TD12 - Résolution du premier ordre

Exercice 1.

Question 1. Donner un modèle ou une preuve d'insatisfaisabilité par résolution pour la théorie suivante :

$$\left\{\begin{array}{cc} \forall x.p(x, f(f(x))), & \forall y.\ p(f(f(f(y))), y), \\ \forall x \forall y \forall z.\ p(x,y) \Rightarrow p(y,z) \Rightarrow p(x,z), & \forall x \forall y.\ \neg p(x,y) \vee \neg p(y,x) \end{array}\right\}$$

Exercice 2. Faire des preuves par résolution

On veut prouver $\exists x. \forall y.((U(x) \Rightarrow U(y)) \Rightarrow T(x)) \Rightarrow T(y)$

Question 2. Mettre sa négation sous forme clausale.

Question 3. Résoudre alors l'ensemble de clauses trouvé.

Question 4. Faire le même exercice sur la formule

$$\exists x. \exists y. \neg (P(x) \vee P(y) \vee Q(x,y)) \vee (P(x) \wedge P(y) \wedge \neg Q(x,y)) \vee Q(x,x)$$

Exercice 3. Disunification

On considère $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ (l'ensemble des termes clos) est infini. Soit s et t dans $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, une solution dans $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ de $s \overset{?}{\neq} t$ est une affectation σ à valeur dans $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ telle que $s\sigma \not\equiv t\sigma$.

Question 5. Soit $u \overset{?}{=} v$ un problème d'unification non-trivial ayant une seule variable. Montrer qu'il a au plus une solution.

Question 6. Soit $s_1, t_1, \dots, s_n, t_n$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.

Montrer que $\bigwedge_{i=1}^{n} s_i \overset{?}{\neq} t_i$ a une solution dans $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ si pour tout i, $s_i \not\equiv t_i$.

Exercice 4. Splitting

Soit S un ensemble de clauses. Pour toute clause C, R_C est une variable propositionnelle n'apparaissant pas dans S. Soit C et C' deux clauses.

Question 7. Montrer que si $\mathrm{Var}(C) \cap \mathrm{Var}(C') = \emptyset$, alors $S \cup \{C \vee C'\}$ est satisfaisable ssi $S \cup \{C \vee R_C, C' \vee \neg R_C\}$ est satisfaisable.

Définition 1 (Règle de Splitting).

$$C \vee C' \quad \rightsquigarrow \quad (C \vee R_C) \wedge (C' \vee \neg R_C)$$

si $\mathrm{Var}(C) \cap \mathrm{Var}(C') = \emptyset$, pour tout littéral L de C, $\mathrm{Var}(L) \neq \emptyset$, $\mathrm{Var}(C') \neq \emptyset$ et R_C est une variable propositionnelle (qui ne dépend que de C).

Exercice 5. Décidabilité du fragment monadique

Soit ϕ une formule qui ne contient que des symboles de prédicats d'arité 1 et aucun symbole de fonction. Soit ψ la forme clausale de ϕ.

Soit $\geqslant$ l'ordre sur les littéraux défini par :

- $P(f(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant Q(g(x_1, \ldots, x_m))$ si $m \leqslant n$,
- $P(f(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant Q(x_i)$,
- $P(f(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant Q$ et $P(x_i) \geqslant Q$, si Q est une variable propositionnelle.

Question 8. Montrer que dans ψ, toute fonction est appliquée a des variables distinctes.

Question 9. Soit C une clause de ψ et L_1, L_2 deux littéraux de C, montrer que l'on a $\mathrm{Var}(L_1) \cap \mathrm{Var}(L_2) = \emptyset$ ou $\mathrm{Var}(L_1) \subseteq \mathrm{Var}(L_2)$ ou $\mathrm{Var}(L_2) \subseteq \mathrm{Var}(L_1)$.

Question 10. Montrer que ces deux propriétés sont préservées par l'application d'une règle de résolution + factorisation ordonnée ou de splitting.

Question 11. En déduire que l'ensemble des formules atomiques pouvant apparaître dans des clauses dérivables par résolution + factorisation ordonnée et splitting est fini, à renommage près.

