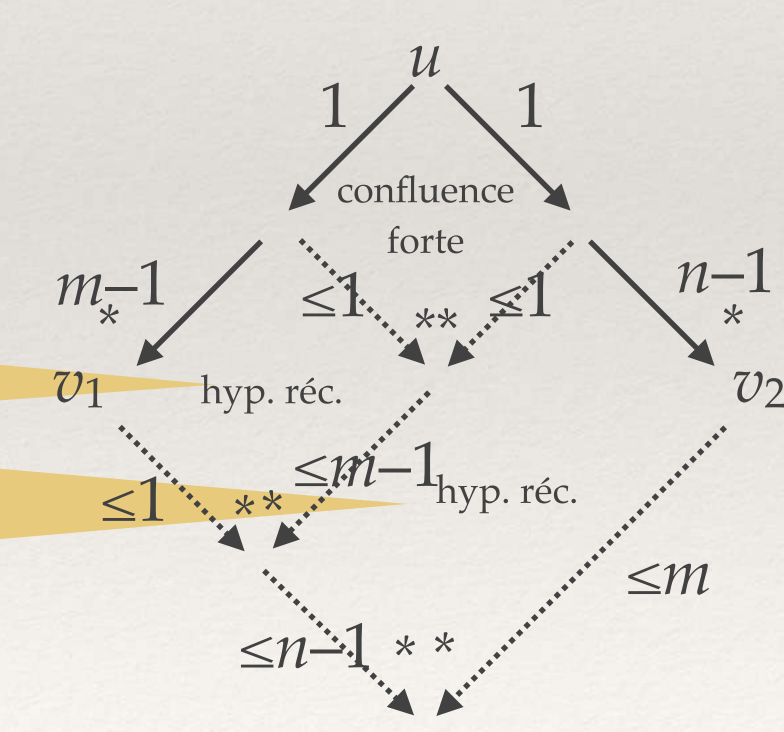


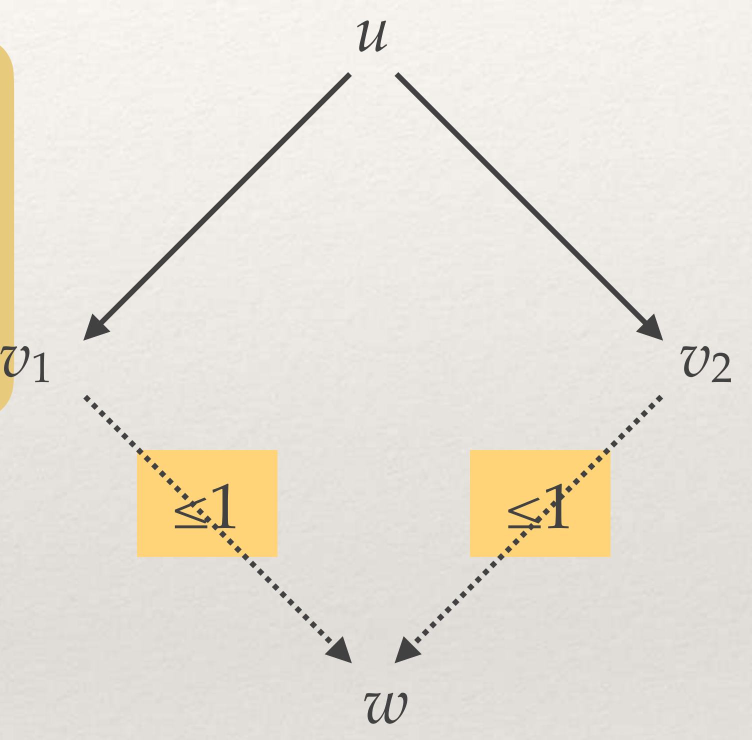
Confluence forte

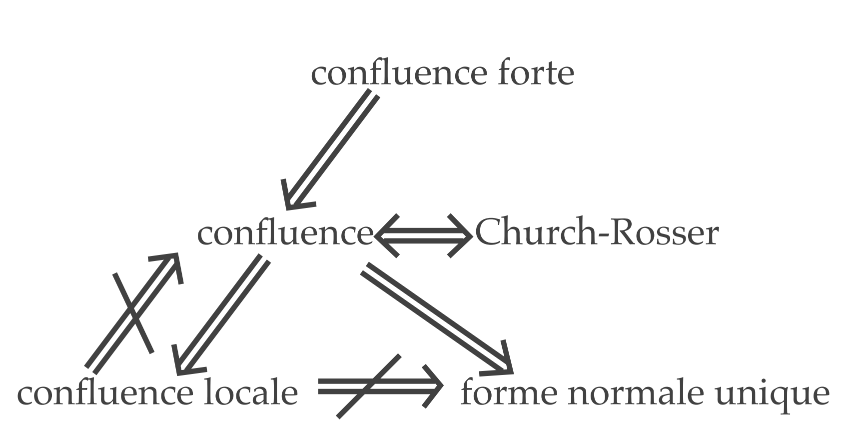
- $\to$ est **fortement confluente** ssi:
- **Lemme.** La confluence forte implique la confluence.
- Si $m \geq 1$ et $n \geq 1$:

