École normale supérieure de Paris-Saclay
L3 – Logique – Second devoir à la maison

Élimination des coupures en calcul des séquents

Les règles du calcul des séquents sont rappelée en Annexe. Le *calcul des séquents sans coupure* est le système formé des règles du calcul des séquents, sauf la règle *coupure*. De manière évidente, si un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure, il a une démonstration dans le calcul des séquents.

Pour montrer la réciproque, deux voies sont possibles. La première consiste à montrer la correction du calcul des séquents et la complétude du calcul des séquents sans coupure, ainsi on montre que, si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration dans le calcul des séquents, alors il est valide dans tous les modèles et il a donc une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure. Une seconde consiste à éliminer les coupures peu à peu en les remplaçant par des coupures sur des propositions plus petites, c'est-à-dire à construire progressivement une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$, à partir de deux démonstrations, dans ce même système, de $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma, A \vdash \Delta$.

On montre, plus généralement, que si les séquents $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et $\Gamma' \vdash A^m, \Delta'$ ont des démonstrations π et π' dans le calcul des séquents sans coupure, alors c'est aussi le cas du séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$. La démonstration procède par une récurrence double, d'abord sur le nombre de connecteurs et quantificateurs de la proposition A, puis sur la somme des tailles des démonstrations π et π'.

1. Montrer, en utilisant les hypothèses de récurrence, que si la proposition A a la forme $B \wedge C$, la démonstration π la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho}{\Gamma, A^{n-1}, B, C \vdash \Delta}}{\Gamma, A^{n-1}, B \wedge C \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

et la démonstration π' la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'_1}{\Gamma' \vdash B, A^{m-1}, \Delta'} \quad \dfrac{\rho'_2}{\Gamma' \vdash C, A^{m-1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash B \wedge C, A^{m-1}, \Delta'}\ \wedge\text{-droite}$$

alors les séquents $\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'$, $\Gamma, \Gamma' \vdash C, \Delta, \Delta'$ et $\Gamma, \Gamma', B, C \vdash \Delta, \Delta'$ ont une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure. En déduire c'est également le cas des séquents $\Gamma, \Gamma', C \vdash \Delta, \Delta'$ et $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

2. Montrer que si la proposition A a la forme $B \vee C$, la démonstration π la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho_1}{\Gamma, A^{n-1}, B \vdash \Delta} \quad \dfrac{\rho_2}{\Gamma, A^{n-1}, C \vdash \Delta}}{\Gamma, A^{n-1}, B \vee C \vdash \Delta}\ \vee\text{-gauche}$$

et la démonstration π' la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'}{\Gamma' \vdash B, C, A^{m-1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash B \vee C, A^{m-1}, \Delta'} \vee\text{-droite}$$

alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

3. Montrer que si la proposition A a la forme $B \Rightarrow C$, la démonstration π la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho_1}{\Gamma, A^{n-1} \vdash B, \Delta} \quad \dfrac{\rho_2}{\Gamma, A^{n-1}, C \vdash \Delta}}{\Gamma, A^{n-1}, B \Rightarrow C \vdash \Delta} \Rightarrow\text{-gauche}$$

et la démonstration π' la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'}{\Gamma', B \vdash C, A^{m-1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash B \Rightarrow C, A^{m-1}, \Delta'} \Rightarrow\text{-droite}$$

alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

4. Montrer que si la proposition A a la forme $\neg B$, la démonstration π la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho}{\Gamma, A^{n-1} \vdash B, \Delta}}{\Gamma, A^{n-1}, \neg B \vdash \Delta} \neg\text{-gauche}$$

et la démonstration π' la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'}{\Gamma', B \vdash A^{m-1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash \neg B, A^{m-1}, \Delta'} \neg\text{-droite}$$

alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

5. Montrer que si la proposition A a la forme $\forall x\ B$, la démonstration π la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho}{\Gamma, A^{n-1}, (t/x)B \vdash \Delta}}{\Gamma, A^{n-1}, \forall x\ B \vdash \Delta} \forall\text{-gauche}$$

et le démonstration π' la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'}{\Gamma' \vdash B, A^{m-1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash \forall x\ B, A^{m-1}, \Delta'} \forall\text{-droite}$$

alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

6. Montrer que si la proposition A a la forme $\exists x\ B$, la démonstration π la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho}{\Gamma, A^{n-1}, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A^{n-1}, \exists x\ B \vdash \Delta}\ \exists\text{-gauche}$$

et la démonstration π' la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'}{\Gamma' \vdash (t/x)B, A^{m-1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash \exists x\ B, A^{m-1}, \Delta'}\ \exists\text{-droite}$$

alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

7. Montrer que si la dernière règle de π est une règle logique sur la proposition A et celle de π' une contraction sur la proposition A, alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

8. Montrer que si la dernière règle de π est une contraction sur la proposition A et celle de π' une règle logique sur la proposition A, alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

9. (Admissibilité de la règles d'affaiblissement) Montrer, de manière générale, que si un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure, alors c'est également le cas des séquents $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$.

10. Montrer que si la dernière règle de la démonstration π est la règle *axiome*, alors le multiensemble Δ contient la proposition A. Montrer que le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash A^m, \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure. Montrer que c'est également le cas du séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

11. Montrer que si la dernière règle de la démonstration π' est la règle *axiome*, alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

12. Montrer que si les dernières règles des démonstrations π et π' concernent la proposition A, alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

13. On considère, dans un second temps, les cas dans lesquels la dernière règle de π ou celle de π' concerne une autre proposition que A. Par exemple, si la dernière règle de π est la règle $\wedge$-gauche, alors $\Gamma = \Gamma_1, B \wedge C$ et π a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho}{\Gamma_1, A^n, B, C \vdash \Delta}}{\Gamma_1, A^n, B \wedge C \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

Montrer que, le séquent $\Gamma_1, \Gamma', B, C \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupre. En déduire que c'est également le cas du séquent $\Gamma_1, \Gamma', B \wedge C \vdash \Delta, \Delta'$, c'est-à-dire $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

14. Admettre que la démonstration précédente se généralise à tous les cas dans lesquels la dernière règle de π ou celle de π' concerne une autre proposition que A. Combien y a-t-il de cas à considérer ?
15. Conclure que si les séquents $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et $\Gamma' \vdash A^m, \Delta'$ ont des démonstrations dans le calcul des séquents sans coupure, alors c'est aussi le cas du séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.
16. Montrer que si les séquents $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma' \vdash A, \Delta'$ ont des démonstrations dans le calcul des séquents sans coupure, alors c'est aussi le cas du séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.
17. Montrer que si les séquents $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$ sont démontrables dans le calcul des séquents sans coupure, alors c'est aussi le cas du séquent $\Gamma \vdash \Delta$.
18. Montrer que si un séquent a une démonstration dans le calcul des séquents alors il a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.
19. Montrer que le séquent $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$ n'a pas de démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.
20. Montrer que le séquent $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$ n'a pas de démonstration dans le calcul des séquents.

Les règles du calcul des séquents

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \text{ axiome}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ coupure}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ contraction-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ contraction-droite}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top\text{-droite}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta} \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, (t/x)A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A \vdash \Delta} \forall\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ A, \Delta} \forall\text{-droite } x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A \vdash \Delta} \exists\text{-gauche } x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)A, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A, \Delta} \exists\text{-droite}$$