DM, λ-calcul, 2020

à rendre le 06 mai 2020 au plus tard

Notes préliminaires. Je demande en général à ce que les réponses aux DM soient claires. Mon but est égoïste : j'essaie de minimiser mon temps et mes efforts de correction. Dans les circonstances actuelles, je ne pourrai même pas imprimer vos copies, or j'éprouve encore plus de difficultés à lire des copies électroniquement : pas moyen de classer les copies, chacune ouverte à une certain page, en piles savamment agencées ; pas moyen de feuilleter rapidement un ensemble de copies, en gardant des doigts à certains endroits où je voudrais retourner rapidement, etc. En plus, je corrige le plus souvent question par question, et non copie par copie... Vous pouvez donc imaginer que je préférerais que ce que vous écrirez sera non seulement juste, mais *clairement* et *manifestement* juste. La concision est une qualité allant dans le même sens, ainsi que le soin porté aux références aux résultats du cours ou aux questions précédentes. Je compte sur vous !

Si vous le souhaitez, je mettrai le source LaTeX de ce sujet en ligne, et vous pourrez écrire votre solution en donnant votre nom comme argument de la commande `\author` en tête de document, puis écrire vos réponses entre les différentes `\begin{solution}` et `\end{solution}`. Envoyez-moi ensuite le pdf, pas le source.

Au fait, l'examen contiendra peut-être une suite à ce DM.

1 Le système CBWK

On considère une variante du système de logique combinatoire vu en TD, qui était basé sur les combinateurs **S**, **K**, et **I**. Celui-ci est basé sur les combinateurs

$\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{W}$, et $\mathbf{K}$, avec comme règles de réduction :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}MNP &\to (MP)N\\ \mathbf{B}MNP &\to M(NP)\\ \mathbf{W}MN &\to MNN\\ \mathbf{K}MN &\to M\end{aligned}$$

Explicitement, la syntaxe des termes du système CBWK (ou *CBWK-termes*) est :

$$\begin{aligned}M, N, P, \ldots = {} & x && \text{variables}\\ & \mid \mathbf{C}\\ & \mid \mathbf{B}\\ & \mid \mathbf{W}\\ & \mid \mathbf{K}\\ & \mid MN && \text{applications.}\end{aligned}$$

Comme d'habitude, l'application associe à gauche : dans la règle de $\mathbf{C}$, j'aurais pu écrire MPN plutôt que $(MP)N$.

Question 1 Trouvez un CBWK-terme $\mathbf{I}$ tel que, pour tout N, $\mathbf{I}N \to^* N$.

2 lignes pour moi.

Question 2 On cherche à définir une forme d'abstraction $[x]M$ en CBWK , autrement dit on cherche à définir, pour chaque variable x et chaque CBWK-terme M, un CBWK-terme $[x]M$ tel que, pour tout CBWK-terme N, $([x]M)N \to^+ M[x := N]$. ($\to^+$ signifie : se réduit en au moins une étape.) Donnez une telle définition. Je vous donne deux des clauses :

Je vous ai donné le cas difficile, les autres cas sont beaucoup plus faciles.

$$\begin{aligned}[x]M &= \mathbf{K}M && \text{si } x \text{ pas libre dans } M\\ [x](M_1M_2) &= \mathbf{W}(\mathbf{B}(\mathbf{C}([x]M_1))([x]M_2)) && \text{si } x \text{ libre dans } M_1 \text{ et dans } M_2.\end{aligned}$$

Attention : il se peut que vous ayez à retravailler votre définition, pour que les réponses aux questions suivantes soient correctes.

Question 3 Montrez que si $z \neq x$ et z n'est pas libre dans N, alors $([z]M)[x := N] = [z](M[x := N])$.

Question 4 On définit une traduction des λ-termes vers les CBWK-termes par : $x^* = x$, $(uv)^* = u^*v^*$, $(\lambda x \cdot u)^* = [x]u^*$. Montrer que si $u \to v$ par β-réduction faible (c'est-à-dire pas sous une λ), alors $u^* \to^+ v^*$. Vous aurez besoin de lemmes auxiliaires : énoncez-les moi, et prouvez-les, dans l'ordre (aucune référence en avant autorisée).

Question 5 Donner un exemple montrant que l'on ne peut pas étendre le résultat de la question précédente lorsque la réduction de u vers v a lieu sous un λ.

