DM, λ-calcul, 2020

à rendre le 09 juin 2020 au plus tard

Notes préliminaires. Les recommandations de clarté, de justesse, de soin, et de concision sont les mêmes que pour le DM.

Je mettrai le source LaTeX de ce sujet en ligne, et vous pourrez écrire votre solution en donnant votre nom comme argument de la commande `\author` en tête de document, puis écrire vos réponses entre les différentes `\begin{solution}` et `\end{solution}`. Envoyez-moi ensuite le pdf, pas le source.

Comme promis, l'examen contient certaines suites à des questions du DM. Vous avez donc le droit d'utiliser des résultats du DM, sans les (re)démontrer. En fait, je compterai beaucoup moins de points pour une redémonstration que pour une citation. Je vous demande de citer les résultats du DM que vous utiliserez par une formule telle que ≪ par la question $\langle n \rangle$ du DM ≫.

Finalement, les questions les plus difficiles sont bien sûr aussi celles qui compteront pour le plus de points, où qu'elles soient dans le sujet.

1 Mise en bouche : le lemme de Hindley-Rosen

On étudie des critères de confluence pour des relations de réécriture abstraites, c'est-à-dire des relations binaires sur un ensemble A.

Une relation binaire R sur A est, formellement, juste un sous-ensemble de $A \times A$. On notera souvent $a \xrightarrow{R} b$ au lieu de $(a, b) \in R$.

Deux relations binaires R et S *commutent* si et seulement si :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

autrement dit, si pour tous a, b, c tels que $a \xrightarrow{R} b$ et $a \xrightarrow{S} c$, il existe un d tel que $b \xrightarrow{S} d$ et $c \xrightarrow{R} d$.

Pour toutes relations binaires R et S, on notera $R; S$ la relation définie par $(a, b) \in R; S$ si et seulement s'il existe a_1 tel que $a \overset{R}{\to} a_1 \overset{S}{\to} b$; et pour tout $n \geq 0$, R^n la relation $\underbrace{R; R; \cdots; R}_{n \text{ fois}}$ (si $n = 0$, c'est par convention la relation d'égalité : $(a, b) \in R^0$ si et seulement si $a = b$).

On notera R^* la clôture réflexive-transitive d'une relation binaire R. Autrement dit, $a \overset{R^*}{\to} b$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ (0 est autorisé) tel que $(a, b) \in R^n$.

Question 1 Montrer que, si R et S sont confluentes et si R^* et S^* commutent, alors :

(a) $R^*; S^*$ est fortement confluente ;

(b) $R \cup S$ est confluente.

Question 2 On dit que R *pseudo-commute* avec S si et seulement si :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq 1}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

où $R^{\leq 1} = R^0 \cup R^1$. (En général, $R^{\leq n}$ est définie comme l'union de R^0, R^1, …, R^n.) On notera bien que « R pseudo-commute avec S » n'est pas équivalent à « S pseudo-commute avec R ». Montrer que si R pseudo-commute avec S, alors R^* et S^* commutent.

On en déduit le *lemme de Hindley-Rosen* : si R et S sont deux relations confluentes, et si R pseudo-commute avec S, alors $R \cup S$ est confluente. Ceci sera utile dans la partie qui suit.

2 Entrée : le combinateur δ de Church

On va considérer deux extensions du λ-calcul, le $\lambda\delta$-calcul et le $\lambda\delta_C$-calcul. L'idée y est de rajouter une constante δ qui implémente le test d'égalité.

Dans les deux calculs, la syntaxe est obtenue en ajoutant juste une constante δ aux termes. Autrement dit, les $\lambda\delta_{(C)}$-termes sont :

$s, t, u, v, \ldots ::=$	$x, y, z, \ldots$	variables
	$\mid \delta$	le combinateur de Church
	$\mid uv$	application
	$\mid \lambda x.u$	abstraction.

Comme d'habitude, les termes sont considérés à α-renommage près.

Un $\lambda\delta$-terme est dit *canonique* si et seulement s'il est β-normal, et ne contient pas de sous-terme de la forme δst. (Il peut donc contenir des sous-termes de la forme δs, ou bien δ tout seul.)

Les règles de réduction du $\lambda\delta$-calcul sont, outre la β-réduction, les règles suivantes appelées *δ-règles* :

$$\begin{array}{ll} \delta uv \to \mathbf{V} & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont des termes canoniques identiques} \\ \delta uv \to \mathbf{F} & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont des termes canoniques distincts.} \end{array}$$

Au risque de me répéter, « identiques » et « distincts » doivent être compris à α-renommage près.

Les termes $\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x, y.x$ et $\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x, y.y$ sont les booléens de Church usuels. On notera aussi $\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.x$.

On parlera de $\beta\delta$-réduction pour la notion de réduction définie par β et les deux règles ci-dessus. Il est tacite qu'elle passe au contexte. La $\beta\delta$-convertibilité est la plus petite relation d'équivalence contenant la $\beta\delta$-réduction.

Question 3 En considérant le terme $d_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x, y \cdot \delta xy)\mathbf{II}$,

(a) montrer que $\mathbf{V}$ et $\mathbf{F}$ sont $\beta\delta$-convertibles ;

(b) en déduire que le $\lambda\delta$-calcul a une théorie triviale : *tous* les $\lambda\delta$-termes sont $\beta\delta$-convertibles.

