DM, λ-calcul, 2020

à rendre le 09 juin 2020 au plus tard

Correction.

Notes préliminaires. Les recommandations de clarté, de justesse, de soin, et de concision sont les mêmes que pour le DM.

Je mettrai le source LaTeX de ce sujet en ligne, et vous pourrez écrire votre solution en donnant votre nom comme argument de la commande `\author` en tête de document, puis écrire vos réponses entre les différentes `\begin{solution}` et `\end{solution}`. Envoyez-moi ensuite le pdf, pas le source.

Comme promis, l'examen contient certaines suites à des questions du DM. Vous avez donc le droit d'utiliser des résultats du DM, sans les (re)démontrer. En fait, je compterai beaucoup moins de points pour une redémonstration que pour une citation. Je vous demande de citer les résultats du DM que vous utiliserez par une formule telle que « par la question $\langle n \rangle$ du DM ».

Finalement, les questions les plus difficiles sont bien sûr aussi celles qui compteront pour le plus de points, où qu'elles soient dans le sujet.

1 Mise en bouche : le lemme de Hindley-Rosen

On étudie des critères de confluence pour des relations de réécriture abstraites, c'est-à-dire des relations binaires sur un ensemble A.

Une relation binaire R sur A est, formellement, juste un sous-ensemble de $A \times A$. On notera souvent $a \xrightarrow{R} b$ au lieu de $(a, b) \in R$.

Deux relations binaires R et S *commutent* si et seulement si :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

autrement dit, si pour tous a, b, c tels que $a \overset{R}{\to} b$ et $a \overset{S}{\to} c$, il existe un d tel que $b \overset{S}{\to} d$ et $c \overset{R}{\to} d$.

Pour toutes relations binaires R et S, on notera $R; S$ la relation définie par $(a, b) \in R; S$ si et seulement s'il existe a_1 tel que $a \overset{R}{\to} a_1 \overset{S}{\to} b$; et pour tout $n \geq 0$, R^n la relation $\underbrace{R; R; \cdots ; R}_{n \text{ fois}}$ (si $n = 0$, c'est par convention la relation d'égalité : $(a, b) \in R^0$ si et seulement si $a = b$).

On notera R^* la clôture réflexive-transitive d'une relation binaire R. Autrement dit, $a \overset{R^*}{\to} b$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ (0 est autorisé) tel que $(a, b) \in R^n$.

Question 1 Montrer que, si R et S sont confluentes et si R^* et S^* commutent, alors :

(a) $R^*; S^*$ est fortement confluente ;

(b) $R \cup S$ est confluente.

> *(a) On forme le diagramme :*
>
> $$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R^*"] \arrow[d, "R^*"'] & \bullet \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, dotted, "R^*"] & \bullet \arrow[d, dotted, "R^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^*"] \arrow[d, "S^*"'] & \bullet \arrow[r, dotted, "S^*"] \arrow[d, dotted, "S^*"] & \bullet \arrow[d, dotted, "R^*"', "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^*"'] & \bullet \arrow[r, dotted, "S^*"'] & \bullet \end{tikzcd}$$
>
> *où le carré en haut à gauche est par confluence de R, le carré en bas à droite est par confluence de S et les deux autres sont par la commutation de R^* et de S^*.*
>
> *(b) Il suffit d'observer que $(R \cup S)^* = (R^*; S^*)^*$, et d'utiliser le résultat du cours que toute relation fortement confluente est confluente.*

Question 2 On dit que R *pseudo-commute* avec S si et seulement si :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq 1}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

où $R^{\leq 1} = R^0 \cup R^1$. (En général, $R^{\leq n}$ est définie comme l'union de R^0, R^1, …, R^n.) On notera bien que « R pseudo-commute avec S » n'est pas équivalent à « S pseudo-commute avec R ». Montrer que si R pseudo-commute avec S, alors R^* et S^* commutent.