s'applique car
$(m-1)+1 = m$
$< m+n$

s'applique car
$(m-1+1)+(n-1)$
$= m+n-1$
$< m+n$

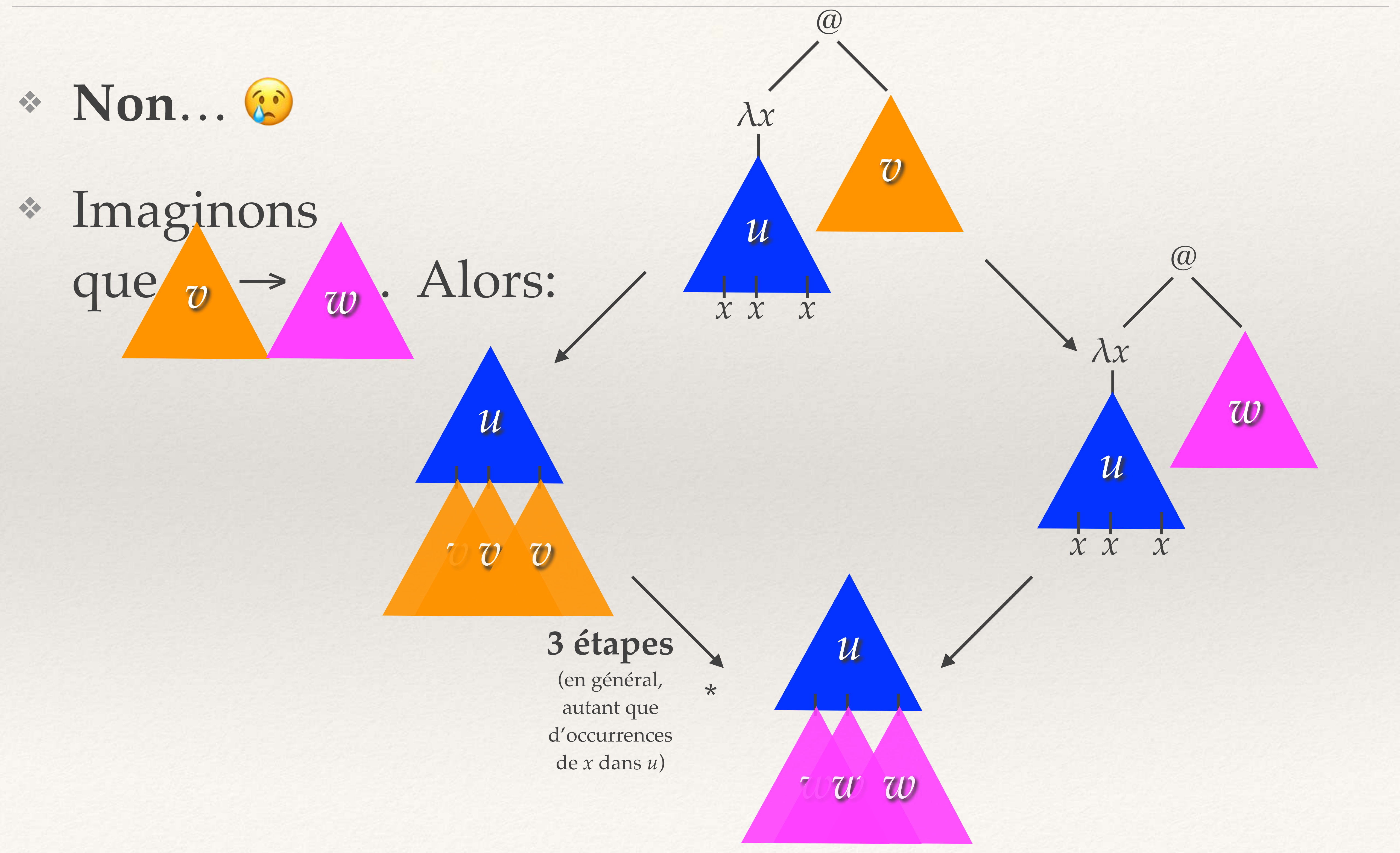






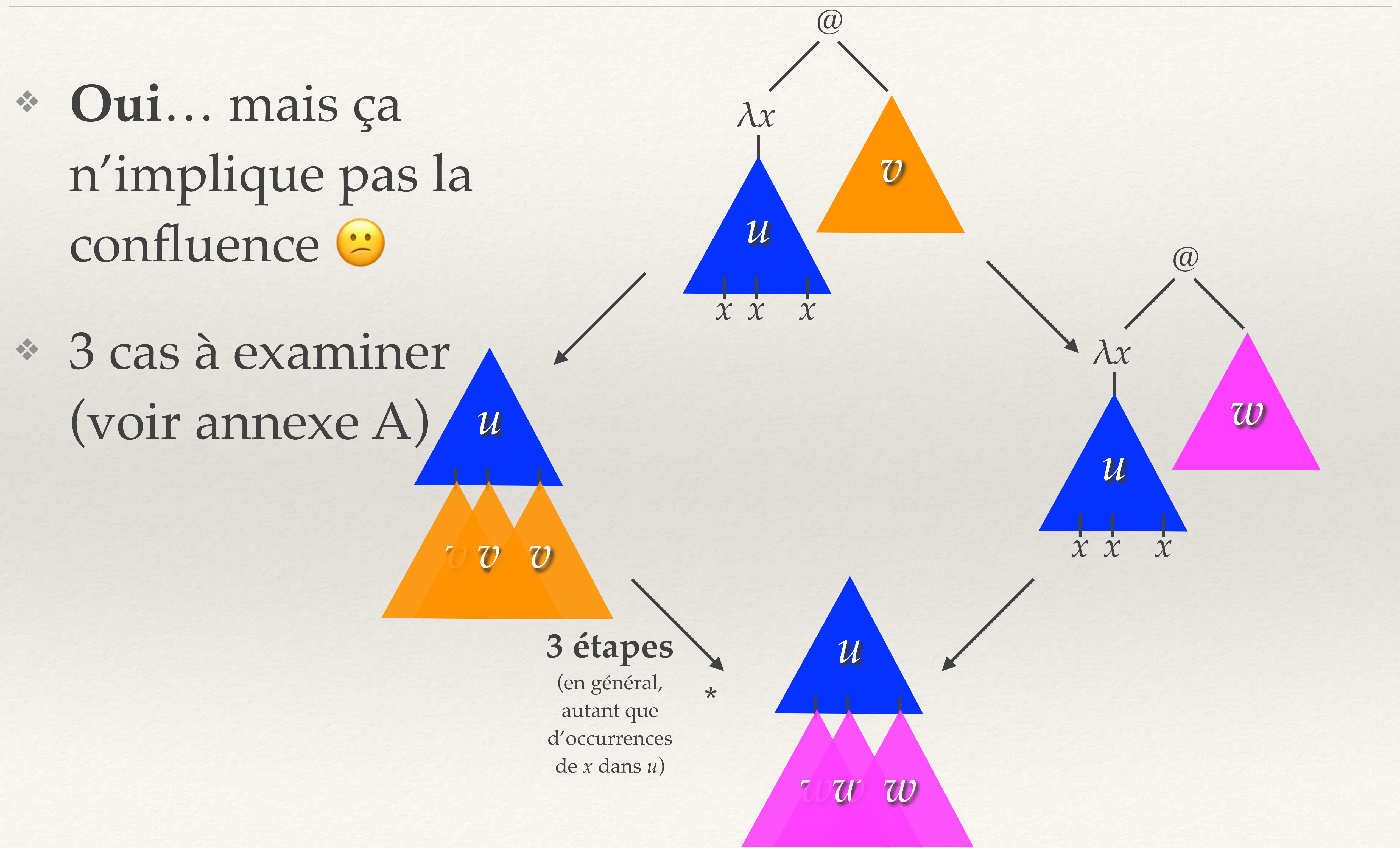
Le λ-calcul est-il fortement confluent?

