Quelques modèles de graphes du λ-calcul

Correction.

1 Les modèles de graphes

Les modèles de graphes du λ-calcul sont ainsi nommés parce qu'ils codent les fonctions comme certains sous-ensembles de leur graphe. Par exemple $\mathbb{P}\omega$ est un modèle de graphes.

Plutôt que de parler de cpos comme dans les notes de cours, on va utiliser les dcpos, comme pendant les séances de cours. Une famille F d'un ensemble ordonné est *dirigée* si et seulement si toute partie finie de F est majorée dans F. Si on écrit $F = (x_i)_{i \in I}$, ceci revient à dire que I est non vide (autrement dit, F est non vide) et pour tous $i, j \in I$ il existe $k \in I$ tel que $x_i, x_j \leq x_k$. Un *dcpo* est un ensemble ordonné dans lequel toute partie dirigée a une borne supérieure (on dira aussi supremum ou sup).

Les notes de cours parlent de cpos, où seulement les chaînes — des parties dirigées particulières — ont un sup.

Une fonction f d'un dcpo vers un autre est *Scott-continue* si et seulement si elle est *monotone* ($x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$) et préserve les sups dirigés (si x est le sup de la famille dirigée $(x_i)_{i \in I}$, alors $f(x)$ est le sup de la famille, nécessairement dirigée, $(f(x_i))_{i \in I}$). C'est une notion légèrement différente de celle de fonction continue des notes de cours.

On note $\mathbb{P}(D)$ l'ensemble des parties de D. C'est un treillis complet, donc un dcpo, pour l'ordre d'inclusion $\subseteq$. On note $\mathbb{P}_{\text{fin}}(D)$ le sous-ensemble des parties finies de D. Pour tous dcpos X et Y, on notera $[X \to Y]$ l'ensemble des fonctions (totales) Scott-continues de X vers Y, ordonné par l'ordre point à point : $f \leq g$ ssi $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in X$. $[X \to Y]$ est encore un dcpo. Tout cela sera admis.

En général, on appelle *modèle de graphes* un couple $(D, \to_D)$, où D est un ensemble non vide et $\to_D$ est une application (fonction totale) injective de $\mathbb{P}_{\text{fin}}(D) \times D$ dans D. On notera $E \to_D d$ au lieu de $\to_D (E, d)$. Comme pour les types, on estimera que $\to_D$ associe à droite, c'est-à-dire que $E_1 \to_D E_2 \to_D \cdots \to_D E \to_D d$ signifie $E_1 \to_D (E_2 \to_D \cdots \to_D (E \to_D d) \cdots)$.

On note r_D la fonction de $[\mathbb{P}(D) \to \mathbb{P}(D)]$ vers $\mathbb{P}(D)$ définie par :

$$r_D(f) = \{E \to_D d \mid E \in \mathbb{P}_{\mathsf{fin}}(D), d \in f(E)\}. \tag{1}$$

On notera bien que $f(E)$ est la valeur de la fonction f sur l'argument E, et pas l'image $\{f(x) \mid x \in E\}$ de l'ensemble E par f, ce qui n'aurait de toute façon aucun sens.

Réciproquement, on définit $i_D \colon \mathbb{P}(D) \to [\mathbb{P}(D) \to \mathbb{P}(D)]$ par :

$$i_D(A)(B) = \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{\mathsf{fin}}(D). E \subseteq B \text{ et } (E \to_D d) \in A\}. \tag{2}$$

(J'utiliserai en général E pour une partie finie de D, et A, B, pour des parties arbitraires. Je vous incite fortement à obéir à cette convention, utilisée par souci de lisibilité.)

1. Montrer que si E est une partie finie de D, et si B est le supremum (l'union) d'une famille dirigée $(B_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{P}(D)$, avec $E \subseteq B$, alors il existe un $i \in I$ tel que $E \subseteq B_i$.

   Pour chaque point $d \in E$, on trouve un i_d tel que $d \in B_{i_d}$. Comme la famille est dirigée, ce nombre fini d'ensembles B_{i_d} est inclus dans un B_i (récurrence sur le cardinal de E). Donc $E \subseteq B_i$.

2. En déduire que, pour n'importe quel $A \in \mathbb{P}(D)$, $i_D(A)$ est bien une fonction Scott-continue, c'est-à-dire un élément de $[\mathbb{P}(D) \to \mathbb{P}(D)]$.

