# TD11 - Théorème de Herbrand

## Exercice 1. Mise sous forme clausale

Mettre sous forme clausale les formules suivantes :

**Question 1.** $(\exists x, \forall y, P(x,y)) \vee \neg(\exists x, \forall y, Q(x,y))$

**Question 2.** $\forall y_1, \exists x_1, \forall y_2, \exists x_2, P(x_1,x_2) \wedge \neg P(y_1,y_2)$

**Question 3.** $(\forall x, \exists y, P(x,y)) \rightarrow (\exists x, \forall y, P(x,y))$

## Exercice 2. Restriction de modèles

Dans cet exercice, on note (comme dans le poly) $\bar{\mathcal{F}}$ la signature $\mathcal{F}$ enrichi avec les symboles de fonction liés à la skolémisation.

Soit $\mathcal{S}'$ une $(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{P})$-structure. Soit $\phi$ une $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$-formule et $\sigma$ une affectation telle que $Dom(\sigma) \supseteq$ VL$(\phi)$.

**Question 4.** Montrer que si $\phi$ est en forme normale négative, alors $\mathcal{S}', \sigma \vDash \mathrm{Sk}(\phi)$ implique $\mathcal{S}' \mid_{\mathcal{F}}, \sigma \vDash \phi$.

**Question 5.** Montrer que ce résultat n'est plus vrai si $\phi$ n'est pas en forme normale négative.

**Question 6.** Montrer que la réciproque est fausse.

## Exercice 3. Construction d'un modèle de Herbrand

Soit $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{R(2)\}$ et $S$ l'ensemble des 2 formules :

$$\forall x, \exists y, R(x,y) \qquad \exists x, \forall y, (R(x,y) \rightarrow \exists z, (R(x,z) \wedge \neg R(z,y)))$$

**Question 7.** Construire un $\mathcal{F}'$ et une $\mathcal{F}', \mathcal{P}$-structure de Herbrand qui est un modèle de $S$.

## Exercice 4.

**Question 8.** Donner un exemple de formule satisfaisable qui n'a pas de modèle fini et qui n'a pas de modèle de Herbrand.

## Exercice 5.

**Question 9.** Donner un ensemble $S$ de formules du premier ordre (sur un alphabet fini) tel que tout sous-ensemble fini de $S$ a un modèle fini, mais $S$ n'a pas de modèle fini.

## Exercice 6.

**Question 10.** Montrer qu'un ensemble de clauses de Horn satisfaisable possède un plus petit modèle de Herbrand.

## Exercice 7.

On suppose que $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P}$ contient un nombre fini de prédicats binaires.

**Question 11.** Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : un ensemble fini $S$ de formules purement universelles,

Question : $S$ est-il satisfaisable ?

## Exercice 8. Arithmétique élémentaire

On prend $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{= (2)\}$. On considère la théorie $\mathcal{A}_{elem}$ formée des axiomes de l'égalité et des 5 formules suivantes :

$$\forall x, 0 + x = x \qquad \forall x, s(x) + y = s(x + y) \qquad \forall x, \neg s(x) = 0$$
$$\forall x, \forall y, s(x) = s(y) \rightarrow x = y \qquad \forall x, (x = 0 \lor \exists y, x = s(y))$$

**Question 12.** Donner un modèle $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}_{elem}$ dans lequel l'addition n'est pas commutative.

**Question 13.** Donner un modèle ayant la même propriété dans le cas où l'on ajoute $\{\times(2)\}$ à $\mathcal{P}$ les deux formules définissant la multiplication :

$$\forall x, 0 \times x = 0 \qquad \forall x, \forall y, s(x) \times y = (x \times y) + y$$