Correction du devoir à la maison de programmation (pour le 17 novembre 2003)

Jean Goubault-Larrecq
ENS Cachan
goubault@lsv.ens-cachan.fr

26 novembre 2003

EXERCICE 3.13

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, posons $k = m + n$. L'entier k étant fixé, m varie de 0 à k, et $\langle m, n\rangle = k(k+1)/2+m$ varie entre $k(k+1)/2$ et $k(k+1)/2+k = (k+1)(k+2)/2-1$. Cherchons donc, i étant fixé, quels entiers k sont tels que $k(k+1)/2 \leq i \leq (k+1)(k+2)/2-1$. L'encadrement étant écrit sous cette forme, il est clair que k est la partie entière de l'unique solution x positive de l'équation $x(x+1)/2 = i$, soit

$$k = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8i}}{2} \right\rfloor$$

Les uniques entiers m et n tels que $\langle m, n\rangle = i$ sont donc :

$$m = i - \frac{k(k+1)}{2} \qquad n = k - m$$

On pose donc $\mathtt{proj}_1 i = m$, $\mathtt{proj}_2 i = n$.

Ceci est bien sûr une démonstration incompréhensible. Il vaut mieux, intuitivement, regarder la figure 12 du cours. $\square$

EXERCICE 3.14

Soit e une partie finie de $\mathbb{N}$. Si D est une famille dirigée telle que $\bigvee D \geq e$, c'est-à-dire telle que $e \subseteq \bigcup_{x \in D} x$. Pour tout $i \in e$, il existe donc un élément x_i de D tel que $i \in x_i$. Il suffit maintenant d'observer que, comme D est dirigée, il existe un $x \in D$ supérieur ou égal à tous les x_i, c'est-à-dire contenant tous les x_i ; donc $e \subseteq x$ pour un certain $x \in D$. Donc e est un élément fini de $\mathbb{P}\omega$. Au passage, il faut noter que, pour montrer que cet x existe, le fait qu'un ensemble dirigé soit toujours non vide est cruciale : sinon pour $e = \emptyset$, et $D = \emptyset$, on a bien $\bigvee D \geq e$, mais aucun élément x de D n'est au-dessus de e.

Réciproquement, pour montrer que tout élément fini de $\mathbb{P}\omega$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, on montre la contraposée : que les parties infinies e de $\mathbb{N}$ ne sont pas des éléments finis. En effet, e

est alors le sup de la famille des $(\{i | i \in e, i \leq n\})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est clairement dirigée, mais on n'a $\{i | i \in e, i \leq n\} \supseteq e$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$. $\square$

▸ **EXERCICE 3.15**

Supposons que $\uparrow x$ est ouvert dans la topologie de Scott. Alors il est inaccessible par le bas, donc pour toute famille dirigée D de Val, si $\bigvee D \in \uparrow x$ (autrement dit $\bigvee D \geq x$), alors D intersecte $\uparrow x$ (autrement dit il existe un élément de D supérieur ou égal à x) : ceci revient à dire que x est effectivement un élément fini de Val.

Réciproquement, supposons x fini. Clairement $\uparrow x$ est clos par le haut : si $y \in \uparrow x$ (autrement dit $y \geq x$) et $z \geq y$, alors $z \geq x$ par transitivité, c'est-à-dire $z \in \uparrow x$. Ensuite, si D est une famille dirigée de Val telle que $\bigvee D \in \uparrow x$ (c'est-à-dire $\bigvee D \geq x$), alors comme x est fini, il existe $y \in D$ tel que $y \in x$, c'est-à-dire tel que $y \in \uparrow x$: autrement dit $\uparrow x$ est bien inaccessible par le bas, donc ouvert.

On en déduit que la topologie engendrée par les $\uparrow x$, avec x fini dans Val, est moins fine que celle de Scott.

Clairement, 0 est fini dans $([0, 1], \leq)$. Pour tout $x \in]0, 1]$ au contraire, x est le sup de la famille $[0, x[$, qui est dirigée car non vide et totalement ordonnée, mais aucun élément de $[0, x[$ n'est évidemment supérieur ou égal à x. Donc le seul élément fini de $([0, 1], \leq)$ est 0. La topologie engendré par les $\uparrow x$, avec x fini, est donc dans ce cas la topologie grossière (les deux seuls ouverts sont $\emptyset$ et $[0, 1]$ tout entier), qui est strictement moins fini que la topologie de Scott, laquelle contient tous les intervalles $]x, 1]$, $x \in [0, 1]$, comme ouverts, en plus de $[0, 1]$. $\square$

▸ **EXERCICE 3.16**

Dans $\mathbb{P}\omega$, tout élément e (partie de $\mathbb{N}$) est le sup (l'union) de tous les éléments qui sont des parties finies de e. Comme l'ensemble des parties finies de e forme une famille dirigée (noter qu'elle est non vide car l'ensemble vide est toujours une partie finie de e), et par l'exercice 3.14, e est sup d'une famille dirigée d'éléments finis — la famille dirigée de tous les éléments finis en-dessous de e.