   Comme dans le modèle $\mathbb{P}\omega$ vu dans le poly.
   Monotonie : si $B \subseteq B'$ alors tout E dans $\mathbb{P}_{fin}(B)$ est aussi dans $\mathbb{P}_{fin}(B')$, ça ne peut produire que davantage de d tels que $(E \to_D d)$ soit dans A.
   Scott-continuité. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille dirigée, de sup B. On a $i_D(A)(B) \supseteq \sup_{i \in I} i_D(A)(B_i)$ par monotonie. On a ensuite, pour B le supremum (l'union) d'une famille dirigée $(B_i)_{i \in I}$:

$$\begin{aligned} i_D(A)(B) &= \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D). E \subseteq B \textit{ et } (E \to_D d) \in A\} \\ &= \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D), i \in I. E \subseteq B_i \textit{ et } (E \to_D d) \in A\} \textit{ (question précéd} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D). E \subseteq B_i \textit{ et } (E \to_D d) \in A\} \\ &= \bigcup_{i \in I} i_D(A)(B_i). \end{aligned}$$

On admettra dans la suite les résultats suivants :

— i_D elle-même est Scott-continue de $\mathbb{P}(D)$ vers $[\mathbb{P}(D) \to \mathbb{P}(D)]$;

— r_D est Scott-continue ;

— $i_D \circ r_D = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(D)}$;

— D est un modèle du λ-calcul, au sens où la fonction de sémantique :

  — $D\,[\![x]\!]\,\rho = \rho(x)$,

  — $D\,[\![uv]\!]\,\rho = i_D(D\,[\![u]\!]\,\rho)(D\,[\![v]\!]\,\rho)$,

  — $D\,[\![\lambda x \cdot u]\!]\,\rho = r_D(A \mapsto D\,[\![u]\!]\,(\rho[x := A]))$

  a la propriété que pour tout couple de λ-termes β-équivalents u et v, pour tout environnement ρ, $D\,[\![u]\!]\,\rho = D\,[\![v]\!]\,\rho$.

— La fonction qui à $A \in \mathbb{P}_{\mathrm{fin}}(D)$ associe $D\,[\![u]\!]\,(\rho[x := A])$, pour n'importe quel terme u et n'importe quel environnement ρ, est Scott-continue, et en particulier monotone.

Pour un terme clos u, $D\,[\![u]\!]\,\rho$ ne dépend pas de ρ, et on notera donc cette valeur simplement $D\,[\![u]\!]$.

3. Montrer qu'aucun modèle de graphe $(D, \to_D)$ ne valide la η-règle. Précisément, montrer que, pour deux variables distinctes x et y, $D\,[\![\lambda x \cdot x]\!] \neq D\,[\![\lambda x, y \cdot xy]\!]$. Je veux l'argument le plus simple possible.

On a :

$$\begin{aligned} D\,[\![\lambda x \cdot x]\!]\,x &= r_D(\mathit{id}_{\mathbb{P}(D)}) \\ &= \{E \to_D d \mid E \in \mathbb{P}_{\mathit{fin}}(D), d \in E\}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} D\,[\![\lambda x, y \cdot xy]\!] &= r_D(A \mapsto r_D(B \mapsto i_D(A)(B))) \\ &= \{E \to_D d \mid E \in \mathbb{P}_{\mathit{fin}}(D), d \in r_D(B \mapsto i_D(E)(B))\} \\ &= \{E \to_D E' \to_D E, E' \in \mathbb{P}_{\mathit{fin}}(D), d' \mid d' \in i_D(E)(E')\} \\ &= \{E \to_D E' \to_D d' \mid E, E' \in \mathbb{P}_{\mathit{fin}}(D), \exists E'_1 \in \mathbb{P}_{\mathit{fin}}(D), \\ &\qquad E'_1 \subseteq E' \text{ et } E'_1 \to_D d' \in E\}. \end{aligned}$$

Première solution. *Posons $E = \{\emptyset \to d\}$, $E' = \{d\}$, et $E'_1 = \emptyset$, où d est un élément de D. Alors $E \to_D E' \to_D d$ est dans $D\,[\![\lambda x, y \cdot xy]\!]$, mais pas dans $D\,[\![\lambda x \cdot x]\!]$.*

Deuxième solution. *Fixons $E = \{d_0\}$, pour un certain $d_0 \in D$.*
Les éléments de la forme $E \to_D d$ de $D[\![\lambda x \cdot x]\!]$ sont ceux tels que $d = d_0$: il y en a exactement 1.
Si d_0 n'est pas de la forme $E'_1 \to_D d'$ pour aucuns E'_1 et d', alors $D[\![\lambda x, y \cdot xy]\!]$ est vide. Sinon, E'_1 et d' sont déterminés de façon unique, puisque $\to_D$ est injective. (Ceci n'est pas très important.) Surtout, il y a alors une infinité d'ensembles finis E' contenant E'_1, et comme $\to_D$ est injective, il y a une infinité de valeurs de la forme $E' \to_D d'$, avec $E'_1 \subseteq E'$ et $E'_1 \to_D d' \in E$. Donc $D[\![\lambda x, y \cdot xy]\!]$ est de cardinal 0 ou bien infini, mais en tout cas jamais égal à 1.