On démontre d'abord que l'on a le carré commutatif suivant, qui est celui définissant la pseudo-commutation, sauf que le S de gauche y est remplacé par un S^* :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S^*"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq 1}"'] & \bullet \end{tikzcd} \tag{1}$$

Autrement dit, on démontre que, si R pseudo-commute avec S, alors R pseudo-commute avec S^*. Explicitement, on démontre que :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S^m"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq 1}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

pour tout entier m, par récurrence sur m. Si $m = 0$, c'est évident. Sinon, on est dans l'une des deux situations suivantes :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S^{m-1}"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "="'] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "="'] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S^{m-1}"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R"'] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq 1}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

où le carré du haut dans chaque cas est par hypothèse de récurrence. Le carré du bas est soit un carré trivial (cas de gauche) soit un carré obtenu par pseudo-commutation de R avec S (cas de droite).
On suppose maintenant $(a, b) \in R^n$ et $(a, c) \in S^*$, et on montre qu'il existe d tel que $(b, d) \in S^*$ et $(c, d) \in R^{\leq n}$ par récurrence sur n.
Si $n = 0$, c'est évident. Sinon, c'est par :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S^*"'] & \bullet \arrow[r, "R^{n-1}"] \arrow[d, dotted, "S^*"] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq 1}"'] & \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq n-1}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

où le carré de gauche est par (1) et le carré de droite par hypothèse de récurrence.
Une autre stratégie de démonstration consiste à montrer que l'on a :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R^n"] \arrow[d, "S^m"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq n}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

en une seule fois, par récurrence sur (n, m) *ordonné lexicographiquement. C'est essentiellement la même preuve.*

On en déduit le *lemme de Hindley-Rosen* : si R et S sont deux relations confluentes, et si R pseudo-commute avec S, alors $R \cup S$ est confluente. Ceci sera utile dans la partie qui suit.

2 Entrée : le combinateur δ de Church

On va considérer deux extensions du λ-calcul, le $\lambda\delta$-calcul et le $\lambda\delta_C$-calcul. L'idée y est de rajouter une constante δ qui implémente le test d'égalité.

Dans les deux calculs, la syntaxe est obtenue en ajoutant juste une constante δ aux termes. Autrement dit, les $\lambda\delta_{(C)}$-termes sont :

$$\begin{array}{rll} s, t, u, v, \ldots ::= & x, y, z, \ldots & \text{variables} \\ & \mid \delta & \text{le combinateur de Church} \\ & \mid uv & \text{application} \\ & \mid \lambda x.u & \text{abstraction.} \end{array}$$

Comme d'habitude, les termes sont considérés à α-renommage près.

Un $\lambda\delta$-terme est dit *canonique* si et seulement s'il est β-normal, et ne contient pas de sous-terme de la forme δst. (Il peut donc contenir des sous-termes de la forme δs, ou bien δ tout seul.)

Les règles de réduction du $\lambda\delta$-calcul sont, outre la β-réduction, les règles suivantes appelées *δ-règles* :

$$\begin{array}{ll} \delta uv \to \mathbf{V} & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont des termes canoniques identiques} \\ \delta uv \to \mathbf{F} & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont des termes canoniques distincts.} \end{array}$$

Au risque de me répéter, « identiques » et « distincts » doivent être compris à α-renommage près.

Les termes $\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x, y.x$ et $\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x, y.y$ sont les booléens de Church usuels. On notera aussi $\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.x$.

On parlera de $\beta\delta$-réduction pour la notion de réduction définie par β et les deux règles ci-dessus. Il est tacite qu'elle passe au contexte. La $\beta\delta$-convertibilité est la plus petite relation d'équivalence contenant la $\beta\delta$-réduction.

Question 3 En considérant le terme $d_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x, y \cdot \delta xy)\mathbf{II}$,

(a) montrer que $\mathbf{V}$ et $\mathbf{F}$ sont $\beta\delta$-convertibles ;

(b) en déduire que le $\lambda\delta$-calcul a une théorie triviale : *tous* les $\lambda\delta$-termes sont $\beta\delta$-convertibles.

(a) $\mathbf{I}$ *est canonique, et l'on a :*

$$d_0 \to^2 \delta\mathbf{II} \to \mathbf{V}$$

où les deux premières réductions sont par β, pas la troisième.

La partie subtile est que la variable x elle-même est canonique, donc on a aussi :

$$\begin{aligned} d_0 &\to (\lambda y \cdot \delta\mathbf{I}y)\mathbf{I} \\ &\to (\lambda y \cdot \mathbf{F})\mathbf{I} && \textit{par } \delta\textit{-réduction} \\ &\to \mathbf{F}. \end{aligned}$$

(b) Soient u et v deux $\lambda\delta$-termes quelconques. On a :

$$\begin{aligned} d_0uv &\to^* \mathbf{V}uv \to^2 u \\ d_0uv &\to^* \mathbf{F}uv \to^2 v \end{aligned}$$

donc u et v sont convertibles.