Pour montrer que la topologie de Scott est exactement celle engendrée par les $\uparrow x$, x fini, il ne reste plus, grâce à l'exercice 3.15, à montrer que tout ouvert de Scott est une union d'ouverts de la forme $\uparrow x$, x fini. Or si O est un ouvert de Scott et $y \in O$, et si nous sommes dans un cpo algébrique, y est sup d'une famille dirigée D d'éléments finis ; comme O est inaccessible par le bas, D contient un élément x qui est dans O. Comme x est dans D, il est fini est inférieur ou égal à y, donc $y \in \uparrow x$, x fini. De plus, comme x est dans O et que O est clos par le haut, $\uparrow x$ est inclus dans O. En particulier, O est exactement l'union de tous ces $\uparrow x$, lorsque y varie dans O.

On en conclut que $([0, 1], \leq)$ n'est pas algébrique, puisque par l'exercice 3.15 la topologie de Scott ne coincide pas avec celle engendrée par les $\uparrow x$, x fini. $\square$

▸ **EXERCICE 4.1**

Une façon très simple de montrer que $Env = Var \to Val$ est un cpo est juste d'observer qu'il s'agit de l'espace $[Var \to Val]$ des fonctions continues du cpo *plat* Var vers le cpo Val : en effet, toute fonction d'un cpo plat vers un cpo est nécessairement continue.

Sinon, on peut le démontrer directement : si D est une famille dirigée d'environnements, alors pour toute variable x, $\{\rho(x)|\rho \in D\}$ est clairement une famille dirigée de Val. Donc $\bigvee_{\rho\in D} \rho(x)$ existe. Maintenant l'environnement qui à toute variable x associe $\bigvee_{\rho\in D} \rho(x)$ est clairement le sup de D.

Le cas de $Mem = Addr \rightarrow_{fin} Val$ est plus délicat. Il y a en effet plusieurs façons d'ordonner Mem de façon naturelle. L'une de celles-ci est de définir $\mu \leq \mu'$ si et seulement si $\text{dom } \mu = \text{dom } \mu'$ et, pour tout $a \in \text{dom } \mu$, $\mu(a) \leq \mu'(a)$. Ceci fait de Mem un cpo, isomorphe à la somme (voir exercice 4.9) sur tous les ensembles A finis d'adresses du produit de $|A|$ copies de Val (voir exercice 4.7), où $|A|$ est le cardinal de A. Nous nous dispensons de montrer que c'est un cpo, vu que ce sera ainsi une conséquence des exercices 4.7 et 4.9.

Nota Bene : Je choisirai cet ordre dans la suite du corrigé. Ceci permet de faire fonctionner le cas de l'équation (7) de la question 4.16. Néanmoins, l'intuition dit que, si l'on écrit une fonction qui boucle un nombre fini de fois, et à chaque tour de boucle alloue une nouvelle case mémoire (par `ref`), le résultat est un plus petit point fixe où la mémoire finale est le sup d'une famille (finie) de mémoires de domaines de plus en plus gros. Ceci n'a aucun sens dans l'ordre ci-dessus. Néanmoins, la démonstration de la question 4.16 semble fonctionner avec cet ordre. Je conjecture donc que ce corrigé contient une erreur. Toutes mes félicitations si vous la trouvez !

L'autre possibilité est de voir toute mémoire comme une fonction (totale) μ de $Addr$ vers $Val_\perp$, telle que $\mu(a) = \perp$ pour toutes les adresses a sauf possiblement un nombre fini. Mem hériterait alors de l'ordre de $[Addr \rightarrow Val_\perp]$: autrement dit, on définirait $\mu \leq \mu'$ par $\text{dom } \mu \subseteq \text{dom } \mu'$ et $\mu(a) \leq \mu'(a)$ pour tout $a \in \text{dom } \mu$. Mais ne serait alors pas un cpo dès que $Addr$ est infini : la suite croissante des mémoires $[]$, $[a_1 \mapsto V]$, ..., $[a_1 \mapsto V, \ldots, a_n \mapsto V]$, ..., où $V \in Val$ et $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ est une sous-suite infinie de $Addr$, serait un contre-exemple.

Si $Addr$ est fini, ce codage revient à identifier Mem avec $Addr \rightarrow Val_\perp$ tout entier, qui est un cpo. Mais l'on verra que ce codage fait échouer le cas (7) de la question 4.16.

▸ EXERCICE 4.2

Le plus petit élément est la fonction qui à tout $(\mu, V) \in Mem \times Val$ associe $\perp \in (Mem \times Val)_\perp$. Il s'agit bien d'une fonction continue, car elle est constante, et elle est clairement plus petite que toute autre fonction. $\square$

▸ EXERCICE 4.3

Soit $f : A_\perp \rightarrow \mathbb{P}\omega$ qui à $x \in A$ associe $\{0\} \cup \{n + 1|n \in x\}$, et à $\perp$ associe $\emptyset$. La fonction f est monotone : si $x \leq y$, soit $x = \perp$ et $f(x) = \emptyset \leq f(y)$, soit $x \neq \perp$ et alors $f(x) = \{0\} \cup \{n + 1|n \in x\} \subseteq \{0\} \cup \{n + 1|n \in y\} = f(y)$. Soit B l'image de f dans $\mathbb{P}\omega$: c'est l'ensemble décrit dans l'énoncé.

