

TD8 - Recherche de preuves

Exercice 1. Unification

Réduire les problèmes d'unification suivants :

Question 1. $f(x, g(a, y)) \stackrel{?}{=} f(h(y), g(y, a)) \wedge g(x, h(y)) \stackrel{?}{=} g(z, z)$

Question 2. $f(x, x) \stackrel{?}{=} f(g(y), z) \wedge h(z) \stackrel{?}{=} h(y)$;

Question 3. $f(x, a) \stackrel{?}{=} f(b, y) \wedge f(x) \stackrel{?}{=} f(y)$.

Question 4. $z \stackrel{?}{=} g(f(x, y)) \wedge f(f(x, y), y) \stackrel{?}{=} f(z, y)$

Question 5. $x \stackrel{?}{=} f(y, y) \wedge y \stackrel{?}{=} f(z, z) \wedge z \stackrel{?}{=} f(w, w)$

Exercice 2. Chercher des preuves

Démontrer en calcul des séquents classique les jugements suivants. On s'intéressera tout particulièrement à identifier les choix "arborescents" tels que la mauvaise décision mène à un séquent indémontrable.

Question 6. $\vdash \neg \exists x. \forall y. (y \in x \Leftrightarrow \neg(y \in y))$

Question 7. $\vdash \exists x. (P(x) \Rightarrow P(f(x)))$

Question 8. $\vdash (\forall x. P(x)) \vee (\exists y. \neg P(y))$

Question 9. $\forall x. (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x. P(x)$

Question 10. $\vdash \exists x. (P(x) \Rightarrow P(0))$

Exercice 3. Permutons les règles - partie 1

On considère une démonstration dont les deux premières règles s'appliquent à des propositions distinctes :

$$\frac{-R}{-R'} \quad \text{ou} \quad \frac{-R \quad -R}{R'}$$

(Dans le cas de droite, la règle R s'applique 2 fois à la même proposition).

Question 11. Montrer que si R et R' sont des règles portant sur les connecteurs propositionnels, elles commutent (à contraction éventuelle près).

Question 12. Montrer que la contraction peut passer "au dessus" de toutes les règles portant sur les connecteurs propositionnels.

Exercice 4. Réversibilité des règles

Question 13. Identifier les règles dont prémisses et conclusion ne sont pas équiprouvables.

Exercice 5. Permutons les règles - partie 2

Question 14. Montrer qu'il n'est pas toujours possible de commuter contraction et règle non-réversible.

Question 15. Montrer qu'il n'est pas toujours possible de commuter une règle portant sur un quantificateur avec une règle non-réversible.

Question 16. Montrer que lors de l'application de deux règles de quantification portant sur des propositions différentes, les règles ayant une condition de non-liberté peuvent toujours passer "en dessous".

Question 17. Remarquer que les permutations mises en évidence aux questions précédentes donnent un algorithme de recherche de preuves.