Jean Goubault-Larrecq

Calculabilité

2. Machines I/O à k bandes de travail

Aujourd'hui

- Machines I/O à k bandes
- Equivalence avec les machines de Turing à une bande
- Notions de complexité en temps, en espace
- Basé sur le poly d'Hubert Comon:
  http://www.lsv.fr/~comon/Calculabilite1/cours20.1.pdf

Machines I/O à k bandes de travail

Machines I/O à k bandes de travail

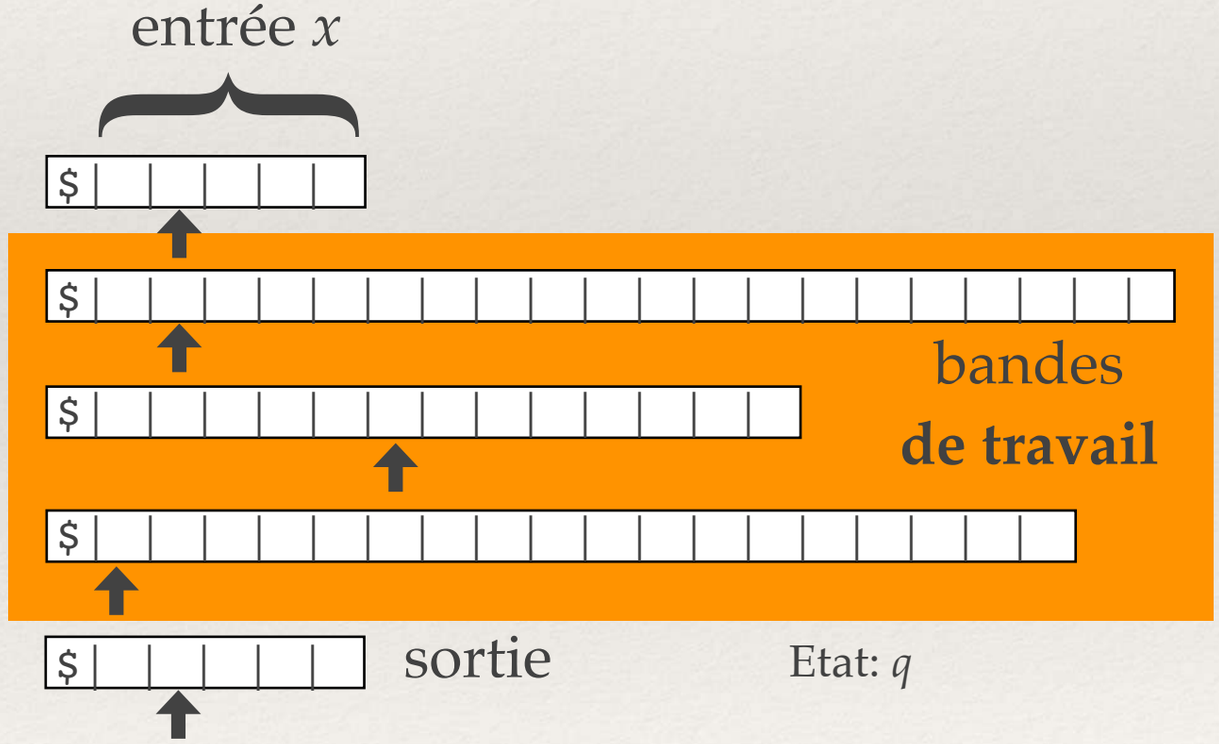
- k+2 bandes, dont
  1 bande d'entrée en **lecture seule**
  1 bande de sortie en **écriture seule**
  $k \geq 1$ bandes **de travail**

bande de sortie **optionnelle**
si on cherche juste à **décider**
des langages

- $\delta : Q \times \sum^{k+1} \rightarrow Q^+ \times \sum^{k+1} \times \mathrm{Dir}^{k+2}$
  [contraintes: écrit `$` uniquement en début de bandes
  + ne va jamais à droite du premier `B` sur la bande d'entrée]

pas k+2: on ne lit pas
sur la bande de sortie

pas k+2: on n'écrit pas
sur la bande d'entrée



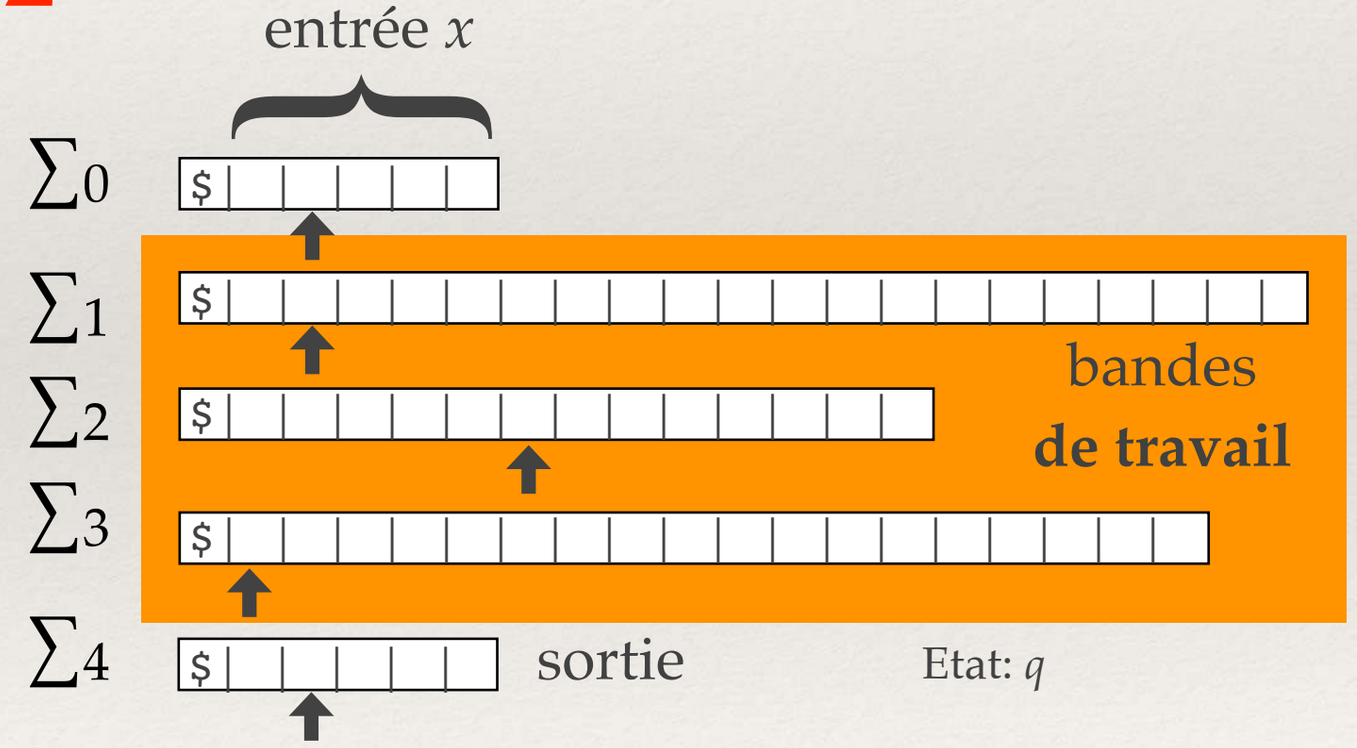
- Dans le poly: k=1

- Initialement, `$`x sur bande d'entrée,
  autres bandes vides (juste `$`)

Machines I/O à k bandes de travail

- On peut encore raffiner: on n'a pas besoin que l'alphabet soit le même sur toutes les bandes
- $\delta : Q \times \Pi_{i=0}^{k} \Sigma_i \rightarrow Q^+ \times \Pi_{i=1}^{k+1} \Sigma_i \times \mathrm{Dir}^{k+2}$

  [soumis aux contraintes usuelles]
- Intérêt: on peut changer l'alphabet des **bandes de travail** en binaire, tout en laissant intact l'alphabet de l'entrée



Equivalence entre les modèles

- Tous ces modèles calculent les **mêmes** fonctions,
  et décident les **mêmes** langages
- On va le montrer, tout en montrant quels coûts
  ces traductions impliquent,
  en **temps**,
  et en **espace**

Complexité en temps, en espace

Temps

- Le **temps** d'exécution de M (1 bande, k bandes, I/O, etc.) sur l'entrée x est le nombre de mouvements effectués jusqu'à l'arrêt

  [$=m$, si $\gamma_0 \vdash_M \gamma_1 \vdash_M \ldots \vdash_M \gamma_m$ avec $\gamma_0 = (\varepsilon, q_0, \$x)$ et γ_m finale; ∞ sinon]

- M calcule **en temps $f(n)$** ssi le temps d'exécution de M sur toute entrée de taille n

  est $\leq f(n)$ [inférieur ou égal, pas =]

Classes de complexité en temps

- Un langage L est dans **TIME($f(n)$)**
  ssi il est décidé par une machine I/O à k bandes M
  qui termine en temps $f(n)$ [pour un certain k]
- i.e.: pour toute entrée x [de taille n],
  M décide [accepte si dans L, rejette sinon]
  en temps $f(n)$

Espace

- L'**espace** utilisé par une configuration est:
  — la taille de la bande [machine à 1 bande]
  — la somme des tailles des bandes [machines à k bandes]
  — la somme des tailles des bandes **de travail** [machines I/O]

- L'**espace** d'exécution de M sur l'entrée x est l'espace **sup** utilisé au cours de l'exécution correspondante

- M calcule **en espace $f(n)$** ssi l'espace d'exécution de M sur toute entrée de taille n

  est $\leq f(n)$ [inférieur ou égal, pas =]

Classes de complexité en espace

- Un langage L est dans **SPACE($f(n)$)**
  ssi il est décidé par une machine I/O à k rubans M
  qui termine en espace $f(n)$ [pour un certain k]
- i.e.: pour toute entrée x [de taille n],
  M décide [accepte si dans L, rejette sinon]
  en espace $f(n)$
- Note: M termine, mais on n'a pas dit en combien de temps

Equivalence des modèles de calcul

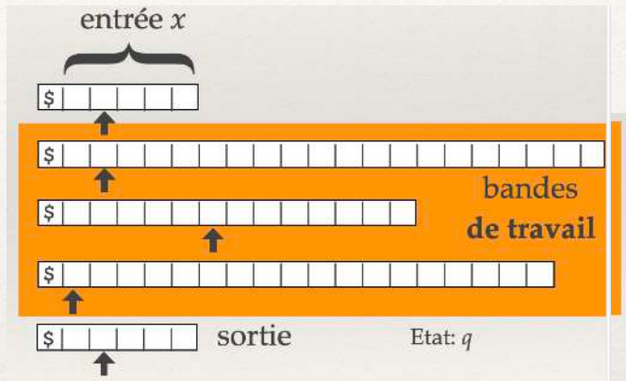
Une bande → k bandes

- Trivial ($k \geq 1$),
  à condition que l'entrée **et** la sortie soient sur la bande 1

- Avec l'entrée sur la bande 1 et la sortie sur la bande k,
  on doit d'abord **copier** la bande 1 sur la bande k,
  puis simuler M en utilisant la bande k exclusivement