Posons $g : B \rightarrow A_\perp$ qui à $\emptyset$ associe $\perp$ et à $z \neq \emptyset$ associe $\{n - 1|n \in z \setminus \{0\}\}$. Encore une fois, g est monotone : si $z \leq t \in B$, alors soit z est vide et $g(z) = \perp \leq g(t)$, soit z est non vide. Dans ce dernier cas, t est non vide aussi, et $g(z) \leq g(t)$, clairement.

Il est ensuite clair que $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in A_\perp$. On en déduit que $f(g(z)) = z$ pour tout $z \in B$: en effet pour tout $z \in B$, z est de la forme $f(x)$ pour un certain $x \in A_\perp$, donc $f(g(z)) = f(g(f(x))) = f(x)$ (puisque $g(f(x)) = x$) $= z$.

Pour montrer que la paire (f, g) définit un isomorphisme entre $A_\perp$ et B, il faut en principe montrer que f et g sont non seulement monotones mais continues. Une remarque faite par

Arnaud Spiwack est que la continuité est impliquée par la monotonie et le fait que f et g sont inverses l'une de l'autre : par monotonie, si D est dirigée, $f(\bigvee D) \geq \bigvee f(D)$; on peut démontrer l'inégalité réciproque en remarquant que $D = g(f(D))$, donc $f(\bigvee D) = f(\bigvee g(f(D))) \leq f(g(\bigvee f(D)))$ (car, de même que $f(\bigvee D) \geq \bigvee f(D)$, on a $g(\bigvee f(D)) \geq \bigvee g(f(D))) = \bigvee f(D)$. Donc $f(\bigvee D) = \bigvee f(D)$, autrement dit, f est continue. De même, g est continue.

Il ne reste plus à démontrer que B est un sous-cpo de $\mathbb{P}\omega$. Pour ceci, il suffit de montrer que tous les sups de familles dirigées dans B sont dans B. Mais si D est une famille dirigée de B, $D = f(g(D))$, donc $\bigvee D = \bigvee f(g(D)) = f(\bigvee g(D))$ (par continuité de f), et $f(\bigvee g(D))$ est dans B, puisque B est l'image de f. □

▸ EXERCICE 4.4

On procède par des arguments similaires à l'exercice précédent. Comme $r(i(f)) = f$ pour tout $f \in [\mathbb{P}\omega \to \mathbb{P}\omega]$, en particulier pour tout $f \in [A \to B]$, $i(r(x)) = x$ pour tout $x \in i([A \to B])$ ($x = i(f)$ pour un certain f, donc $i(r(x)) = i(r(i(f))) = i(f) = x$). Donc (r, i) définit un isomorphisme entre $[A \to B]$ est $i([A \to B])$.

Il ne reste plus à démontrer que $i([A \to B])$ est un sous-cpo de $\mathbb{P}\omega$, autrement dit qu'il est stable par sups de familles dirigées. On utilise pour ceci la continuité de i, comme à l'exercice précédent celle de f : pour tout famille dirigée de $i([A \to B])$, $\bigvee D = \bigvee i(r(D)) = i(\bigvee r(D)) \in i([A \to B])$. □

▸ EXERCICE 4.5

Pour tout ensemble X fini ou dénombrable, on peut supposer à bijection près que X est inclus dans $\mathbb{N}$. L'ensemble des $\{x\}$, $x \in X$ est alors un sous-cpo plat de $\mathbb{N}$, qui est clairement en bijection avec X. Ceci s'applique à Addr, $\mathbb{B}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ (puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable). □

▸ EXERCICE 4.6

Soit D une famille dirigée de $A_1 \times \ldots \times A_n$. Soit $i \in \{1, ..., n\}$, et $D_i = \{a_i | (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \in D\}$. D étant non vide, D_i est non vide. De plus, pour tous $x, x' \in D_i$, x s'écrit a_i pour un certain $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, et x' s'écrit a'_i pour un certain $(a'_1, \ldots, a'_n) \in D$. Comme D est dirigé, il existe $(a''_1, \ldots, a''_n) \in D$ tel que $(a_1, \ldots, a_n) \leq (a''_1, \ldots, a''_n)$ et $(a'_1, \ldots, a'_n) \leq (a''_1, \ldots, a''_n)$; en particulier $x = a_i \leq a''_i$, $x' = a'_i \leq a''_i$, et $a''_i \in D_i$ par construction. Donc D_i est dirigé.

Clairement, $(\bigvee D_1, \ldots, \bigvee D_n)$ est un majorant de D. De plus, c'est le plus petit : si $(b_1, \ldots, b_n)$ est un majorant de D, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, b_i majore D_i : en effet, pour tout $x \in D_i$, x s'écrit a_i avec $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, donc $(b_1, \ldots, b_n) \geq (a_1, \ldots, a_n)$, donc $b_i \geq a_i = x$. Comme b_i majore D_i, $b_i \geq \bigvee D_i$. Ceci étant vrai pour tout i, $(b_1, \ldots, b_n) \geq (\bigvee D_1, \ldots, \bigvee D_n)$. Donc D a un sup, qui est calculé composante par composante. En particulier, $A_1 \times \ldots \times A_n$ est un cpo.

