TD8 - Calcul des prédicats

Exercice 1.

Question 1. Montrer que les formules $\exists x \forall y.\ P(x, y)$ et $\forall y \exists x.\ P(x, y)$ ne sont pas équivalentes.

Question 2. L'une de ces formules implique-t-elle l'autre ?

Exercice 2. Taille des modèles

Question 3. On considère un langage $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ tel que $(=/2) \in \mathcal{P}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivez une formule Ψ_n tel que tout modèle $\mathcal{S}$ de Ψ_n qui interprète $=$ comme l'égalité mathématique a un domaine de cardinal exactement n.

Question 4. Donnez un exemple de langage et d'une formule Ψ_∞ qui est satisfiable mais qui n'admet pas de modèles dont le domaine est fini.

Exercice 3. Morphisme

Définition 1. Soit $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ deux $\mathcal{F}$-algèbres. Un morphisme h de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{C}$ est une application de B dans C telle que, pour tout symbole $f \in \mathcal{F}$ et pour tous éléments $b_1, \dots, b_n \in B$,

$$h(f_{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n)) = f_{\mathfrak{C}}(h(b_1), \dots, h(b_n))$$

On considère l'alphabet (ou signature) $\mathcal{F} = \{s(1)\}$.

Question 5. Donner deux $\mathcal{F}$-algèbres finies ayant même domaine et telles qu'il n'existe aucun morphisme de l'une dans l'autre.

Question 6. Donner deux $\mathcal{F}$-algèbres distinctes, de même domaine et isomorphes.

Exercice 4. Logique monadique

Question 7. En supposant que $\mathcal{P}$ ne contient que des symboles de prédicats unaires et que $\mathcal{F}$ est vide, montrer que toute formule satisfaisable admet un modèle fini.

Question 8. En supposant que $\mathcal{P}$ ne contient que des symboles de prédicats unaires et que $\mathcal{F}$ ne contient que des symboles de fonction unaires, montrer que toute formule satisfaisable admet un modèle fini.

Exercice 5. Zéro et successeur

On prend $\mathcal{F} = \{\ 0(0),\ s(1)\ \}$. On considère la théorie composée des axiomes de l'égalité et des formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} \forall x.\ 0 \neq s(x) & (F_0) \\ \forall x.\ s(x) = s(y) \Rightarrow x = y & (F_s) \\ \forall x.\ x \neq s^n(x) & (F_n) \text{ pour tout } n > 0 \end{array}$$

Question 9. Donner tous les modèles de cette théorie, modulo isomorphisme.

Question 10. Si l'on enlève F_0 de la théorie, donner deux modèles de la théorie résultante qui ne soient pas élémentairement équivalents.

Question 11. Et si on enlève F_s ? F_n ?

Exercice 6. Équivalence élémentaire

On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

Question 12. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.

On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$) on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $x\sigma \geq_{\mathcal{S}} y\sigma$.

Question 13. Montrer que $\mathcal{S}, \sigma \vDash \phi$ ssi pour toute affectation θ telle que $\geq_\theta$ est identique à $\geq_\sigma$, on a $\mathcal{S}, \theta \vDash \phi$.

Question 14. Conclure.

Exercice 7. Théorème de Löwenheim-Skolem descendant

Définition 2 (Sous-structure élémentaire). $\mathfrak{M}$ est une *sous-structure élémentaire* de $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ telle que pour tout formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,

$$\mathfrak{M} \vDash \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } \mathfrak{N} \vDash \phi(\bar{m})$$

On note alors $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$.

Question 15. Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Montrer que $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ si et seulement si pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, si $\mathfrak{N} \vDash \exists x.\ \phi(x, \bar{m})$ alors il existe un $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{N} \vDash \phi(m_0, \bar{m})$.

Question 16. Soit B infini tel que $|B| \geqslant |\mathcal{F}| =$. Montrer que le plus petit sous ensemble de M contenant B et clos par les fonctions du langage est de la même cardinalité que B.

On définit alors

- A_0 est le plus petit sous ensemble de M contenant A et clos par les fonctions du langage,
- Supposons A_i défini. Pour chaque formule $F[v_0, \ldots, v_n]$ et chaque $(a_1, \ldots, a_n)$ de A_i, si $\mathfrak{M} \vDash \exists v_0.F[v_0, a_1, \ldots, a_n]$ alors on choisit un point $c_{F,a_1,\ldots,a_n}$ de M tel que $\mathfrak{M} \vDash F[c_{F,a_1,\ldots,a_n}, a_1, \ldots, a_n]$. On pose :

  $$B_i = A_i \cup \{\, c_{F,a_1,\ldots,a_n} \,|\, n \in \mathbb{N}, F[v_0, \ldots, v_n] \text{ une formule}, (a_1, \ldots, a_n) \in A_i^n, \mathfrak{M} \vDash \exists v_0.F[v_0, a_1, \ldots, a_n]\}$$
- A_{i+1} est le plus petit sous ensemble de M contenant B_i et clos par les fonctions du langage,

Question 17. Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure infinie et A un sous-ensemble de N. Soit κ un cardinal infini tel que $\max(|A|, |\mathcal{F}|, |\mathcal{P}|) \leqslant \kappa \leqslant |\mathfrak{N}|$. Alors il y a une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ contenant A et de cardinal κ.