2 Entiers de Parigot

On a vu en cours les entiers de Church. Il y a de nombreuses autres façons de coder les entiers. Nous allons étudier les *entiers de Parigot* :

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \lambda x, f.x \\ \overline{n+1} &= \lambda x, f.f\overline{n}(\overline{n}xf)\end{aligned}$$

Question 6 Vérifier que $\overline{succ} = \lambda n, x, f.fn(nxf)$ est une fonction successeur, c'est-à-dire que $\overline{succ}\ \overline{n} \to^* \overline{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En combien d'étapes de β-réduction cela se fait-il ?

N'oubliez pas de mentionner le nombre d'étapes !

Question 7 On définit un récurseur $\overline{R}$ par $\overline{R}(u, v, n) = nuv$. Vérifier qu'il se comporte bien comme un récurseur, c'est-à-dire :

N'oubliez pas de mentionner le nombre d'étapes !

$$\overline{R}(u, v, \overline{0}) \to^* u \tag{1}$$

$$\overline{R}(u, v, \overline{n+1}) \to^* v\overline{n}(\overline{R}(u, v, \overline{n})) \tag{2}$$

Combien de β-réductions utilisez-vous dans chaque cas ?

Question 8 Donnez un terme $\overline{pred}$ calculant le prédécesseur. On devra avoir :

$$\overline{pred}\,\overline{n+1} \to^* \overline{n} \tag{3}$$

$$\overline{pred}\,\overline{0} \to^* \overline{0} \tag{4}$$

La réduction (3) devra compter au plus 5 étapes, la réduction (4) au plus 3.

Question 9 On note $[n]$ le codage de Church de l'entier n, et on rappelle que le prédécesseur est donné par $P = \lambda n.\pi_2(n(\lambda s \cdot \langle S(\pi_1 s), \pi_1 s\rangle)\langle[0], [0]\rangle)$ sur les entiers de Church, où $\langle \_, \_\rangle$ dénote la paire usuelle en λ-calcul et π_1, π_2 les deux projections correspondantes, et S est le successeur sur les entiers de Church. Combien de réductions sont-elles nécessaires pour réduire $P[n+1]$ en $[n]$? On donnera une estimation asymptotiquement sous forme d'un grand O d'une fonction de n. En quoi les entiers de Parigot sont-ils un progrès par rapport aux entiers de Church ?

Question 10 Proposer des termes du λ-calcul implémentant l'addition, la multiplication, et la fonction $n \mapsto 2^n$ sur les entiers de Parigot.

Pas besoin de preuve, mais une petite explication sera bienvenue, surtout si votre codage est bizarre.

3 Réductions de tête et types intersection simples

On considère les *types intersection simples*, définis comme suit. Il s'agit d'une variante simplifiée des types du système $\mathcal{D}\Omega$ vu en TD.

$$\sigma, \tau, \ldots \ ::= \ b \ \mid \ [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \to \tau$$

Ici, b est un type de base, et $n \in \mathbb{N}$. La notation $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ dénote un multi-ensemble, possiblement vide, de types. (Un multi-ensemble est une liste finie modulo permutation.) Intuitivement, un terme est de « type » $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ si et seulement il est de type σ_i pour tout i, $1 \leq i \leq n$, en même temps. Lorsque $n = 0$, on voit que tout terme est de « type » [] ; c'est l'équivalent du symbole Ω du TD.

Nous écrirons μ pour un multi-ensemble de types, lorsque les types qu'il contient ne sont pas particulièrement importants.

Les jugements de typage sont de la forme $\Gamma \vdash u : \tau$, où Γ est un ensemble d'hypothèses de typage $x : \mu$, les variables x étant distinctes deux à deux. Les règles de typage sont :

$$\frac{}{\Gamma, x : [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \vdash x : \sigma_i} (Var) \quad \text{(où } 1 \leq i \leq n\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \to \tau \quad \Gamma \vdash v : \sigma_1 \quad \ldots \quad \Gamma \vdash v : \sigma_n}{\Gamma \vdash uv : \tau} (App) \quad \frac{\Gamma, x : \mu \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : \mu \to \tau} (Abs)$$

Comme en cours, chaque terme est lu à α-renommage près, ce qui permet notamment de changer le nom de x à volonté dans la règle (Abs).

On définit RED_τ pour chaque type τ, et RED_μ pour chaque multi-ensemble μ de types, comme suit :

- RED_b vaut HN, l'ensemble des λ-termes qui ont une forme normale de tête (ceci signifie : dont la réduction de tête termine).
- Lorsque $u = [\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$, $RED_\mu = \bigcap_{i=1}^n RED_{\sigma_i}$; en particulier, $RED_{[]}$ est l'ensemble Λ de *tous* les λ-termes.
- $RED_{\mu \to \tau}$ vaut $RED_\mu \Rightarrow RED_\tau$, c'est-à-dire l'ensemble des termes u tels que pour tout $v \in RED_\mu$, uv est dans RED_τ.