La projection $\pi_i : A_1 \times \ldots \times A_n \to A_i$ est continue. Il suffit de vérifier que π_i préserve les sups de familles dirigées : ceci implique en effet la monotonie, puisque si $x \leq y$, alors $\{x, y\}$ est une famille dirigée, et π_i en préserve le sup si et seulement si $\pi_i(x) \leq \pi_i(y)$. La préservation des sups de familles dirigées revient alors au fait que le sup est calculé composante par composante.

Enfin, si $f_i : C \to A_i$ est continue pour chaque i, $1 \leq i \leq n$, alors pour toute famille dirigée

D de C,

$$\begin{aligned} f(\bigvee D) &= (f_1(\bigvee D), \ldots, f_n(\bigvee D)) \\ &= (\bigvee f_1(D), \ldots, \bigvee f_n(D)) \qquad \text{(par continuité des } f_i\text{)} \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \bigvee f(D) &= \bigvee \{(f_1(c), \ldots, f_n(c)) | c \in D\} \\ &= (\bigvee f_1(D), \ldots, \bigvee f_n(D)) \end{aligned}$$

puisque les sups sont calculés composante par composante. Par la remarque faite plus haut, ceci implique aussi la monotonie de f. Donc f est continue. □

▸ **EXERCICE 4.7**

Bien sûr, l'énoncé était faux : la notation $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle | a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$ n'a aucun sens, puisque la notation $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ n'a de sens que si a_1, …, a_n sont des entiers, et $a_1 \in A_1$, …, $a_n \in A_n$ force a_1, …, a_n à être des ensembles d'entiers.

Essayons donc un autre codage. Posons donc, pour $a_1 \in A_1$, …, $a_n \in A_n$, $f(a_1, \ldots, a_n) = \{\langle i, k\rangle | 1 \leq i \leq n, k \in a_i\}$. Notons la ressemblance avec le codage via i de l'espace des fonctions continues du cpo plat $\{1, \ldots, n\}$ vers $\mathbb{P}\omega$. Soit A l'image de f dans $\mathbb{P}\omega$. La réciproque de f est définie par $g(e) = (g_1(e), \ldots, g_n(e))$, avec $g_i(e) = \{k | \langle i, k\rangle \in e\}$. En effet, $g_i(f(a_1, \ldots, a_n)) = \{k | \langle i, k\rangle \in \{\langle i', k'\rangle | 1 \leq i' \leq n, k' \in a_{i'}\}\} = a_i$.

En suivant les mêmes arguments que dans les exercices précédents, il suffit de démontrer que f et g sont monotones. Mais ceci est évident. □

▸ **EXERCICE 4.8**

Soit D une famille dirigée de $\sum_{j \in J} A_j$. Pour tout couple d'éléments (i, a) et (i', a') de D, comme D est dirigé, il existe un (i'', a'') dans D tel que $(i, a) \leq (i'', a'')$ et $(i', a') \leq (i'', a'')$, donc $i = i'' = i'$. Comme D est non vide, il existe un élément (i, a) dans D, et tous les éléments de D sont, par la remarque de la phrase précédente, de la forme (i, a') avec le même i. D est donc inclus dans une unique composante $\{i\} \times A_i$ de $\sum_{j \in J} A_j$. On peut en particulier construire $(i, \bigvee\{a | (i, a) \in D\})$, où le sup de droite est pris dans A_i. C'est clairement le sup de D dans $\sum_{j \in J} A_j$. En particulier, $\sum_{j \in J} A_j$ est un cpo.

Le fait que l'injection $\iota_i : A_i \to \sum_{j \in J} A_j$ est continue signifie exactement que, pour tout D dirigé dans A_i, $(i, \bigvee D) = \bigvee\{(i, a) | a \in D\}$. Mais c'est une conséquence immédiate de la définition du sup ci-dessus.

Si $f_i : A_i \to C$ est continue pour tout i, soit $f : \sum_{j \in J} A_j \to C$ définie par $f(i, a) = f_i(a)$. Cette fonction est continue, parce que toute famille dirigée D de $\sum_{j \in J} A_j$ est de la forme $\{(i, a) | a \in D'\}$ pour une certaine famille dirigée D' de A_i, pour un certain i : en effet, $f(\bigvee D)$ est alors juste $f_i(\bigvee D') = \bigvee f_i(D')$ (puisque f_i est continue) $= \bigvee f(D)$. □

▸ **EXERCICE 4.9**

Comme à l'exercice 4.7, le codage proposé était faux, et pour des raisons similaires de typage.

On peut s'en sortir comme suit. Tout élément (i, a), où a est un élément de $\mathbb{P}\omega$, est sup d'une famille d'éléments (i, e), où $e \subseteq a$ est fini. Mais on peut coder (i, e) en l'entier $\langle i, [e]\rangle$.

Définissons donc $f : \sum_{j\in J} A_j \to \mathbb{P}\omega$ par $f(i, a) = \{\langle i, [e]\rangle | e \text{ fini } \subseteq a\}$, et posons A l'image de f. Notons que, pour tout $x \in A$, il existe un unique $i \in I$ tel que tous les éléments de x sont de la forme $\langle i, n\rangle$: l'unicité est par construction, l'existence est parce que x contient toujours un élément de la forme $\langle i, [\emptyset]\rangle$.

