TD6 - Déduction naturelle et calcul des séquents propositionnels intuitionnistes

Exercice 1. Expansion locale

Dans le calcul des séquents, les instances non-atomiques de la règle axiome sont expansables en utilisant les règles d'introduction à gauche et à droite.

Question 1. Vérifier ce principe en donnant des preuves de $\phi \to \phi$ pour ϕ étant $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \to \phi_2$ et $\neg\phi_1$.

Exercice 2. Substitutions

Soit $\Gamma \vdash \phi$ un séquent prouvable dans $\mathbf{LJ}_0$, A une variable propositionnelle et ψ une formule.

Question 2. Montrer que $\Gamma\,[A := \psi] \vdash \phi\,[A := \psi]$ est prouvable dans $\mathbf{LJ_0}$.

Soit ϕ une formule de variables $P_1, \dots, P_n$ et $\psi_1, \dots, \psi_n$ des formules de variables $Q_1, \dots, Q_m$. Soit $\mathcal{K} = (W, \leqslant, \alpha)$ une structure de Kripke sur l'ensemble de variables $\{Q_1, \dots, Q_m\}$. Soit $\mathcal{K}' = (W, \leqslant, w_j \mapsto \{\, P_i | \, \mathcal{K}, w_j \vDash \psi_i\})$ structure sur l'ensemble de variables $\{P_1, \dots, P_n\}$.

Question 3. Montrer que $\mathcal{K}', w_j \vDash \phi$ si et seulement si $\mathcal{K}, w_j \vDash \phi\,[P_1 := \psi_1, \dots, P_n := \psi_n]$

Soit ϕ_1 et ϕ_2 des formules telles que $\phi_1 \vdash \phi_2$ soit prouvable dans $\mathbf{LJ_0}$. Soit ψ une formule et P une variable propositionnelle.

Question 4. Montrer qu'en général $\psi[P := \phi_1] \vdash \psi[P := \phi_2]$ n'est pas dérivable.

On définit $\mathrm{Var}^+(P) = \{P\}$, $\mathrm{Var}^-(P) = \emptyset$, $\mathrm{Var}^\delta(\phi \wedge \psi) = \mathrm{Var}^\delta(\phi \vee \psi) = \mathrm{Var}^\delta(\phi) \cup \mathrm{Var}^\delta(\psi)$, $\mathrm{Var}^\delta(\phi \to \psi) = \mathrm{Var}^{-\delta}(\phi) \cup \mathrm{Var}^\delta(\psi)$ et $\mathrm{Var}^\delta(\neg\phi) = \mathrm{Var}^{-\delta}(\phi)$, où $\delta \in \{+, -\}$ avec $-+ = -$ et $-- = +$.

Question 5. Montrer que si $P \notin \mathrm{Var}^-(\psi)$, $\psi[P := \phi_1] \vdash \psi[P := \phi_2]$ est dérivable.

Exercice 3. Théorème de Yankov

On note F_2 l'ensemble ordonné $(\{\alpha, \beta\}, \alpha < \beta)$. On appelle structure de base F_2 toute structure de Kripke dont l'ensemble ordonné sous-jacent est F_2. Soit ϕ une formule propositionnelle démontrable en logique classique de variables $P_1, \dots, P_n$. On note $\mathbf{NJ_0} + R_\phi$ le système obtenu en ajoutant à la déduction naturelle intuitionniste la règle

$$\dfrac{}{\vdash \phi[P_1 := \psi_1, \dots, P_n := \psi_n]}\, R_\phi$$

où les ψ_i sont des formules quelconques.

Question 6. Montrer que si l'ensemble des formules démontrables dans $\mathbf{NJ_0} + R_\phi$ est l'ensemble des formules démontrables dans $\mathbf{NK_0}$, alors ϕ est réfutée dans une structure de base F_2.

