Devoir de logique.

L'objet du problème est l'étude de logiques de "connaissances" utilisées notamment en intelligence artificielle.

Pour introduire le sujet, rappelons le casse-tête très connu sous le nom "les cocus de Bagdad". On suppose que, sur une île peuplée de n personnes, k d'entre elles sont atteintes d'une maladie, sans le savoir. En revanche, chacune a connaissance du statut (malade ou non) des autres personnes que lui-même. Chaque soir un bateau quitte l'île pour emmener les personnes qui se savent malades à l'hopital. En supposant $k > 0$, que personne ne communique sur les maladies et que chacun raisonne parfaitement, personne ne prend le bateau jusqu'au $k$ième jour, et ce ce jour là k personnes prennent le bateau.

Syntaxe

Les formules sont construites sur un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}$, $\bot, \top$, un ensemble fini de modalités $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n$ (les "connaissances des agents" $1, \ldots, n$) et les connecteurs habituels du calcul propositionnel. L'ensemble des formules $\mathcal{F}$ est le plus petit ensemble tel que:

- Si $P \in \mathcal{P}$, P est une formule
- $\bot, \top$ sont des formules
- Si ϕ est une formule, $\mathbf{K}_1\phi, \ldots, \mathbf{K}_n\phi$ sont des formules.
- Si ϕ, ψ sont des formules, $\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi, \phi \to \psi, \neg\phi$ sont des formules.

Un jugement est une expression $\Gamma \Rightarrow \phi$ où Γ est un ensemble fini de formules et ϕ est une formule.

Sémantique

Une *structure de Kripke* $\mathcal{S}$ est (dans ce contexte) un ensemble, muni de n relations d'équivalences $=_1, \ldots, =_n$, et d'une applications I de $\mathcal{S}$ dans $2^{\mathcal{P}}$. (Intuitivement, $=_i$ formalise l'indistinguabilité de deux interprétations par un agent i).

La relation de satisfaction (dans $\mathcal{S}$) est la relation $\models_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{F}$ définie par récurrence sur la formule:

- pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \top$ et $\alpha \not\models_{\mathcal{S}} \bot$
- $\alpha \models_{\mathcal{S}} P$ ssi $P \in I(\alpha)$
- $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi \wedge \psi$ ssi $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$ et $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$
- ...
- $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\phi$ ssi, pour tout $\alpha =_i \beta$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \phi$.

$\mathcal{S} \models \Gamma \Rightarrow \phi$ ssi, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$ tel que, pour tout $\psi \in \Gamma$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$, alors $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$.

Un jugement $\Gamma \Rightarrow \phi$ est valide si pour toute structure de Kripke $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \models \Gamma \Rightarrow \phi$.

Question 1

Parmi les jugements suivants, lesquels sont valides (ϕ, ψ sont des formules arbitraires) ? Justifier.

1. $\Rightarrow \mathbf{K}_i \top$
2. $\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$
3. $\mathbf{K}_i\phi \Rightarrow \phi$
4. $\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i\phi$
5. $\Rightarrow \mathbf{K}_i\phi \vee \mathbf{K}_i\neg\phi$
6. $\mathbf{K}_i\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i \mathbf{K}_i\phi$
7. $\mathbf{K}_i\phi, \mathbf{K}_i\psi \Rightarrow \mathbf{K}_i(\phi \wedge \psi)$
8. $\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j\phi \Rightarrow \mathbf{K}_j \mathbf{K}_i\phi$
9. $\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i\neg \mathbf{K}_i\neg\phi$
10. $\neg \mathbf{K}_i\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i\neg \mathbf{K}_i\phi$
11. $\mathbf{K}_i(\phi \vee \mathbf{K}_i\psi \vee \neg \mathbf{K}_i\theta) \Rightarrow \mathbf{K}_i\phi \vee \mathbf{K}_i\psi \vee \neg \mathbf{K}_i\theta$

Question 2

On ajoute aux règles de déduction naturelle les axiomes 3, 6, 10 ci-dessus ainsi que les règles d'inférence (pour $m \geq 0$ et $i = 1, \ldots, n$):

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_m \Rightarrow \psi}{\mathbf{K}_i\phi_1, \ldots, \mathbf{K}_i\phi_m \Rightarrow \mathbf{K}_i\psi}\ KI$$

1. Montrer que les jugements valides de la question 1 sont prouvables dans ce système
2. Montrer que le système d'inférence est correct

Question 3

L'objet de la question est de montrer la complétude du système d'inférence précédent pour la sémantique de Kripke.