La réciproque de f est donnée par $g(x) = (i, \bigcup\{e | \langle i, [e]\rangle \in x\})$, où i est l'unique i décrit ci-dessus. En effet, $g(f(i, a)) = (i, \bigcup\{e | e \text{ fini } \subseteq a\}) = (i, a)$. Il est clair que f est monotone, de même que g. Par les mêmes arguments que dans les exercices précédents, ceci suffit pour montrer que (f, g) forme un isomorphisme entre $\sum_{j\in J} A_j$ et A. □

▸ EXERCICE 4.11

Posons $Val = \mathbb{P}\omega$. Par l'exercice 4.3, $Val_\perp$ est isomorphe à un sous-cpo de $\mathbb{P}\omega$. De même pour $Addr$, par l'exercice 4.5. Par l'exercice 4.4, $Mem = Addr \to_{fin} Val$ est isomorphe à une somme de produits de copies de Val, et donc à un sous-cpo de $\mathbb{P}\omega$ par les exercices 4.7 et 4.9. Par l'exercice 4.7, il existe donc un sous-cpo de Val isomorphe à $Mem \times Val$, donc un autre isomorphe à $(Mem \times Val)_\perp$ par l'exercice 4.3, et donc encore un isomorphe à $[Mem \times Val \to (Mem \times Val)_\perp]$ par l'exercice 4.4.

Par les exercices 4.7 et 4.9, $Val^* = \sum_{i\in\mathbb{N}} Val^i$ est isomorphe à un sous-cpo de $\mathbb{P}\omega$ aussi. C'est aussi le cas de $Addr$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{B}$ par l'exercice 4.5.

La somme de ces sous-cpos est encore isomorphe à un sous-cpo de $\mathbb{P}\omega = Val$ par l'exercice 4.9. Ceci nous permet de conclure. □

▸ EXERCICE 4.13

Pour l'équation (4), si $[\![N]\!]_{\text{caml}}\,\rho\mu' \neq \perp$ et $[\![\rho]\!]_{\text{caml}}\,\mu = (\mu', \phi) \neq \perp$, et si $\phi \in [Mem \times Val \to (Mem \times Val)_\perp]$, alors $[\![N]\!]_{\text{caml}}\,\rho\mu' \in Mem \times Val$, donc $\phi([\![N]\!]_{\text{caml}}\,\rho\mu')$ est bien défini et dans $(Mem \times Val)_\perp$. Dans les autres cas, $\perp$ est évidemment bien défini.

Dans le cas de l'équation (5), le côté droit est bien défini si et seulement si ϕ est dans $[Mem \times Val \to (Mem \times Val)_\perp]$. Comme ϕ est bien une fonction de $Mem \times Val$ dans $(Mem \times Val)_\perp$, l'essentiel est de montrer que ϕ est continue.

L'énoncé demandait de supposer que la fonction qui à ρ' associe $[\![M]\!]_{\text{caml}}\,\rho'\mu''$ est continue, pour toute mémoire μ''. Il est bien sûr plus raisonnable de demander que la fonction qui à $(\rho', \mu'') \in Env \times Mem$ associe $[\![M]\!]_{\text{caml}}\,\rho'\mu'' \in (Mem \times Val)_\perp$ est continue. Dans ces conditions, ϕ est la composée de cette dernière avec la fonction qui à $(\mu'', V) \in Mem \times Val$ associe $(\rho[x \mapsto V], \mu'')$. La composée de deux fonctions continues étant continue, il suffit de vérifier que la fonction qui à (μ'', V) associe $(\rho[x \mapsto V], \mu'')$ est continue. Par la dernière partie du lemme 11, il suffit de vérifier que les fonctions qui à (μ'', V) associent respectivement $\rho[x \mapsto V]$ et μ'' sont continues. La seconde est juste π_2, qui est continue par le lemme 11. La première est la composée de la fonction qui à V associe $\rho[x \mapsto V]$ et de π_1. Cette dernière étant continue, il ne reste qu'à montrer que la fonction qui à $V \in Val$ associe $\rho[x \mapsto V]$ est continue. Mais c'est évident, parce que l'ordre sur Env est l'ordre point à point (ou variable à variable). □

▸ **EXERCICE 4.15**

Supposons f continue de $X \times Y$ vers Z. Pour toute partie dirigée D de Y, et pour tout $x \in X$, la partie $\{x\} \times D$ de $X \times Y$ est dirigée. Soit f_x la fonction qui à y associe $f(x, y)$. Comme f est continue $f(\bigvee\{x\} \times D) = \bigvee f(\{x\} \times D)$, autrement dit, puisque $\bigvee\{x\} \times D = \{x\} \times \bigvee D$, $f_x(\bigvee D) = \bigvee f_x(D)$. Donc f_x est continue. De même, la fonction qui à tout x associe $f(x, y)$, à y fixé, est continue, par un argument similaire.

À noter que l'argument consistant à dire que ce résultat est déjà vrai pour toute fonction continue, que ce soit pour des topologies de Scott ou d'autres, est faux. La raison en est que le produit des cpos $X \times Y$ ne coincide pas nécessairement au produit de X et de Y *en tant qu'espaces topologiques*. Ceci est un point subtil, et facile à ignorer.