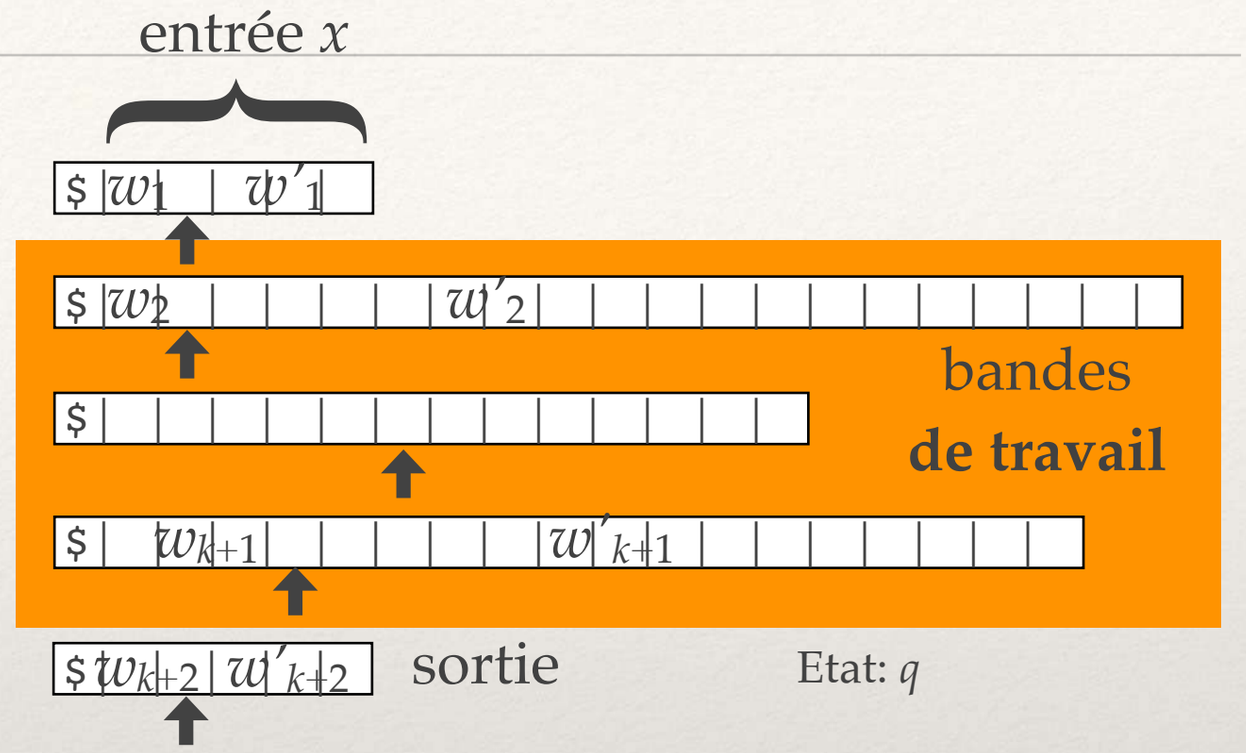
- Si M en temps $f(n)$, M' en temps $f(n)+2n$
  Si M en espace $g(n)$, M' en espace $g(n)+n$

k bandes → k bandes I/O



- Soit M à k bandes,
  entrée sur bande 1, sortie sur bande k
- M': — recopie la bande 1 sur la bande 2
  — simule M sur les bandes 2…k+1 (au lieu de 1…k)
  sans lire ni écrire sur les bandes 1 et k+2
  — si **accept**, recopie la bande k+1 sur la bande k+2
- Si M en temps $f(n)$ et en espace $g(n)$,
  M' en temps $f(n)+2n+g(n)$
  M' en espace $g(n)$ [rappel: on ne compte que l'espace de bandes de travail]

k bandes I/O → une bande



- C'est bien sûr
  la partie intéressante.
- On va recoder
  chaque configuration:
- sur **une seule bande**:

$$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{D}w_2\#w'_2\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$$

- l'état courant entre deux étapes simulées étant $[q,\varepsilon,0]$
  la tête entre deux étapes simulées étant complètement à gauche
- On étend l'alphabet avec de nouvelles lettres: $\underline{\$}$,#,D,F
  On découvrira au fur et à mesure les états de la nouvelle machine

k bandes I/O → une bande

- On encode chaque configuration sur **une seule bande**:

$$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{D}w_2\#w'_2\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$$

- Stratégie: pour simuler **une** étape de la machine I/O,
  - parcourir toute la bande une fois pour
    collecter (dans le contrôle) les lettres sous chacune des têtes
  - parcourir une deuxième fois pour mettre à jour
    chacune des bandes simulées
- Difficulté: chaque bande simulée peut **grossir**
  (d'au plus une case)

Elargir les bandes

- On fabrique une (sous-)machine qui, partant de:

  $\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{D}w_2\#w'_2\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

  produit: $\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{B}\mathtt{D}w_2\#w'_2\mathtt{B}\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{B}\mathtt{DF}$

- (Lemme 6.4.1 du poly, sauf qu'on a k+2 bandes au lieu de k)

- Parcourir l'entrée de gauche à droite jusqu'à rencontrer `F`, en:
  - insérant `B` chaque fois qu'on voit un `D`
  - **décalant** les sous-chaînes nécessite de **mémoriser** jusqu'à k+2 lettres: dans le contrôle (possible car k+2 est une **constante**)
- enfin faire revenir la tête complètement à gauche

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_\varepsilon,a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_\varepsilon,a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{D}w_2\#w'_2\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat q_ε

On voyage à droite jusqu'à rencontrer `D`

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_\varepsilon,a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_\varepsilon,a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_\varepsilon,\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_\mathtt{D},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{B}w_2\#w'_2\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

Etat $q_\mathtt{D}$

On écrit un `B`, on mémorise `D` dans l'état, on va à droite

Passons à la lettre suivante; sur l'exemple, supposons que w_2=`abc`, w'_2=`def`

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq$ D,F

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq$ D,F

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{B}\mathtt{abc}\#\mathtt{def}\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{D}}$

On écrit la lettre qui est dans l'état (D),
et on mémorise la lettre écrasée par l'écriture (a) dans l'état;
puis, à droite

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq$ D,F

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq$ D,F

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{BDbc\#defD} \ldots w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{a}}$

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{BDac}\#\mathtt{defD} \ldots w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{b}}$

et ainsi de suite jusqu'à arriver sur le `D` suivant

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{bw},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{w\mathtt{BD}},b,\rightarrow)$ si $|w| \leq k$

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{BDabc\#deD} \ldots w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{f}}$

on doit maintenant écrire la dernière lettre mémorisée (`f`)
puis un B

Imaginons que $w_3 = \mathtt{ghi}$, $w'_3 = \mathtt{jkl}$

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{bw},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{w\mathtt{BD}},b,\rightarrow)$ si $|w| \leq k$

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{BDabc\#deDghi\#jkl}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{f}}$

comme promis, écrivons la lettre mémorisée (`f`)

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{bw},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{w\mathtt{BD}},b,\rightarrow)$ si $|w| \leq k$

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{BDabc\#defghi\#jkl}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{BD}}$

maintenant on doit écrire B, et mémoriser g

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{bw},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{w\mathtt{BD}},b,\rightarrow)$ si $|w| \leq k$

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{BDabc\#defBhi\#jkl} \ldots w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{Dg}}$

maintenant on doit écrire D, et mémoriser h

Elargir les bandes, en animation

$\delta(q_{bw},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{wa},b,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\varepsilon},a,\rightarrow)$ si $a \neq \mathtt{D},\mathtt{F}$

$\delta(q_{bw},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{w\mathtt{BD}},b,\rightarrow)$ si $|w| \leq k$

$\delta(q_{\varepsilon},\mathtt{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\mathtt{D}},\mathtt{B},\rightarrow)$

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{BDabc\#defBDi\#jkl} \ldots w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

↑

Etat $q_{\mathtt{gh}}$

et ainsi de suite, jusqu'à atteindre le `F` de fin: $\delta(q_{bw},\mathtt{F}) \stackrel{\text{def}}{=} (q^{\mathtt{c}}{}_w,b,\rightarrow)$

on n'a plus qu'à écrire tout le mot mémorisé: $\delta(q^{\mathtt{c}}{}_{bw},\_) \stackrel{\text{def}}{=} (q^{\mathtt{c}}{}_w,b,\rightarrow)$

à la fin, il n'y a plus qu'à ramener la tête à gauche: $\delta(q^{\mathtt{c}}{}_{\varepsilon},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\text{fini}},\mathtt{F},\leftarrow)$

$\delta(q_{\text{fini}},a) \stackrel{\text{def}}{=} (q_{\text{fini}},a,\leftarrow)$ si $a \neq \underline{\$}$

Détails (et preuve formelle) dans le poly.

Elargir les bandes: complexité

On fabrique une (sous-)machine qui, partant de:

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathrm{D}w_2\#w'_2\mathrm{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathrm{DF}$

produit:

$\underline{\$}w_1\#w'_1\mathrm{B}\mathrm{D}w_2\#w'_2\mathrm{B}\mathrm{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathrm{B}\mathrm{DF}$

- Nombre d'étapes de calcul:
  2 x (longueur de la bande de fin d'étape + 1)
  = 2 x (longueur de la bande de début d'étape + k+3)

k bandes I/O → une bande

- Pour simuler **une** étape de la machine I/O,
  - élargir la bande

    $\underline{\$}w_1\#w'_1\mathtt{D}w_2\#w'_2\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#w'_{k+2}\mathtt{DF}$

  - de gauche à droite,
    collecter les lettres a_i juste à droite des #
    [il y en a toujours une!]

    $\underline{\$}w_1\#\overbrace{a_1\text{—}}^{w'_1}\mathtt{D}w_2\#\overbrace{a_2\text{—}}^{w'_2}\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#\overbrace{a_{k+2}\text{——}}^{w'_{k+2}}\mathtt{DF}$

  - calculer $\delta(q,a_1,\ldots,a_{k+1}) = (q',(b_2,\ldots,b_{k+2}),(dir_1,dir_2,\ldots,dir_{k+2}))$
    [dans le contrôle; pour l'exemple, prenons $dir_1{=}\rightarrow$, $dir_2{=}\rightarrow$, …, $dir_{k+2}{=}\downarrow$]

    $\underline{\$}w_1a_1\#\ \text{—}\mathtt{D}w_2b_2\#\ \text{—}\mathtt{D}\ \ldots\ w_{k+2}\#b_{k+2}\text{——}\mathtt{DF}$

  - de droite à gauche,
    faire les remplacements adéquats, en bougeant les # de ≤1 case

- Détails dans le poly (Théorème 6.4.2)

k bandes I/O → une bande: complexité

- Si la machine M à k bandes I/O s'exécute en **temps $f(n)$**
  - la machine que nous avons construite s'exécute en temps
    $4(n+(k+2)+1)$ [étape 1] + $4(n+2(k+2)+1)$ [étape 2]
    + … + $4(n+f(n)(k+2)+1)$ [étape $f(n)$]
    $= 4(n.f(n)) + 2(k+2).f(n).(f(n)+1) + 4f(n)$
    - Notamment, si $f(n)$ est surlinéaire ($f(n)\geq n$ pour tout n), la simulation ne prend qu'un **temps $O(f(n)^2)$**
- Si la machine M à k bandes I/O s'exécute en **espace $g(n)$**…
  un codage plus malin (qui n'étend la bande que si nécessaire) donnerait une simulation en **espace $g(n)$+cste**

