DM, λ-calcul, 2024

7 mars 2024

Correction.

Notes préliminaires. Je demande en général à ce que les réponses aux examens soient claires. Mon but est égoïste : j'essaie de minimiser mon temps et mes efforts de correction. Vous pouvez donc imaginer que je préférerais que ce que vous écrirez sera non seulement juste, mais *clairement* et *manifestement* juste. La concision est une qualité allant dans le même sens, ainsi que le soin porté aux références aux résultats du cours, aux faits mentionnés dans l'énoncé, aux noms des règles utilisées, ou aux questions précédentes. Toute affirmation doit être justifiée. Aucune référence en avant n'est autorisée. N'oubliez pas de vérifier les hypothèses des résultats que vous utilisez. Je corrige les copies question par question, et non candidat par candidat : toute référence à quoi que ce soit que vous auriez dit en réponse à une autre question et qui ne serait pas dans l'énoncé de la question sera ignorée ; je n'aurai pas cette autre réponse en tête de toute façon. N'inventez pas vos propres notations, et utilisez celles de l'énoncé.

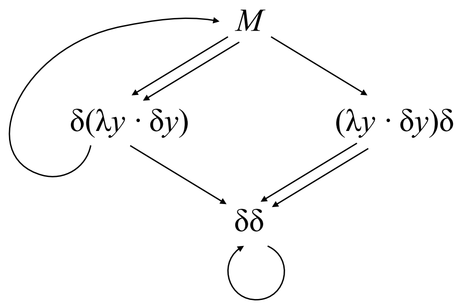
Si vous le souhaitez, je mettrai le source LaTeX de ce sujet en ligne, et vous pourrez écrire votre solution en donnant votre nom comme argument de la commande `\author` en tête de document, puis écrire vos réponses entre les différentes `\begin{solution}` et `\end{solution}`. Envoyez-moi ensuite le pdf, pas le source.

L'examen contiendra peut-être une suite à ce DM.

1 Le terme de Schroer

On pose $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x \cdot xx$ et $M \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda y \cdot \delta y)(\lambda y \cdot \delta y)$. M est le *terme de Schroer*.

Question 1 Tracer le graphe de réductions de $G(M)$. On rappelle qu'il s'agit du graphe orienté dont les sommets sont les λ-termes N tels que $M \to^* N$, avec un arc $N \to N'$ par réduction en une étape de N à N'. Il s'agit en fait d'un multi-graphe : on autorise plusieurs arcs entre chaque couple de sommets N, N'. En revanche, deux sommets α-équivalents *devront* être identifiés. Combien $G(M)$ a-t-il de sommets ?

> *4 sommets :*
>
> 
>

Question 2 On rappelle la relation $\to_1$ utilisée dans la preuve du théorème des développements finis du cours. Quels sont les termes N tels que $M \to_1 N$?

> *Ce sont les 4 termes de $G(M)$. D'abord, si $M \to_1 N$, alors $M \to^* N$, donc les termes recherchés sont parmi les 4 termes de $G(M)$. Ensuite, on a :*
>
> — *$M \to_1 M$: on ne met aucune étoile sur N avant de β^*-normaliser ;*
>
> — *$M \to_1 \delta(\lambda y \cdot \delta y)$, car $(\lambda^* y \cdot \delta y)(\lambda y \cdot \delta y)$ se réduit en $\delta(\lambda y \cdot \delta y)$ en λ^*-calcul ;*
>
> — *$M \to_1 (\lambda y \cdot \delta y)\delta$, car $(\lambda y \cdot \delta y)(\lambda y \cdot (\lambda^* x \cdot xx) y)$ se réduit en $(\lambda y \cdot \delta y)\delta$ en λ^*-calcul ;*
>
> — *$M \to_1 \delta\delta$, car $(\lambda^* y \cdot \delta y)(\lambda y \cdot (\lambda^* x \cdot xx) y)$ se réduit en $(\lambda^* y \cdot \delta y)(\lambda y \cdot yy) = (\lambda^* y \cdot \delta y)\delta$, puis en $\delta\delta$ en λ^*-calcul.*

Question 3 Infirmer ou confirmer la proposition suivante : pour tout λ-terme u, si tout réduit v de u (en un nombre quelconque d'étapes) s'obtient comme un développement fini de u (au sens où $u \to_1 v$), alors u est fortement normalisable.