Réciproquement, supposons que f est continue en chaque argument séparément. Supposons $(x, y) \leq (x', y')$. Alors $f(x, y) \leq f(x, y')$ (car f est monotone en son deuxième argument) $\leq f(x', y')$ (car f est monotone en son premier argument), donc f est monotone. Soit D une famille dirigée de $X \times Y$. Soit D_1 l'image de D par la première projection π_1, et de même D_2 l'image de D par π_2. Comme π_1 et π_2 sont monotones, D_1 est une famille dirigée de X et D_2 une famille dirigée de Y. Lors de l'exercice 4.6, on a montré que $\bigvee D = (\bigvee D_1, \bigvee D_2)$. On a maintenant :

$$\begin{aligned}
f(\bigvee D) &= f(\bigvee D_1, \bigvee D_2) \\
&= \bigvee_{x \in D_1} f(x, \bigvee D_2) && \text{(car } f \text{ est continue en son premier argument)} \\
&= \bigvee_{x \in D_1} \bigvee_{y \in D_2} f(x, y) && \text{(car } f \text{ est continue en son second argument)} \\
&= \bigvee f(D_1 \times D_2)
\end{aligned}$$

Or $\bigvee f(D_1 \times D_2) \geq \bigvee f(D)$, car $D_1 \times D_2$ contient D.

Pour démontrer l'inégalité inverse, notons que tout élément (x, y) de $D_1 \times D_2$ est inférieur ou égal à un élément de D. En effet, comme $x \in D_1$, il existe $y' \in D_2$ tel que (x, y') soit dans D. De même, il existe $x' \in D_1$ tel que (x', y) soit dans D. Comme D est dirigée, il existe $(x'', y'') \in D$ tel que $(x, y') \leq (x'', y'')$ et $(x', y) \leq (x'', y'')$, en particulier tel que $x \leq x''$ et $y \leq y''$, donc $(x, y) \leq (x'', y'')$. Comme tout élément (x, y) de $D_1 \times D_2$ est inférieur ou égal à un élément de D, et que f est monotone, tout majorant de $f(D_1 \times D_2)$ majore aussi $f(D)$, donc $\bigvee f(D_1 \times D_2) \leq \bigvee f(D)$.

Donc $\bigvee f(D_1 \times D_2) = \bigvee f(D)$, c'est-à-dire $f(\bigvee D) = \bigvee f(D)$. □

▸ **EXERCICE 4.16**

On montre que la définition de $[\![M]\!]_{\mathrm{caml}}$ est valide et définit une fonction continue de $Env \times Mem$ dans $(Mem \times Val)_\perp$, pour tout M, par récurrence structurelle sur M.

(3) $[\![x]\!]_{\mathrm{caml}}\,\rho\mu = (\mu, \rho(x))$ est bien définie. Elle est continue en ρ et μ par l'exercice 4.7 et le fait que la fonction qui à ρ associe $\rho(x)$ est continue, de façon immédiate.

(4) On a déjà montré que l'équation (4) était bien définie. Il reste à montrer que $[\![MN]\!]_{\mathrm{caml}}\,\rho\mu$ dépend de façon continue de ρ et μ.

Soit donc D une famille dirigée de $Env \times Mem$. Si l'image de D par $[\![MN]\!]_{\text{caml}}$ est réduite à $\bot$, alors la préservation du sup est évidente. Sinon, soit D' le sous-ensemble de D des (ρ, μ) tels que $[\![MN]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu \neq \bot$. D' est par hypothèse non vide.

Je prétends que : $(*)$ si $(\rho, \mu) \in D'$ et $(\rho_1, \mu_1) \in D$ est tel que $(\rho, \mu) \leq (\rho_1, \mu_1)$, alors (ρ_1, μ_1) est dans D'. En effet, comme $(\rho, \mu) \in D'$, $[\![M]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu \neq \bot$, donc $[\![M]\!]_{\text{caml}}\, \rho_1\mu_1 \geq [\![M]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu$ (par monotonie, obtenue par hypothèse de récurrence) $\neq \bot$. De plus, si $(\mu', \phi) = [\![M]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu$ et $(\mu'_1, \phi_1) = [\![M]\!]_{\text{caml}}\, \rho_1\mu_1$, alors $\mu' \leq \mu'_1$ et $\phi \leq \phi_1$. On en déduit que $[\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho_1\mu'_1 \geq [\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu'$ (par monotonie, obtenue par hypothèse de récurrence) $\neq \bot$ (car (ρ, μ) est dans D'). Comme $\phi_1 \geq \phi$, et ϕ est dans $[Mem \times Val \to (Mem \times Val)_\bot]$, alors ϕ_1 est aussi dans $[Mem \times Val \to (Mem \times Val)_\bot]$: ceci est une conséquence de la construction du coproduit dans les cpo — tout élément supérieur ou égal à un élément d'un sommande est dans ce même sommande. Finalement, comme (ρ, μ) est dans D', $\phi([\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu') \neq \bot$, donc $\phi_1([\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho_1\mu'_1) \geq \phi([\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho_1\mu'_1)$ (car $\phi_1 \geq \phi$) $\geq \phi([\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu')$ (par monotonie de ϕ) est différent de $\bot$. Donc (ρ_1, μ_1) est dans D'.

Par $(*)$, D' est une famille dirigée : si $x, y \in D'$, x et y sont dans D, donc il existe $z \in D$ tel que $x, y \leq z$. Par $(*)$, z est alors dans D'.

