TD2 - Forme clausale et Résolution

Exercice 3. Mettre sous forme clausale fait grossir

Définition 2. Soit ϕ une formule, on note $|\phi|$ sa taille et $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale de ϕ.

Question 6. Montrer que pour toute formule ϕ, $\tau(\phi) < |\phi| \times 2^{\frac{|\phi|+5}{2}}$

Il s'avère que ce résultat est faux, je vous prie de bien vouloir m'en excuser.

Je vais malgré tout vous présenter ce que j'avais envisagé de faire, puis nous verrons un contre-exemple.

Pour toute formule ϕ, on définit par récurrence $w(\phi)$ comme étant :

- $w(P) = 0$ si P est une variable propositionnelle,
- $w(A \wedge B) = w(A \vee B) = w(A \rightarrow B) = w(A) + w(B) + 1$,
- $w(\neg\psi) = w(\psi)$.

w compte le nombre de connecteurs binaires.

On aurait voulu montrer que toute formule ϕ a une forme normale conjonctive ψ telle que

- toute clause C de ψ est telle que $w(C) \leqslant w(\phi)$,
- le nombre de clauses de ψ est inférieur à $2^{\frac{1+w(\phi)}{2}}$.

Toute formule ϕ aurait ainsi une forme normale conjonctive ψ telle que $w(\psi) \leqslant w(\phi) \times 2^{\frac{1+w(\phi)}{2}}$.

Remarquons tout d'abord que la mise en forme normale négative (remplacer $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ par $\neg\phi_1 \vee \phi_2$ et pousser les négations vers les variables propositionnelles : $\neg(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$, $\neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$ et $\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$) préserve le poids w des formules. On peut donc se ramener au cas où ϕ est en forme normale négative, sans perte de généralité.

On peut maintenant remarquer que, pour une formule en forme normale conjonctive ψ, $|\psi| \leqslant 2w(\psi) + 1$ (il y a $w(\psi)$ connecteurs binaires, donc $w(\psi) + 1$ variables, donc au plus autant de négation). Et que, pour toute formule ϕ, $w(\phi) \leqslant |\phi|$. On obtiendrait alors, si l'on avait bien les deux propriétés énoncées précédemment :

$$\tau(\phi) \leqslant (2w(\phi) \times 2^{\frac{1+w(\phi)}{2}}) + 1 \leqslant |\phi| \times 2^{\frac{5+|\phi|}{2}}$$

On va essayer d'obtenir ces deux propiétés par récurrence sur ϕ :

- Si ϕ est un littéral, il est en forme normale conjonctive et contient une seule clause (donc moins que $\sqrt{2}$ clauses),
- Si $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$, soit ψ_1 et ψ_2 des formes normes conjonctives de ϕ_1 et ϕ_2 respectivement : $\psi_j = \bigwedge_{i \in I_j} C_j^i$ pour $j \in \{1, 2\}$, avec d'après l'hypothèse de récurrence $|I_j| \leqslant 2^{\frac{1+w(\phi_j)}{2}}$ et

$w(C_j^i) \leqslant w(\phi_j)$. On considère alors la forme normale conjonctive suivante de ϕ :

$$\bigwedge_{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2} C_1^{i_1} \vee C_2^{i_2}$$

Elle comporte $|I_1| \times |I_2|$ clauses, ce qui est majoré par $2^{\frac{1+w(\phi_1)}{2}} \times 2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} = 2^{\frac{1+w(\phi)}{2}}$. De plus, pour tout i_1, i_2, $w(C_1^{i_1} \vee C_2^{i_2}) = w(C_1^{i_1}) + w(C_2^{i_2}) + 1 \leqslant w(\phi_1) + w(\phi_2) + 1 = w(\phi)$.

