TD6 - Exemples de théories

Dans tout le TD, les symboles d'égalité sont munis des axiomes suivant, où A est une formule dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, z$:

$$\forall x. x = x$$
$$\forall x. \forall y. \left(x = y \Rightarrow A\left[{}^{x}/_{z}\right] \Rightarrow A\left[{}^{y}/_{z}\right]\right)$$

Exercice 1. Les trois définitions de contradictoire

Trois définitions de ce qu'est une *théorie contradictoire* ont été données hier en cours :
T est contradictoire si

- il existe A telle que A et $\neg A$ sont démontrables dans T ;
- $\perp$ est démontrable dans T ;
- toute proposition est démontrable dans T.

Question 1. Montrer que ces 3 définitions sont équivalentes.

Exercice 2. Arithmétique

Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. On considère la théorie PA constituée des axiomes de l'égalité, des 7 formules de l'arithmétique élémentaire.

$$\forall x. \exists y. x = 0 \vee x = s(y)$$
$$\forall x. s(x) \neq 0$$
$$\forall x, y. s(x) = s(y) \rightarrow x = y$$
$$\forall x. 0 + x = x$$
$$\forall x, y. s(x) + y = s(x + y)$$
$$\forall x. 0 \times x = 0$$
$$\forall x, y. s(x) \times y = (x \times y) + y$$

Et du schéma d'axiomes suivant, où A est une formule dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, z$:

$$\forall x_1. \ldots \forall x_n. A\left[{}^{0}/_{z}\right] \Rightarrow \forall y. \left(A\left[{}^{y}/_{z}\right] \Rightarrow A\left[{}^{s(y)}/_{z}\right]\right) \Rightarrow \forall y. A\left[{}^{y}/_{z}\right]$$

Question 2. Montrer la commutativité de la multiplication (on se contentera d'identifier les propriétés de l'addition et de l'égalité que l'on utilise, sans les redémontrer).

Exercice 3. Théorie des ensembles sans infini

On s'intéresse aux axiomes de ZF suivants :

- Extensionalité $\forall x.\forall y.(\forall z.(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$
- Paire $\forall x.\forall y.\exists z.\forall w.(w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$
- Réunion $\forall x.\exists z.\forall w.(w \in z \Leftrightarrow (\exists v.(w \in v \wedge v \in x)))$
- Parties $\forall x.\exists z.\forall w.(w \in z \Leftrightarrow (\forall v.(v \in w \Rightarrow v \in x)))$

Et au schéma de compréhension, où A est une formule dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, w$:

$$\forall x_1. \ldots \forall x_n.\forall x.\exists z.\forall w.(w \in z \Leftrightarrow (w \in x \wedge A))$$

Question 3. Montrer que sans l'axiome de l'infini

$$\exists n.(\exists v.(\forall x.\neg(x \in v)) \wedge (v \in n)) \wedge (\forall y.(y \in n \Rightarrow (\exists t.(\forall x.(x \in t \Leftrightarrow (x = y \vee x \in y)) \wedge t \in n)))$$

qui dit qu'il existe un ensemble N tel que $\emptyset \in N$ et pour tout $x \in N$, on a $x \cup \{x\} \in N$, il est possible de construire un modèle de ces axiomes de ZF dont tous les éléments sont des ensembles finis.

Exercice 4. Théorie des types

On s'intéresse au langage $\mathcal{S} = \{\iota, \iota \to \iota, \iota \to \iota \to \iota\}$, $\mathcal{F} = \left\{\alpha_\iota(\iota \to \iota, \iota, \iota), \alpha_{(\iota\to\iota)}(\iota \to \iota \to \iota, \iota, \iota \to \iota)\right\}$ et $\mathcal{P} = \left\{=_\iota (\iota, \iota), =_{(\iota\to\iota)} (\iota \to \iota, \iota \to \iota)\right\}$. On s'intéresse à la théorie des types suivantes :

- Extensionalité : $\forall f^{\iota\to\iota}.\forall g^{\iota\to\iota}.((\forall x^\iota.(\alpha_\iota(f, x) =_\iota \alpha_\iota(g, x))) \Rightarrow (f =_{\iota\to\iota} g))$
- Schéma de compréhension unaire au niveau objet : pour tout A dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_m, x$,
$$\forall x_1. \ldots \forall x_n.\exists f^{\iota\to\iota}.\forall x^\iota.\alpha_\iota(f, x) =_\iota A$$
- Schéma de compréhension unaire au niveau fonctionnel : pour tout A dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_m, x$,
$$\forall x_1. \ldots \forall x_n.\exists F^{\iota\to\iota\to\iota}.\forall x^\iota.\alpha_{\iota\to\iota}(F, x) =_{\iota\to\iota} A$$

Question 4. Montrer que $\exists g^{\iota\to\iota\to\iota}.\forall x^\iota.\forall y^\iota.\alpha_\iota(\alpha_{\iota\to\iota}(g, x), y) =_\iota x$ ne peut être démontré dans cette théorie des types.

Question 5. Montrer que les schémas de compréhension unaires et binaire n'entraînent pas l'extensionalité