On notera $\to_h$ la réduction de tête en une étape, et $\to_w$ la réduction de tête *faible*, c'est-à-dire n'opérant pas sous une λ-abstraction. On pourra admettre, sans le démontrer, que $w \to_h w'$ implique $w[x := v] \to_h w'[x := v]$, pour tout terme v, et de même pour $\to_w$ a la place de $\to_h$.

Question 11 On sait que si $u \to_w u'$, alors pour tout v, $uv \to_w u'v$. Nous l'avons utilisé dans la démonstration du théorème de standardisation, par exemple. Montrer que ceci n'est plus vrai si on remplace $\to_w$ par $\to_h$. Cette question a pour but de vous éviter de tomber dans un piège à la question suivante.

Question 12 Montrer que, pour tout type τ :

Même si ça ressemble à une question de cours, c'est *la* question de réflexion du DM !

H1 $RED_\tau \subseteq HN$;

H2 pour tout $u \in RED_\tau$, si $u \to_h u'$ alors $u' \in RED_\tau$;

H3 tout terme neutre u dont tous les réduits de tête en une étape u' sont dans RED_τ, est aussi dans RED_τ.

On notera que H3 s'exprime de façon équivalente comme suit : toute forme normale de tête neutre est dans RED_τ, et tout terme neutre non normal de tête dont l'unique réduit de tête est dans RED_τ, est lui aussi dans RED_τ.

Question 13 Montrer que pour tout λ-terme u tel que $u[x := v] \in RED_\tau$ pour tout $v \in RED_\mu$, on a $\lambda x \cdot u \in RED_{\mu\to\tau}$.

Plus facile que vous ne le croyez.

Question 14 Conclure que tout terme typable dans le système des types intersection simples a une forme normale de tête (i.e., sa réduction de tête termine).

Nous allons démontrer la réciproque. Pour ceci, nous admettrons quelques résultats faciles, mais ennuyeux :

— **Affaiblissement 1** : si l'on peut dériver $\Gamma \vdash s : \tau$, on peut aussi dériver $\Gamma, \Delta \vdash s : \tau$;

— **Affaiblissement 2** : si l'on peut dériver $\Gamma, x : \mu \vdash s : \tau$ alors on peut aussi dériver $\Gamma, x : \mu \cup \mu' \vdash s : \tau$, où $\cup$ est l'union multi-ensemble (la concaténation de listes, à permutation près) ;

— **Renforcement** : si l'on peut dériver $\Gamma, x : \mu \vdash s : \tau$ et que x n'est pas libre dans s, alors on peut dériver $\Gamma \vdash s : \tau$.

Question 15 Montrer que tout terme $u = \lambda x_1, \ldots, x_m \cdot x v_1 \ldots v_n$ en forme normale de tête est typable, autrement dit qu'il existe un jugement de la forme $\Gamma \vdash u : \tau$ dérivable dans la discipline des types intersection simples. On donnera explicitement Γ et τ selon les différents cas considérés, et une explication sommaire des « types » à donner aux variables x_i, mais pas la peine de me dessiner une dérivation de typage bien formelle.

Donnez-moi la solution la plus simple possible !

Question 16 Montrer que si on peut dériver $\Gamma \vdash s[x := t] : \tau$ (avec x absente de Γ), alors il existe des types $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ tels que l'on peut dériver $\Gamma, x : [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \vdash s : \tau$, et aussi $\Gamma \vdash t : \sigma_i$ pour chaque i, $1 \leq i \leq n$.

En plus de la preuve, si vous pouviez me donner une explication intuitive, ça serait super.

Question 17 Montrer que si on peut dériver $\Gamma \vdash s[x := t] : \tau$, alors on peut aussi dériver $\Gamma \vdash (\lambda x.s)t : \tau$.

Question 18 Montrer que si $u \to_h u'$ et si l'on peut dériver $\Gamma \vdash u' : \tau$, alors on peut aussi dériver $\Gamma \vdash u : \tau$. On pourra utiliser l'abréviation $\Gamma \vdash v : \mu'$ pour dire que $\Gamma \vdash v : \varphi$ est dérivable pour chaque type $\varphi \in \mu'$.

Question 19 Conclure que les λ-termes qui ont une forme normale de tête sont exactement ceux qui sont typables dans la discipline des types intersection simples.