Troisième solution. *D est non vide, donc infini. En effet, s'il était de cardinal m fini non nul, comme i_D est injective, m serait supérieur ou égal au cardinal de $\mathbb{P}_{fin}(D) \times D$, soit $m2^m$. Ceci impliquerait $2^m \leq 1$, donc $m = 0$, contradiction.*
On peut donc choisir deux éléments distincts d, d' dans D. Posons $E = \{\{d\} \to_D d'\}$, $E' = \{d, d'\}$, et $E'_1 = \{d\}$. Alors $E \to_D E' \to_D d'$ est dans $D[\![\lambda x, y \cdot xy]\!]$, mais pas dans $D[\![\lambda x \cdot x]\!]$.

Quatrième solution. *On fait un raisonnement plus abstrait. On a :*

$$\begin{aligned} D[\![\lambda x, y \cdot xy]\!] &= r_D(A \mapsto r_D(B \mapsto i_D(A)(B))) \\ &= r_D(A \mapsto r_D(i_D(A))) \\ D[\![\lambda x \cdot x]\!] &= r_D(A \mapsto A). \end{aligned}$$

Comme $i_D \circ r_D = id_{\mathbb{P}(D)}$, r_D est injective. Donc si $D[\![\lambda x, y \cdot xy]\!] = D[\![\lambda x \cdot x]\!]$, alors les fonctions $A \mapsto r_D(i_D(A))$ et $A \mapsto A$ coincident. Ceci implique que $r_D \circ i_D$ est (aussi) la fonction identité, en particulier r_D est surjective.
Or pour tout f, $r_D(f)$ est vide ou infinie, jamais finie. En effet, si $r_D(f)$ est non vide, il contient un $E \to_D d$ tel que $d \in f(E)$, et alors tous les $E' \to_D d$ avec E' contenant E sont aussi dans $r_D(f)$. Comme $\to_D$ est injective, ceci fournit une infinité d'éléments de $r_D(f)$.
On en déduit qu'aucun ensemble fini non vide n'est dans l'image de r_D, ce qui contredit la surjectivité de r_D.

4. Soit $\Omega = \delta\delta$, où $\delta = \lambda x.xx$. Montrer que si $d \in D[\![\Omega]\!]$, alors il existe un $E \in \mathbb{P}_{\text{fin}}(D)$ tel que $(E \to_D d) \in E$.

La première chose à faire est de calculer $D[\![\delta]\!]$. On trouve que :

$$D[\![\delta]\!] = \{A \to_D d \mid \exists E' \in \mathbb{P}_{fin}(D). E' \subseteq A \text{ et } (E' \to_D d) \in A\}.$$

Soit $d \in D[\![\Omega]\!]$. Alors $d \in i_D(D[\![\delta]\!])(D[\![\delta]\!])$, donc il existe $E \in \mathbb{P}_{fin}(D)$ tel que $E \subseteq D[\![\delta]\!]$ et $(E \rightarrow_D d) \in D[\![\delta]\!]$. Choisissons E de cardinal minimal inclus dans $D[\![\delta]\!]$ et tel que $E \rightarrow_D d$ soit dans $D[\![\delta]\!]$.

Puisque $E \rightarrow_D d$ est dans $D[\![\delta]\!]$, il existe un ensemble fini E', inclus dans E, et tel que $E' \rightarrow_D d$ est dans E. Si $E' \rightarrow_D d$ est dans E', on a gagné. Sinon, E' est strictement inclus dans E, puisque $E' \rightarrow_D d$ est dans E mais pas dans E' ; et pourtant $E' \rightarrow_D d$ est dans $D[\![\delta]\!]$ (car dans $E \subseteq D[\![\delta]\!]$), et ceci, avec $E' \subseteq E \subseteq D[\![\delta]\!]$, contredit la minimalité du cardinal de E.

2 Normalisation de tête et modèles de graphes

On rappelle que $\mathbf{V} = \lambda x, y \cdot x$ et $\mathbf{F} = \lambda x, y \cdot y$.

Le modèle d'Engeler $\mathcal{E}_C$ au-dessus d'un ensemble non vide C, vu en TD, est le modèle de graphes où :

— D est l'ensemble des arbres finis dont les feuilles sont des éléments de C, et dont les nœuds internes ont deux fils : le fils gauche consistant en un ensemble fini de sous-arbres, le fils gauche étant un unique sous-arbre ;

— $E \rightarrow_{\mathcal{E}_C} d$ est l'arbre donc le fils gauche est l'ensemble fini E, et le fils droit est d. On le notera simplement $E \rightarrow d$.