Si Γ est un ensemble de formules, on note Γ^* l'ensemble des formules ϕ telles qu'il existe un sous-ensemble fini $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tel que $\Gamma_0 \Rightarrow \phi$ est dérivable dans notre système d'inférence. Un ensemble de formules Γ est *incohérent* si $\bot \in \Gamma^*$. Il est *maximal cohérent* si $\bot \notin \Gamma$ et, pour toute formule $\phi \notin \Gamma$, $\bot \in (\Gamma \cup \{\phi\})^*$.

1. On suppose que Γ est fini et cohérent et $\Gamma \Rightarrow \phi$ est non dérivable.
   (a) Montrer qu'il existe un ensemble Γ' maximal cohérent contenant Γ et $\neg\phi$

(b) On considère la structure de Kripke $\mathcal{S}$ des ensembles maximaux cohérents de formules, muni des relations d'équivalence $\Delta =_i \Theta$ ssi $\{ \mathbf{K}_i\phi,\ \mathbf{K}_i\phi \in \Delta\} = \{ \mathbf{K}_i\phi,\ \mathbf{K}_i\phi \in \Theta\}$ et de la valuation $I(\Delta) = \mathcal{P} \cap \Delta$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$ et toute formule ψ, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$ si et seulement si $\psi \in \alpha$.

(c) Montrer que $\mathcal{S} \not\models \Gamma \Rightarrow \phi$

2. Montrer la complétude du sytème d'inférence.

3. L'axiome 3 est il nécessaire à la complétude ?

Question 4

Dans cette question, on suppose que $n = 1$ et on omettra donc l'indice des modalités $\mathbf{K}$.

1. Montrer que, pour toutes formules $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m$

$$\mathbf{K}\phi_1, \ldots,\ \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow\ \mathbf{K}\psi_1 \vee \ldots \vee\ \mathbf{K}\psi_m$$

est valide si et seulement s'il existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\mathbf{K}\phi_1, \ldots,\ \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow \psi_i$ est valide.

2. On note $\widetilde{\mathbf{K}}\phi$ la formule $\neg\ \mathbf{K}\neg\phi$. Si Γ est un ensemble fini de formules, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \Gamma$ ssi, pour toute formule $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \gamma$.

   Montrer que, étant donné un ensemble fini de formules Γ, on peut calculer en temps linéaire un ensemble Γ' de formules (qui peuvent contenir $\widetilde{\mathbf{K}}$), tel que

   - pour toute structure de Kripke $\mathcal{S}$ et tout $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \Gamma$ ssi $\alpha \models_{\mathcal{S}} \Gamma'$.
   - Γ' ne contient pas $\rightarrow$ et les négations n'apparaissent que devant les variables propositionnelles
   - Si $\mathbf{K}\phi$ est une sous formule de Γ', alors ϕ ne contient ni $\mathbf{K}$, ni $\widetilde{\mathbf{K}}$.

3. Montrer la propriété de petit modèle suivante: si $\Gamma \Rightarrow \phi$ n'est pas valide, alors il existe une structure de Kripke $\mathcal{S}$ et $\alpha \in \mathcal{S}$ tels que

   - $\alpha \not\models_{\mathcal{S}} \phi$,
   - pour tout $\psi \in \Gamma$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$
   - Le cardinal de $\mathcal{S}$ est linéaire dans la taille de Γ, ϕ.

4. Montrer que le problème de validité d'un jugement est co-NP complet.

On peut poser beaucoup d'autres questions (ce que nous ne faisons pas ici) comme la généralisation de la question 4 à un nombre arbitraire d'agents (le problème devient PSPACE-complet), l'ajout d'une modalité de "connaissance commune", avec les règles correspondantes, la formalisation des problèmes du type de celui des cocus de Bagdad,...