Composition

Composition

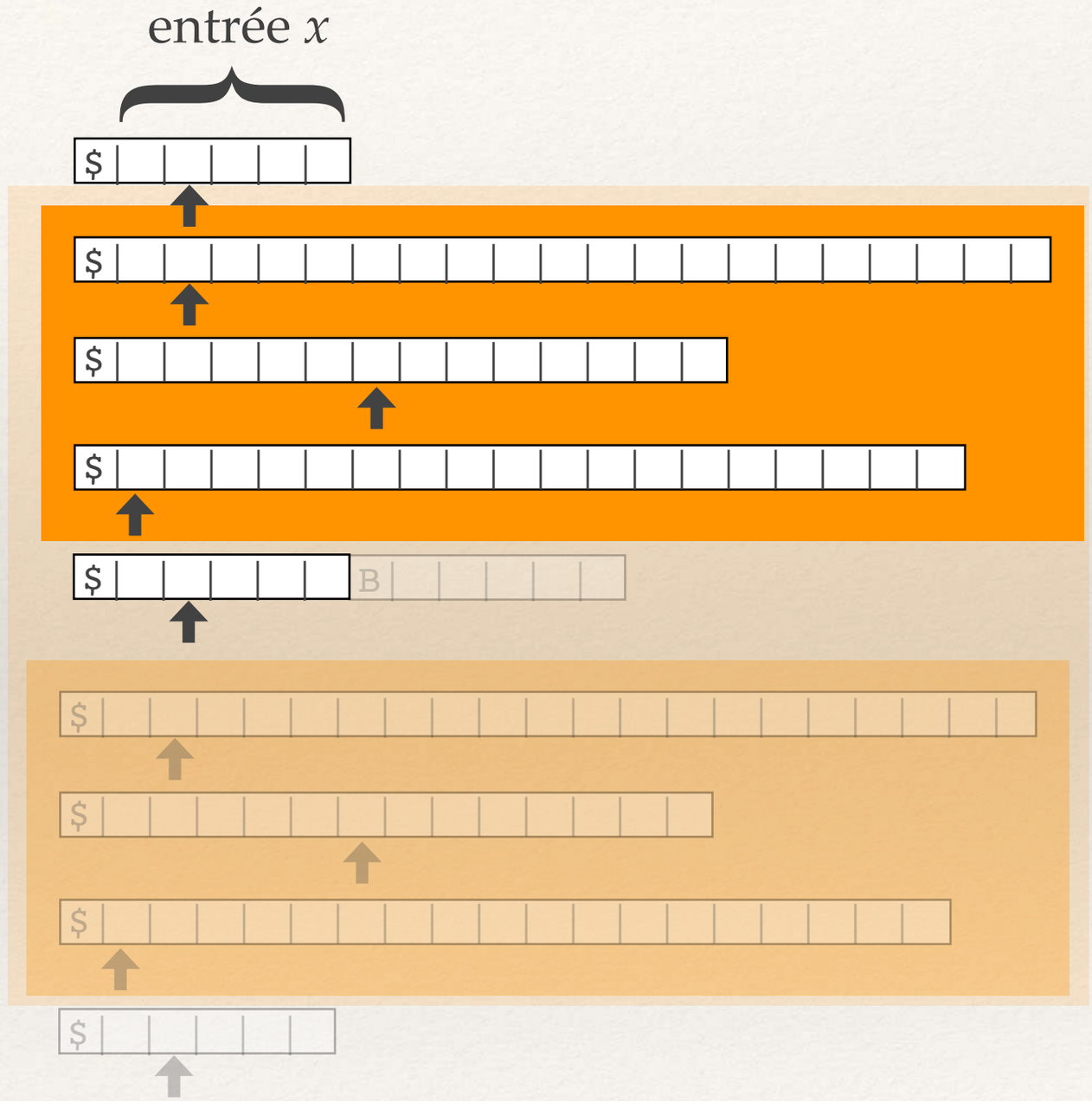
- Je vous avais dit que la composée de deux fonctions (semi-)calculables est (semi-)calculable…
  mais que la preuve du poly est erronée; voici une réparation
- On peut supposer que f et g sont calculées
  par des machines I/O à k bandes, et…
- ces machines ne vont jamais à droite du premier `B`
  sur leur bande d'entrée

Composition

1ère phase: on simule le calcul de $f(x)$

machine M_f calculant f

machine M_g calculant g



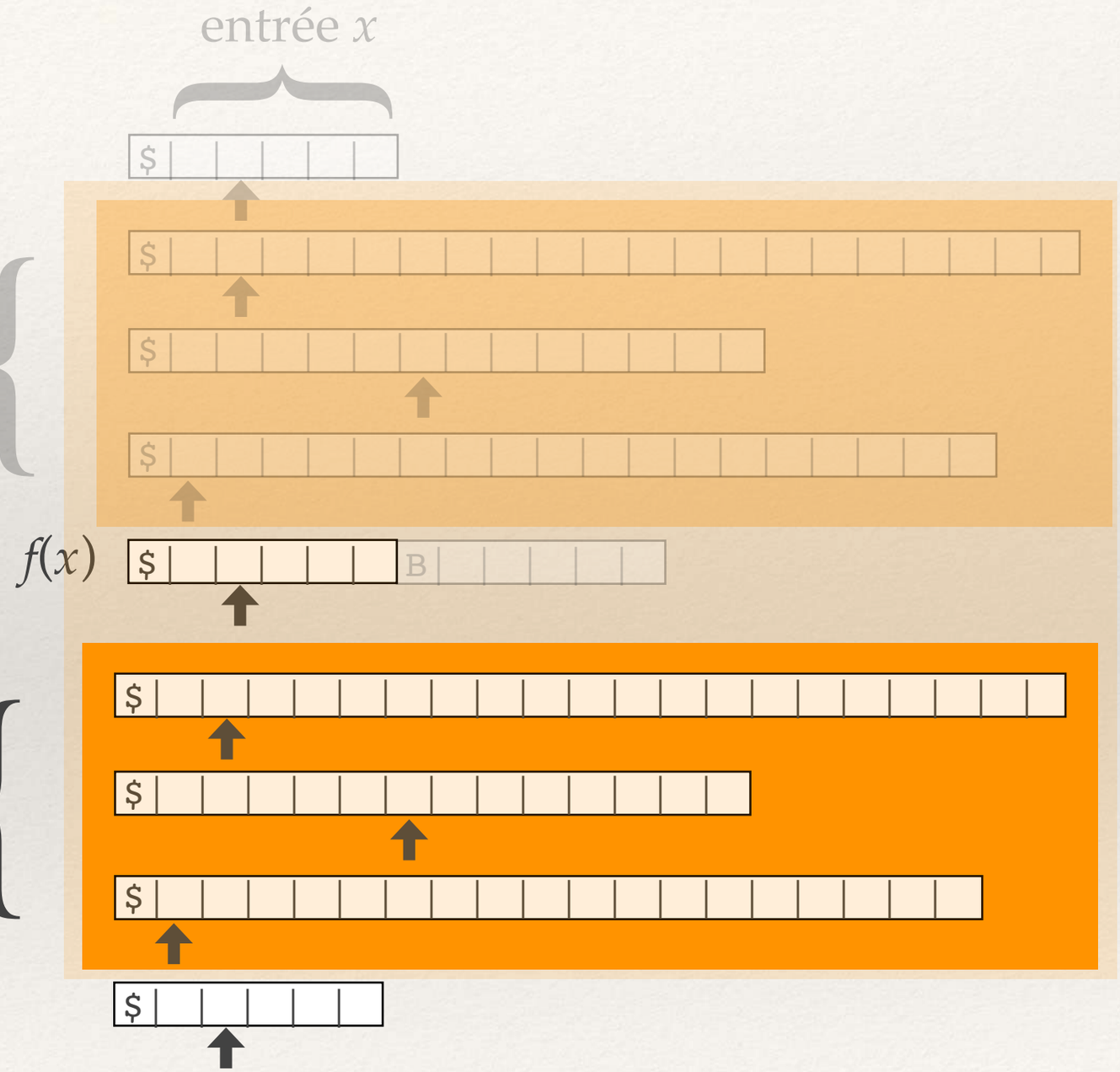
Composition

1ère phase: on simule le calcul de $f(x)$

machine M_f calculant f

2ème phase: on calcule g sur $f(x)$

machine M_g calculant g



Composition

machine M_f calculant f

Note: les nouvelles bandes de travail sont:

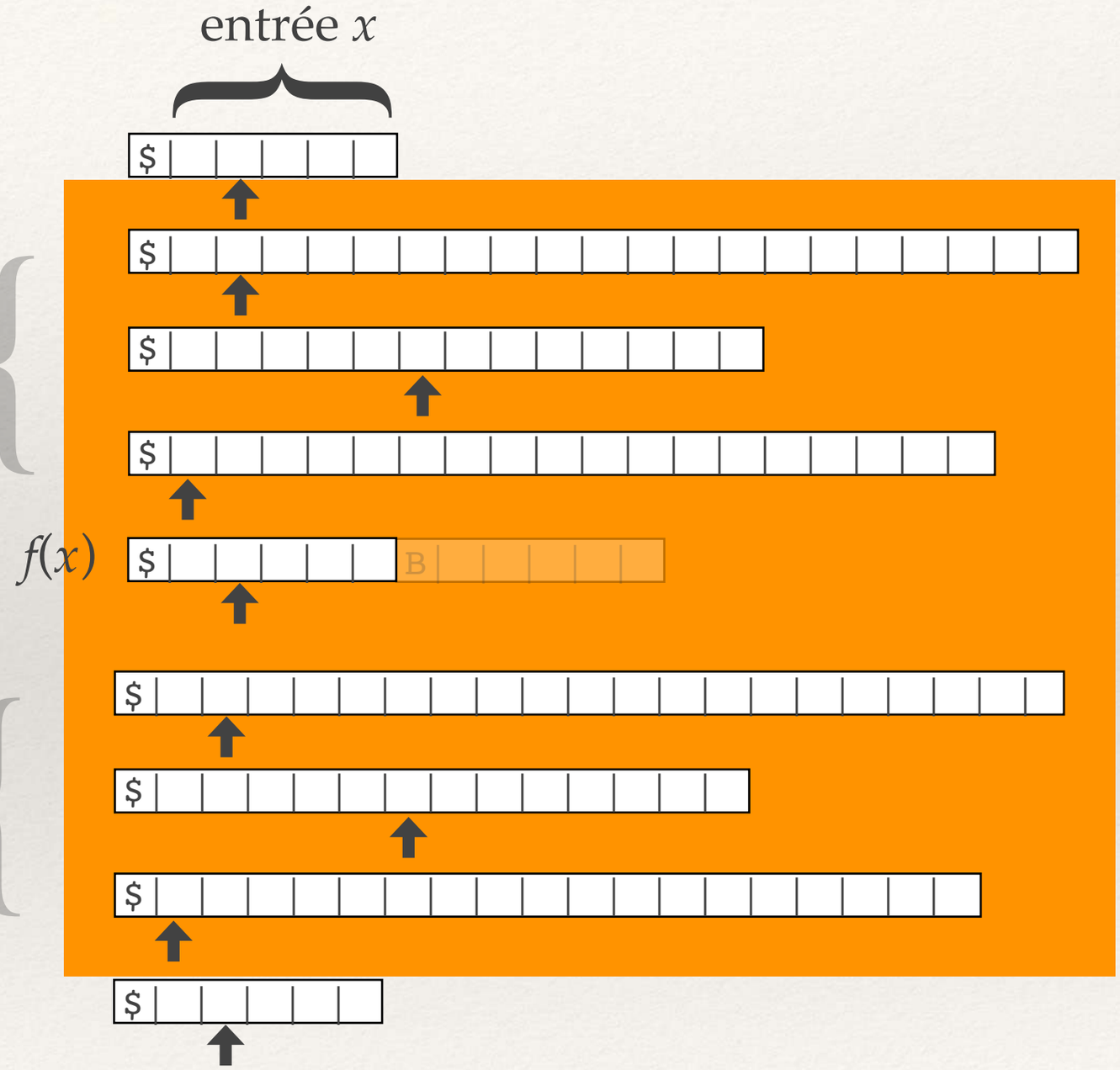
— celles de M_f

— celles de M_g

— la bande de sortie de M_f

=la bande d'entrée de M_g

machine M_g calculant g



Pouvoir expressif: un aperçu

Le langage IMP

Commandes

c	::=	$x := e$	affectation
	|	`skip`	ne rien faire
	|	$c_1 ; c_2$	séquence
	|	`if` e `then` c_1 `else` c_2	conditionnelle
	|	`while` e `do` c	boucle while

Expressions

e	::=	x	variables
	|	$\dot{n}$	constante entière ($n \in \mathbb{Z}$)
	|	$e \dot{+} e$	addition
	|	$\dot{-} e$	opposé

Sémantique: si la valeur de e est **non nulle** alors faire c_1 sinon c_1

- (Un langage que nous reverrons en Prog 1, 2ème partie)
- Nous allons traduire chaque programme IMP
  en une machine de Turing à k bandes de travail
  (sketch)

Simplifications (1/2)

Commandes

c	::=	$x := e$	affectation
	|	`skip`	ne rien faire
	|	$c_1 ; c_2$	séquence
	|	`if` e `then` c_1 `else` c_2	conditionnelle
	|	`while` e `do` c	boucle while

Expressions

e	::=	x	variables
	|	$\dot{n}$	constante entière ($n \in \mathbb{Z}$)
	|	$e \dot{+} e$	addition
	|	$\dot{-} e$	opposé

- On demande à ce que les affectations soient de la forme

  $x{:=}y$

  ou $x{:=}$constante

  ou $x{:=}y{+}z$ (avec x,y,z deux à deux distinctes)

  ou $x{:=}{-}y$ (avec x,y distinctes)

- quitte à utiliser des variables supplémentaires

- Exemple: $x{:=}y{+}y{+}(-x) \rightarrow y_1{:=}y;\ y_2{:=}y;\ x_1{:=}y_1{+}y_2;\ x_2{:=}{-}x;\ x{:=}x_1{+}x_2$

Simplifications (2/2)

Commandes

c	::=	$x := e$	affectation
	|	`skip`	ne rien faire
	|	$c_1 ; c_2$	séquence
	|	`if` e `then` c_1 `else` c_2	conditionnelle
	|	`while` e `do` c	boucle while