- **Non…** 😢
- Imaginons que $v \to w$. Alors:



Le λ-calcul est-il localement confluent?

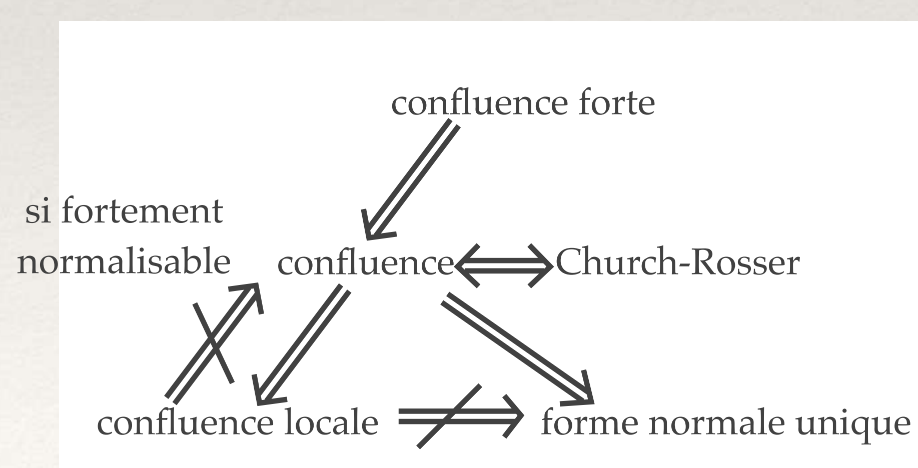
- **Oui**… mais ça n'implique pas la confluence 😕
- 3 cas à examiner (voir annexe A)



Le lemme de Newman

Le lemme de Newman

- **Lemme (Newman 1941).** Toute relation localement confluente
  et fortement normalisable
  est confluente.
- Preuve(s): transparents suivants.
- **Note 1:** le contre-ex. de Curry n'est **pas** fortement normalisable
- **Note 2:** la normalisabilité (faible) ne suffit pas (cf. Curry)
- **Note 3:** ne s'applique toujours pas au
  λ-calcul, qui n'est pas fortement
  normalisable…
  mais sera utile quand même!

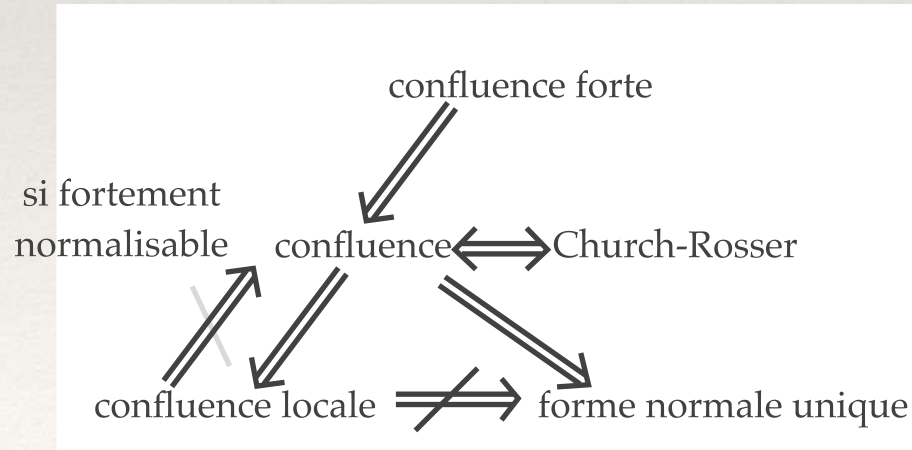


Le lemme de Newman

- **Lemme (Newman 1941).** Toute relation localement confluente
  et fortement normalisable
  est confluente.

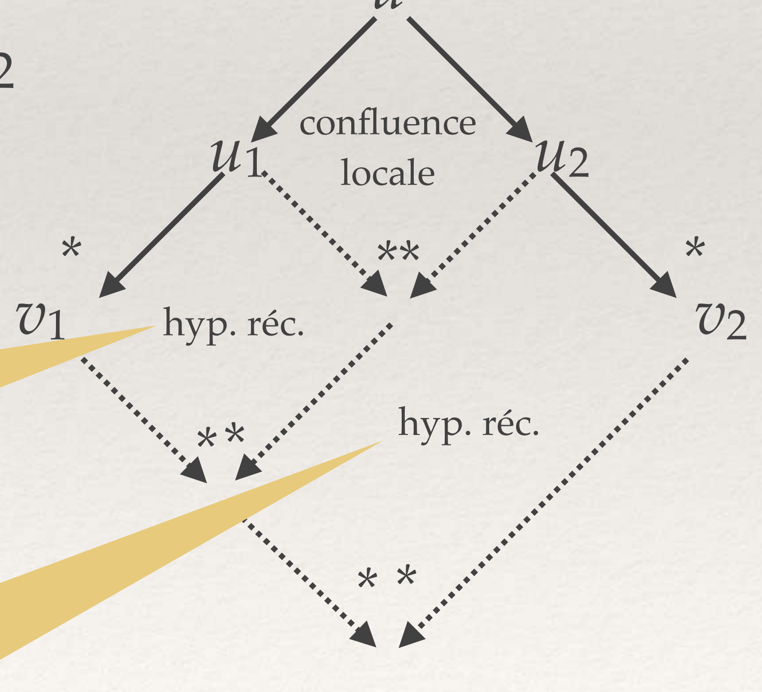
- On va en donner une preuve sous l'hypothèse supplémentaire que
  $\rightarrow$ est **à branchement fini**:
  pour tout u, $\{v \mid u \rightarrow v\}$ est fini
  (c'est clairement le cas en λ-calcul, et donc ça nous suffira)

