TD3 - Forme clausale et Résolution

Exercice 1. Un énoncé, plusieurs preuves

Question 1. Montrer qu'il existe un ensemble de clauses E et une clause C tels qu'il existe plusieurs arbres de preuve distincts (à permutation près des fils) de $E \vdash_R C$.

Exercice 2. Arbre sémantique

Question 2. Construire l'arbre sémantique associé à

$$E = \{\neg P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_3\}$$

Question 3. E est-il satisfaisable ?

Exercice 3. Résolution *unitaire*

Définition 1. Une *clause de Horn* est une clause qui contient au plus un littéral positif.

On restreint la règle de résolution au cas où au moins l'une des prémisses est une clause constituée d'un seul littéral. Cette stratégie de résolution est dite *unitaire*.

Question 4. Montrer qu'en général cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète.

Question 5. Montrer que si l'ensemble initial E est un ensemble de clauses de Horn, la stratégie *unitaire* est réfutationnellement complète.

Exercice 4. Résolution ordonnée

On suppose que $\mathcal{P} = \{ X_i | \, i \in \mathbb{N}\}$.

On définit un ordre sur les littéraux par : $L > L'$ si la variable propositionnelle de L a un indice strictement plus grand que la variable propositionnelle de L'. On restreint alors l'application de la résolution au cas où P est un littéral maximal de $P \vee C$ et $\neg P$ est un littéral maximal de $\neg P \vee C'$.

$$\frac{P \vee C \qquad \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

De même, la règle de factorisation est restreinte au cas où L est maximal dans $L \vee C$.

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$

Question 6. Montrer qu'avec ces restrictions, l'ensemble de règles d'inférence est encore réfutationnellement complet.

Exercice 5. Résolution *input*

On restreint la règle de résolution au cas où au moins l'une des prémisses est dans l'ensemble de clauses initial. Cette stratégie de résolution est dite *input*.

Question 7. Montrer qu'en général cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète.

Question 8. Montrer que si l'ensemble initial E est un ensemble de clauses de Horn, la stratégie *input* est réfutationnellement complète.

Exercice 6. Une erreur dans le sujet de la semaine dernière

On définit $w(\phi)$ comme étant le nombre de connecteurs binaires de ϕ.

Question 9. Montrer que toute formule ϕ a une forme normale conjonctive ψ telle que :

- toute clause C de ψ est telle que $w(C) \leqslant w(\phi)$.
- le nombre de clauses de ψ est inférieur à $2^{\frac{3(w(\phi)+1)}{4}}$.

Question 10. En déduire que pour toute formule ϕ, $\tau(\phi) < |\phi| \times 2^{\frac{3|\phi|+10}{4}}$

Exercice 7. Stratégie de sélection et résolution étiquetée

Définition 2. Une fonction de sélection est une application qui associe à toute clause $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ (où $n \geqslant 1$) un sous-ensemble non-vide de $\{L_1, \ldots, L_n\}$. Étant donnée une fonction de sélection f , on considère la restriction suivante de la résolution :

$$(\mathrm{R}_f)\ \frac{P \vee C \qquad \neg P \vee C'}{C \vee C'}\ \text{Si } P \in f(P \vee C) \text{ et } \neg P \in f(\neg P \vee C')$$

La factorisation et (R_f) définissent une relation de déduction $\vdash_f$.

Question 11. Montrer que $\vdash_f$ n'est pas réfutationnellement complète.

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble fini d'entiers, appelés étiquettes. Un littéral étiqueté est une paire d'un littéral et d'un élément de $\mathcal{L}$, noté L et e. Une clause étiquetée est une disjonction de littéraux étiquetés. La sémantique d'une clause étiquetée est la même que celle de la clause à laquelle on a retiré les étiquettes. Dans cette partie, on considère les deux règles d'inférence suivantes :

$$(\mathrm{R})\ \frac{P \text{ et } e \vee C \qquad \neg P \text{ et } e' \vee C'}{C \vee C'}\ \text{Si } P \text{ et } e \in f(P \text{ et } e \vee C) \text{ et } \neg P \text{ et } e' \in f(\neg P \text{ et } e' \vee C')$$

$$(\mathrm{F})\ \frac{P \text{ et } e \vee P \text{ et } e' \vee C}{P \text{ et } e \vee C}\ \text{Si } P \text{ et } e' \in f(P \text{ et } e \vee P \text{ et } e' \vee C)$$

Soit $\geqslant$ un ordre total bien fondé sur les littéraux étiquetés. On considère la fonction de sélection suivante : $s(c)$ est l'ensemble des littéraux L et e tels que L et e est maximal dans c. On note S_e cette stratégie (paramétrée par $\geqslant$ et l'étiquetage). Les clauses sont ainsi ordonnées par l'extension multi-ensemble de $\geqslant$. Si S est un ensemble de clauses et L et a est un littéral étiqueté, on note $S(L)$ l'ensemble des clauses C ne contenant aucun littéral L et b et telles que $C \in S$ ou bien $C \vee \bar{L}$ et $b \in S$ pour au moins un b. (Autrement dit, on remplace L par $\top$ dans les clauses de S et on simplifie). Si E est un ensemble de clauses, on note de plus E^* l'ensemble des clauses déductibles de E par la stratégie S_e.

Question 12. Montrer que, si $\perp \notin E^*$, que C est une clause minimale de E et L est un littéral maximal de C, alors $\perp \notin (E^*(L))^*$

Question 13. Montrer la complétude réfutationnelle de la stratégie S_e sur les clauses étiquetées.