Expressions

e	::=	x	variables
	|	$\dot{n}$	constante entière ($n \in \mathbb{Z}$)
	|	$e \dot{+} e$	addition
	|	$\dot{-} e$	opposé

- Dans `if` e `then` c_1 `else` c_2 et dans `while` e `do` c, on demande que e soit une **variable**
- quitte à utiliser des variables supplémentaires
- Exemple: `if` $x+y+(-3)$ `then` c_1 `else` c_2

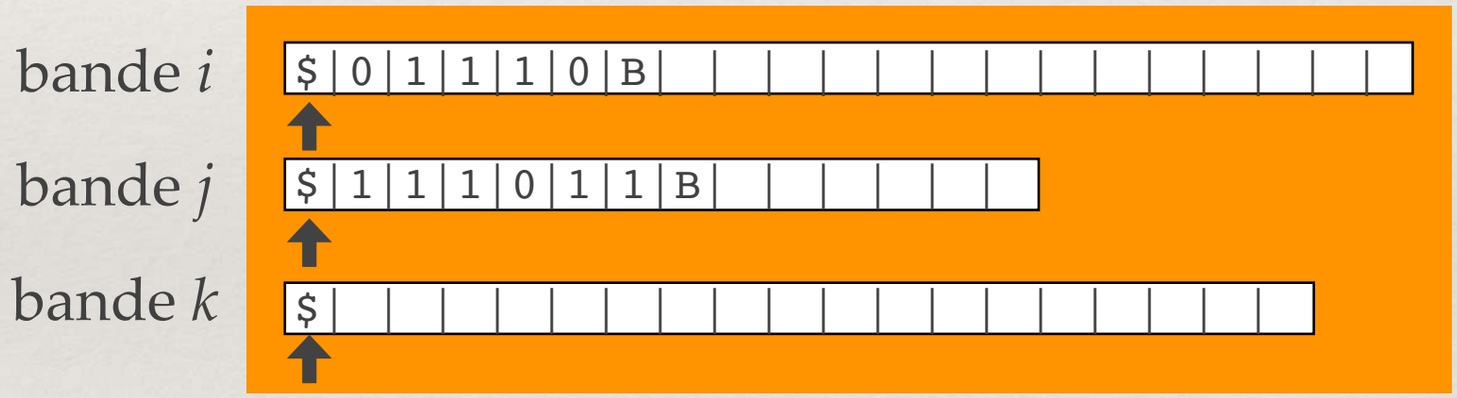
  → $z_1{:=}x+y$; $z_2{:=}-3$; $z{:=}z_1+z_2$; `if` z `then` c_1 `else` c_2

Traduction

- Etant donnée une commande c_0, où apparaissent k+2 variables:
  — x_0 (entrée)
  — x_1, …, x_k
  — x_{k+1} (sortie)
  on crée une machine I/O à k bandes
- On traduit chaque sous-commande c…

Traduction de $x{:=}y{+}z$

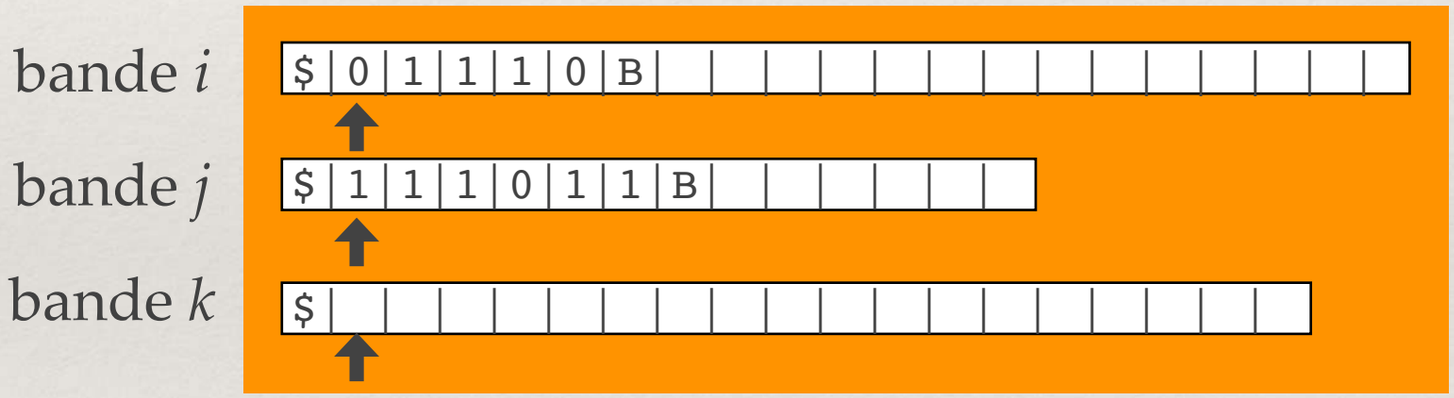
- $x_k{:=}x_i{+}x_j$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « pas de retenue »

Traduction de $x{:=}y{+}z$

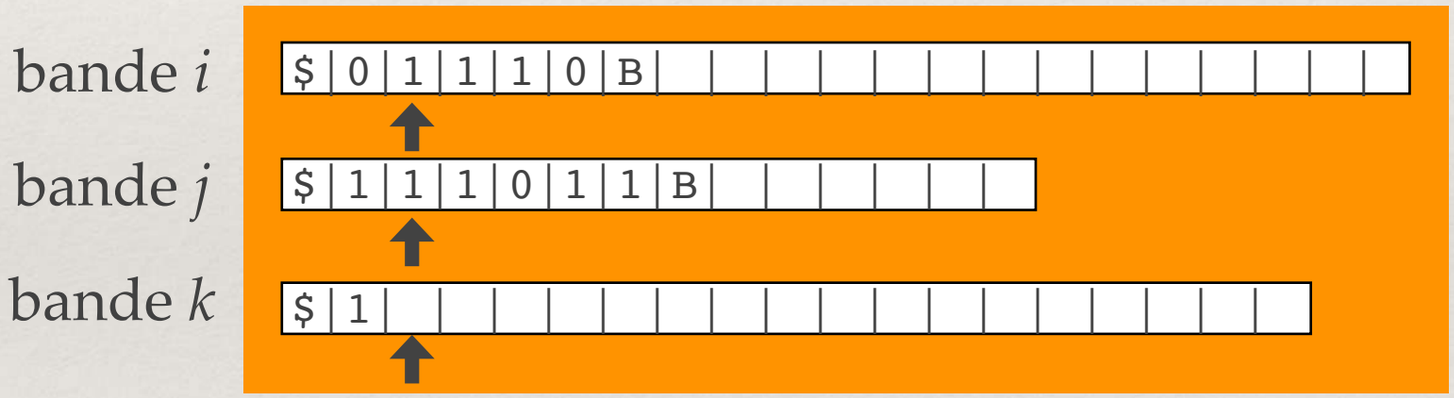
- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « pas de retenue »

Traduction de $x{:=}y{+}z$

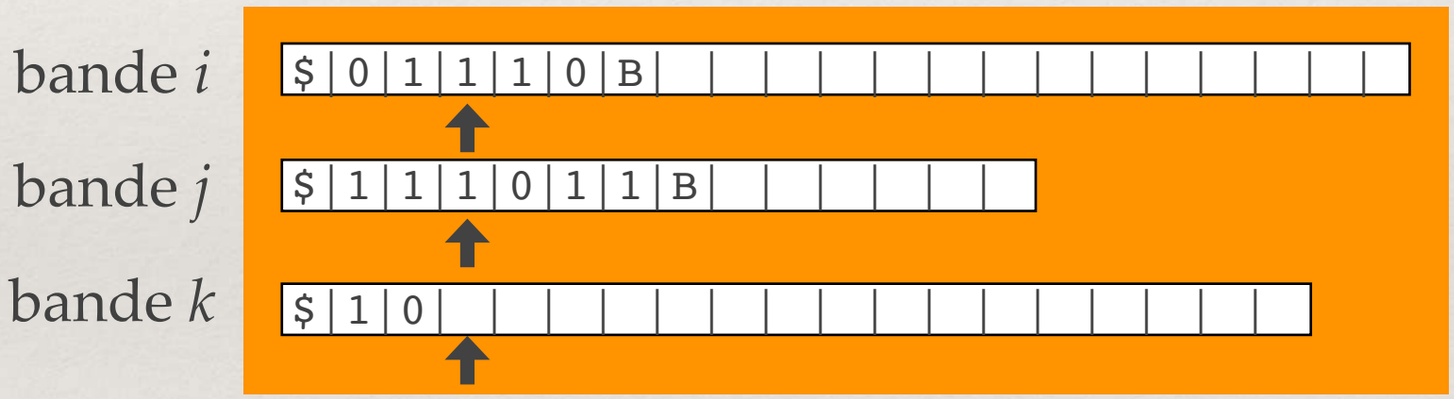
- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « pas de retenue »

Traduction de $x{:=}y{+}z$

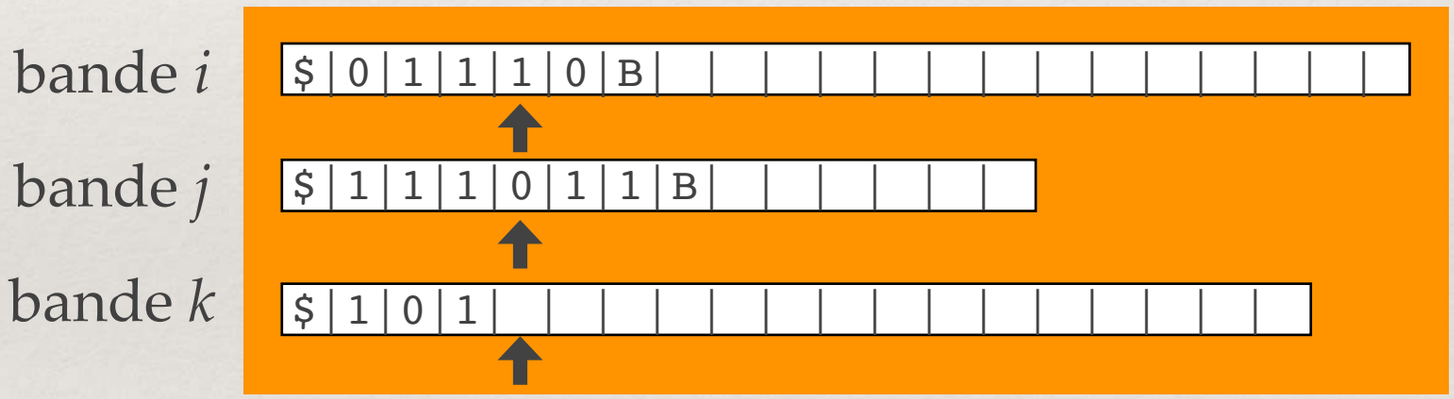
- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « retenue »

Traduction de $x{:=}y{+}z$

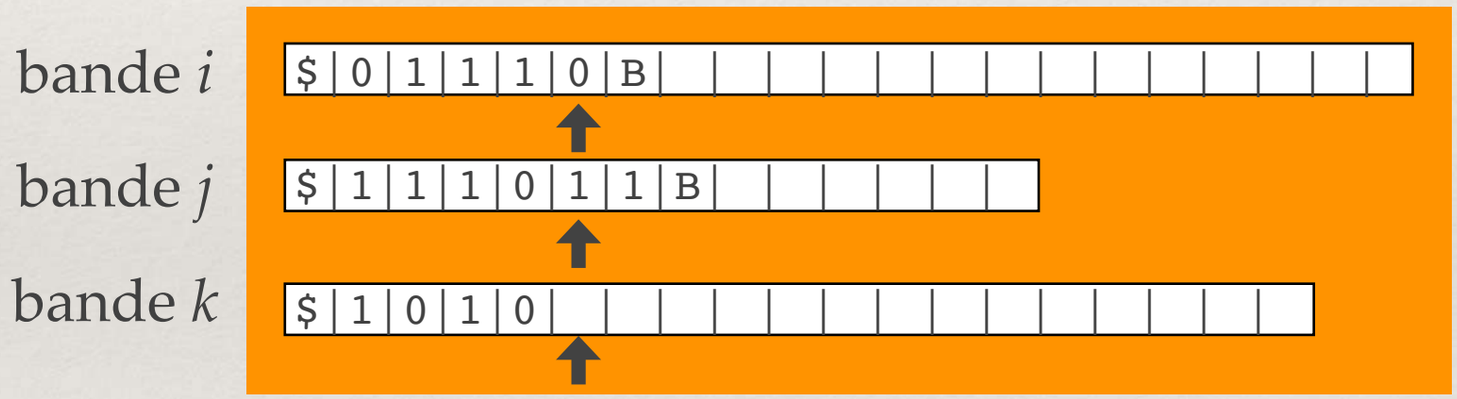
- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « retenue »

