Examen de λ-calcul 2014: types de données

Documents autorisés (en particulier le poly).

J'ai mis une indication de barême en début de chaque question. Elle n'est absolument pas contractuelle, et pourra varier. La morale est : ne passez pas trop de temps sur les questions faciles (à 0,5 pt.) dont le total ne vous fournira au mieux que 5 points sur 20.

On rappelle les règles :

$$\begin{array}{rrcl} (\beta) & (\lambda x \cdot u)v & \to & u[x := v] \\ (\eta) & \lambda x \cdot ux & \to & u \quad \text{si } x \text{ n'est pas libre dans } u \end{array}$$

closes par passage au contexte. Une *β-réduction* est une réécriture où chaque étape utilise la règle (β) seule. Une *$\beta\eta$-réduction* est une réduction où chaque étape utilise la règle (β) ou la règle (η).

On admettra sans preuve les résultats suivants :

(i) Si un terme clos u se β-réduit en un terme v, alors v est clos lui aussi.

(ii) La relation de $\beta\eta$-réduction (et pas seulement la β-réduction) est confluente.

(iii) Si un terme u se $\beta\eta$-réduit en un terme w, alors on peut repousser toutes les η-réductions : il existe un terme u' tel que u se β-réduit en u', et u' se η-réduit en w.

1 Un peu de λ-calcul pur

On notera $\to_{\beta\eta}$ la relation de $\beta\eta$-réduction.

1. [0,5 pt.] Montrer que si u se η-réduit en u', alors u et u' ont exactement les mêmes variables libres.

2 Ensembles saturés

Par définition, un ensemble S de λ-termes est *saturé* si et seulement si S est stable par β-réduction *inverse* : si u se β-réduit en une étape en u' et que $u' \in S$, alors $u \in S$.

On notera $\Rrightarrow$ l'opérateur suivant : $S \Rrightarrow T = \{u \mid \forall v \in S \,.\, uv \in T\}$.

2. [0,5 pt.] Montrer que si S et T sont des ensembles saturés, alors $S \Rrightarrow T$ est saturé lui aussi. Toutes les hypothèses sont-elles nécessaires ?

3. [0,5 pt.] Montrer que toute intersection $\bigcap_{i \in I} S_i$ d'ensembles saturés est saturée (y compris pour $I = \emptyset$, pour lequel cette intersection est vue comme l'ensemble Λ de tous les λ-termes).

On considérera les types du système F :

$$\begin{array}{rcll} F, G, \cdots & ::= & \alpha & \text{variables de types} \\ & | & F \Rightarrow G & \text{implications} \\ & | & \forall \alpha \cdot F & \text{quantifications universelles.} \end{array}$$

On définit, comme pour $RED_F^{\mathcal{C}}$ dans le cours :

$$R_\alpha^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(\alpha) \quad R_{F \Rightarrow G}^{\mathcal{C}} = \{u \mid \forall v \in R_F^{\mathcal{C}} \, . \, uv \in R_G^{\mathcal{C}}\} \quad R_{\forall \alpha \cdot F}^{\mathcal{C}} = \bigcap_{S \text{ saturé}} R_F^{\mathcal{C}[\alpha \mapsto S]}$$

mais **attention !** On ne supposera plus ici que $\mathcal{C}$ est un contexte de candidats. On supposera simplement que pour toute variable de type α, $\mathcal{C}(\alpha)$ est un ensemble *saturé* de λ-termes. On appellera un tel $\mathcal{C}$ un *contexte saturé*.

On pourra utiliser, sans preuve, les résultats suivants :

(iv) Pour tout type F, si $\mathcal{C}$ est un contexte saturé, alors $R_F^{\mathcal{C}}$ est un ensemble saturé. C'est une conséquence facile des questions 2 et 3.

(v) $R_{F[\alpha:=G]}^{\mathcal{C}} = R_F^{\mathcal{C}[\alpha \mapsto R_G^{\mathcal{C}}]}$.

(vi) Si α n'est pas libre dans F, alors $R_F^{\mathcal{C}}$ est indépendant de $\mathcal{C}(\alpha)$, c'est-à-dire que pour tout ensemble saturé S, $R_F^{\mathcal{C}[\alpha \mapsto S]} = R_F^{\mathcal{C}}$.

(vii) Comme cas particulier de (vi), pour tout type F *clos*, c'est-à-dire sans variable de type libre, $R_F^{\mathcal{C}}$ est indépendant de $\mathcal{C}$. On notera dans ce cas R_F l'ensemble saturé $R_F^{\mathcal{C}}$, où $\mathcal{C}$ est un contexte saturé arbitraire.

Attention ! (de nouveau) On ne confondra pas la notation R_F employée ici avec la notion RED_F utilisée en cours pour les types simples (même si elle est très proche).

On rappelle les règles du système F, pour éviter toute ambiguïté :

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F} \, (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F \Rightarrow G} \, (\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G} \, (\Rightarrow E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F}{\Gamma \vdash u : \forall \alpha \cdot F} \, (\forall I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \forall \alpha \cdot F}{\Gamma \vdash u : F[\alpha := G]} \, (\forall E)$$

où α n'est pas libre dans Γ

La différence principale (avec F_2) est qu'on a le même terme en haut et en bas, dans les règles $(\forall I)$ et $(\forall E)$.