> *La proposition est fausse, et le terme de Schroer en est un contre-exemple. En fait, le terme n'est même pas normalisable. Le terme $\delta\delta$ est un autre contre-exemple, plus simple.*

2 Réductions parallèles et développements finis

On rappelle la notion de réduction parallèle $\Rightarrow$. On a $u \Rightarrow v$ si et seulement si ce fait est déductible à partir des règles :

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\,(0) \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x \cdot u)v \Rightarrow u'[x := v']}\,(\beta)$$

$$\frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x \cdot u \Rightarrow \lambda x \cdot u'}\,(\lambda) \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\,(@)$$

On lit les λ-termes à α-équivalence près, comme d'habitude.

On rappelle aussi la relation $\rightarrow_1$ utilisée dans la preuve du théorème des développements finis du cours : $u \rightarrow_1 v$ si et seulement s'il existe un λ^*-terme u^* tel que $E(u^*) = u$ et dont v est la forme normale en λ^*-calcul. (La fonction E efface les étoiles. On rappelle que cette forme normale existe et est unique, par le théorème des développements finis.)

Question 4 $(**)$ Montrer que pour tout λ^*-terme s^* de forme normale t (en λ^*-calcul), $E(s^*) \Rightarrow t$. Dites explicitement sur quoi vous faites une récurrence, et nommez explicitement les règles ((0), (β), etc.) que vous utilisez.

Ceci se fait par récurrence complète sur la taille (ou la structure) de s^*.

On remarque d'abord que si s^* est normal, donc si $s^* = t$, alors on a $s^* \Rightarrow t$ par (0).

Si s^* est lui-même un β^*-redex $(\lambda^* x.u^*)v^*$, alors u^* a une forme normale u et v^* a une forme normale v, et ce sont des λ-termes. Par hypothèse de récurrence, on a $E(u^*) \Rightarrow u$ et $E(v^*) \Rightarrow v$. Donc, par la règle (β), on a $E(s^*) = (\lambda x.E(u^*))E(v^*) \Rightarrow u[x := v]$. Mais $u[x := v]$ est un λ-terme, donc est normal en λ^*-calcul : c'est donc une forme normale de $E(s^*)$ en λ^*-calcul ; t en est une autre, donc par confluence du λ^*-calcul, et à α-équivalence près, $u[x := v] = t$. On a donc obtenu $E(s^*) \Rightarrow t$, comme souhaité.

Si s^* est une application u^*v^*, on raisonne de façon similaire : u^* a une forme normale u et v^* a une forme normale v, et ce sont des λ-termes, donc uv est normal en λ^*-calcul, donc $uv = t$ par unicité de la forme normale de s^* en λ^*-calcul ; et par hypothèse de récurrence, $E(u^*) \Rightarrow u$, $E(v^*) \Rightarrow v$, donc $E(s^*) \Rightarrow uv = t$ par la règle $(@)$.

Finalement, si s^* est une lambda-abstraction $\lambda x \cdot u^*$, on raisonne similairement et on applique la règle (λ).

Question 5 $(*)$ On définit une nouvelle relation $\Rrightarrow^*$ entre λ^*-termes et λ-termes par les règles :

$$\frac{u\ \lambda\text{-terme}}{u \Rrightarrow^* u}\ (0^*) \qquad \frac{u^* \Rrightarrow^* u' \quad v^* \Rrightarrow^* v'}{(\lambda^* x \cdot u^*)v^* \Rrightarrow^* u'[x := v']}\ (\beta^*)$$

$$\frac{u^* \Rrightarrow^* u'}{\lambda x \cdot u^* \Rrightarrow^* \lambda x \cdot u'}\ (\lambda^*) \qquad \frac{u^* \Rrightarrow^* u' \quad v^* \Rrightarrow^* v'}{u^* v^* \Rrightarrow^* u'v'}\ (@^*)$$

Montrer que pour tous λ-termes s et t, si $s \Rrightarrow t$, alors il existe un λ^*-terme s^* tel que $E(s^*) = s$ et $s^* \Rrightarrow^* t$.

Par récurrence sur la dérivation de $s \Rrightarrow t$. On examine la dernière règle utilisée :