- Alors pour tout u, $\nu(u) \stackrel{\text{def}}{=}$ longueur max.
  d'une réduction partant de u existe,
  par le lemme de König (détails en annexe B)



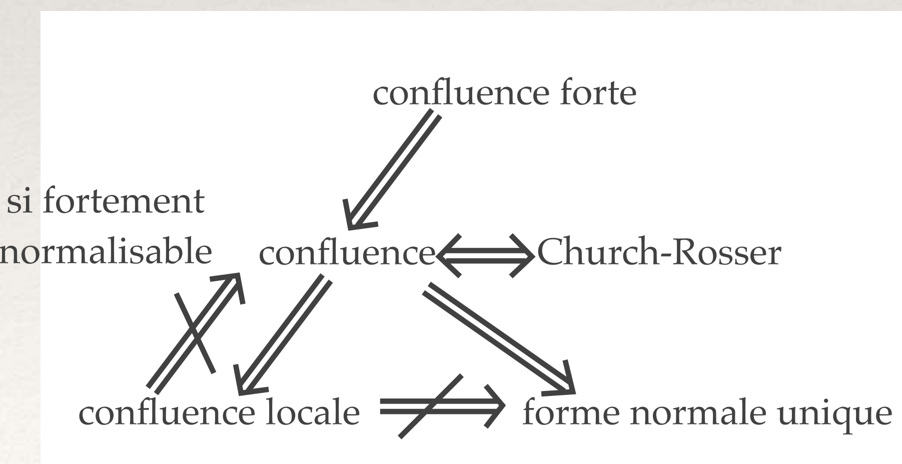
Le lemme de Newman: 1ère preuve

- **Lemme (Newman 1941).** Toute relation localement confluente **et** fortement normalisable et à branchement fini est confluente.
- On montre que si $v_1 \leftarrow^* u \rightarrow^* v_2$ alors v_1 et v_2 ont un réduit commun **par récurrence sur ν(*u*)**
- Les cas $u{=}v_1$ et $u{=}v_2$ sont comme avant
- Sinon:



s'applique car $\nu(u) > \nu(u_1)$

s'applique car $\nu(u) > \nu(u_2)$



Le λ-calcul est confluent

Réductions parallèles

- La preuve standard de confluence du λ-calcul
- On introduit une relation $\Rightarrow$ de **réduction parallèle**
  qui intuitivement autorise à réduire plusieurs rédexes, à condition qu'aucun n'en contienne un autre
- On montre que $\Rightarrow$ est **fortement confluente**
  donc confluente
- Enfin, $\rightarrow \subseteq \Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$
  donc $\rightarrow$ sera confluente.

Réductions parallèles

0 réduction parallèle
(nouvelle règle)

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ (0)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x\,.\,u)\,v \Rightarrow u'[x{:=}v']}\ (\beta)$$

$$\frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x\,.\,u \Rightarrow \lambda x\,.\,u'}\ (\lambda)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ (@)$$

On peut réduire
en parallèle
dans u et dans v

- Pour simplifier, raisonnons à α-équivalence près:
les règles suivantes sont donc inutiles

$$\frac{u =_\alpha v \quad v \to v'}{u \to v'} \qquad \frac{u \to u' \quad u' =_\alpha v'}{u \to v'}$$

- **Proposition.** $\Rightarrow$ est **fortement** confluente.
- C'est un exercice standard (voir annexe B).
- Donc $\Rightarrow$ est **confluente.**

$\to \subseteq \Rightarrow \subseteq \to^*$

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ (0)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x \,.\, u)\, v \Rightarrow u'[x{:=}v']}\ (\beta)$$

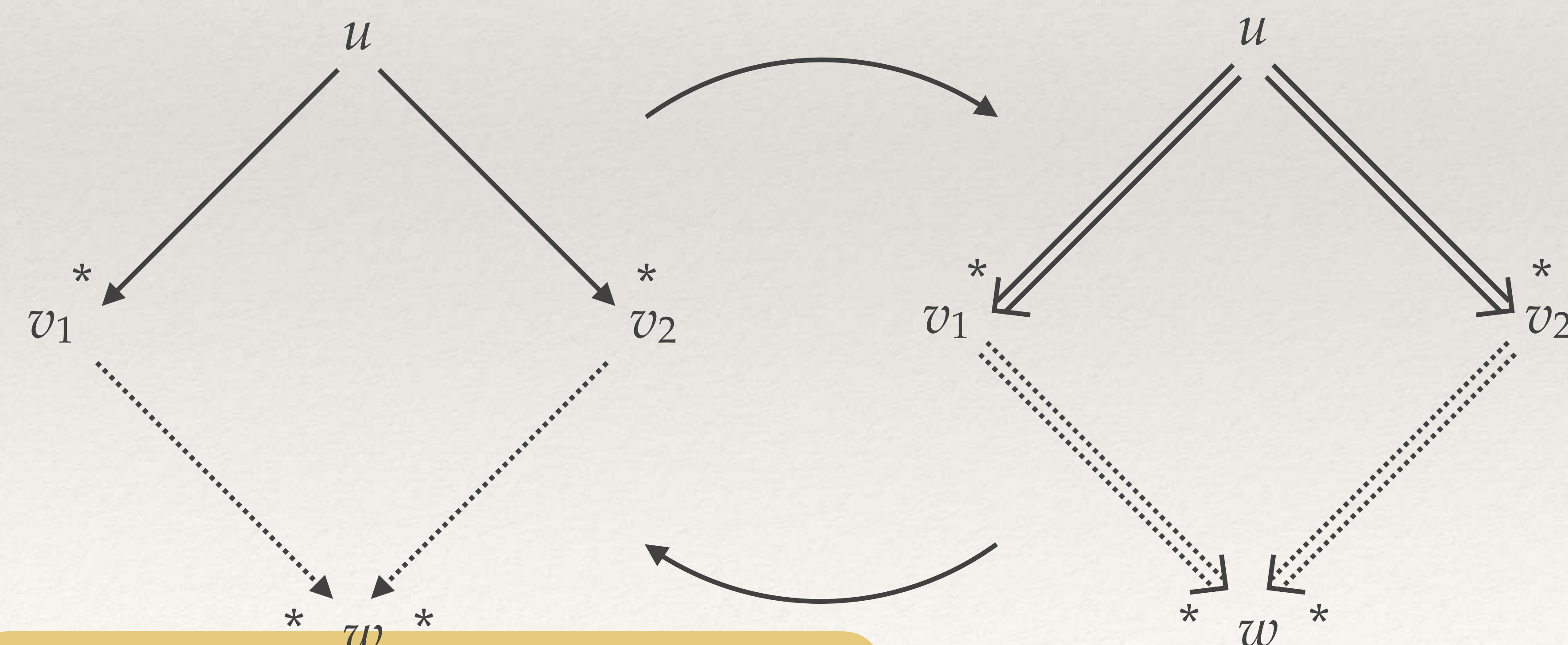
$$\frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x \,.\, u \Rightarrow \lambda x \,.\, u'}\ (\lambda)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ (@)$$