Vous devriez vous être aperçu, aussi, que le $\lambda\delta$-calcul n'est pas confluent. (Je ne demande pas de le démontrer.) Pour réparer ces défauts, on considère le $\lambda\delta_C$-calcul. Sa syntaxe est la même, et ses règles sont modifiées : en $\lambda\delta_C$-calcul, les δ-règles ne s'appliquent plus au rédex δuv que si non seulement u et v sont canoniques mais aussi *clos*. On appellera cette modification les *δ_C-règles*.

Question 4 Montrer que le $\lambda\delta_C$-calcul est confluent.

On n'a pas démontré un lemme qui peut servir ?

Par le lemme de Hindley-Rosen.

D'abord, β est confluente. C'est une question de cours, sachant que pour ce point δ n'agit que comme une variable du λ-calcul (inerte).

Ensuite, δ_C est fortement confluente : si s se réécrit en deux termes par les δ_C-règles, alors les redexes impliqués sont soit égaux soit disjoints (pas imbriqués), puisqu'ils ne s'appliquent qu'à des termes canoniques.

En particulier, δ_C est confluente.

Il ne reste qu'à démontrer que β pseudo-commute avec δ_C (et pas le contraire !). Dans les cas où les deux redexes sont disjoints, on a confluence forte. Il n'y a pas de cas d'un β-rédex à l'intérieur d'un δ-rédex, puisqu'un δ-rédex est toujours β-normal. Il reste à considérer le cas d'un β-rédex $(\lambda x.u)v$ contenant un δ_C-rédex. On a deux sous-cas :

- *Le δ_C-rédex est dans v, et en le contractant on obtient v'. Alors, $(\lambda x.u)v'$ se β-réduit en $u[x := v']$ en une étape, et $u[x := v]$ se*

δ-réduit en $u[x := v']$ en autant d'étapes qu'il y a d'occurrences de x dans u. En diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.u)v \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\delta_C"] & \\
u[x := v] \arrow[dr, dotted, "\delta_C"', "*"] & & (\lambda x.u)v' \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\
 & u[x := v']. &
\end{tikzcd}$$

— *Le δ_C-rédex δst est dans u, disons $u = C[\delta st]$, où C est un contexte (un terme avec un trou, et les crochets indiquent par quoi on remplace le trou). De plus, δst se contracte en $w \in \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Comme δst est clos (c'est la différence avec la règle δ !), la β-contraction produit $(\lambda x.u)v \to u[x := v] = C[x := v][\delta st]$ (pas de x à remplacer dans s ou dans t), qui se réduit par une étape de δ_C en $C[x := v][w] = C[w][x := v]$ (puisque w est clos lui aussi). La δ_C-contraction, elle, produit $(\lambda x.C[w])v$, qui se β-réduit en $C[w][x := v]$, soit le même terme. En diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.C[\delta st])v \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\delta_C"] & \\
C[x := v][\delta st] \arrow[dr, dotted, "\delta_C"'] & & (\lambda x.C[w])v \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\
 & C[x := v][w] = C[w][x := v]. &
\end{tikzcd}$$

Question 5 En déduire que, contrairement au cas du $\lambda\delta$-calcul, le $\lambda\delta_C$-calcul a une théorie *non* triviale.

Deux formes $\beta\delta_C$-normales, par exemple deux variables distinctes, sont $\beta\delta_C$-inconvertibles.

3 Plat principal : résolubilité

Si $\vec{u}$ est une suite finie de termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, on notera $t\vec{u}$ pour $tu_1u_2 \cdots u_n$. (On peut avoir $n = 0$.)

Un terme clos t est *résoluble* si et seulement s'il existe une suite finie $\vec{u}$ de termes telle que $t\vec{u} =_\beta$ **I**, où **I** est par définition le terme $\lambda x \cdot x$.

Un terme t, non nécessairement clos, est résoluble si et seulement si le terme $\lambda x_1, \cdots, x_m \cdot t$, où $x_1, \ldots, x_m$ sont les variables libres de t, est résoluble. (Le terme en question est clos, et l'on applique donc la définition précédente de la résolubilité.) On appellera $\lambda x_1, \cdots, x_m \cdot t$ la *fermeture* de t, même si elle n'est pas unique.

Question 6 Supposons t clos et résoluble.

C'est le moment d'utiliser des résultats du cours.

(a) Pourquoi existe-t-il une suite finie $\vec{u}$ de termes telle que $t\vec{u} \to^* \mathbf{I}$?

(b) ... et même $t\vec{u} \Rightarrow_s \mathbf{I}$?

(c) ... et même $t\vec{u} \to_h^* \mathbf{I}$? ($\to_h$, ou $\to_t$, dénote la réduction de tête.)