Vous devriez vous être aperçu, aussi, que le $\lambda\delta$-calcul n'est pas confluent. (Je ne demande pas de le démontrer.) Pour réparer ces défauts, on considère le $\lambda\delta_C$-calcul. Sa syntaxe est la même, et ses règles sont modifiées : en $\lambda\delta_C$-calcul, les δ-règles ne s'appliquent plus au rédex δuv que si non seulement u et v sont canoniques mais aussi *clos*. On appellera cette modification les *δ_C-règles*.

Question 4 Montrer que le $\lambda\delta_C$-calcul est confluent.

On n'a pas démontré un lemme qui peut servir ?

Question 5 En déduire que, contrairement au cas du $\lambda\delta$-calcul, le $\lambda\delta_C$-calcul a une théorie *non* triviale.

3 Plat principal : résolubilité

Si $\vec{u}$ est une suite finie de termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, on notera $t\vec{u}$ pour $tu_1u_2\cdots u_n$. (On peut avoir $n = 0$.)

Un terme clos t est *résoluble* si et seulement s'il existe une suite finie $\vec{u}$ de termes telle que $t\vec{u} =_\beta \mathbf{I}$, où $\mathbf{I}$ est par définition le terme $\lambda x \cdot x$.

Un terme t, non nécessairement clos, est résoluble si et seulement si le terme $\lambda x_1, \cdots, x_m \cdot t$, où $x_1, \ldots, x_m$ sont les variables libres de t, est résoluble. (Le terme en question est clos, et l'on applique donc la définition précédente de la résolubilité.) On appellera $\lambda x_1, \cdots, x_m \cdot t$ la *fermeture* de t, même si elle n'est pas unique.

Question 6 Supposons t clos et résoluble. C'est le moment d'utiliser des résultats du cours.

(a) Pourquoi existe-t-il une suite finie $\vec{u}$ de termes telle que $t\vec{u} \to^* \mathbf{I}$?

(b) … et même $t\vec{u} \Rightarrow_s \mathbf{I}$?

(c) … et même $t\vec{u} \to_h^* \mathbf{I}$? ($\to_h$, ou $\to_t$, dénote la réduction de tête.)

Question 7 En déduire que pour tout terme clos résoluble t, il existe une suite finie de termes $\vec{u}$ tel que $t\vec{u}$ est typable dans le systèmes des types intersection simples du DM. (C'est-à-dire qu'il existe un contexte de typage Γ formé de liaisons $x_i : \mu_i$ où les μ_i sont des multi-ensembles de types intersection simples, et il existe un type intersection simple τ tels que $\Gamma \vdash t\vec{u} : \tau$ soit dérivable dans le système de la partie 3 du DM.) 3 lignes, chez moi.

Question 8 En déduire que tout terme clos résoluble t a une forme normale de tête. (On rappelle que ceci signifie que sa réduction de tête termine.) Pas très long non plus.

Question 9 Montrer enfin que tout terme résoluble a une forme normale de tête. 6 lignes chez moi.

Question 10 Exhiber un terme non résoluble, et justifier. 2 lignes.

Question 11 Montrer que, réciproquement :

(a) toute forme normale de tête close est résoluble ;

(b) … tout terme clos qui a une forme normale de tête est résoluble ;

(c) … enfin, tout terme qui a une forme normale de tête est résoluble.

Et donc, les trois notions suivantes sont équivalentes : (a) être résoluble, (b) avoir une forme normale de tête, (c) être typable dans le système des types intersection simples.

4 Un dessert copieux : le système des types F-intersection

On considère les *type F-intersection* définis par la grammaire :

$$\begin{array}{rll} \sigma, \tau, \ldots ::= & \alpha & \text{variables de types} \\ & \mid [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \to \tau & \\ & \mid \forall \alpha . \tau & \text{quantification de types.} \end{array}$$

On a donc juste rajouté la quantification du système F au système des types intersection simples du DM. On abrégera encore commodément un multi-ensemble de types $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ par la simple lettre μ.

Les règles de typage sont (normalement sans surprise) :

$$\frac{}{\Gamma, x : [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \vdash x : \sigma_i} (Var) \quad (\text{où } 1 \leq i \leq n)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \to \tau \quad \Gamma \vdash v : \sigma_1 \quad \dots \quad \Gamma \vdash v : \sigma_n}{\Gamma \vdash uv : \tau} (App) \quad \frac{\Gamma, x : \mu \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : \mu \to \tau} (Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : \forall \alpha . \tau}{\Gamma \vdash u : \tau[\alpha := \sigma]} (\forall^2 E) \quad \frac{\Gamma \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash u : \forall \alpha . \tau} (\forall^2 I)^*$$

* si α n'est libre dans aucun type de Γ.

Question 12 Montrer que tout λ-terme typable dans le systèmes des types F-intersection a une forme normale de tête.

Quasiment une question de cours. Deux pages chez moi : n'en écrivez pas plus, s'il-vous-plaît !

Je ne demande pas, et même surtout pas, une démonstration dans tous les détails. Je rappelle la recommandation de concision énoncée au début de ce sujet. Je veux, en premier lieu, un plan clair de la démonstration, avec les définitions précises que vous utilisez. Si un lemme se démontre comme un autre que vous avez vu ailleurs, dites-le et citez le résultat, en marquant clairement les différences ; mais ne m'écrivez pas de longues vérifications laborieuses, et donc difficiles à lire.