Remarquons maintenant que : $(**)$ pour tout x dans D, il existe $y \geq x$ dans D'. En effet, D' est non vide, et contient donc un élément z. Comme x et z sont dans D, il existe un $y \geq x, z$ dans D. Comme $y \geq z$, par $(*)$ y est dans D'.

Il est alors clair que D et D' ont le même sup : $\bigvee D' \leq \bigvee D$ parce que D' est inclus dans D, et $\bigvee D \leq \bigvee D'$ parce que tout élément de D est inférieur ou égal à un élément de D', par $(**)$. Par le même argument, les images de D et de D' par $[\![MN]\!]_{\text{caml}}$ ont le même sup. Nous n'avons donc à démontrer que $\bigvee [\![MN]\!]_{\text{caml}}\, (D') = [\![MN]\!]_{\text{caml}}\, (\bigvee D')$.

Montrons maintenant que : $(***)$ l'application (d'application !) qui à $(\phi, x) \in [X \to Y] \times X$ associe $\phi(x) \in Y$ est continue. Par l'exercice 4.15, il suffit de vérifier que, à ϕ fixé, l'application $x \mapsto \phi(x)$ est continue (évident), et que, à x fixé, l'application $\phi \mapsto \phi(x)$ est continue. Or elle est monotone : si $\phi \leq \phi'$ alors $\phi(x) \leq \phi'(x)$. En conséquence, si D est une famille dirigée de $[X \to Y]$, $\{\phi(x) | \phi \in D\}$ est dirigée elle aussi. Alors $\bigvee\{\phi(x) | \phi \in D\} = (\bigvee D)(x)$, par définition du sup dans les espaces de fonctions continues. Mais ceci exprime la continuité de la fonction qui à ϕ associe $\phi(x)$.

Revenons à nos moutons. Pour chaque $(\rho, \mu) \in D'$, posons $(\mu'_{\rho,\mu}, \phi_{\rho,\mu}) = [\![M]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu \neq \bot$. Posons d'autre part $(\mu', \phi) = [\![M]\!]_{\text{caml}}\, (\bigvee D')$. Par hypothèse de récurrence, $[\![M]\!]_{\text{caml}}$ est continue, donc $(\bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} \mu'_{\rho,\mu}, \bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} \phi_{\rho,\mu}) = [\![M]\!]_{\text{caml}}\, (\bigvee D')$, soit $\bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} \mu'_{\rho,\mu} = \mu'$ et $\bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} \phi_{\rho,\mu} = \phi$. Par hypothèse de récurrence encore, $[\![N]\!]_{\text{caml}}$ est continue, donc $\bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} [\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu'_{\rho,\mu} = [\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho(\bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} \mu'_{\rho,\mu}) = [\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu'$. Donc $\bigvee [\![MN]\!]\, (D') = \bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} [\![MN]\!]\, \rho\mu = \bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} \phi_{\rho,\mu}([\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu'_{\rho,\mu}) = (\bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} \phi_{\rho,\mu})(\bigvee_{(\rho,\mu)\in D'} [\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu'_{\rho,\mu})$ (par $(***)$) $= \phi([\![N]\!]_{\text{caml}}\, \rho\mu') = [\![MN]\!]_{\text{caml}}\, (\bigvee D')$.

(5) On a déjà vu que cette définition était valide à condition de supposer que la fonction qui à ρ'', μ'' associe $[\![\rho]\!]''_{\text{caml}}\, \mu''$ était continue, ce que nous obtenons ici par hypothèse de récurrence. Posant $\phi(\rho)$ la fonction envoyant (μ'', V) vers $[\![M]\!]_{\text{caml}}\, (\rho[x \mapsto V])\mu''$, il reste à montrer que la fonction qui envoie (ρ, μ) vers $(\mu, \phi(\rho))$ est continue. Par l'exercice 4.7, il suffit de montrer que ϕ est elle-même continue en ρ. Soit donc D une famille dirigée d'environnements. À V fixé, la famille $\{\rho[x \mapsto V] | \rho \in D\}$ est dirigée, de plus $\bigvee_{\rho \in D} \rho[x \mapsto V] = (\bigvee D)[x \mapsto V]$. Comme $[\![M]\!]_{\text{caml}}$ est continue par hypothèse de récurrence, $\bigvee_{\rho \in D} [\![M]\!]_{\text{caml}} (\rho[x \mapsto V])\mu'' = [\![M]\!]_{\text{caml}} (\bigvee D[x \mapsto V])\mu''$, donc $\bigvee_{\rho \in D} \phi(\rho) = \phi(\bigvee D)$, ce qu'il fallait démontrer.

(6) Soit D une famille dirigée de $Env \times Mem$. Si pour tous $(\rho, \mu) \in D$, $[\![\texttt{let } x = M \texttt{ in } N]\!]_{\text{caml}} \rho\mu = \bot$, alors le sup est préservé. Sinon, comme plus haut, soit D' l'ensemble des (ρ, μ) tels que $[\![\texttt{let } x = M \texttt{ in } N]\!]_{\text{caml}} \rho\mu = \bot$. Encore une fois, on peut montrer que si $x \in D'$ et $y \in D \geq x$, alors $y \in D'$, et que tout élément de D est plus petit ou égal à un élément de D', donc que l'on peut raisonner sur D' plutôt que sur D. On conclut par la continuité de $[\![N]\!]_{\text{caml}}$ et $[\![M]\!]_{\text{caml}}$, par hypothèse de récurrence.