*(a) D'abord, il existe une suite finite $\vec{u}$ de termes telle que $t\vec{u} =_\beta$ **I**, par définition. Ensuite, par **confluence**, comme **I** est en forme normale, on a $t\vec{u} \to^*$ **I**.*

*(b) Par **standardisation**, on peut passer de $t\vec{u}$ à **I** par une réduction standard, c'est-à-dire $t\vec{u} \Rightarrow_s$ **I**.*

(c) Par définition de $\Rightarrow_s$ (voir preuve du théorème 3 du poly `lambda.pdf`*), ceci signifie que $t\vec{u}$ se réduit par réductions de tête en $\lambda x \cdot u_0$ avec $u_0 = x$. Autrement dit, on a $t\vec{u} \to_h^*$ **I**.*

Question 7 En déduire que pour tout terme clos résoluble t, il existe une suite finie de termes $\vec{u}$ tel que $t\vec{u}$ est typable dans le systèmes des types intersection simples du DM. (C'est-à-dire qu'il existe un contexte de typage Γ formé de liaisons $x_i : \mu_i$ où les μ_i sont des multi-ensembles de types intersection simples, et il existe un type intersection simple τ tels que $\Gamma \vdash t\vec{u} : \tau$ soit dérivable dans le système de la partie 3 du DM.)

3 lignes, chez moi.

*Par la **Question 6**, $t\vec{u}$ a une forme normale de tête, pour une certaine suite finie $\vec{u}$ de termes. Par la **Question 19 du DM**, $t\vec{u}$ est typable dans le systèmes des types intersection simples.*

Question 8 En déduire que tout terme clos résoluble t a une forme normale de tête. (On rappelle que ceci signifie que sa réduction de tête termine.)

Pas très long non plus.

*Par la **Question 7**, $t\vec{u}$ est typable dans le système des types intersection simples pour une certaine suite finie $\vec{u}$ de termes. On a donc une dérivation d'un jugement $\Gamma \vdash t\vec{u} : \tau$. Cette dérivation est nécessairement une dérivation d'un jugement de la forme $\Gamma \vdash t \colon \mu_1 \to \cdots \mu_n \to \tau$, suivie de n applications de la règle (App).*

*En particulier, t est typable dans le système des types intersection simples, et a donc une forme normale de tête par la **Question 14 du DM** (ou la question 19).*

Question 9 Montrer enfin que tout terme résoluble a une forme normale de tête. 6 lignes chez moi.

*Si t est résoluble, sa fermeture $\lambda\vec{x}.t$ l'est aussi par définition, et est un terme clos. Cette fermeture $\lambda\vec{x}.t$ a donc une forme normale de tête par la **Question 8**. Toutes les réductions de tête se passant sous $\lambda\vec{x}$, la forme normale de tête de $\lambda\vec{x}.t$ est de la forme $\lambda\vec{x}.t'$, où $t \to_h^* t'$. Enfin, t' est nécessairement en forme normale de tête, sinon $\lambda\vec{x}.t'$ aurait un rédex de tête.*

Question 10 Exhiber un terme non résoluble, et justifier. 2 lignes.

*Ω, puisque l'unique réduction de tête partant de Ω boucle sur Ω, donc sa résolubilité contredirait la **Question 9**.*

Question 11 Montrer que, réciproquement :

(a) toute forme normale de tête close est résoluble ;

(b) ... tout terme clos qui a une forme normale de tête est résoluble ;

(c) ... enfin, tout terme qui a une forme normale de tête est résoluble.

(a) Soit t une forme normale de tête close. Elle s'écrit nécessairement $\lambda x_1, \cdots, x_m \cdot x_i\vec{s}$, et alors $t *_1 \cdots *_{i-1} (\lambda\vec{y} \cdot \mathbf{I}) *_{i+1} \cdots *_m$ se réduit en $(\lambda\vec{y} \cdot \mathbf{I})\vec{s}$, puis en $\mathbf{I}$, où les $*_j$ sont des termes arbitraires et $\vec{y}$ une liste de variables de la même longueur que $\vec{s}$.

(b) Si maintenant t est clos et a une forme normale de tête, alors $t \to_h^* t'$ où t' est normal de tête. De plus, les variables libres de t' sont nécessairement toutes libres dans t (lemme auxiliaire facile), donc t' est clos. On vient de montrer que $t'\vec{u} =_\beta \mathbf{I}$ pour une certaine suite de λ-termes $\vec{u}$. Donc $t\vec{u} =_\beta^* t'\vec{u} =_\beta^* \mathbf{I}$.