- *(0) : $s = t$, on peut prendre $s^* \stackrel{def}{=} s$, et (0^*) s'applique ;*
- *(β) : s est de la forme $(\lambda x \cdot u)v$, et $t = u'[x := v']$, avec $u \Rrightarrow u'$ et $v \Rrightarrow v'$; par hypothèse de récurrence on peut trouver u^* et v^* tels que $E(u^*) = u$, $E(v^*) = v$, $u^* \Rrightarrow^* u'$ et $v^* \Rrightarrow^* v'$; alors, en posant $s^* \stackrel{def}{=} (\lambda^* x \cdot u^*)v^*$, on a $E(s^*) = s$ et $s^* \Rrightarrow t$ par (β^*) ;*
- *(λ) : s est de la forme $\lambda x \cdot u$, avec $u \Rrightarrow u'$ et $t = \lambda x \cdot u'$; par hypothèse de récurrence on peut trouver u^* tel que $E(u^*) = u$ et $u^* \Rrightarrow^* u'$, donc $s^* \stackrel{def}{=} \lambda x \cdot u^*$ est tel que $E(s^*) = s$ et $s^* \Rrightarrow^* t$ par (λ^*) ;*
- *$(@^*)$: s est de la forme uv, et $t = u'v'$ avec avec $u \Rrightarrow u'$ et $v \Rrightarrow v'$; par hypothèse de récurrence on peut trouver u^* et v^* tels que $E(u^*) = u$, $E(v^*) = v$, $u^* \Rrightarrow^* u'$ et $v^* \Rrightarrow^* v'$; on pose $s^* \stackrel{def}{=} u^* v^*$, et on utilise la règle $(@^*)$.*

Question 6 $(*)$ Montrer que si $s^* \Rrightarrow t$, alors t est la forme normale de s^* en λ^*-calcul. On admettra que si $u^* \rightarrow^* u'$ et $v^* \rightarrow^* v'$ en λ^*-calcul, alors $u^*[x := v^*] \rightarrow^* u'[x := v']$ en λ^*-calcul.

Par récurrence sur la dérivation de $s^* \Rrightarrow t$, et en regardant la dernière règle utilisée :

- *(0^*) : $s^* = t = u$, où u est un λ-terme, qui est donc normal en λ^*-calcul ;*
- *(β^*) : par hypothèse de récurrence u' est la forme normale de u^* en λ^*-calcul, et v' est celle de v^*, donc $s^* = (\lambda^* x \cdot u^*)v^* \rightarrow u^*[x := v^*] \rightarrow^* u'[x := v']$ en λ^*-calcul (on utilise ici la proposition admise) ; mais $u'[x := v']$ est un λ-terme, et est donc λ^*-normal ;*

— (λ^*) *: par hypothèse de récurrence* u' *est la forme normale de* u^**, donc* $\lambda x \cdot u^*$ *se réduit en* $\lambda x \cdot u'$ *en* λ^**-calcul ; on conclut car* $\lambda x \cdot u'$ *est un* λ*-terme, et est donc* λ^**-normal ;*

— $(@^*)$ *: similaire,* $u^* v^*$ *se réduit en* $u'v'$*, qui est* λ^**-normal.*

Question 7 En déduire que $\to_1$ et $\Rightarrow$ sont en fait la même relation.

Si $s \to_1 t$*, alors il existe un* λ^**-terme* s^* *tel que* t *soit la forme normale de* $E(s^*)$ *en* λ^**-calcul. Par la* ***Question 4****,* $s = E(s^*) \Rightarrow t$*.*

Réciproquement, si $s \Rightarrow t$*, alors il existe un* λ^**-terme* s^* *tel que* $E(s^*) = s$ *et* $s^* \Rightarrow^* t$ *par la* ***Question 5****, et donc* t *est la forme normale de* s^* *en* λ^**-calcul par la* ***Question 6****. Autrement dit,* $s \to_1 t$*.*

3 Résolubilité

Si $\vec{u}$ est une suite finie de termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, on notera $t\vec{u}$ pour $tu_1u_2 \cdots u_n$. (On peut avoir $n = 0$.)

Un terme *clos* est un terme sans variable libre.

Un terme clos t est *résoluble* si et seulement s'il existe une suite finie $\vec{u}$ de λ-termes telle que $t\vec{u} =_\beta \mathbf{I}$, où $\mathbf{I}$ est par définition le terme $\lambda x.x$.

Un terme t, non nécessairement clos, est résoluble si et seulement si le terme $\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t$, où $x_1, \ldots, x_k$ sont les variables libres de t, est résoluble. (Le terme en question est clos, et l'on applique donc la définition précédente de la résolubilité.) On appellera $\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t$ la *fermeture* de t, même si elle n'est unique qu'à permutation des variables $x_1, \ldots, x_k$ près.