5. Montrer que $\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!] = \emptyset$.

   Par la question 4, s'il existait un élément d dans $\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!]$, alors il existerait un ensemble fini E d'arbres tel que $(E \rightarrow_D d)$ soit dans E. Mais alors $E \rightarrow_D d$ apparaîtrait comme sous-arbre strict de lui-même, ce qui est impossible.

6. Un *test de normalisabilité de tête* est un λ-terme clos t tel que, pour tout terme u qui a une forme normale de tête, $tu =_\beta \mathbf{V}$, et pour tout terme u qui n'a pas de forme normale de tête, $tu =_\beta \mathbf{F}$. On rappelle que pour tout $A \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_C)$, $i_{\mathcal{E}_C}(A)$ est une fonction Scott-continue, donc monotone. En déduire ainsi que de la question précédente que, s'il existe un test de normalisabilité de tête t, alors $\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}]\!] \subseteq \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}]\!]$.

   Comme Ω n'a pas de forme normale de tête, $t\Omega =_\beta \mathbf{F}$. Donc $\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}]\!] = \mathcal{E}_C[\![t\Omega]\!] = i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![t]\!])(\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!])$. Par monotonie, ceci est inclus dans $i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![t]\!])(\mathcal{E}_C[\![u]\!])$, où u est n'importe quel terme. Choisissons pour u un terme ayant une forme normale de tête, par exemple $\lambda x \cdot x$. Alors $i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![t]\!])(\mathcal{E}_C[\![u]\!]) = \mathcal{E}_C[\![tu]\!] = \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}]\!]$, ce qui termine la preuve.

7. En déduire qu'il n'existe pas de test de normalisabilité de tête. On pourra comparer $\mathcal{E}_C [\![\mathbf{F}xy]\!] \rho$ et $\mathcal{E}_C [\![\mathbf{V}xy]\!] \rho$, où x et y sont deux variables distinctes.

   Puisque i_D est monotone, ou bien puisque la fonction qui à A associe $\mathcal{E}_C [\![zxy]\!] (\rho[z := A])$ est monotone, la question précédente implique que $\mathcal{E}_C [\![\mathbf{F}xy]\!] \rho \subseteq \mathcal{E}_C [\![\mathbf{V}xy]\!] \rho$. Mais, si l'on pose $A = \rho(x)$ et $B = \rho(y)$, ceci implique $B \subseteq A$. Or ici A et B sont arbitraires, et l'on en conclurait donc que toutes les parties de $\mathcal{E}_C$ sont égales. Ceci n'est possible que si $\mathcal{E}_C$ est vide, ce qui n'arrive que si C est vide : contradiction.

3 Résolubilité

Si $\vec{u}$ est une suite finie de termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, on notera $t\vec{u}$ pour $tu_1u_2 \cdots u_n$. (On peut avoir $n = 0$.)

Un terme clos t est *résoluble* si et seulement s'il existe une telle suite $\vec{u}$ telle que $t\vec{u} =_\beta \mathbf{I}$, où $\mathbf{I}$ est par définition le terme $\lambda x \cdot x$.

Un terme t, non nécessairement clos, est résoluble si et seulement si le terme $\lambda x_1, \cdots, x_m \cdot t$, où $x_1, \ldots, x_m$ sont les variables libres de t, est résoluble. (Le terme en question est clos, et l'on applique donc la définition précédente de la résolubilité.)

8. Montrer que tout terme t qui a une forme normale de tête (au sens où t se β-réduit en un nombre quelconque de β-réductions, non nécessairement en tête, vers une forme normale de tête) est résoluble.

   On commence par montrer que toute forme normale de tête close t est résoluble. Le terme t s'écrit nécessairement $\lambda x_1, \cdots, x_m \cdot x_i\vec{s}$, et alors $t *_1 \cdots *_{i-1} (\lambda\vec{y} \cdot \mathbf{I}) *_{i+1} \cdots *_m$ se réduit en $(\lambda\vec{y} \cdot \mathbf{I})\vec{s}$, puis en $\mathbf{I}$, où les $*_j$ sont des termes arbitraires et $\vec{y}$ une liste de variable de la même longueur que $\vec{s}$.

   Si maintenant t est clos a une forme normale de tête, alors $t \to_\beta^* t'$ où t' est normal de tête. De plus, les variables libres de t' sont nécessairement toutes libres dans t (lemme auxiliaire facile), donc t' est clos. On vient de montrer que $t'\vec{u} \to_\beta^* \mathbf{I}$ pour une certaine suite de λ-termes $\vec{u}$. Donc $t\vec{u} \to_\beta^* t'\vec{u} \to_\beta^* \mathbf{I}$.

   Finalement, dans le cas général, en notant $\vec{x}$ la liste des variables libres de t (dans un ordre quelconque), $\lambda\vec{x} \cdot t$ a une forme normale de tête, est clos, donc il existe une suite de λ-termes $\vec{u}$ telle que $(\lambda\vec{x} \cdot t)\vec{u} \to_\beta^* \mathbf{I}$, montrant que t est résoluble.