- **Lemme** ($\to \subseteq \Rightarrow$). Si $u \to v$ alors $u \Rightarrow v$.
  (Récurrence sur la profondeur du rédex contracté dans u.)
- **Lemme** ($\Rightarrow \subseteq \to^*$). Si $u \Rightarrow v$ alors $u \to^* v$.
  (Récurrence sur la taille de la dérivation de $u \Rightarrow v$.)
- **Corl.** $\to^* = \Rightarrow^*$.

Le λ-calcul est confluent

- On résume:
  - $\Rightarrow$ est (fortement) **confluente**
  - $\to^* \;=\; \Rightarrow^*$
- Si:



Donc le λ-calcul est confluent (pour la β-réduction). $\square$

Confluence: β n'entraîne pas η

- Vous vous souvenez de la règle suivante?
  (η) $\lambda x \,.\, ux \to u$ (si x pas libre dans u)
  et considérer la βη-réduction $\to_{\beta\eta}$
- Elle a l'air raisonnablement mathématiquement (pas informatiquement). Surtout, elle est **indépendante** de β:
- **Prop.** En général, $\lambda x \,.\, ux \neq_\beta u$ (même si x pas libre dans u).
- *Preuve.* On prend u = une variable $\neq x$:
  les deux côtés sont en forme β-normale est pas α-équivalents, donc pas β-équivalents
  (confluence implique forme normale **unique**). □

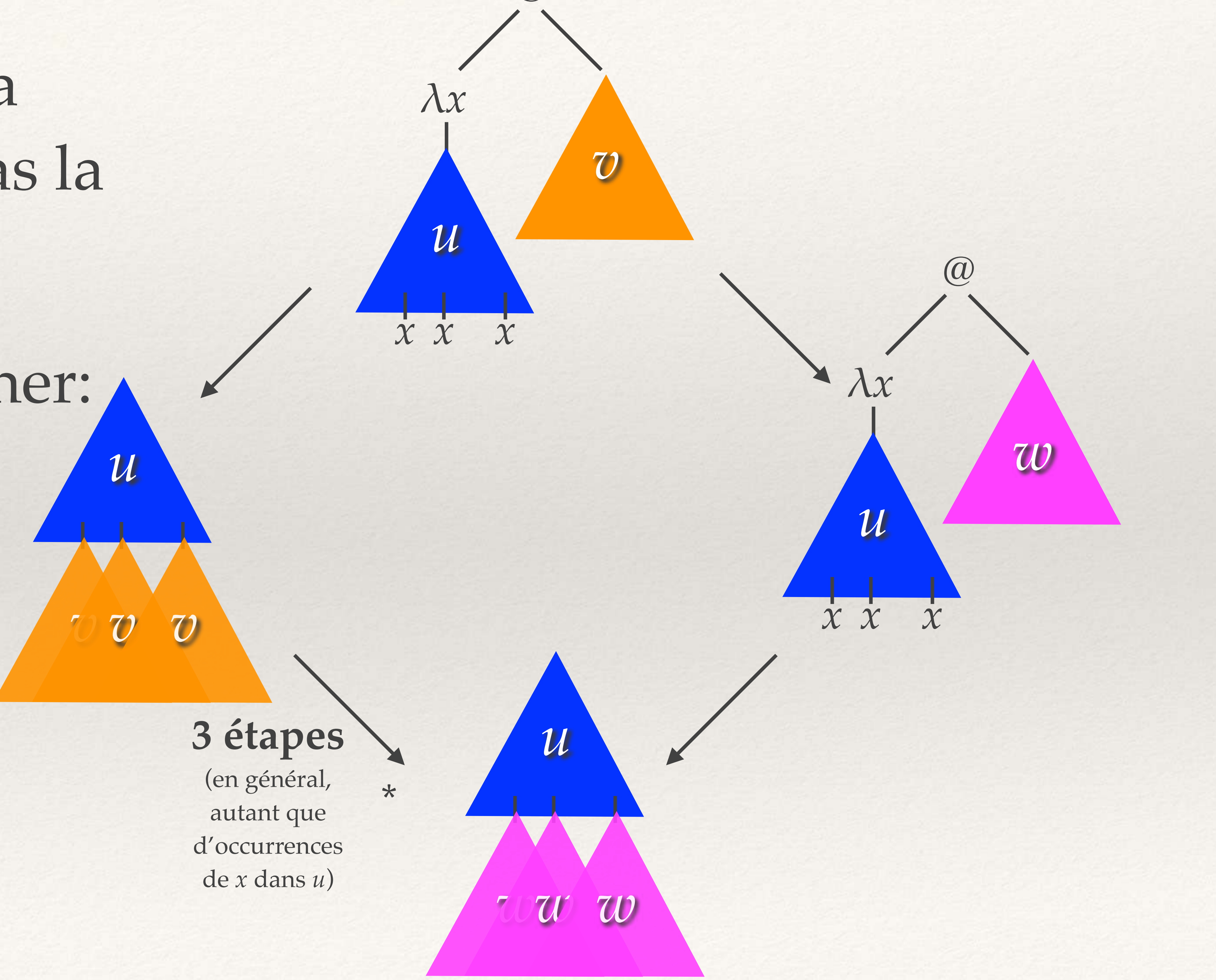
La prochaine fois

- Pouvoir expressif: fonctions récursives, combinateurs de point fixe
- Et plus tard: stratégies

