TD13 - Théories axiomatiques décidables

Exercice 1. Vrai ou faux

Parmi les énoncés suivants, certains sont vrais, d'autres faux et pour certains on ne sait pas conclure. Justifier pour chacun d'entre-eux à quelle catégorie il appartient :

Question 1. Toute théorie du premier ordre est incohérente ou incomplète.

Question 2. Toute théorie complète est décidable.

Question 3. Toute théorie incohérente est décidable.

Question 4. L'arithmétique élémentaire n'a pas de modèle fini.

Question 5. Toute théorie engendrée par un sous-ensemble d'une théorie complète est elle-même récursive.

Question 6. L'intersection de deux théories décidables est décidable.

Exercice 2.

On considère la signature $\mathcal{P} = \{=\}$ et $\mathcal{F} = \{a(0), f(1), g(1)\}$ et $\mathcal{T}$ la théorie engendrée par les axiomes de l'égalité, ainsi que :

$$a = f(a) \qquad \forall x. f(g(x)) = x \wedge g(f(x)) = x$$

$$\forall x. x = f^n(x) \to x = a \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

$$\forall x_1, \dots, x_n. \exists x. x \neq x_1 \wedge \dots \wedge x \neq x_n \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

Question 7. Montrer que $\mathcal{T}$ est cohérente.

Question 8. Montrer que $\mathcal{T}$ est récursive.

Question 9. $\mathcal{T}$ est-elle complète ?

Exercice 3. Arithmétique élémentaire

Dans l'arithmétique élémentaire, on défini l'ordre strict par

$$x > y \stackrel{def}{=} \exists z.(z + y = x) \wedge \neg(x = y)$$

Question 10. Donner un modèle de l'arithmétique élémentaire dans lequel la relation d'ordre est totale mais n'est pas bien fondée.

On rappelle les axiomes de l'arithmétique élémentaire :

$$\forall x. \neg(s(x) = 0) \qquad \forall x, y. s(x) = s(y) \to x = y \qquad \forall x. x + 0 = x \qquad \forall x, y. x + s(y) = s(x + y)$$

$$\forall x. x \times 0 = 0 \qquad \forall x, y. x \times s(y) = (x \times y) + x \qquad \forall x. \neg(x = 0) \to \exists y. x = s(y)$$

Exercice 4.

On considère la signature $\mathcal{P} = \{P, Q\}$ et $\mathcal{F} = \{0, s\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble constitué des 4 axiomes :

$$
\begin{array}{ll}
P(0) & \forall x.(P(x) \leftrightarrow Q(s(x))) \\
\neg Q(0) & \forall x.(Q(x) \leftrightarrow P(s(x)))
\end{array}
$$

Question 11. Montrer que $Th(\mathcal{A})$ est incomplète.

Question 12. Montrer, par une méthode d'élimination des quantificateurs, que $Th(\mathcal{A})$ est décidable.

Exercice 5. Extrémités dans la théorie des ordres denses

On rappelle la théorie des ordres denses sans extrémités :

Égalité

$$
\begin{array}{ll}
\forall x.(x = x) & \forall x, y, z.(x = y \to y = z \to x = z) \\
\forall x, y.(x = y \to y = x) & \forall x_1, x_2, y_1, y_2.(x_1 = x_2 \to y_1 = y_2 \to x_1 < y_1 \to x_2 < y_2)
\end{array}
$$

Ordre strict

$$
\begin{array}{ll}
\forall x.\neg(x < x) & \forall x, y, z.(x < y \to y < z \to x < z)
\end{array}
$$

Ordre total | **Ordre dense**

$$
\begin{array}{ll}
\forall x, y.(x < y \lor x = y \lor y < x) & \forall x, y.\exists z.(x < y \to (x < z \land z < y))
\end{array}
$$

NoMin | **NoMax**

$$
\begin{array}{ll}
\forall x.\exists y.y < x & \forall x.\exists y.x < y
\end{array}
$$

Question 13. Montrer que si l'on remplace **NoMin** par sa négation, on obtient à nouveau une théorie décidable et complète.

Question 14. En donner deux modèles non isomorphes.

Question 15. Montrer que si l'on retire **NoMin**, la théorie engendrée reste décidable, mais est incomplète.