9. Montrer que, quel que soit le modèle de graphes $(D, \to_D)$, pour tout terme clos résoluble t, $D[\![t]\!] \neq \emptyset$.

   On a $D[\![I]\!] = r_D(id_{\mathbb{P}(D)}) = \{E \to_D d \mid E \in \mathbb{P}_{fin}(D), d \in E\}$*, qui est non vide, puisqu'il contient déjà tous les* $\{d\} \to_D d$*,* $d \in D$*.*
   On montre ensuite que pour tout terme tel que $D[\![t]\!]\rho = \emptyset$ *alors* $D[\![tu]\!]\rho = \emptyset$ *pour tout terme* u*. En effet,*

$$\begin{aligned} D[\![tu]\!]\rho &= i_D(D[\![t]\!]\rho)(D[\![u]\!]\rho) = i_D(\emptyset)(D[\![u]\!]\rho) \\ &= \{d \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D).E \subseteq D[\![u]\!]\rho, (E \to_D d) \in \emptyset\}, \end{aligned}$$

   qui est bien sûr vide.
   Par récurrence, on en déduit que si $D[\![t]\!]\rho = \emptyset$ *alors* $D[\![t\vec{u}]\!]\rho = \emptyset$ *pour toute suite* $\vec{u}$ *de termes.*
   Si t *est clos et résoluble, alors* $D[\![t\vec{u}]\!]\rho = D[\![\mathbf{I}]\!]\rho \neq \emptyset$ *(où* ρ *est arbitraire), donc* $D[\![t]\!]\rho = D[\![t]\!]$ *est non vide.*

10. Donner un exemple de terme non résoluble. Justifier. On n'utilisera pas les résultats des questions qui suivent.

    Ω*, puisque* $\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!]$ *est vide (question 5), et en utilisant la question précédente.*

4 K-candidats

On rappelle la notion suivante, vue en cours dans le cadre de la preuve de forte normalisation du λ-calcul simplement typé : pour deux ensembles S et S' de λ-termes,

$$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S.uv \in S'\}.$$

On dira qu'un ensemble S de λ-termes est *saturé* si et seulement s'il est clos par réduction de tête faible inverse, autrement dit si $u[x := t]v_1v_2\cdots v_n \in S$ implique $(\lambda x \cdot u)tv_1v_2\cdots v_n$.

11. Montrer que si S' est saturé, alors $S \Rightarrow S'$ est saturé pour tout ensemble S.

    Si $u[x := t]v_1v_2\cdots v_n \in S \Rightarrow S'$*, alors pour tout* $v \in S$*,* $u[x := t]v_1v_2\cdots v_nv$ *est dans* S'*, donc* $(\lambda x{\cdot}u)tv_1v_2\cdots v_nv$ *est dans* S' *puisque* S' *est saturé. Comme* v *est arbitraire,* $(\lambda x \cdot u)tv_1v_2\cdots v_n$ *est dans* $S \Rightarrow S'$*.*

On note Λ l'ensemble de tous les λ-termes.

On note S_h l'ensemble des termes t dont la réduction de tête termine, autrement dit qui n'a pas de réduction infinie de la forme $t \to_t t_1 \to_t t_2 \to_t \cdots$.

On note S_0 l'ensemble des termes de la forme $x\vec{u}$ où x est une variable et $\vec{u}$ une suite quelconque de λ-termes.

On dira que S est un *K-candidat* (pour « candidat de Krivine ») si et seulement si S est saturé et $S_0 \subseteq S \subseteq S_h$.

12. Soient t un λ-terme, et x une variable. Supposons que la réduction de tête de t ne termine pas. Montrer que celle de tx ne termine pas non plus.

    Ecrivons $t = t_0 \rightarrow_t t_1 \rightarrow_t t_2 \rightarrow_t \cdots$ la réduction de tête infinie de t. Si aucun t_i n'est une λ-abstraction, $tx = t_0 x \rightarrow_t t_1 x \rightarrow_t t_2 x \rightarrow_t \cdots$ est aussi une réduction de tête, qui est infinie. Sinon, soit i le premier indice où t_i est une λ-abstraction, disons $t_i = \lambda x \cdot t'_i$. (Je profite du α-renommage pour nommer x aussi la variable liée.) On a alors que $t_j = \lambda x' \cdot t'_j$ pour tout $j \geq i$ et $t'_i \rightarrow_t t'_{i+1} \rightarrow_t \cdots \rightarrow_t t'_j \rightarrow_t \cdots$. Dans ce cas, on produit la réduction de tête infinie $tx = t_0 x \rightarrow_t t_1 x \rightarrow_t t_2 x \rightarrow_t \cdots \rightarrow_t t_{i-1} x \rightarrow_t t_i x = (\lambda x \cdot t'_i) x \rightarrow_t t'_i \rightarrow_t t'_{i+1} \rightarrow_t \cdots \rightarrow_t t'_j \rightarrow_t \cdots$.