Question 12. Conclure la décidabilité de la satisfaisabilité des formules pour le fragment monadique.

Exercice 6. Locked resolution

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble fini d'entiers appelés étiquettes. Un littéral étiqueté est une paire d'un littéral et d'un élément de $\mathcal{L}$, noté L et e. Une clause étiquetée est une disjonction de littéraux étiquetés. La sémantique d'une clause étiquetée est la même que celle de la clause à laquelle on a retiré les étiquettes.

Une fonction de sélection s est une application qui associe à toute clause étiquetée C un sous-ensemble de littéraux de C.

$$\text{(R)}\ \frac{L \text{ et } e \vee C \qquad \bar{L}' \text{ et } e' \vee C'}{(C \vee C')\sigma}\ \text{Si}\ \begin{array}{l} \sigma = mgu(L, L'), \\ L \text{ et } e \in s(L \text{ et } e \vee C), \\ \bar{L}' \text{ et } e' \in s(\bar{L}' \text{ et } e' \vee C') \end{array}$$

$$\text{(F)}\ \frac{L \text{ et } e \vee L' \text{ et } e' \vee C}{(L \text{ et } e \vee C)\sigma}\ \text{Si}\ \begin{array}{l} \sigma = mgu(L, L'), \\ L' \text{ et } e' \in s(L \text{ et } e \vee L' \text{ et } e' \vee C) \end{array}$$

Soit $\geqslant$ un ordre sur les littéraux clos étiquetés. Dans tout l'exercice on considère la fonction de sélection S_e telle que $S_e(C)$ est l'ensemble des littéraux L et e tels qu'il existe une subtitution σ telle que $(L \text{ et } e)\sigma$ est maximal dans $C\sigma$.

Dans un premier temps, on ne considère que des clauses closes et étiquetées et on suppose que $\geqslant$ est un ordre total bien fondé.

À une clause $C = L_1$ et $a_1, \ldots, L_n$ et a_n on associe le multi-ensemble de littéraux étiquetés $m(C) = \{L_1 \text{ et } a_1, \ldots, L_n \text{ et } a_n\}$. Les clauses sont ainsi ordonnées par l'extension multi-ensemble de $\geqslant$.

Si S est un ensemble de clauses, et L est un littéral, on note $S(L)$ l'ensemble des clauses C ne contenant aucun littéral L et telles que $C \in S$ ou $(C \vee L \text{ et } b) \in S$ pour au moins un b. (Autrement dit, on remplace L par $\top$ dans S et on simplifie).

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses, on note de plus $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des clauses déductibles de $\mathcal{E}$ par la stratégie S_e.

Question 13. Montrer que si $\perp \notin \mathcal{E}^*$, C est une clause minimale de $\mathcal{E}^*$ et L est un littéral maximal de C, alors $\perp \notin (\mathcal{E}^*(L))^*$.

Question 14. Montrer la complétude réfutationnelle de la stratégie S_e sur les clauses closes étiquetées.

On cesse de ne considérer que des clauses closes et de supposer que $\geqslant$ est un ordre total bien fondé.

Question 15. Montrer que, pour tout ordre $\geqslant$ et tout étiquetage initial de l'ensemble de clauses, la stratégie S_e est réfutationnellement complète pour le calcul des prédicats en forme clausale.

Une clause (étiquetée) C subsume une clause (étiquetée) C' s'il existe une substitution σ et une clause C'' telles que $C' = C\sigma \vee C''$.

Soit $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses étiquetées et $\mathcal{E}'$ est un ensemble de clauses étiquetées tel que :

- pour toute clause $C \in \mathcal{E}$, il existe une clause $C' \in \mathcal{E}'$ qui subsume C,
- pour toute clause C déductible par $\mathcal{E}'$ par résolution et factorisation suivant la stratégie de sélection S_e, il existe une clause $C' \in \mathcal{E}'$ qui subsume C.

Question 16. Montrer que si $\mathcal{E}$ est insatisfaisable, alors $\mathcal{E}'$ contient la clause vide.