TD1 - Calcul propositionnel

La notation $\rightarrow$ est associative à gauche, ce qui signifie que $A \rightarrow B \rightarrow C$ se lit $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Exercice 1.

Les formules suivantes sont-elles valides ? Sont-elles satisfaisables ?

Question 1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$

Question 2. $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Question 3. $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge P \wedge \neg(Q \rightarrow R)$

Question 4. $(P \vee Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow R)$

Question 5. $((P \rightarrow Q) \vee (\neg P \rightarrow \neg Q)) \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \neg P)$

Question 6. $\neg(P \wedge Q) \wedge R \wedge (\neg P \vee (Q \rightarrow R))$

Exercice 2. Satisfaisabilité et modèle

Soit ϕ et ψ deux formules propositionnelles.

Question 7. Montrer que ϕ est insatisfaisable si et seulement si $\neg\phi$ est valide

Question 8. Montrer que $\phi \vDash \psi$ si et seulement si $\phi \rightarrow \psi$ est valide.

Exercice 3. Tout ensemble d'interprétations est-il bon à prendre ?

Question 9. Montrer que, lorsque $\mathcal{P}$ est fini, pour tout ensemble d'interprétations S, il existe un ensemble fini de formules E tel que S est exactement l'ensemble des modèles de E.

Question 10. a Montrer que ce résultat est faux lorsque $\mathcal{P}$ est infini.

b Montrer que ce résultat est faux lorsque $\mathcal{P}$ est infini, même si l'on autorise E à être infini.

Exercice 4.

Définition 1 (Équivalence logique). Deux formules sont *logiquement équivalentes* si elles ont le même ensemble de modèles.

Question 11. Montrer que, si $\mathcal{P}$ est fini, alors dans tout ensemble de formules fini de cardinal assez grand (on explicitera la borne), il existe deux formules logiquement équivalentes.

Exercice 5.

Question 12. On considère $\mathcal{P}$ infini dénombrable. Donner un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini dénombrable.

Exercice 6. Un peu de coloriage

Question 13. Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 7. Théorème d'interpolation

Question 14. Soient ϕ, ψ telles que $\phi \vDash \psi$. Montrer qu'il existe une formule θ telle que $\phi \vDash \theta$, $\theta \vDash \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ, apparaissent aussi dans ϕ et dans ψ.

Exercice 8. Ensemble de connecteurs fonctionnellement complet

Question 15. Montrer que $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ sont définissables à l'aide du seul connecteur $\rightarrow$ et de la constante $\perp$.

On dit alors que l'ensemble $\{\rightarrow, \perp\}$ est *fonctionnellement complet*.

Question 16. Donner un connecteur logique binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

Question 17. Montrer que $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet.

Exercice 9. Ensemble maximal cohérent

Soit E un ensemble de formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$. On dira que E est maximal cohérent si E est satisfaisable et que, pour toute formule ϕ du calcul propositionnel, ou bien $\phi \in E$ ou bien $E \cup \{\phi\}$ est insatisfaisable.

Question 18. Supposons $\mathcal{P}$ fini. Montrer que tout ensemble de formules E satisfaisable est contenu dans un ensemble maximal cohérent.

Question 19. Montrer que cet ensemble maximal cohérent n'est pas unique : donner un ensemble E et deux ensembles maximaux cohérents distincts contenant E.

Question 20. Que devient le résultat de la question 18 lorsque $\mathcal{P}$ est infini dénombrable ?