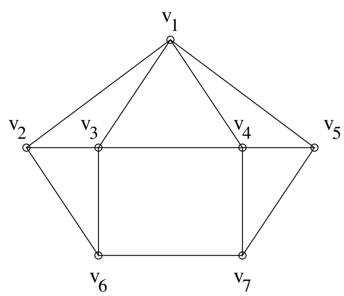
Complexité du coloriage de graphes

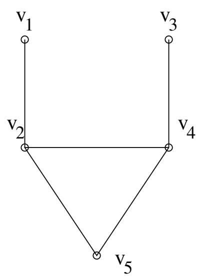
NB: l'unique question importante de cet énoncé est la question 7. Elle sera la question qui aura le plus fort coefficient, de loin.

Dans tout le problème, un *graphe* désigne un graphe non orienté, c'est-à-dire un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble fini de *sommets*, et E est un ensemble de paires $\{v_1, v_2\}$ de sommets appelées *arêtes*. Si $\{v_1, v_2\} \in E$, on dit que v_1 et v_2 sont *adjacents*, et qu'ils sont les *extrémités* de l'arête $\{v_1, v_2\}$. Le *degré* $d_G(v)$ d'un sommet v de G est le nombre de sommets adjacents à v dans G. Le *degré* $d(G)$ du graphe G est $\max_{v \in V} d_G(v)$.

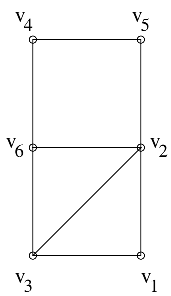
On notera souvent les graphes par des dessins, par exemple:



[1]



[2]



[3]

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, un k-*coloriage* de G est une application c de V vers $[1, k]$ telle que $c(v_1) \neq c(v_2)$ pour tous sommets adjacents v_1, v_2. De façon imagée, on appelle $c(v)$ la *couleur* du sommet v de G dans c. Si G a un k-coloriage, on dit que G est k-*colorable*. Le plus petit entier k tel que G est k-colorable est le *nombre chromatique* de G.

Pour tout ensemble fini S, $|S|$ désigne le cardinal de S.

On rappelle que le problème 3-SAT de la satisfiabilité d'ensembles de 3-clauses est NP-complet. Un *littéral* L est soit une variable propositionnelle x soit une négation $\overline{x}$ d'une variable propositionnelle x. Une 3-*clause* est une disjonction de trois littéraux, non nécessairement distincts. Un *ensemble de* 3-*clauses* S est vu comme une conjonction de ses 3-clauses. Une *valuation* ρ est une application qui à chaque variable x associe un booléen, VRAI ou FAUX; ρ *satisfait* une 3-clause si elle contient x tel que $\rho(x) =$VRAI ou $\overline{x}$ tel que $\rho(x) =$FAUX; ρ *satisfait* un ensemble S si ρ satisfait toute 3-clause de S. S est *satisfiable* si et seulement si S est satisfait par au moins une valuation ρ.

1. Soit G un graphe 2-colorable. Soit n la couleur du sommet v. Quelles sont les couleurs des sommets adjacents à v ?

2. Montrer que G est k-colorable si et seulement si toutes ses composantes connexes sont k-colorables. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe maximal de G dans lequel il existe un chemin entre v et v' pour tous sommets v et v'.

3. Déduire des questions précédentes que le problème de la 2-colorabilité d'un graphe G donné en entrée est décidable en temps polynomial.

   On n'a pas dit jusqu'ici comment le graphe G était censé être présenté sur la bande d'entrée. G peut être présenté par matrice d'adjacence, par listes d'adjacences, par exemple. Pourquoi le résultat de décidabilité en temps polynomial du 2-coloriage est-il indépendant du choix de la représentation de G parmi celles-ci?

4. Montrer que le graphe [2] a la propriété suivante : dans tout 3-coloriage de ce graphe, si v_1 et v_3 sont de couleurs autres que 3, et si v_5 est de couleur 1, alors v_1 ou v_3 est de couleur 1. (Le graphe [2], intuitivement, code donc une disjonction.)

5. Trouver un graphe ayant au moins deux sommets v_1 et v_2, tel que dans tout 3-coloriage, si v_1 et v_2 sont de couleurs différentes de 3, alors v_2 est de couleur 1 si et seulement si v_1 n'est pas de couleur 1. (Ceci code une négation.)

6. Si un graphe a deux sommets A de couleur 3 et B de couleur 2, dans un 3-coloriage donné, quelles sont les couleurs des sommets adjacents à la fois à A et à B ? (Si on code les formules logiques par des sommets, et que "être de couleur 1" signifie "être vrai", ceci code une conjonction.)

7. Déduire des trois questions précédentes qu'il existe un algorithme en temps polynomial qui transforme tout ensemble S de 3-clauses en un graphe G qui est 3-colorable si et seulement si S est satisfiable. (Indication : on créera deux sommets distingués A et B dans G, adjacents; par symétrie, on supposera que A est de couleur 3 et B de couleur 2, et on connectera les sous-graphes des questions précédentes à l'un ou l'autre de ces sommets ou même aux deux.)

8. Justifier informellement que l'algorithme de la question précédente s'exécute en espace logarithmique, moyennant quelques modifications éventuelles.

9. En déduire que le problème de la 3-colorabilité des graphes est NP-complet.