On dira qu'un λ-terme u *a une forme normale de tête* si et seulement si sa réduction de tête termine. On rappelle les résultats suivants vus en cours :

Lemme 1 *Pour tous* λ*-termes* u, u', v, s, u_1 *et pour toutes variables* x, y *:*

1. *si* $u \to_t u'$ *alors* $\lambda x.u \to_t \lambda x.u'$ *;*
2. *si* $\lambda x.u \to_t v$*, alors* v *est une* λ*-abstraction, et si l'on écrit, à* α*-renommage près,* v *sous la forme* $\lambda x.u'$*, alors* $u \to_t u'$ *;*
3. *si* $u \to_{tf} u'$ *alors* $uv \to_{tf} u'v$ *;*
4. $s[y := u_1][x := v] = s[x := v][y := u_1[x := v]]$ *si* $x \neq y$ *et* y *n'est pas libre dans* v*.*

Question 8 Montrer que tout β-réduit v d'une forme normale de tête u est normal de tête.

On écrit $u = \lambda x_1, \cdots, x_n \cdot x u_1 \cdots u_m$, où x est une variable. Tout rédex de u est dans un u_i, donc v s'écrit $\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot x u_1 \cdots v_i \cdots u_m$, où $u_i \to v_i$, et donc v est en forme normale de tête.

Question 9 $(**)$ En utilisant ce que vous savez de la relation $\Rightarrow_s$ du cours, montrer que pour tous λ-termes u et v, si $u =_\beta v$ et si v est en forme normale de tête, alors u a une forme normale de tête. Ceci implique immédiatement que :

> Un λ-terme u a une forme normale de tête si et seulement s'il est β-équivalent à un terme en forme normale de tête.

*Par confluence, u et v ont un réduit commun w. Comme v est en forme normale de tête, w aussi, par la **Question 8**.*

On sait que $u \to^* w$ si et seulement si $u \Rightarrow_s w$. Par définition, w s'écrit en forme de tête $\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot w_0 w_1 \cdots w_m$, $u \to_t^* \lambda x_1, \cdots, x_n \cdot u_0 u_1 \cdots u_m$, $u_i \Rightarrow_s w_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq m$, et comme w est en forme normale de tête, w_0 est une variable, et donc u_0 aussi et $u_0 = w_0$. Ceci implique que u admet $\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot u_0 u_1 \cdots u_m$ comme forme normale de tête.

Question 10 Montrer que pour tous λ-termes u, u' et v, pour toute variable x, si $u \to_t u'$, alors $u[x := v] \to_t u'[x := v]$.

On a $u = \lambda x_1, \cdots, x_n \cdot (\lambda y \cdot s) u_1 \cdots u_m$ avec $m \geq 1$ et $u' = \lambda x_1, \cdots, x_n \cdot s[y := u_1] u_2 \cdots u_m$.

À α-renommage près, on peut supposer que $x_1, \ldots, x_n$ et y sont différentes de x et non libres dans v. Donc $u[x := v] = \lambda x_1, \cdots, x_n \cdot (\lambda y \cdot s[x := v])(u_1[x := v]) \cdots (u_m[x := v])$, qui se réduit en tête en $\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot s[x := v][y := u_1[x := v]](u_2[x := v]) \cdots (u_m[x := v])$. Ceci est égal à $\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot s[y := u_1][x := v](u_2[x := v]) \cdots (u_m[x := v])$ par le lemme 1 (4), c'est-à-dire à $u'[x := v]$.

Question 11 $(*)$ Montrer que pour tous λ-termes u et v, pour toute variable x, si $u[x := v]$ a une forme normale de tête, alors u aussi.

*Si la réduction de tête de u ne termine pas, alors celle de $u[x := v]$ non plus par la **Question 10**.*

Question 12 Montrer que pour tous λ-termes u et v, si uv a une forme normale de tête, alors u aussi.

Supposons que la réduction de tête de u ne termine pas : $u = u_0 \to_t u_1 \to_t \cdots$.

Si c'est une réduction de tête faible, alors $uv = u_0 v \to_{tf} u_1 v \to_{tf} \cdots$ par le lemme 1 (3), et donc la réduction de tête partant de uv (qui est faible) ne termine pas non plus, contradiction.

*Sinon, soit n le plus grand entier tel que $u = u_0 \to_{tf} u_1 \to_{tf} \cdots \to_{tf} u_n$. Alors u_n est une λ-abstraction $\lambda x \cdot s$. Par le lemme 1 (3), la réduction de tête de uv prend la forme $uv = u_0 v \to_{tf} u_1 v \to_{tf} \cdots \to_{tf} u_n v = (\lambda x \cdot s)v \to_{tf} s[x := v] \to_t^* \cdots$. Comme uv a une forme normale de tête, $s[x := v]$ aussi. Donc, par la **Question 11**, s a une forme normale de tête : il existe un entier k tel que la réduction de tête de s soit $s = s_0 \to_t s_1 \to_t \cdots \to_t s_k$ où s_k est en forme normale de tête. Mais alors $u_n = \lambda x \cdot s \to_t \lambda x \cdot s_1 \to_t \cdots \lambda x \cdot s_k$ par le lemme 1 (1), et donc $u \to_t^* \lambda x \cdot s_k$, avec $\lambda x \cdot s_k$ normal de tête, ce qui contredit notre hypothèse que la réduction de tête de u ne termine pas.*

Question 13 En déduire que tout terme résoluble a une forme normale de tête.