13. Montrer que pour tout K-candidat S', et pour tout ensemble S de λ-termes contenant au moins une variable, $S \Rightarrow S'$ est un K-candidat. Où utilise-t-on l'hypothèse que S contient une variable ?

    Par la question précédente, $S \Rightarrow S'$ est saturé.

    Pour montrer $S_0 \subseteq S \Rightarrow S'$, il suffit de vérifier que tout élément $x\vec{u}$ de S_0, une fois appliqué à un terme quelconque v de S, fournit un terme $(x\vec{u}v)$ dans S' : ceci vient du fait que $x\vec{u}v \in S_0 \subseteq S'$.

    Pour montrer $S \Rightarrow S' \subseteq S_h$, soit t un terme de $S \Rightarrow S'$. Fixons une variable x de S (c'est là qu'on l'utilise !). Alors tx est dans S', donc dans S_h. Il n'y a donc pas de réduction de tête infinie partant de tx, et donc pas non plus partant de t, par la question précédente. Donc $t \in S_h$.

On en déduit que $\Rightarrow$ est une opération qui envoie tout couple de K-candidats vers un K-candidat (puisque tout K-candidat contient S_0, donc toutes les variables, donc au moins une), et aussi que $\Lambda \Rightarrow S$ est un K-candidat pour tout K-candidat S. (Noter que Λ n'est pas un K-candidat.)

On notera aussi que S_h est un K-candidat (le plus grand), et que toute intersection d'une famille non vide de K-candidats est un K-candidat. Pour toute famille $(S_i)_{i \in I}$ de K-candidats, on notera $\bigwedge_{i \in I} S_i$ l'intersection $\bigcap_{i \in I} S_i$ si I est non vide, et S_h si $I = \emptyset$. C'est la borne inférieure de la famille dans le treillis complet des K-candidats.

Note : Il y avait une erreur ici. On veut que $\bigwedge_{i \in I} S_i$ soit égal à $\bigcap_{i \in I} S_i$ dans tous les cas. Dans le cas $I = \emptyset$, cela signifie que $\bigwedge_{i \in I} S_i = \Lambda$.

Pour chaque arbre $d \in \mathcal{E}_C$, on définit un K-candidat $I(d)$ par récurrence sur la taille de d comme suit :

$$\begin{array}{rcl} I(c) & = & S_h \text{ pour toute feuille } c \in C \\ I(E \to d) & = & I(E) \Rightarrow I(d), \end{array}$$

où l'on pose pour tout ensemble (fini ou non) A, $I(A) = \bigwedge_{d' \in A} I(d')$; ce qui permet notamment de définir $I(E)$ dans la définition de $I(E \to d)$ ci-dessus.

14. Montrer que pour tout λ-terme t, pour tous ρ, θ, d satisfaisant les hypothèses suivantes :
    (a) ρ est un environnement associant à toute variable un élément de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_C)$,
    (b) $\theta = [x_1 := v_1, \cdots, x_n := v_n]$ est une substitution de domaine $\{x_1, \cdots, x_n\}$ contenant au moins les variables libres de t,
    (c) pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $v_i \in I(\rho(x_i))$,
    (d) $d \in \mathcal{E}_C \llbracket t \rrbracket \rho$,

    alors $t\theta \in I(d)$.