Annexe A: le lambda-calcul est localement confluent

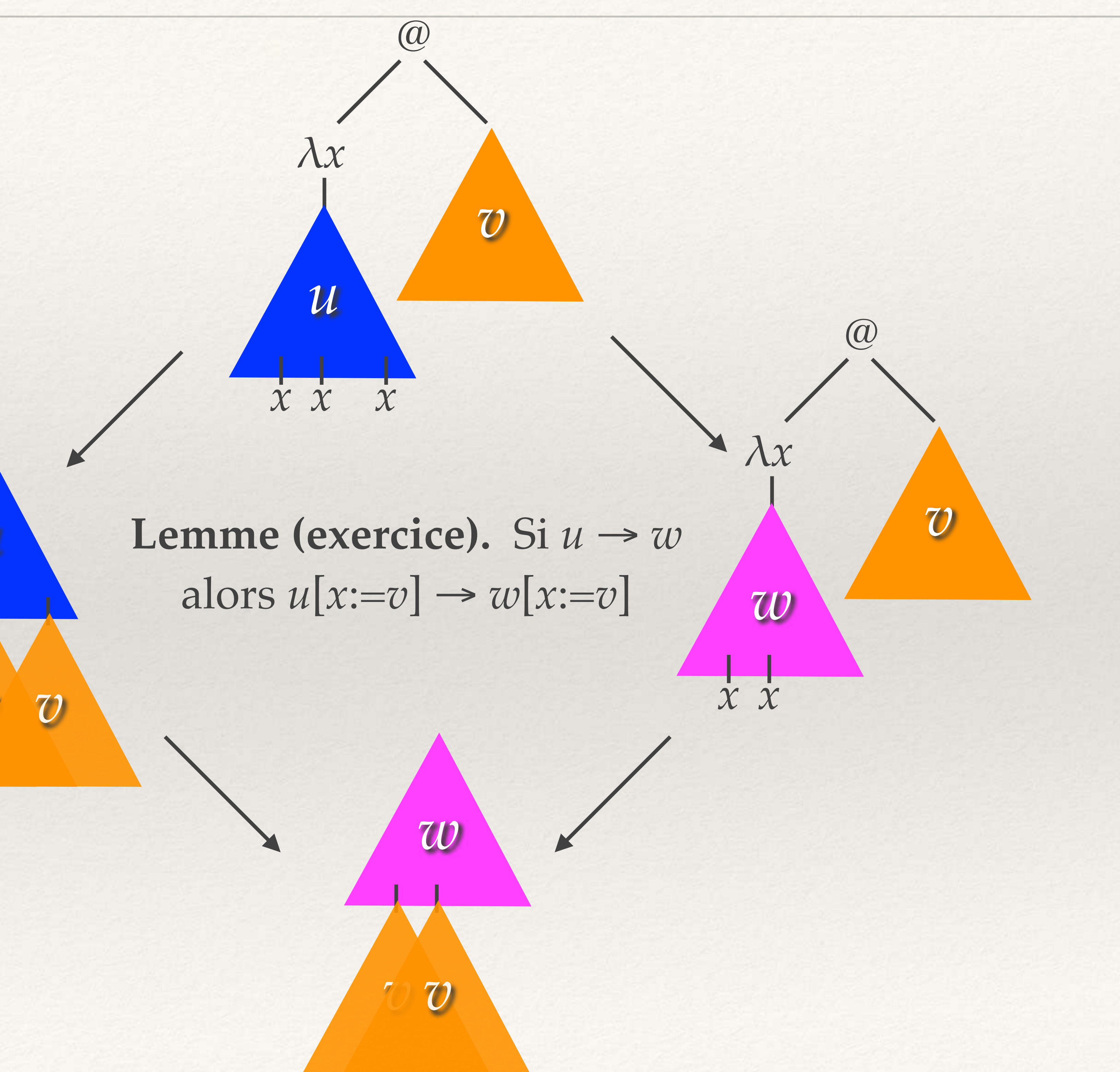
Le λ-calcul est-il localement confluent?

- **Oui**… mais ça n'implique pas la confluence 😕
- 3 cas à examiner:
- **Cas 1:**
  $v \longrightarrow w$,
  v argument d'un rédex



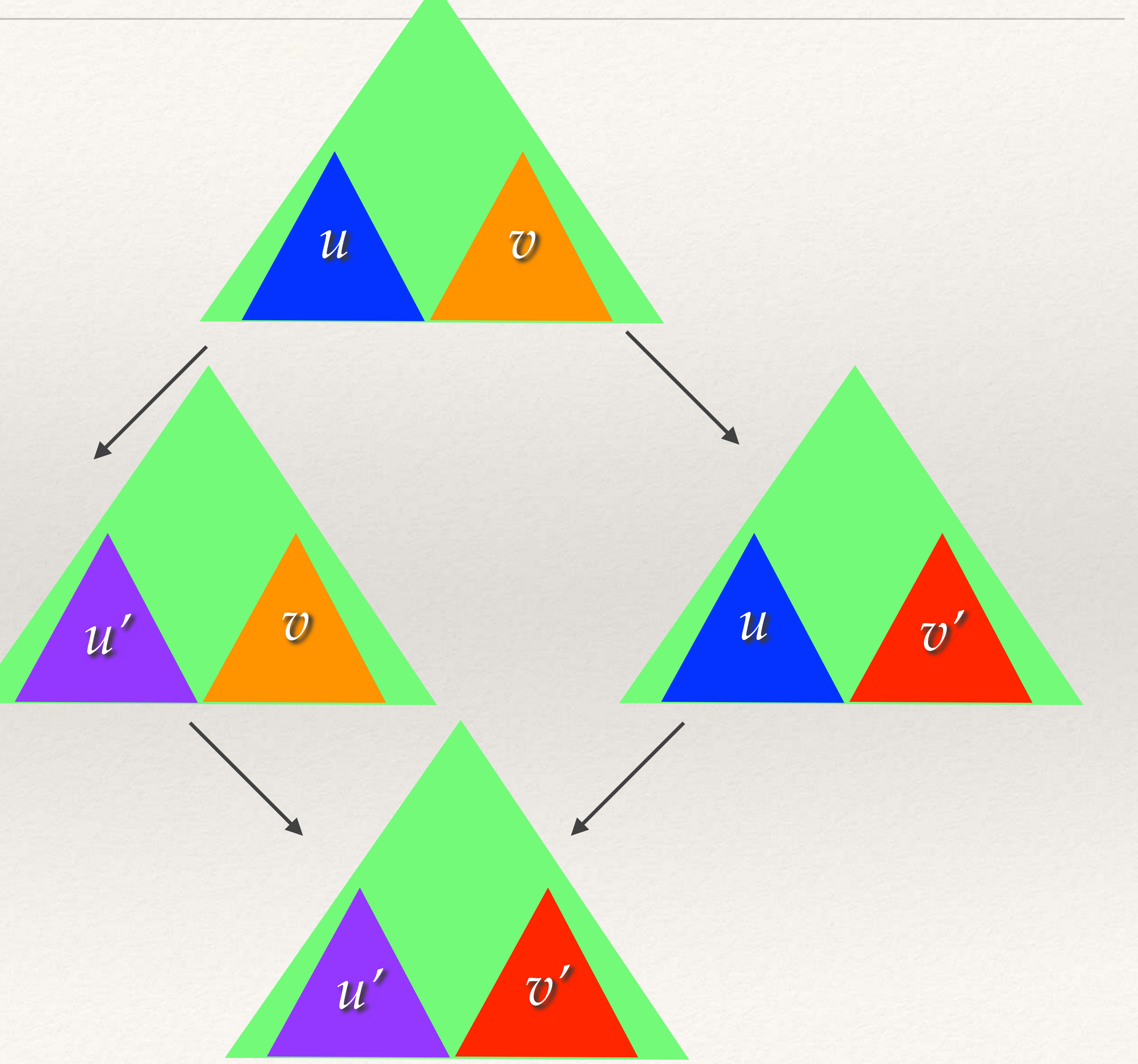
Le λ-calcul est-il localement confluent?