Question 7. Supposons que ϕ n'a qu'une variable P. Soit $\mathcal{K}$ la structure de base F_2 telle que $I(P) = \{\beta\}$. Montrer que si ϕ est réfutée dans $\mathcal{K}$ alors pour toute structure $\mathcal{K}'$ qui satisfait ϕ et tout monde w de $\mathcal{K}'$, $w \notin I(P)$ implique que pour tout $w' \geqslant w$, $w' \notin I(P)$.

Question 8. En déduire que si ϕ est une formule avec une seule variable P telle que $\mathcal{K}$ réfute ϕ alors $\phi \vdash \neg\neg P \Rightarrow P$ est valide en logique intuitionniste.

Question 9. Maintenant, on suppose que ϕ possède plusieurs variables et est réfutée dans une structure de base F_2. Montrer qu'il existe alors des formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$ n'ayant que P comme variable telle que $\mathcal{K}$ réfute $\phi[P_1 := \psi_1, \ldots, P_n := \psi_n]$.

Question 10. En déduire que pour toute tautologie classique ϕ, $\mathbf{NJ_0} + R_\phi$ démontre les mêmes formules que $\mathbf{NK_0}$ si et seulement si ϕ est réfutée dans une structure de base F_2.

Question 11. En déduire que pour toutes tautologies classiques $\phi_1, \ldots, \phi_n$, $\mathbf{NJ_0}+R_{\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n}$ démontre les mêmes formules que $\mathbf{NK_0}$ si et seulement s'il existe un i tel que $\mathbf{NJ_0} + R_{\phi_i}$ démontre les mêmes formules que $\mathbf{NK_0}$.

Exercice 4. Traduction par double négation

Question 12. Montrer que pour toute formule ϕ, $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$ est valide en logique intuitioniste.

On définit l'application $X \mapsto \tilde{X}$ par :

$$\begin{array}{rr} \tilde{\top} = \top, & \tilde{\bot} = \bot, \\ \tilde{P} = \neg\neg P \text{ si } P \text{ est une variable propositionnelle,} & \widetilde{\phi \wedge \psi} = \tilde{\phi} \wedge \tilde{\psi}, \\ \widetilde{\phi \vee \psi} = \neg(\neg\tilde{\phi} \wedge \neg\tilde{\psi}), & \widetilde{\phi \Rightarrow \psi} = \tilde{\phi} \Rightarrow \tilde{\psi}, \\ \widetilde{\neg\phi} = \neg\tilde{\phi}. & \end{array}$$

On étend cette définition aux multi-ensembles par $\tilde{\Gamma} = \left\{ \tilde{\phi} \middle| \phi \in \Gamma \right\}$.

Question 13. Montrer que pour tout ϕ, $\vdash_{\mathbf{NJ_0}} \neg\neg\tilde{\phi} \Rightarrow \tilde{\phi}$

Question 14. Montrer que pour tout ϕ, $\vdash_{\mathbf{NK_0}} \tilde{\phi} \Leftrightarrow \phi$

Question 15. Montrer que $\tilde{\Gamma} \vdash \tilde{\phi}$ est prouvable dans $\mathbf{NJ_0}$ si et seulement si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans $\mathbf{NK_0}$.

Exercice 5. Élimination des multi-coupures

On considère $\mathbf{LJ_0}$ avec la règle de *m*ulti-coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \qquad \Delta, \psi^n \vdash \phi}{\Gamma, \Delta \vdash \phi}$$

où $n \in \mathbb{N}$, qui généralise la règle usuelle de *c*oupure.

Question 16. On suppose donné deux dérivations sans multi-coupures

$$\frac{\Pi}{\Gamma \vdash \psi} \qquad \frac{\Pi'}{\Delta, \psi^n \vdash \phi}$$

On considère leur multi-coupure de conclusion $\Gamma, \Delta \vdash \phi$. Montrer que par induction sur ψ, suivi d'une induction sur la somme des hauteurs de Π et Π', que l'on peut toujours transformer cette preuve pour en obtenir une sans (multi-)coupure.