4. [0,5 pt.] Soient S, T deux ensembles saturés. Montrer que si $u[x := v] \in T$ pour tout $v \in S$, alors $\lambda x \cdot u$ est dans $S \Rrightarrow T$. A titre d'indication, c'est dans le même esprit,

mais beaucoup plus simple qu'un lemme similaire dans le cours. Il n'y a notamment pas à démontrer ou à utiliser de propriété de la forme (CR1), (CR2) ou (CR3).

5. [3 pts.] Montrer que pour toute dérivation de jugement $x_1 : F_1, \cdots, x_n : F_n \vdash u : F$ en système F, pour tout contexte saturé $\mathcal{C}$, pour tous $v_1 \in R^{\mathcal{C}}_{F_1}$, …, $v_n \in R^{\mathcal{C}}_{F_n}$, $u[x_1 := v_1, \cdots, x_n := v_n]$ est dans $R^{\mathcal{C}}_F$.

On en déduit notamment que :

$(viii)$ tout terme clos u, typable en système F d'un type clos F, est dans R_F.

3 Types de données en système F

On appellera *type de données* tout type F qui est :
- clos,
- et tel que tout terme $u \in R_F$ se β-réduit en un terme clos.

Attention ! On différenciera bien les *types* tout court (les formules) des types *de données*. Le but de la section 3 est d'exhiber certains types de données, et nous verrons un type qui n'est pas de données à la section 4.

6. [2 pts.] Montrer qu'un type clos F est un type de données si et seulement si tout terme $u \in R_F$ est $\beta\eta$-équivalent à un terme clos. (On notera bien : pas juste β-équivalent. Bien relire le tout début du sujet si nécessaire.)

Lorsque F est un type de données, les classes d'équivalences, pour la $\beta\eta$-équivalence, des termes (clos) de R_F seront appelées les *valeurs* du type de données F.

On commence par le type `unit`, défini comme étant $\forall \alpha \cdot \alpha \Rightarrow \alpha$.

Pour tout ensemble A de λ-termes, notons $\uparrow A$ l'ensemble des termes qui se β-réduisent, en un nombre arbitraire d'étapes de β-réduction, en un terme de A. Clairement, $\uparrow A$ est un ensemble saturé.

Par abus de langage, si A est un singleton $\{t\}$, on notera $\uparrow t$ plutôt que la notation plus lourde $\uparrow\{t\}$.

7. [0,5 pt.] Montrer que, pour tout terme u de $R_{\texttt{unit}}$, u est dans $\uparrow x \Rrightarrow \uparrow x$, et en déduire que ux se β-réduit en x.
8. [0,5 pt.] Montrer que si u est un terme, où x n'apparaît pas libre, et tel que ux est $\beta\eta$-équivalent à x, alors u est $\beta\eta$-équivalent à $\lambda x \cdot x$.
9. [0,5 pt.] En déduire que `unit` est un type de données, et déterminer ses valeurs.
10. [1 pt.] Passons au type $\texttt{bool} = \forall \alpha \cdot \alpha \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$. En considérant l'ensemble saturé $\uparrow\{x, y\}$, pour deux variables distinctes x et y, et en utilisant la même stratégie que plus haut, montrer que `bool` est un type de données, et déterminer ses valeurs.
11. [3 pts.] On notera $\ulcorner n \urcorner$ l'entier de Church $\lambda f, x \cdot f^n(x)$. Montrer que le type $\texttt{nat} = \forall \alpha \cdot (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$ est un type de données, et déterminer ses valeurs. Il est vivement recommandé, pour cette question, mais aussi pour la suite, de démontrer que pour tout

terme $u \in R_{\texttt{nat}}$, pour toutes variables f et x, ufx se β-réduit en $f^n(x)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$; on choisira pour cela un ensemble saturé de la forme $\uparrow A$, où A est un ensemble de termes ayant une parenté forte avec les valeurs à trouver, comme dans les questions précédentes.

12. [3 pts.] Le produit $F \times G$ de deux types F et G est $\forall \alpha \cdot (F \Rightarrow G \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$, où α est une variable de type fraîche. Montrer que, si F est G sont tous les deux des types de données, alors $F \times G$ aussi. On déterminera aussi les valeurs de $F \times G$ en fonction de celles de F et de G.

Il y a de nombreux autres types de données : les sommes de deux types de données, les listes et les arbres dont les nœuds sont dans un type de données notamment.

4 Types de fonctions

Mais tous les types ne sont pas des types de données, comme on va le voir.

Par $(viii)$, tout entier de Church, qui est de type `nat`, est dans $R_{\texttt{nat}}$. Il y a cependant d'autres termes clos β-normaux dans $R_{\texttt{nat}}$:

13. [0,5 pt.] Montrer que $\lambda x \cdot x$ est dans $R_{\texttt{nat}}$.
14. [0,5 pt.] En déduire que tout terme qui se β-réduit en $\lambda x \cdot x$ est dans $R_{\texttt{nat}}$.
15. [2 pts.] Soit u_0 le terme $\lambda x \cdot x(\lambda y \cdot \ulcorner 0 \urcorner)\ulcorner 0 \urcorner z$, où z est une variable libre. En utilisant la question 11, montrer que pour tout $v \in R_{\texttt{nat}}$, $u_0 v$ se β-réduit en $\lambda x \cdot x$.
16. [1 pt.] En déduire que le terme u_0 est dans $R_{\texttt{nat} \Rightarrow \texttt{nat}}$.
17. [0,5 pt.] Pourquoi `nat` $\Rightarrow$ `nat` n'est-il pas un type de données ?