- **Oui**… mais ça n'implique pas la confluence 😕
- 3 cas à examiner:
- **Cas 2:**
  $u \to w$,
  u sous la λ-abstraction d'un rédex



Le λ-calcul est-il localement confluent?

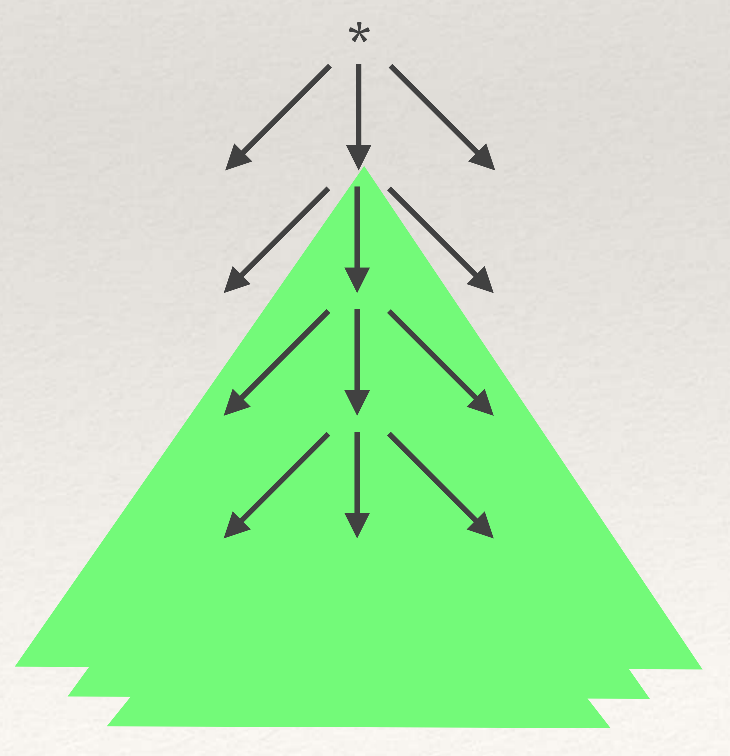
- **Oui**… mais ça n'implique pas la confluence 😕
- 3 cas à examiner:
- **Cas 3:** rédex **disjoints** $u \to u', v \to v'$



Annexe B

Le lemme de Kőnig

- **Lemme (Kőnig).** Tout arbre à branchement fini
  et dont toutes les branches sont finies
  … est fini (n'a qu'un nombre fini de sommets).
- *Preuve.* Soit T un arbre **infini**, à branchement fini.
- * n'a qu'un #fini de successeurs
- **Tiroirs et chaussettes**: un de ceux-là est racine d'un sous-arbre **infini**
- … et l'on continue à l'infini, produisant une **branche infinie**.



Pourquoi $\nu(u)$ existe-t-il?

- Supposons $\rightarrow$ fortement normalisable et **à branchement fini**:
  pour tout u, $\{v \mid u \rightarrow v\}$ est fini
- $\forall\, u$, $\nu(u) \stackrel{\text{def}}{=}$ longueur max. d'une réduction partant de u existe:
  on forme l'arbre $T(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid u \rightarrow^* v\}$
  - Il est à branchement fini par hypothèse
  - Ses branches sont finies car $\rightarrow$ fortement normalisable
- Par Kőnig, $T(u)$ est **fini**, et il n'y a en particulier
  qu'un nombre **fini** de réductions partant de u

Pourquoi $\nu(u)$ existe-t-il?

- Supposons $\to$ fortement normalisable et **à branchement fini**:
  pour tout u, $\{v \mid u \to v\}$ est fini
- $\forall\, u$, $\nu(u) \stackrel{\text{def}}{=}$ longueur max. d'une réduction partant de u existe:
  on forme l'arbre $T(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid u \to^* v\}$

Note (facile mais importante).
Si $u \to v$ alors $\nu(u) > \nu(v)$.

- Par Kőnig, $T(u)$ est **fini**, et il n'y
  qu'un nombre **fini** de ré

Les gens rigoureux dans l'assistance auront remarqué que $T(u)$ est un graphe orienté, pas un arbre… deux solutions:
(1) montrer que Kőnig reste vrai pour tout **graphe** acyclique à branchement fini
(2) définir les sommets de $T(u)$ comme les réductions finies partant de u elles-mêmes, poser $* \stackrel{\text{def}}{=} (u)$ et
$p(u \to u_1 \to \ldots \to u_{n-1} \to u_n) = (u \to u_1 \to \ldots \to u_{n-1})$

Annexe B: la réduction parallèle est fortement confluente

Le lemme de substitution pour $\Rightarrow$

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ (0)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x\,.\,u)\,v \Rightarrow u'[x{:=}v']}\ (\beta)$$

$$\frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x\,.\,u \Rightarrow \lambda x\,.\,u'}\ (\lambda)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ (@)$$

- **Lemme.** Si $u \Rightarrow u'$ et $w \Rightarrow w'$
  alors $u[z{:=}w] \Rightarrow u'[z{:=}w']$

- *Preuve.* Récurrence sur la **taille de la dérivation** donnée de $u \Rightarrow u'$.
  (Exercice. Vous aurez à prouver quelques lemmes auxiliaires.
  Attention à α-renommer dans le cas de la règle (β).)