Traduction de $x{:=}y{+}z$

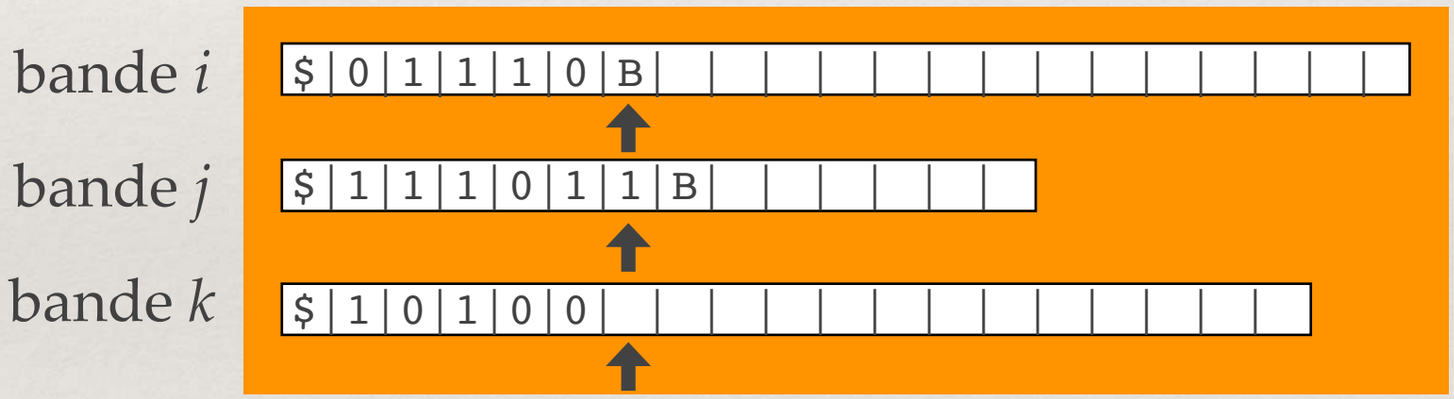
- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « retenue »

Traduction de $x{:=}y{+}z$

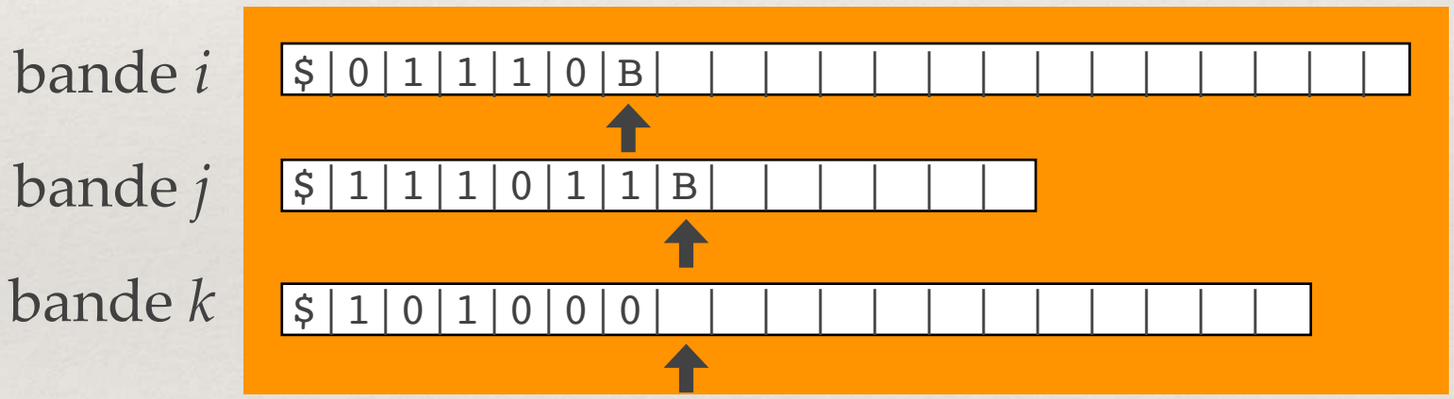
- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « retenue »

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

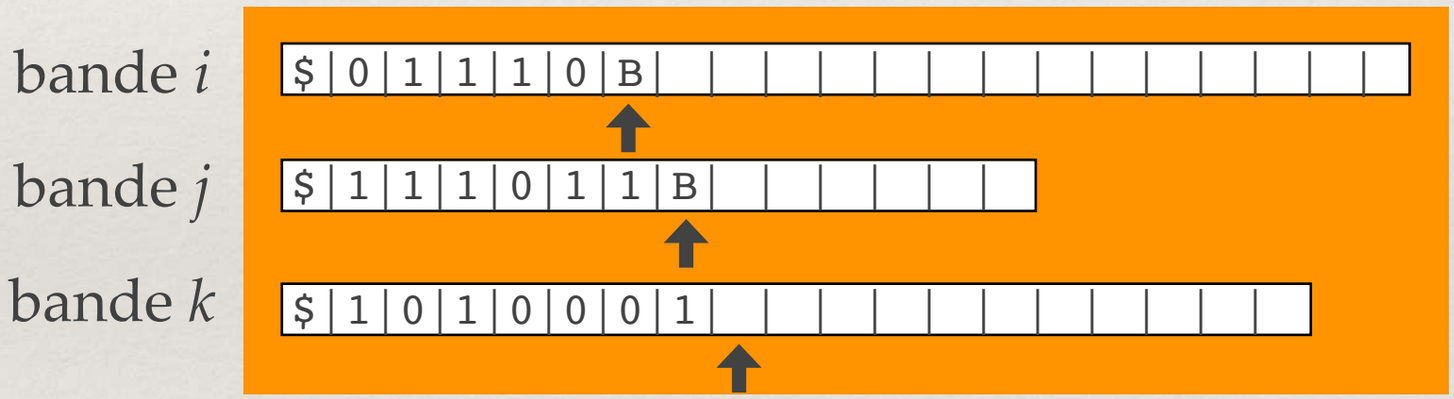


Etat « retenue »

Note: un `B` est vu comme un 0, sauf que la tête n'en bouge plus

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

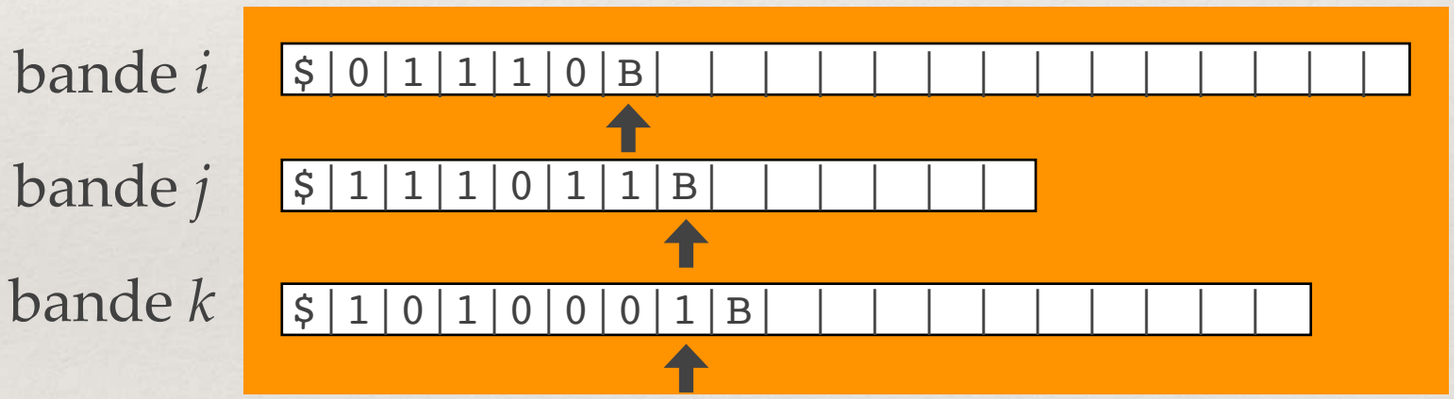


Etat « fin de calcul »

L'état « fin de calcul » est atteint lorsque les têtes des deux bandes i et j lisent un `B`;
il va servir à écrire un `B` à la fin de la bande k

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

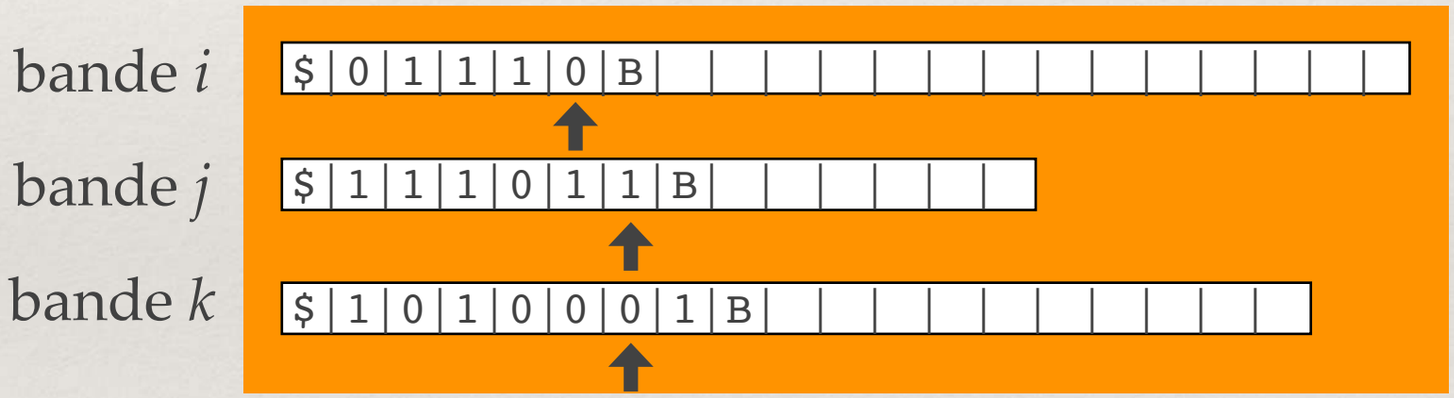


Etat « nettoyage »

Dans l'état « nettoyage », on ramène les trois têtes en début de bande

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

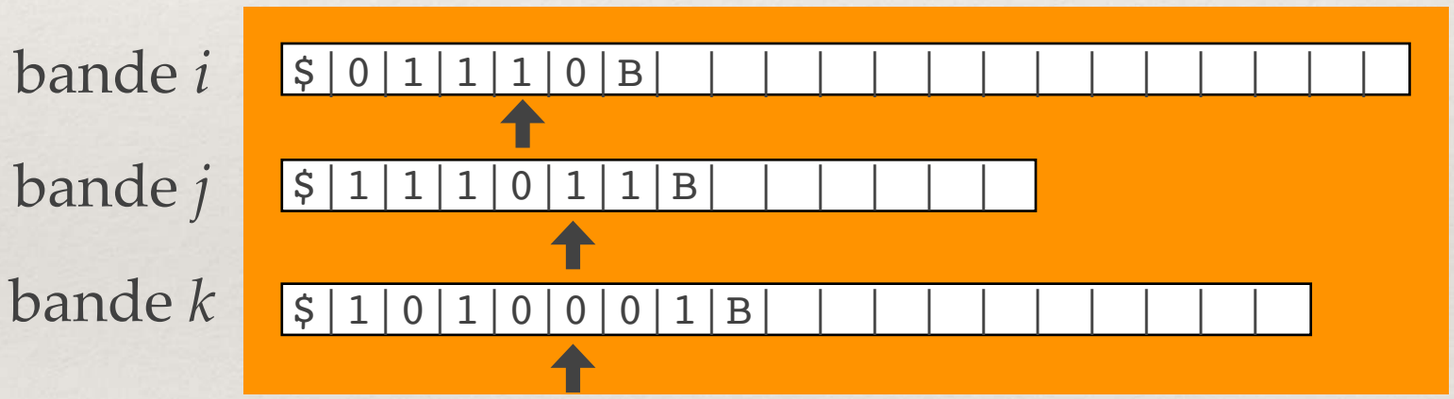


Etat « nettoyage »