*On commence par montrer que tout terme clos t résoluble a une forme normale de tête. Il existe une suite finie $\vec{u}$ de λ-termes telle que $t\vec{u} =_\beta \mathbf{I}$, donc $t\vec{u}$ a une forme normale de tête, par la **Question 9**, et comme $\mathbf{I}$ est en forme normale de tête. Il ne reste donc qu'à montrer que si $tu_1 \cdots u_n$ a une forme normale de tête, alors t aussi : c'est par récurrence sur n, en utilisant la **Question 12**.*

Dans le cas général, si t est résoluble, c'est que le terme clos $\lambda x_1, \cdots, x_m.t$ est résoluble, où $x_1, \ldots, x_m$ sont les variables libres de t. Sa réduction de tête termine donc, comme on vient de le voir. Mais toute réduction de tête à partir de $\lambda x_1, \cdots, x_m.t$ induit une réduction de tête à partir de t, par le lemme 1 (2) (et une récurrence sur m, puis sur la longueur de la réduction de tête).

Question 14 Montrer que pour tout terme clos t en forme normale de tête, pour tout λ-terme v, il existe une liste finie $\vec{u}$ de λ-termes telle que $t\vec{u} \to_t^* v$. De plus, si $t = \lambda x_1, \cdots, x_n \cdot x_i t_1 \cdots t_m$, alors $\vec{u}$ est une liste de longueur n.

On écrit t sous la forme $\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot x_i t_1 \cdots t_m$, où nécessairement la variable de tête fait partie de $x_1, \ldots, x_n$, puisque t est clos ; donc $1 \leq i \leq n$. On pose alors $\vec{u}$ la liste des termes $u_1, \ldots, u_n$, où :

- *$u_i \stackrel{def}{=} \lambda y_1, \cdots, y_m \cdot v$, où les variables $y_1, \ldots, y_m$ ne sont pas libres dans v ;*
- *les termes $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ sont quelconques.*

On a alors $t\vec{u} \to_t^* u_i t'_1 \cdots t'_m$, où les t'_j valent $t_j[x_1 := u_1] \cdots [x_n := u_n]$, et ensuite $u_i t'_1 \cdots t'_m \to_t^* v$.

Question 15 Montrer le *théorème de Wadsworth* : pour tout λ-terme t (pas nécessairement clos ni en forme normale de tête), les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) t a une forme normale de tête ;

(b) t est β-équivalent à une forme normale de tête ;

(c) t est résoluble ;

(d) en notant x_1, …, x_k les variables libres de t, pour tout λ-terme v, il existe une liste finie $u_1, \cdots, u_n$ de λ-termes, avec $n \geq k$, telle que $t[x_1 := u_1] \cdots [x_k := u_k] u_{k+1} \cdots u_n \vec{u} =_\beta v$.

Les points (a) et (b) sont équivalents par la ***Question 9****. La* ***Question 13*** *nous dit que (c) implique (a).*

On montre que (d) implique (c) en prenant $v \stackrel{def}{=} \mathbf{I}$. Alors $(\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t) u_1 \cdots u_n \to^* t[x_1 := u_1] \cdots [x_k := u_k] u_{k+1} \cdots u_n \vec{u} =_\beta \mathbf{I}$, ce qui montrer que $\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t$ est résoluble, donc que t l'est.

Finalement, on montre que (a) implique (d), comme suit. Supposons que la réduction de tête de t termine : $t \to_t^* t'$, où t' est en forme normale de tête. Soient x_1, …, x_k les variables libres de t. On a alors $\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t \to_t^* \lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t'$, par le lemme 1 (1) itéré k fois. Par la ***Question 14****, et comme $\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t'$ est en forme normale de tête et clos, il existe une liste $\vec{u}$ de $n \geq k$ termes $u_1, \cdots, u_n$ tels que $(\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t')\vec{u} \to_t^* v$. Mais alors $(\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t)\vec{u} \to_t^* v$, et l'on conclut parce que $\lambda x_1, \cdots, x_k \cdot t \to^* t[x_1 := u_1] \cdots [x_k := u_k] u_{k+1} \cdots u_n$.*