(7) Comme plus haut, soit D une famille dirigée de $Env \times Mem$, et raisonnons sur D', le sous-ensemble des (ρ, μ) de D tels que $[\![\texttt{ref } M]\!]_{\text{caml}} \rho\mu \neq \bot$. Tout élément de D est plus petit ou égal à un élément de D', donc on peut raisonner sur D' plutôt que sur D.

La propriété selon laquelle si $x \in D'$ et $y \in D \geq x$, alors $y \in D'$ n'est valide que parce que $\mu' \leq \mu'_1$ implique $\text{dom } \mu' = \text{dom } \mu'_1$ (voir discussion de la question 4.1). En effet, sinon il est possible que l'on ait un $(\rho, \mu) \in D'$, $(\rho_1, \mu_1) \in D$ avec $\rho \leq \rho_1$, $\mu \leq \mu_1$ et, en posant $(\mu', V) = [\![M]\!]_{\text{caml}} \rho\mu$ et $(\mu'_1, V_1) = [\![M]\!]_{\text{caml}} \rho_1\mu_1$, on aurait $\mu' \leq \mu'_1$ et $V \leq V_1$. Si $\mu' \leq \mu'_1$ n'impliquait pas $\text{dom } \mu' \leq \text{dom } \mu'_1$, $a = alloc(\text{dom } \mu')$ et $a_1 = alloc(\text{dom } \mu'_1)$ ne seraient pas nécessairement égales ; il est même envisageable que $a' = \bot$, auquel cas (ρ_1, μ_1) ne serait pas dans D'.

Avec notre choix d'ordre sur Mem en question 4.1, on a $a = a_1$. Et comme $a \neq \bot$, $a_1 \neq \bot$.

Posons $(\mu'_{\rho,\mu}, V_{\rho,\mu}) = [\![M]\!]_{\text{caml}} \rho\mu$ pour tout $(\rho, \mu) \in D'$. Par hypothèse de récurrence, $[\![M]\!]_{\text{caml}}$ est continue, donc $\bigvee_{(\rho,\mu) \in D'} \mu'_{\rho,\mu} = \mu'$ et $\bigvee_{(\rho,\mu) \in D'} V_{\rho,\mu} = V$, où $(\mu', V) = [\![(]\!]_{\text{caml}} \bigvee D)$. Comme $\text{dom } \mu'_{\rho,\mu}$ est le même quel que soit $(\rho, \mu) \in D$, $a = alloc(\text{dom } \mu'_{\rho,\mu})$ est bien défini ; de plus $a = alloc(\bigvee_{(\rho,\mu) \in D'} \text{dom } \mu'_{\rho,\mu}) = alloc(\text{dom } \mu')$, donc l'adresse a est une fonction continue (car constante) de (ρ, μ). La mémoire $\mu'[a \mapsto V]$ est alors le sup des $\mu'_{\rho,\mu}[a \mapsto V_{\rho,\mu}]$, donc $\bigvee_{(\rho,\mu) \in D'} [\![\texttt{ref } M]\!]_{\text{caml}} \rho\mu = [\![\texttt{ref } M]\!]_{\text{caml}} (\bigvee D')$.

(8) La démonstration procède comme dans les cas ci-dessus, en ramenant l'étude de la préservation des sups sur D à ceux sur D'. Si $(\mu'_{\rho,\mu}, a_{\rho,\mu}) = [\![M]\!]_{\text{caml}} \rho\mu$ pour tout $(\rho, \mu) \in D'$, on note que, comme $Addr$ est un cpo plat, tous les $a_{\rho,\mu}$ sont identiques ; en appelant a cette valeur commune, qui est aussi leur sup, elle est dans $\text{dom } \mu'_{\rho,\mu}$ pour tout $(\rho, \mu) \in D'$, et clairement $\bigvee_{(\rho,\mu) \in D'} \mu'_{\rho,\mu}(a)$ vaut $\mu'(a)$, où $(\mu', a) = [\![!M]\!]_{\text{caml}} (\bigvee D')$.

(9) Procède de façon similaire.

(10) Similaire, en notant que l'ordre sur Val^n est l'ordre composante par composante.

(11) Similaire.

(12) Similaire, en particulier au cas $\texttt{let } x = M \texttt{ in } N$.

(13) Similaire. Le point intéressant ici est que $\mathbb{B}$ est plat. En particulier, le seul élément supérieur ou égal à 1 est 1, et le seul élément supérieur ou égal à 0 est 0. Si l'on définit $(\mu'_{\rho,\mu}, b_{\rho,\mu}) = [\![M]\!]_{\text{caml}} \rho\mu$ pour chaque $(\rho, \mu) \in D'$, comme pour les adresses plus haut, tous les $b_{\rho,\mu}$ sont égaux, et égaux à b, où $(\mu', b) = [\![M]\!]_{\text{caml}} (\bigvee D)$, par continuité de $[\![M]\!]_{\text{caml}}$. $\square$