Dans l'état « nettoyage », on ramène les trois têtes en début de bande

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

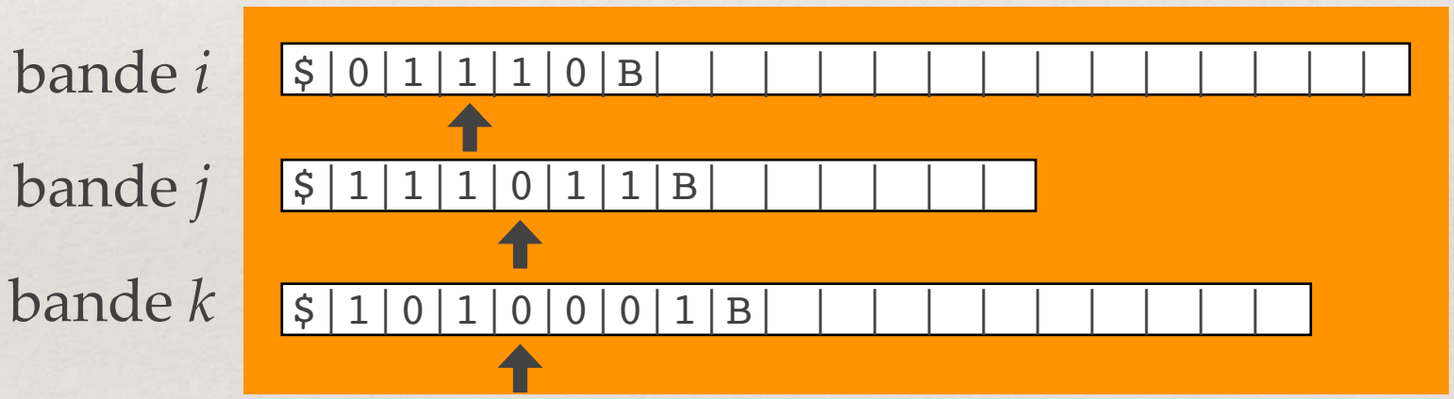


Etat « nettoyage »

Dans l'état « nettoyage », on ramène les trois têtes en début de bande

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

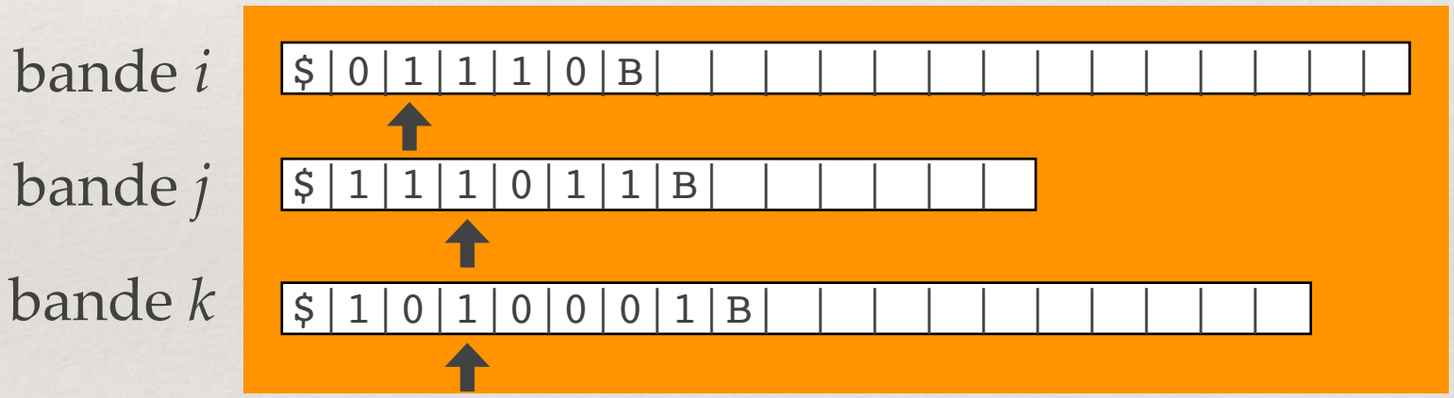


Etat « nettoyage »

Dans l'état « nettoyage », on ramène les trois têtes en début de bande

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

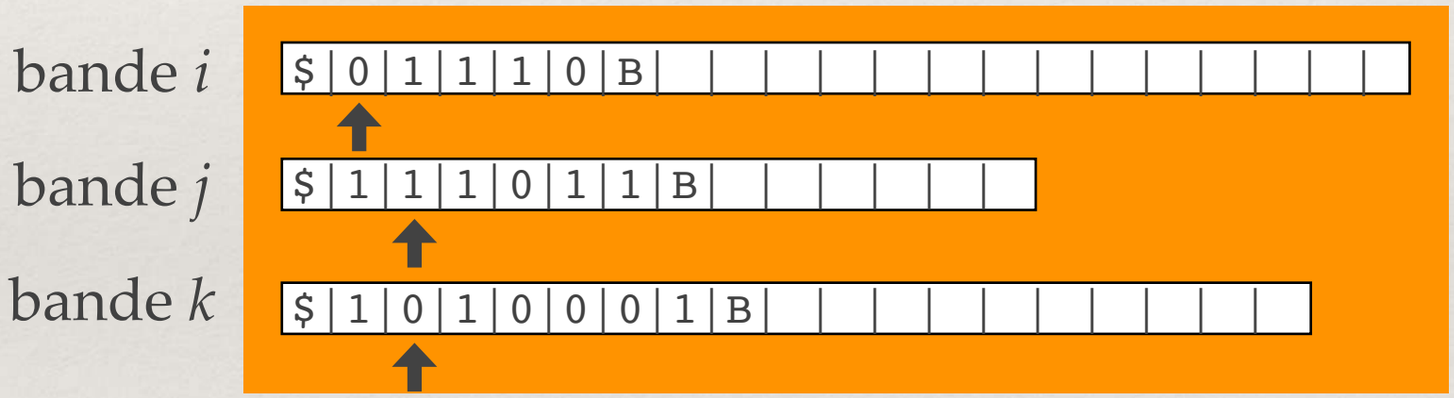


Etat « nettoyage »

Dans l'état « nettoyage », on ramène les trois têtes en début de bande

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

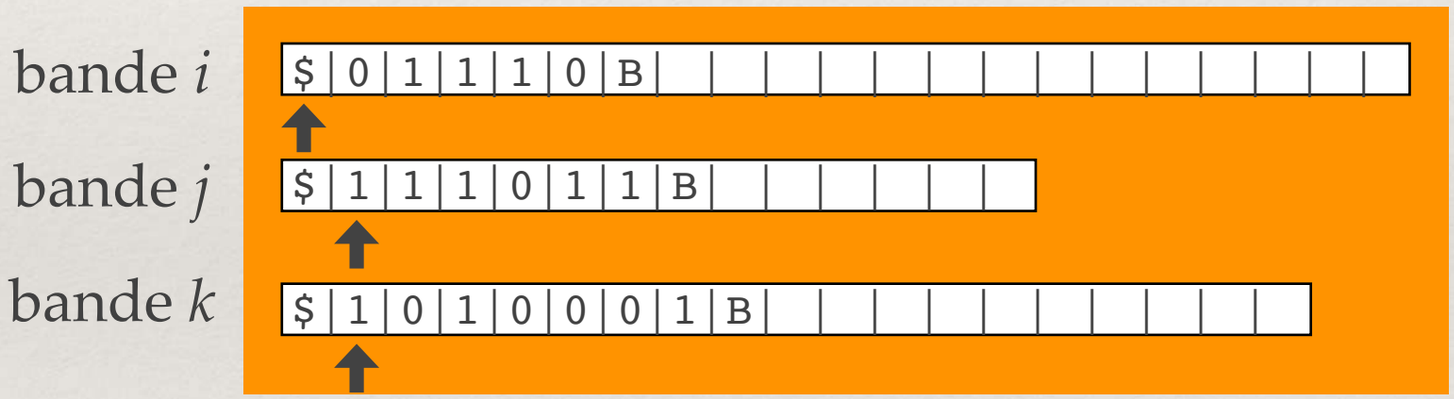


Etat « nettoyage »

Dans l'état « nettoyage », on ramène les trois têtes en début de bande

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue

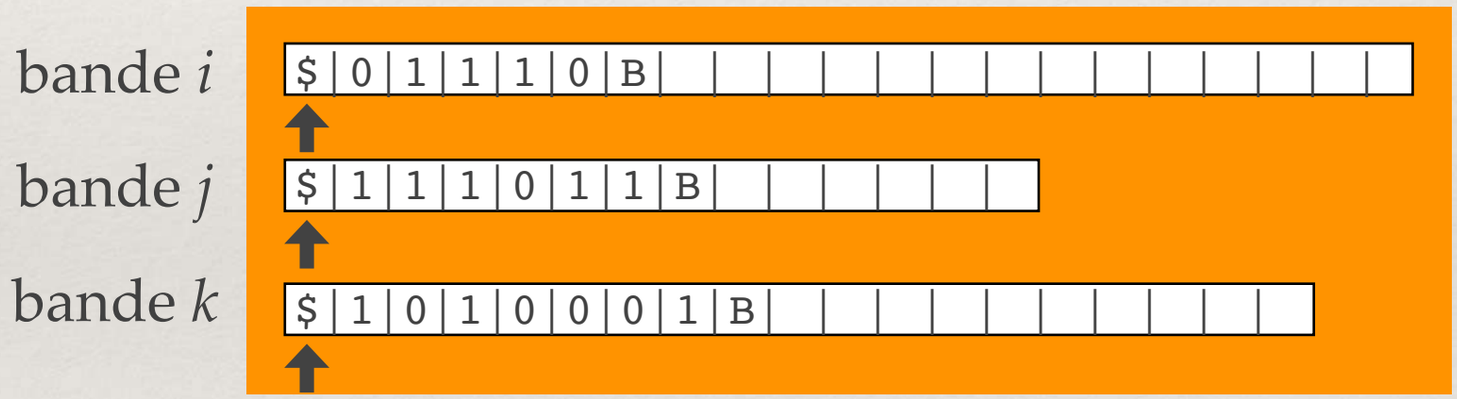


Etat « nettoyage »

Dans l'état « nettoyage », on ramène les trois têtes en début de bande

Traduction de $x{:=}y{+}z$

- $x_i{:=}x_j{+}x_k$, avec x_i,x_j,x_k deux à deux distinctes
- On implémente l'addition sur trois bandes de travail
- par l'algorithme usuel d'addition avec retenue



Etat « fin »

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:

Etat « début »

Dans l'état « début »,
on teste si la bande i contient le nombre zéro, i.e. un mot dans `$0*B`

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:

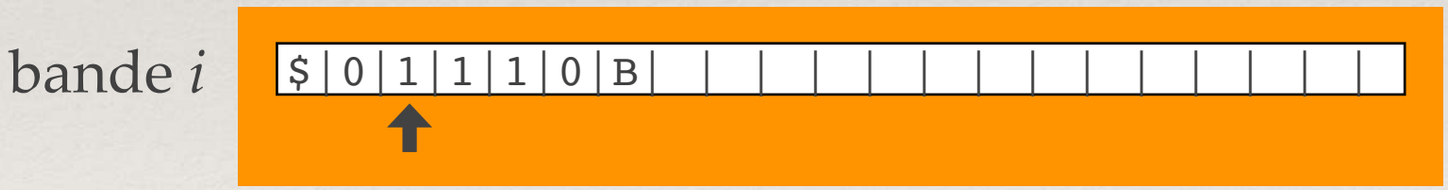
Etat « début »

Dans l'état « début »,
on teste si la bande i contient le nombre zéro, i.e. un mot dans `$0*B`

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:



Etat « début »