- **Note**: avec la β-réduction (ordinaire), on a:
  — si $w \to w'$ alors $u[z{:=}w] \to^* u'[z{:=}w']$
  — si $u \to u'$ alors $u[z{:=}w] \to u'[z{:=}w]$

$\Rightarrow$ est fortement confluente

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ (0)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x \,.\, u)\, v \Rightarrow u'[x{:=}v']}\ (\beta)$$

$$\frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x \,.\, u \Rightarrow \lambda x \,.\, u'}\ (\lambda)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ (@)$$

- Supposons $s \Rightarrow t_1$ et $s \Rightarrow t_2$
- On montre qu'il existe t_3 / $t_1, t_2 \Rightarrow t_3$ par récurrence sur **la somme des tailles des dérivations** de $s \Rightarrow t_1$ et $s \Rightarrow t_2$
- A symétrie près, 10 cas
- (0)/–: $s{=}t_1$ $[=u]$, poser $t_3 \stackrel{\text{def}}{=} t_2$
- (β)/(λ), (λ)/(@): impossibles
- (λ)/(λ), (@)/(@): par hyp. réc.
- (β)/(β): voir transparent suivant

	(0)	(β)	(λ)	(@)
(0)	✔	✔	✔	✔
(β)	–		–	
(λ)	–	–	✔	–
(@)	–	–	–	✔

$\Rightarrow$ est fortement confluente

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ (0)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x\,.\,u)\,v \Rightarrow u'[x{:=}v']}\ (\beta)$$

$$\frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x\,.\,u \Rightarrow \lambda x\,.\,u'}\ (\lambda)$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ (@)$$

- (β)/(β): on a

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots \\ u \Rightarrow u_1 & & v \Rightarrow v_1\end{matrix}}{\underbrace{(\lambda x\,.\,u)\,v}_{s} \Rightarrow \underbrace{u_1[x{:=}v_1]}_{t_1}}
\qquad
\frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots \\ u \Rightarrow u_2 & & v \Rightarrow v_2\end{matrix}}{\underbrace{(\lambda x\,.\,u)\,v}_{s} \Rightarrow \underbrace{u_2[x{:=}v_2]}_{t_2}}$$

  - Par h.r., on a $u_1, u_2 \Rightarrow u_3$
    et $v_1, v_2 \Rightarrow v_3$
  - Par le… $t_1 \Rightarrow u_3[x{:=}v_3]$

    Lemme. Si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$ alors $u[x{:=}v] \Rightarrow u'[x{:=}v']$
  - Par le… $t_2 \Rightarrow u_3[x{:=}v_3]$

    Lemme. Si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$ alors $u[x{:=}v] \Rightarrow u'[x{:=}v']$

C'est le t_3 désiré

	(0)	(β)	(λ)	(@)
(0)	✔	✔	✔	✔
(β)	–	✔	–	
(λ)	–	–	✔	–
(@)	–	–	–	✔

$\Rightarrow$ est fortement confluente

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ (0) \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x\,.\,u)\ v \Rightarrow u'[x{:=}v']}\ (\beta) \qquad \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x\,.\,u \Rightarrow \lambda x\,.\,u'}\ (\lambda) \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ (@)$$

- Dans le (dernier) cas (β)/(@), on a:

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ u \Rightarrow u_1 & & v \Rightarrow v_1\end{matrix}}{\underbrace{(\lambda x\,.\,u)\ v}_{s} \Rightarrow \underbrace{u_1[x{:=}v_1]}_{t_1}} \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ (\lambda x\,.\,u) \Rightarrow w & & v \Rightarrow v_2\end{matrix}}{\underbrace{(\lambda x\,.\,u)v}_{s} \Rightarrow \underbrace{wv_2}_{t_2}}$$

- Mais $(\lambda x\,.\,u) \Rightarrow w$ ne peut être dérivé que par (0) ou (λ) … donc la situation est…

	(0)	(β)	(λ)	(@)
(0)	✔	✔	✔	✔
(β)	–	✔	–	
(λ)	–	–	✔	–
(@)	–	–	–	✔

$\Rightarrow$ est fortement confluente

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ (0) \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x\,.\,u)\,v \Rightarrow u'[x{:=}v']}\ (\beta) \qquad \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x\,.\,u \Rightarrow \lambda x\,.\,u'}\ (\lambda) \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ (@)$$

- Dans le (dernier) cas (β)/(@), on a:

$$\frac{\overset{\vdots}{u \Rightarrow u_1} \quad \overset{\vdots}{v \Rightarrow v_1}}{\underbrace{(\lambda x\,.\,u)\,v}_{s} \Rightarrow \underbrace{u_1[x{:=}v_1]}_{t_1}} \qquad \frac{\dfrac{\overset{\vdots}{u \Rightarrow u_2}}{(\lambda x\,.\,u) \Rightarrow (\lambda x\,.\,u_2)} \quad \overset{\vdots}{v \Rightarrow v_2}}{\underbrace{(\lambda x\,.\,u)v}_{s} \Rightarrow \underbrace{(\lambda x\,.\,u_2)\,v_2}_{t_2}}$$

  - Par h.r., on a $u_1, u_2 \Rightarrow u_3$ et $v_1, v_2 \Rightarrow v_3$
  - Par le… $t_1 \Rightarrow u_3[x{:=}v_3]$

    Lemme. Si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$ alors $u[x{:=}v] \Rightarrow u'[x{:=}v']$

  - Par (β), $t_2 \Rightarrow u_3[x{:=}v_3]$

    C'est le t_3 désiré

	(0)	(β)	(λ)	(@)
(0)	✔	✔	✔	✔
(β)	–	✔	–	✔
(λ)	–	–	✔	–
(@)	–	–	–	✔