(c) En notant $\vec{x}$ la liste des variables libres de t (dans un ordre quelconque), $\lambda\vec{x} \cdot t$ a une forme normale de tête, est clos, donc il existe une suite de λ-termes $\vec{u}$ telle que $(\lambda\vec{x} \cdot t)\vec{u} =_\beta^* \mathbf{I}$, montrant que t est résoluble.

Et donc, les trois notions suivantes sont équivalentes : (a) être résoluble, (b) avoir une forme normale de tête, (c) être typable dans le système des types intersection simples.

4 Un dessert copieux : le système des types F-intersection

On considère les *type F-intersection* définis par la grammaire :

$$\begin{array}{lll} \sigma, \tau, \ldots ::= \alpha & & \text{variables de types} \\ & \mid [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \to \tau & \\ & \mid \forall \alpha . \tau & \text{quantification de types.} \end{array}$$

On a donc juste rajouté la quantification du système F au système des types intersection simples du DM. On abrégera encore commodément un multi-ensemble de types $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ par la simple lettre μ.

Les règles de typage sont (normalement sans surprise) :

$$\frac{}{\Gamma, x : [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \vdash x : \sigma_i} (Var) \quad \text{(où } 1 \leq i \leq n\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \to \tau \quad \Gamma \vdash v : \sigma_1 \quad \ldots \quad \Gamma \vdash v : \sigma_n}{\Gamma \vdash uv : \tau} (App) \qquad \frac{\Gamma, x : \mu \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : \mu \to \tau} (Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : \forall \alpha . \tau}{\Gamma \vdash u : \tau[\alpha := \sigma]} (\forall^2 E) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash u : \forall \alpha . \tau} (\forall^2 I)^*$$

* si α n'est libre dans aucun type de Γ.

Question 12 Montrer que tout λ-terme typable dans le systèmes des types F-intersection a une forme normale de tête.

Je ne demande pas, et même surtout pas, une démonstration dans tous les détails. Je rappelle la recommandation de concision énoncée au début de ce sujet. Je veux, en premier lieu, un plan clair de la démonstration, avec les définitions précises que vous utilisez. Si un lemme se démontre comme un autre que vous avez vu ailleurs, dites-le et citez le résultat, en marquant clairement les différences ; mais ne m'écrivez pas de longues vérifications laborieuses, et donc difficiles à lire.

Quasiment une question de cours. Deux pages chez moi : n'en écrivez pas plus, s'il-vous-plaît !

C'est un mélange de la démonstration de la ***Question 14 du DM*** *et de la démonstration de normalisation forte du système F du cours.*

On définit un candidat *(de réductibilité, pour la réduction de tête), comme un ensemble S de λ-termes qui vérifie les conditions du DM :*

H1 *$S \subseteq HN$;*

H2 *pour tout $u \in S$, si $u \to_h u'$ alors $u' \in S$;*

H3 *tout terme neutre u dont tous les réduits de tête en une étape u' sont dans S, est aussi dans S.*

Un contexte de candidats $\mathcal{C}$ *est une fonction qui à toute variable de type associe un candidat.*

On note que :

(a) HN *est un candidat ;*

(b) si S *satisfait H2 et H3 et si* S' *est un candidat, alors* $S \Rightarrow S'$*, défini comme étant* $\{u \in \Lambda \mid$ *pour tout* $v \in S, uv \in S'\}$*, est un candidat ;*

(c) toute intersection de candidats vérifie H2 et H3 (aussi H1, si cette intersection est celle d'une famille non vide de candidats) ;

(d) si f *est une fonction des candidats vers les candidats, alors* $\forall(f)$*, défini comme* $\{u \in \Lambda \mid$ *pour tout candidat* $S, u \in f(S)\}$*, est un candidat.*

Les conditions 1, 2 et 3 se démontrent comme dans la ***Question 12 du DM****.*

Pour la condition 4, c'est une conséquence de la condition 3, sachant que la famille de tous les candidats est non vide, vu que HN *en est un.*

On définit ensuite $RED^{\mathcal{C}}_{\tau}$ *par récurrence sur le type* τ*, comme pour le système F :*

$$RED^{\mathcal{C}}_{\alpha} \stackrel{def}{=} \mathcal{C}(\alpha)$$

$$RED^{\mathcal{C}}_{[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]\to\tau} \stackrel{def}{=} \bigcap_{i=1}^{n} RED^{\mathcal{C}}_{\sigma_i} \Rightarrow RED^{\mathcal{C}}_{\tau}$$

$$RED^{\mathcal{C}}_{\forall\alpha\cdot\tau} \stackrel{def}{=} \forall(f) \qquad \text{où } f(S) \stackrel{def}{=} RED^{\mathcal{C}[\alpha\mapsto S]}_{\tau}.$$