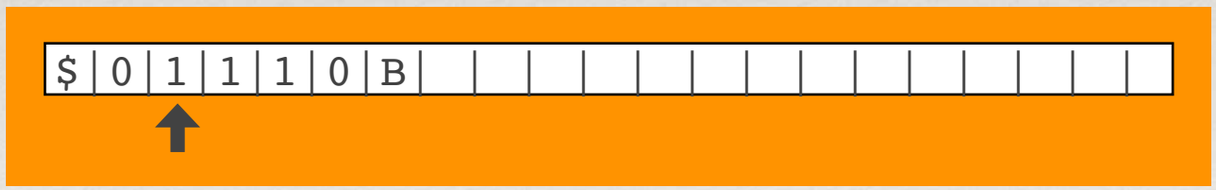
Dans l'état « début »,
on teste si la bande i contient le nombre zéro, i.e. un mot dans `$0*B`

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:

bande i



Etat « nettoyage 1»

La bande i ne contient pas zéro:
on démarre donc l'exécution de c_1

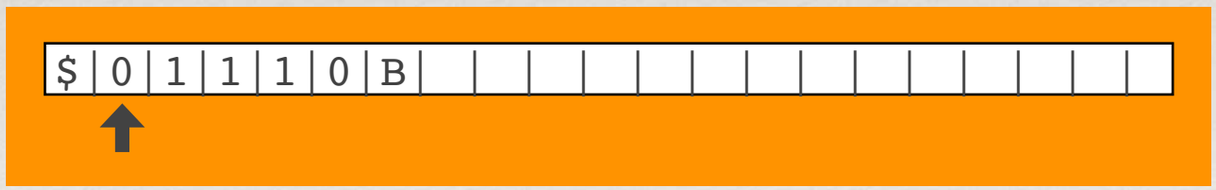
… mais avant, on nettoie: on ramène la tête au début de la bande i

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:

bande i



Etat « nettoyage 1»

La bande i ne contient pas zéro:
on démarre donc l'exécution de c_1

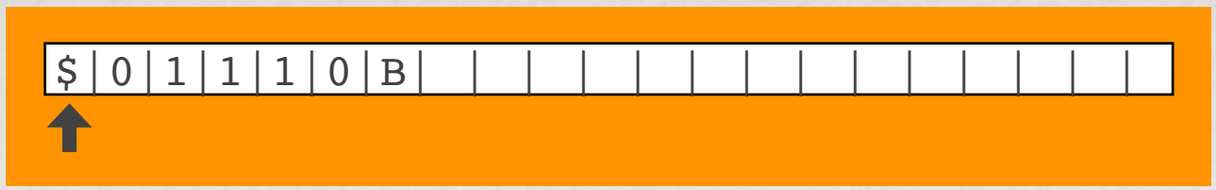
… mais avant, on nettoie: on ramène la tête au début de la bande i

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:

bande i



Etat « nettoyage 1»

La bande i ne contient pas zéro:
on démarre donc l'exécution de c_1

… mais avant, on nettoie: on ramène la tête au début de la bande i

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:

Etat « début 1»

Nettoyage fini: on démarre c_1

Si à la place on avait atteint un B en restant dans l'état « début », on serait ensuite allé en « début 2 » après nettoyage

Traduction de `if` x_i `then` c_1 `else` c_2

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c_1 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
  — c_2 en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 2 » et finisse en un état « fin 2 »
- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:
- … finalement, on déclare des transitions
  de « fin 1 » vers « fin »
  et de « fin 2 » vers « fin »,
  qui ne modifient pas les bandes et laissent les têtes immobiles

Traduction de `while` x_i `do` c

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »
- On crée deux états frais « début » et « fin »
- On enrichit la fonction de transition:

Etat « début »

Dans l'état « début »,
on teste si la bande i contient
le nombre zéro, i.e. un mot
dans `$0*B`, comme pour le `if`

Traduction de `while` x_i `do` c

- Par hypothèse de récurrence, on sait traduire
  — c en une fonction de transition, de sorte que le calcul commence en un état « début 1 » et finisse en un état « fin 1 »

- On crée deux états frais « début » et « fin »

- On enrichit la fonction de transition:

— Si la bande i contient au moins un 1,
on va en « début 1 » après nettoyage
— Si elle ne contient pas de 1, on va en « fin » après nettoyage

Boucle: ne pas oublier les transitions de « fin 1 » vers « début »!

Autres constructions

- Autres constructions: exercice!
- Note: ceci est un **sketch** de construction
- Notamment, je n'ai effectué **aucune preuve**

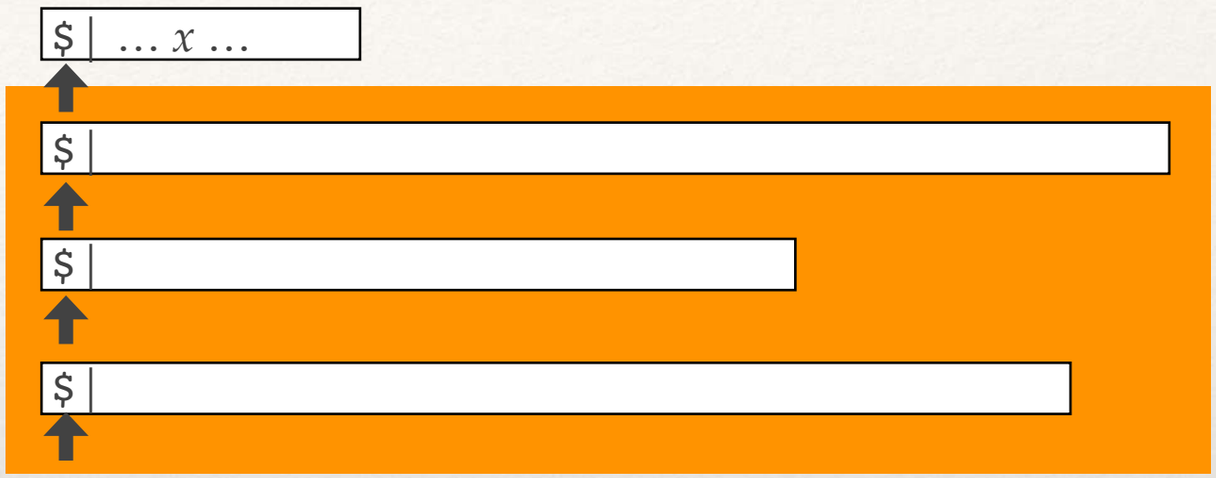
Intersection, union de langages

Union de langages r.e.

- On va montrer que l'union L d'un nombre fini de langages r.e. $L_1, \ldots, L_m$ est r.e.
- Par hypothèse, pour tout i on a: $L_i = L(M_i)$ pour une certaine machine de Turing M_i, **à une bande**
- Note: la difficulté est qu'on ne peut pas simuler $M_1, \ldots, M_m$ **en séquence** (que se passe-t-il si M_1 ne termine pas?)
- On va donc les simuler **en parallèle**, via une machine **à m bandes** I/O acceptant L (= dont le langage est L)

Simulation parallèle

- La bande i va servir à simuler la machine M_i

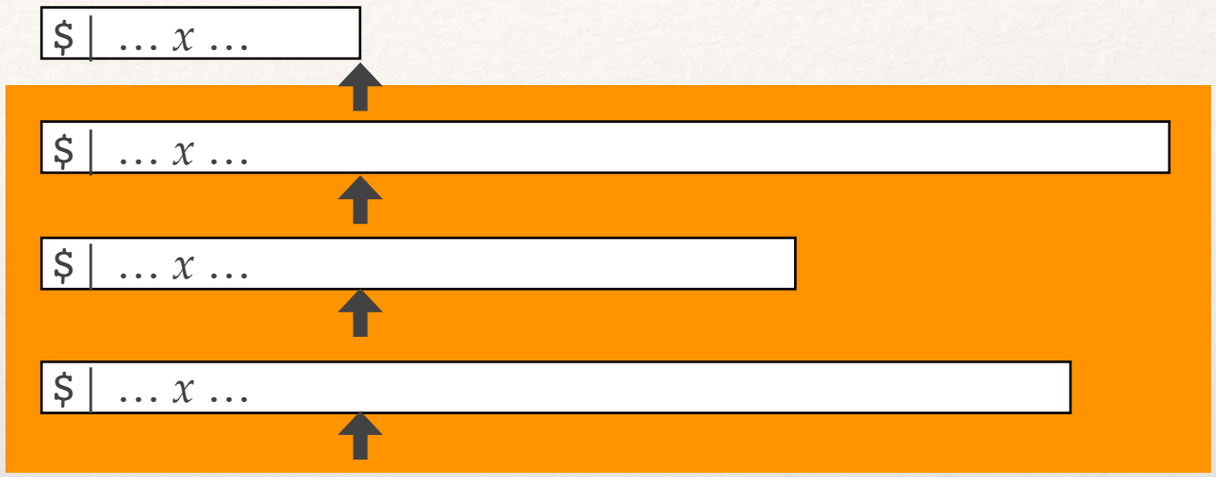


$\delta(q_0,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_0,(a, \ldots, a),(\rightarrow,\rightarrow,\ldots,\rightarrow))$ si $a \neq$ B,$

On commence par recopier x sur toutes les bandes de travail en parallèle

Simulation parallèle

- La bande i va servir à simuler la machine M_i



$\delta(q_0,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_0,(a, \ldots, a),(\rightarrow,\rightarrow,\ldots,\rightarrow))$ si $a \neq$ B,$

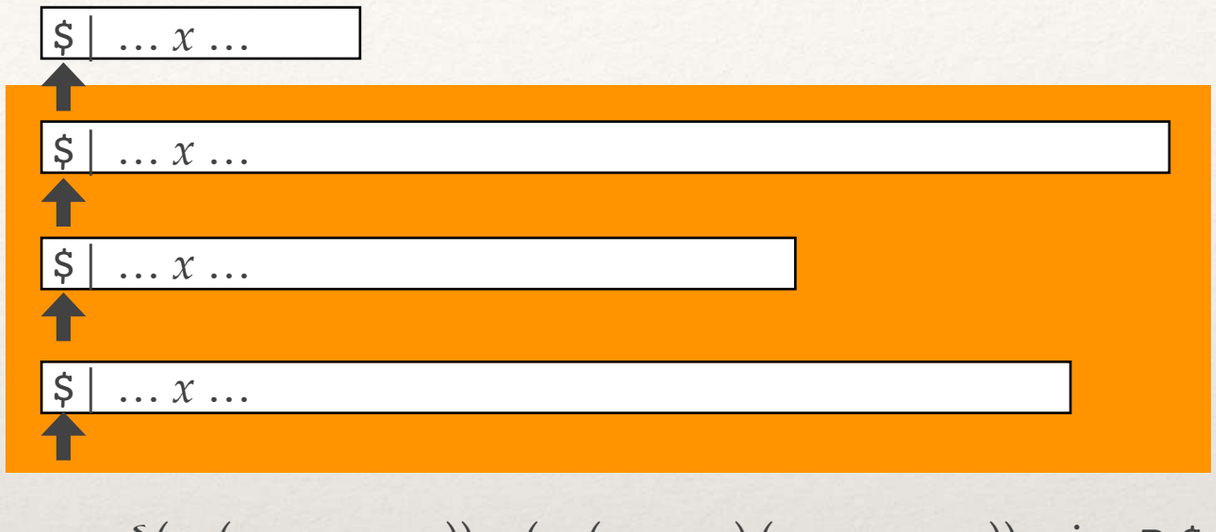
$\delta(q_0,(\mathtt{B}, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$

$\delta(q_1,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$ si $a \neq$ $

On ramène toutes les têtes au début de leurs bandes

Simulation parallèle

- La bande i va servir à simuler la machine M_i
- Soit δ_i la fonction de transition de M_i, init[i] son état initial



$\delta(q_0,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_0,(a, \ldots, a),(\rightarrow,\rightarrow,\ldots,\rightarrow))$ si $a \neq$ B,$