- Si $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, par hypothèse de récurrence, il existe des formes normales conjonctives ψ_1, ψ_2 de ϕ_1 et ϕ_2 respectivement dont le nombre de clauses et le poids de chaque clause satisfont les inégalités énoncées. $\psi_1 \wedge \psi_2$ est alors une forme normale conjonctive de ϕ, dont le nombre de clauses est la somme du nombre de clauses de ψ_1 et du nombre de clauses de ψ_2.
  - Si $w(\phi_1) > 0$ et $w(\phi_2) > 0$, alors par hypothèse de récurrence, le nombre de clauses de $\psi_1 \wedge \psi_2$ est majoré par $2^{\frac{1+w(\phi_1)}{2}} + 2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}}$. Ces deux nombres étant supérieur à 2, on a $2^{\frac{1+w(\phi_1)}{2}} + 2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} \leqslant 2^{\frac{1+w(\phi_1)}{2}} \times 2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} = 2^{\frac{1+w(\phi)}{2}}$,
  - Si $w(\phi_1) = 0$ et $w(\phi_2) = 0$, alors ϕ est en forme normale conjonctive et elle contient 2 clauses (soit exactement $2^{\frac{1+1}{2}}$),
  - Si $w(\phi_1) = 0$ et $w(\phi_2) \geqslant 2$, alors par hypothèse de récurrence, le nombre de clauses de $\psi_1 \wedge \psi_2$ est majoré par $2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} + 1$. Or $2^{\frac{1+w(\phi)}{2}} = 2^{\frac{2+w(\phi_2)}{2}} = \sqrt{2} \times 2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}}$, comme $w(\phi_2) \geqslant 2$, on a $2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} \geqslant 2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2}$, on en conclut $2^{\frac{1+w(\phi)}{2}} \geqslant 2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} + 1$, car $x \geqslant \sqrt{2} + 1$ implique $\sqrt{2}x \geqslant x + 1$. Par symétrie, le cas $w(\phi_1) \geqslant 2, w(\phi_2) = 0$ a bien été traité,
  - Reste le cas $w(\phi_1) = 0$ et $w(\phi_2) = 1$. Mon erreur initiale a été de croire que l'inégalité $2^{\frac{1+w(\phi)}{2}} \geqslant 2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} + 1$ était valable dans ce cas, ce qui est bien entendu faux puisque $2^{\frac{1+w(\phi)}{2}} = 2\sqrt{2}$ et $2^{\frac{1+w(\phi_2)}{2}} + 1 = 2 + 1 = 3$. Comme ϕ est en forme normale négative, elle est en forme clausale et ϕ_2 est soit une conjonction de littéraux (ϕ contient alors 3 clauses), soit une disjonction de littéraux (ϕ contient 2 clauses dans ce cas). On remarque alors que $2^{\frac{1+2}{2}} = 2\sqrt{2} < 3$, l'hypothèse d'induction est donc fausse dans ce cas-là, on ne peut pas conclure.

  Et, pour toute clause C de $\psi_1 \wedge \psi_2$, $w(C)$ est majoré par $\max\{w(\phi_1), w(\phi_2)\} < w(\phi)$.

Nous avons compris en essayant de faire la preuve par récurrence que ce qui pose problème est que l'inégalité $\sqrt{2}^n \geqslant n$ est vraie pour tous les entiers sauf 3.

Nous définissons donc $\phi_n = \bigvee_{i \in \{1 \dots n\}} (X_i \wedge Y_i \wedge Z_i)$. On a $|\phi_n| = 3n - 1$.

La forme clausale de ϕ_n est :

$$\gamma_n = \bigwedge_{S \subseteq \{1 \dots n\}} \bigwedge_{S' \subseteq S} \left(\bigvee_{i \in S'} X_i \vee \bigvee_{j \in S \setminus S'} Y_i \vee \bigvee_{k \notin S} Z_i \right)$$

On a $|\gamma_n| = n3^n - 1$ et $|\phi_n| \, 2^{\frac{|\phi_n|+5}{2}} = (3n-1) 2^{\frac{3n+4}{2}} = 12n2^{\frac{3n}{2}} - 2^{\frac{3n}{2}+2}$

On a donc $|\phi_n| \, 2^{\frac{|\phi_n|+5}{2}} = o\left(|\gamma_n|\right)$, ce qui signifie qu'il est un n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, ϕ_n ne vérifie pas l'inégalité énoncée dans la question.

Remarquons tout de même que la méthode de preuve présentée permet de montrer que $\tau(\phi) < |\phi| \, 2^{\frac{3|\phi|+10}{4}}$ ce qui est une borne plus faible que celle donnée dans l'énoncé (mais qui a l'avantage d'être juste).