On a :

Lemme B. *Pour tout type* τ*, pour tout contexte de candidats* $\mathcal{C}$*,* $RED^{\mathcal{C}}_{\tau}$ *est un candidat.*

Ceci se montre par récurrence sur τ*, en utilisant les conditions 1–4. (Je reprends les notations de lemmes des transparents.)*

On démontre ensuite le :

Lemme C. *Si (pour tout* $v \in \bigcap_{i=1}^{n} RED^{\mathcal{C}}_{\sigma_i}$*,* $u[x := v] \in RED^{\mathcal{C}}_{\tau}$*) alors* $\lambda x.u \in RED^{\mathcal{C}}_{[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]\to\tau}$*.*

C'est exactement comme à la ***Question 13 du DM****.*

Puis, on démontre, comme dans les transparents du cours :

Lemme S. $RED^{\mathcal{C}}_{\sigma[\alpha:=\tau]} = RED^{\mathcal{C}[\alpha\mapsto S]}_{\sigma}$*, où* $S = RED^{\mathcal{C}}_{\tau}$*.*

Pour tout contexte de types $\Gamma \stackrel{def}{=} x_1 : \mu_1, \cdots, x_n : \mu_n$*, notons* $\underline{RED}^{\mathcal{C}}_{\Gamma}$ *l'ensemble des substitutions* θ *qui à chaque* x_i *associe un terme* v_i *de*

$RED^{\mathcal{C}}_{\mu_i}$. (En imitant le DM, lorsque $\mu = [\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$, on pose $RED^{\mathcal{C}}_{\mu} \stackrel{def}{=} \bigcap_{i=1}^{n} RED^{\mathcal{C}}_{\sigma_i}$, où l'intersection vide dénote tout Λ.)

On peut maintenant démontrer :

***Proposition.** Si $\Gamma \vdash u : \tau$ est dérivable dans le système des types F-intersection, alors pour tout contexte $\mathcal{C}$, pour toute $\theta \in \underline{RED}^{\mathcal{C}}_{\Gamma}$, $u\theta$ est dans $RED^{\mathcal{C}}_{\tau}$.*

*Ceci se démontre par récurrence sur la dérivation de typage donnée. Pour (Var), c'est par l'hypothèse $\theta \in \underline{RED}^{\mathcal{C}}_{\Gamma}$. Pour (App), c'est par définition de $\Rightarrow$. Pour (Abs), c'est par le lemme C. (Tout ceci est comme à la **Question 14 du DM**.)*

Pour $(\forall^2 E)$, par hypothèse de récurrence $u\theta$ est dans $RED^{\mathcal{C}}_{\forall\alpha\cdot\tau}$, donc aussi dans $RED^{\mathcal{C}[\alpha\mapsto S]}_{\tau}$ pour tout candidat S, par définition. On pose $S \stackrel{def}{=} RED^{\mathcal{C}}_{\sigma}$. En utilisant le lemme S, $u\theta$ est donc dans $RED^{\mathcal{C}}_{\tau[\alpha:=\sigma]}$.

Pour $(\forall^2 I)$, par hypothèse de récurrence $u\theta$ est dans $RED^{\mathcal{C}'}_{\tau}$ pour tout contexte $\mathcal{C}'$, donc dans $RED^{\mathcal{C}[\alpha\mapsto S]}_{\tau}$ pour tout candidat S. (Techniquement, il faut vérifier que pour tout $x : \sigma$ dans Γ, x est dans $RED^{\mathcal{C}[\alpha\mapsto S]}_{\sigma}$, or l'on sait qu'il est dans $RED^{\mathcal{C}}_{\sigma}$: c'est pareil, grâce au lemme L, sachant que α n'est pas libre dans σ.) Par définition, $u\theta$ est donc dans $RED^{\mathcal{C}}_{\forall\alpha\cdot\tau}$.

Finalement, on déduit de la proposition le résultat en prenant pour θ la substitution identité (qui est bien dans $\underline{RED}^{\mathcal{C}}_{\Gamma}$ car toute variable est dans tout candidat, par H3) ; alors u est dans $RED^{\mathcal{C}}_{\tau}$, donc dans HN par H1.