$\delta(q_0,(\mathtt{B}, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$

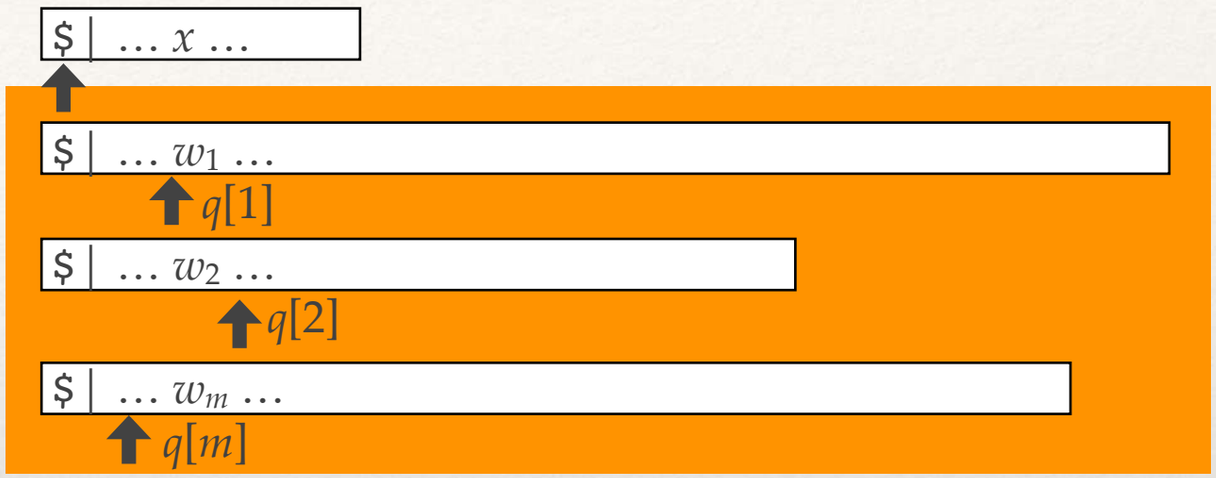
$\delta(q_1,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$ si $a \neq$ $

$\delta(q_1,(\$, a_1, \ldots, a_m)) = ((\text{init}[1],\ldots,\text{init}[m]),(a_1, \ldots, a_m),(\downarrow,\downarrow,\ldots,\downarrow))$

On simule une étape de chaque M_i en parallèle:
Les états de notre machine sont des m-uplets ($q[1]$, …, $q[m]$) d'états de chaque M_i

Simulation parallèle

- La bande i va servir à simuler la machine M_i
- Soit δ_i la fonction de transition de M_i, init[i] son état initial
- et **accept**[i], **reject**[i] leurs états finaux



$\delta(q_0,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_0,(a, \ldots, a),(\rightarrow,\rightarrow,\ldots,\rightarrow))$ si $a \neq$ B,$

$\delta(q_0,(\mathrm{B}, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$

$\delta(q_1,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$ si $a \neq$ $

$\delta(q_1,(\$, a_1, \ldots, a_m)) = ((\text{init}[1],\ldots,\text{init}[m]),(a_1, \ldots, a_m),(\downarrow,\downarrow,\ldots,\downarrow))$

$\delta((q[1],\ldots,q[m]),(a, a_1, \ldots, a_m)) = ((q'[1],\ldots,q'[m]),(b_1, \ldots, b_m),(\downarrow,d_1,\ldots,d_m))$

si $\delta_1(q[1],a_1)=(q'[1],b_1,d_1)$, …, $\delta_m(q[m],a_m)=(q'[m],b_m,d_m)$

et (tous les $q'[i] \neq$ **accept**[i])

et (au moins un $q'[i] \neq$ **reject**[i])

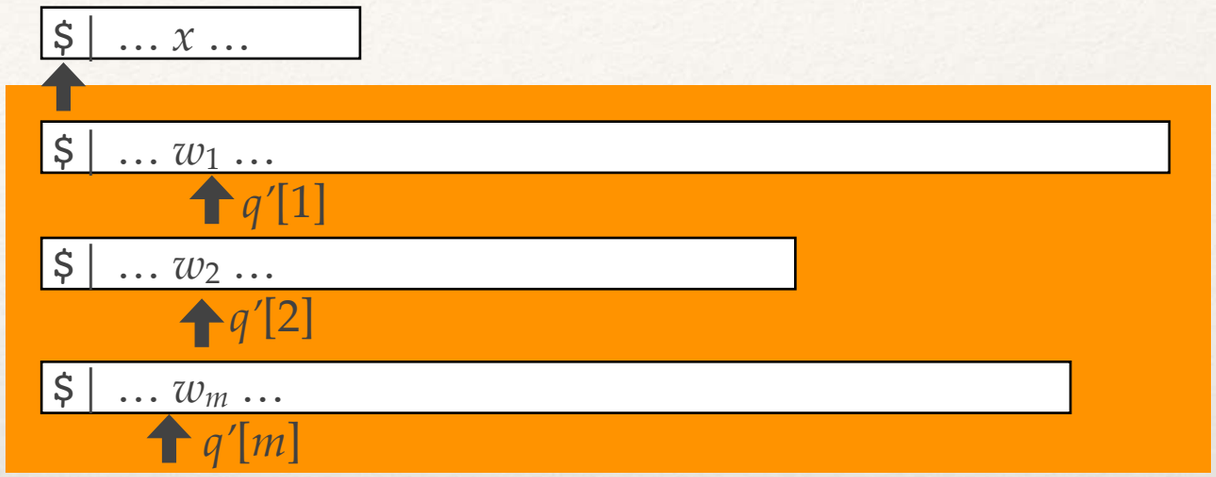
On simule une étape de chaque M_i en parallèle

… qu'on rajoute à l'ensemble d'états de M_i on étend aussi δ_i de sorte que M_i **boucle** sur **accept**[i]/**reject**[i]

Simulation parallèle

- La bande i va servir à simuler la machine M_i
- Soit δ_i la fonction de transition de M_i, init[i] son état initial
- et **accept**[i], **reject**[i] leurs états finaux

On accepte si toutes les machines acceptent, on rejette si au moins une machine rejette



$\delta(q_0,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_0,(a, \ldots, a),(\rightarrow,\rightarrow,\ldots,\rightarrow))$ si $a \neq$ B,$

$\delta(q_0,(\mathtt{B}, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$

$\delta(q_1,(a, a_1, \ldots, a_m)) = (q_1,(a_1, \ldots, a_m),(\leftarrow,\leftarrow,\ldots,\leftarrow))$ si $a \neq$ $

$\delta(q_1,(\$, a_1, \ldots, a_m)) = ((\text{init}[1],\ldots,\text{init}[m]),(a_1, \ldots, a_m),(\downarrow,\downarrow,\ldots,\downarrow))$

$\delta((q[1],\ldots,q[m]),(a, a_1, \ldots, a_m)) = ((q'[1],\ldots,q'[m]),(b_1, \ldots, b_m),(\downarrow,d_1,\ldots,d_m))$
si $\delta_1(q[1],a_1)=(q'[1],b_1,d_1)$, …, $\delta_m(q[m],a_m)=(q'[m],b_m,d_m)$
et (tous les $q'[i] \neq$ **accept**[i])
et (au moins un $q'[i] \neq$ **reject**[i])

$\delta((q[1],\ldots,q[m]),(a, a_1, \ldots, a_m)) = (\textbf{accept},(a_1, \ldots, a_m),(\downarrow,\downarrow,\ldots,\downarrow))$
si au moins un $q'[i]=$ **accept**[i])

$\delta((q[1],\ldots,q[m]),(a, a_1, \ldots, a_m)) = (\textbf{reject},(a_1, \ldots, a_m),(\downarrow,\downarrow,\ldots,\downarrow))$
si tous les $q'[i]=$ **reject**[i])

… qu'on rajoute à l'ensemble d'états de M_i
on étend aussi δ_i de sorte que M_i **boucle** sur **accept**[i] / **reject**[i]

Opérations booléennes

- Donc: l'**union** d'un nombre fini de langages **r.e.** est r.e.
- La même construction montre: l'**union** d'un nombre fini de langages **récursifs** est récursif
- Symétriquement,
  l'**intersection** d'un nombre fini de langages **r.e.** est r.e.
- L'**intersection** d'un nombre fini de langages **récursifs** est récursive
- De plus, le **complémentaire** d'un langage **récursif** est récursif (on n'a pas l'analogue pour les langages r.e.!)

Complémentaires de langages r.e.

- Un langage est **co-r.e.** ssi son complémentaire est r.e.
- **Théorème.** Un langage est récursif ssi il est r.e. et co-r.e.
- *Preuve* (seulement si).

  Si L est récursif, donc décidé par une mT M,
- alors $L(M) = L$ (langage *accepté* par M)
- et $L(M^c) = \complement L$, où M^c est la machine obtenue à partir de M en échangeant **accept** et **reject**

Complémentaires de langages r.e.

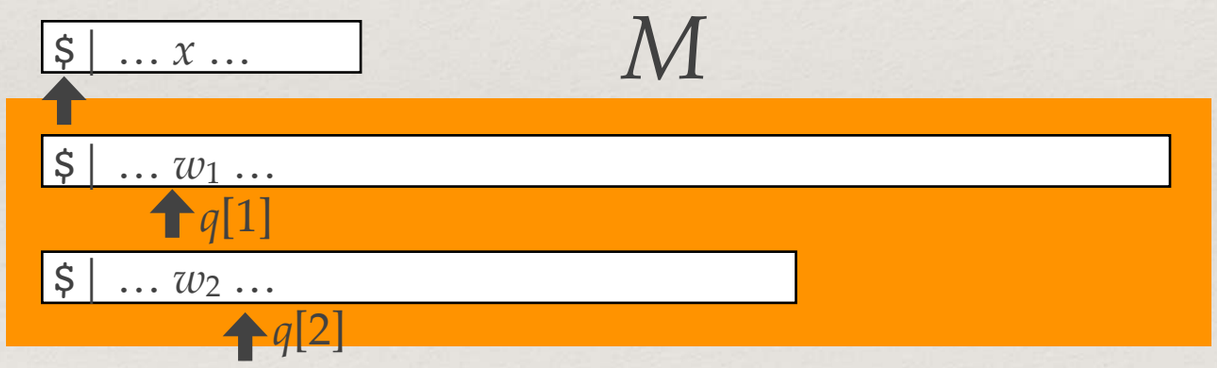
- Un langage est **co-r.e.** ssi son complémentaire est r.e.
- **Théorème.** Un langage est récursif ssi il est r.e. et co-r.e.

- *Preuve* (si). Suppons $L = L(M_1)$, complémentaire $L(M_2)$
- On définit une machine I/O M à 2 bandes de travail
  qui, sur toute entrée x,
  effectue une simulation parallèle de M_1 et M_2,
  et **accepte** si M_1 accepte, **rejette** si M_2 accepte

Complémentaires de langages r.e.

- Un langage est **co-r.e.** ssi son complémentaire est r.e.
- **Théorème.** Un langage est récursif ssi il est r.e. et co-r.e.

- *Preuve* (si). Suppons $L = L(M_1)$, complémentaire $L(M_2)$



$\delta(q_0,(a, a_1, a_2)) = (q_0,(a,a),(\rightarrow,\rightarrow,\rightarrow))$ si $a \neq$ B,$
$\delta(q_0,(\text{B}, a_1,a_2)) = (q_1,(a_1,a_2),(\leftarrow,\leftarrow,\leftarrow))$
$\delta(q_1,(a, a_1,a_2)) = (q_1,(a_1,a_2),(\leftarrow,\leftarrow,\leftarrow))$ si $a \neq$ $
$\delta(q_1,(\$,a_1,a_2)) = ((\text{init}[1],\text{init}[2]),(a_1,a_2),(\downarrow,\downarrow,\downarrow))$
$\delta((q[1],q[2]),(a,a_1,a_2)) = ((q'[1],q'[2]),(b_1,b_2),(\downarrow,d_1,d_2))$
si $\delta_1(q[1],a_1)=(q'[1],b_1,d_1)$, $\delta_2(q[2],a_2)=(q'[2],b_2,d_2)$
et $q'[1]\neq$**accept**[1], $q'[2]\neq$**accept**[2]
$\delta((q[1],q[2]),(a,a_1,a_2)) = (\textbf{accept},(a_1,a_2),(\downarrow,\downarrow,\downarrow))$
si $q'[1]=$**accept**[1]
$\delta((q[1],q[2]),(a,a_1,a_2)) = (\textbf{reject},(a_1,a_2),(\downarrow,\downarrow,\downarrow))$
si $q'[2]=$**accept**[2] (et $q'[1]\neq$**accept**[1])

- Alors M **décide** L:
si $x \in L$, M accepte;
si $x \notin L$, M rejette.
Notamment, M termine **sur toute entrée** x. □

La prochaine fois

La prochaine fois

- Machines de Turing universelles
- Problème de l'arrêt
- Il existe des langages r.e. non récursifs