    Par récurrence sur t.
    Si t est l'une des variables x_i, alors $t\theta = v_i$ est dans $I(\rho(x_i))$ par hypothèse. Comme $t = x_i$, $t\theta$ est donc dans $I(\mathcal{E}_C \llbracket t \rrbracket \rho)$. Par (d), $d \in \mathcal{E}_C \llbracket t \rrbracket \rho$ donc $I(\mathcal{E}_C \llbracket t \rrbracket \rho) = \bigcap_{d' \in \mathcal{E}_C \llbracket t \rrbracket \rho} I(d') \subseteq I(d)$. On en déduit que $t\theta \in I(d)$.
    Si t est une application $t_1 t_2$, (d) implique que d est dans $\mathcal{E}_C \llbracket t \rrbracket \rho = i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C \llbracket t_1 \rrbracket \rho)(\mathcal{E}_C \llbracket t_2 \rrbracket \rho)$, donc il existe un ensemble fini E inclus dans $\mathcal{E}_C \llbracket t_2 \rrbracket \rho$ tel que $E \to d$ soit dans $\mathcal{E}_C \llbracket t_1 \rrbracket \rho$. Par hypothèse de récurrence $t_2\theta$ est dans $I(d')$ pour tout $d' \in E$, donc dans l'intersection $I(E)$ de ces $I(d')$; et $t_1\theta$ est dans $I(E \to d) = I(E) \Rightarrow I(d)$. Par définition de $\Rightarrow$, $(t_1\theta)(t_2\theta)$ est donc dans $I(d)$, c'est-à-dire $t\theta \in I(d)$.
    Si t est une abstraction $\lambda x \cdot t_1$, (d) implique que $d \in r_{\mathcal{E}_C}(A \mapsto \mathcal{E}_C \llbracket t_1 \rrbracket (\rho[x := A]))$, donc que d est de la forme $E \to d'$ avec E fini et $d' \in \mathcal{E}_C \llbracket t_1 \rrbracket (\rho[x := E])$. On souhaite montrer que $t\theta \in I(d) = I(E) \Rightarrow I(d')$.
    Pour ceci, on considère un terme v quelconque dans $I(E)$, et on doit montrer que $(t\theta)v$ est dans $I(d')$. On remarque que $v \in I(E)$ implique que la condition (c) est vraie avec $\rho[x := E]$ à la place de ρ et $\theta' = [x_1 := v_1, \cdots, x_n := v_n, x := v]$ à la place de θ (on s'arrange pour avoir α-renommé t de sorte que x soit fraîche, c'est-à-dire différente des x_i et non libre dans aucun v_i). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et obtenir que $t_1\theta' \in I(d')$.

Or $I(d')$ est saturé ! Comme $t_1\theta' = (t_1\theta)[x := v]$ (grâce au fait d'avoir pris x fraîche), $(\lambda x \cdot t_1\theta)v$ est aussi dans $I(d')$. Autrement dit, $(t\theta)v \in I(d')$, ce qui est ce que nous voulions démontrer.

15. En déduire que pour tout terme t tel que $\mathcal{E}_C [\![t]\!] \rho \neq \emptyset$ (pour au moins un environnement ρ), la réduction de tête partant de t termine. Montrez clairement où vous utilisez les questions précédentes, et la définition des K-candidats.

    Soit $x_1, \ldots, x_n$ les variables libres de t. On choisit $v_i = x_i$, ce qui définit θ.
    On a alors $v_i \in I(\rho(x_i))$, parce que v_i est une variable, donc un élément de S_0, et que tout K-candidat (par exemple $I(\rho(x_i))$) contient S_0. Ceci assure de vérifier (c).
    Comme $\mathcal{E}_C [\![t]\!] \rho \neq \emptyset$, on peut prendre un élément d de $\mathcal{E}_C [\![t]\!] \rho$, et alors t est dans $I(d)$ par la question précédente. Or $I(d)$ est un K-candidat, donc est inclus dans S_h. Il s'ensuit que $t \in S_h$, c'est-à-dire que la réduction de tête partant de t termine.

En mettant ensemble les résultats des questions 8, 9, et 15, plus le fait évident que tout terme dont la réduction de tête termine a une forme normale de tête, on en déduit que les notions suivantes sont équivalentes pour un terme clos t :

a la réduction de tête de t termine ;

b t a une forme normale de tête ;

c t est résoluble ;

d $\mathcal{E}_C [\![t]\!] \neq \emptyset$.

5 Normalisation faible

Cette partie a pour but de redémontrer, en particulier, le théorème de standardisation. Il est donc interdit d'y faire appel ! (Même indirectement, mais aucun résultat du cours autre que le théorème de standardisation ne l'utilise.)

On dira qu'un terme est *normalisable par la gauche* si et seulement si sa réduction gauche (leftmost-outermost) termine. On note S_ℓ l'ensemble des termes normalisables par la gauche. Il est facile de voir que S_ℓ est saturé.

On propose de suivre une démonstration similaire à celle de la section précédente. On redéfinit pour cela certaines des notions :

— S'_0 est l'ensemble des termes de la forme $xu_1u_2\cdots u_n$, $n \geq 0$, où tous les u_i sont normalisables par la gauche ;

— un K'-candidat est un ensemble S saturé tel que $S'_0 \subseteq S \subseteq S_\ell$;

— les éléments *stricts* de $\mathcal{E}_C$ sont les arbres dont aucun nœud interne n'a un fils gauche vide ; autrement dit, ils sont définis par récurrence comme ceux de la forme c, $c \in C$, ou bien $E \to d$ où E est *non vide*, d est strict, et tous les éléments de E sont stricts.

16. Montrer, en adaptant les techniques des parties précédentes, que pour un terme clos, les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

   a t a une forme normale ;

   b $\mathcal{E}_C \llbracket t \rrbracket$ contient un élément strict ;

   c t est normalisable par la gauche.

$(c) \Rightarrow (b)$ est évident.

$(a) \Rightarrow (b)$ Posons $D = \mathcal{E}_C$. Disons qu'une partie de $D = \mathcal{E}_C$ est stricte si et seulement si elle est finie, non vide et ne contient que des éléments stricts. Disons qu'un environnement ρ est strict si et seulement s'il envoie chaque variable vers une partie stricte.

On montre en fait que pour tout terme t, pas nécessairement clos, mais normalisable, il existe un environnement strict ρ tel que $D \llbracket t \rrbracket \rho$ contient un élément strict. Si t a une forme normale u, alors $D \llbracket t \rrbracket \rho = D \llbracket u \rrbracket \rho$, donc il suffit de le montrer pour un terme t normal.

Nous le faisons par récurrence sur la taille de t. Ecrivons t en forme normale de tête $t = \lambda x_1, \cdots, x_m \cdot x t_1 \cdots t_n$, les t_j étant eux-mêmes normaux. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver des environnements stricts ρ_j tels que $D \llbracket t_j \rrbracket \rho_j$ contienne un élément strict d_j, pour chaque j, $1 \leq j \leq n$.

Posons $\rho(z) = \bigcup_{j=1}^{n} \rho_j(z)$ pour toute variable $z \neq x$, et $\rho(x) = \bigcup_{j=1}^{n} \rho_j(x) \cup \{\{d_1\} \to_D \{d_2\} \to_D \cdots \to_D \{d_n\} \to d_0\}$, où d_0 est un élément strict arbitraire de D, par exemple une feuille dans C. Comme $\rho(z)$ contient $\rho_j(z)$ pour tous j, z, et que la sémantique est Scott-continue donc monotone, d_j est encore dans $D \llbracket t_j \rrbracket \rho$ (note : ρ, pas ρ_j). On en déduit que d_0 est dans $D \llbracket x t_1 \cdots t_n \rrbracket \rho$. Alors $\rho(x_1) \to_D \rho(x_2) \to_D \cdots \to_D \rho(x_m) \to_D d_0$ est dans $D \llbracket t \rrbracket \rho$, et c'est un élément strict par construction.

$(b) \Rightarrow (c)$ fonctionne pratiquement comme les questions sur la résolubilité.

On démontre d'abord le résultat suivant, analogue de la question 12 : (A) si t n'est pas normalisable par la gauche, alors tx non plus, pour n'importe quelle variable x. L'argument est similaire au cas des réductions de tête.

On démontre ensuite le résultat suivant, analogue de la question 13 : (B) si S et S' sont des K'-candidats, alors $S \Rightarrow S'$ aussi. Il est saturé, *contient tous les éléments $xu_1 \cdots u_n$ de S'_0 parce que pour tout $u \in S$, u est normalisable par la gauche ($S \subseteq S_\ell$) donc $xu_1 \cdots u_n u \in S'_0$. Enfin, il est inclus dans S_ℓ parce que si $u \in S \Rightarrow S'$, comme toute variable x est dans $S'_0 \subseteq S$, ux est dans S' donc est normalisable par la gauche, et il s'ensuit que u aussi, par (A).*

Le reste de la démonstration suit le chemin exploré dans le reste de la section 4, sans aucune différence majeure.

6 Bonus

Vous avez dû voir avec Guillaume Bury, en TD, des théorèmes comme celui-ci, portant sur des systèmes de typage *conjonctifs* : les λ-termes fortement normalisants sont exactement ceux qui sont typables dans le système $\mathcal{D}$; les λ-termes normalisables sont exactement ceux qui sont typables dans le système $\mathcal{D}_\Omega$ avec des types où Ω n'intervient qu'en position négative.

17. Formaliser la relation entre système $\mathcal{D}_\Omega$ et modèle d'Engeler, et traduire les conditions « $\mathcal{E}_C [\![t]\!] \neq \emptyset$ » et « $\mathcal{E}_C [\![t]\!]$ contient un élément strict » en conditions de typage. Qu'observez-vous ?

On pose C l'ensemble des types de base. Un type de $\mathcal{D}_\Omega$ s'interprète comme un élément de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_C)$, comme suit :

$$\begin{array}{rcl} c^\circ & = & \{c\} \\ \Omega^\circ & = & \emptyset \\ (F \cap G)^\circ & = & F^\circ \cup G^\circ \\ (F \to G)^\circ & = & \{F^\circ \to_{\mathcal{E}_C} d \mid d \in G^\circ\}. \end{array}$$

On s'aperçoit alors que la sémantique exprime juste les règles de typage de $\mathcal{D}_\Omega$, et que ce que vous avez (re)démontré dans ce devoir à la maison, c'est que les termes ayant une forme normale de tête (ou résolubles) sont exactements ceux typables d'un type non trivial de $\mathcal{D}_\Omega$ (ce sont les types F tels que $F^\circ \neq \emptyset$), et le résultat similaire caractérisant les termes normalisables (resp., par la gauche).